TALLER 2
CADENAS DE MARKOV

CRISTIAN ARIAS
ANTONIO ANAYA
OSCAR RODRIGUEZ

PhD. DELIMIRO VISBAL CADAVID

INVESTIGACION DE OPERACIONES II

UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA
PROGRAMA DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Santa Marta, 7 de mayo de 2020

6. Una compañía tiene dos máquinas. Durante cualquier día, cada máquina que está trabajando al comienzo del día tiene una probabilidad de 1/3 de descomponerse. Si durante el día se descompone una máquina, se envía a la instalación de reparación y estará funcionando dos días después de que se descompuso. (Así, si una máquina se descompone en el día 3, estará funcionando el día. Haciendo que el estado del sistema sea el número de máquinas que funcionan al principio del día,

a) Formule una matriz de probabilidad de transición para esta situación.

b) Determine si la Cadena de Markov es Ergódica, de ser así calcule las Probabilidades de Estado Estable y los Tiempos Promedio de Primer Paso

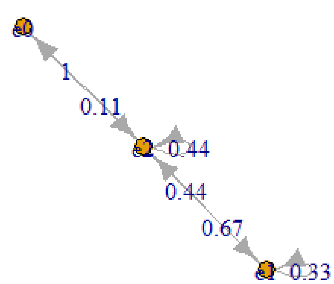
a.)

Matrix de Probabilidad

Estados:
E0= 1 máquinas funcionando.
E1= 2 máquina descompuestas
E2= 2 máquinas funcionando dos días después de descompuesta.

```
Cadena Markov Maquinas
 A  3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 e0, e1, e2
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
          e0        e1        e2
e0 0.0000000 0.0000000 1.0000000
e1 0.0000000 0.3333333 0.6666667
e2 0.1111111 0.4444444 0.4444444
```

Diagrama de Transición



b.)

```
> ergodica<-is.irreducible(mch_1)
> ergodica
[1] TRUE
```

```
> esrecurrente<-recurrentClasses(markov1)
> esrecurrente
[[1]]
[1] "e0" "e1" "e2"

> aperiodica<-period(markov1)
> aperiodica
[1] 1
> comunica<-communicatingClasses(markov1)
> comunica
[[1]]
[1] "e0" "e1" "e2"
```

```
> ee<-steadyStates(markov1)
> ee
         e0    e1     e2
[1,] 0.0625 0.375 0.5625
> pp<-meanFirstPassageTime(markov1)
> pp
     e0  e1  e2
e0  0.0 3.5 1.0
e1 16.5 0.0 1.5
e2 15.0 2.5 0.0
> eab<-absorbingStates(markov1)
> eab
character(0)
```

Las probabilidades de estado estable al iniciar el día son del 6.25% para el estado 0. 37.5% para el estado 1, y 56.25% para el estado 2.

En promedio pasaran 16.5 días para que pase del estado e1(2 maquinas descompuestas), al estado e2 (2 máquinas funcionando 2 días después de descompuesta)

7. El cobro que la compañía de seguros Payoff hace a un cliente es de acuerdo con sus antecedentes. A un cliente que no tuvo accidentes durante los dos últimos años, se le cobra una prima anual de 100 dólares. Al cliente que tuvo un accidente durante cada uno de los dos últimos años, se le cobra una prima anual de USD$ 400. A un cliente que tuvo un accidente solo uno de los dos últimos años, se le cobra una prima anual de USD$ 300. Un cliente que tuvo un accidente durante el último año, tiene una probabilidad de 10% de tener un accidente durante el este año. Si un cliente no ha tenido un accidente durante el último año, tiene una probabilidad de 3% de sufrir un accidente durante este año.

a) Formule una matriz de probabilidad de transición para esta situación. (Sugerencia: En caso de dificultad, intente con una cadena de Markov de cuatro estados).

b) Durante un año dado ¿Cuál la prima que paga en promedio un cliente de Payoff?

c) Determine si la Cadena de Markov es Ergódica, de ser así calcule las Probabilidades de Estado Estable y los Tiempos Promedio de Primer Paso.

d) Es la Cadena de Markov absorbente?

a. Matriz de Transición

E1 = no ha tenido accidentes en los últimos 2 años

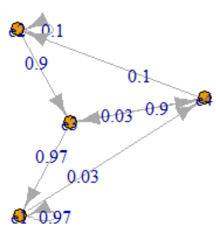
E2 = ha tenido accidentes en cada uno de los últimos 2 años

E3 = tuvo un accidente en el primero de los 2 últimos años

E4 = tuvo un accidente en el segundo de los 2 últimos años

```
Unnamed Markov chain
 A  4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 e1, e2, e3, e4
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
     e1  e2  e3   e4
e1 0.97 0.0 0.0 0.03
e2 0.00 0.1 0.9 0.00
e3 0.97 0.0 0.0 0.03
e4 0.00 0.1 0.9 0.00
```

Diagrama de Transición



b.

```
> estadoestable<-steadyStates(markov7)
> estadoestable
            e1          e2         e3         e4
[1,] 0.9387097 0.003225806 0.02903226 0.02903226
```

Para un cliente sin accidentes 100*0.9387097= 94.00 USD

Para un cliente con accidentes en los dos años 400*0.003225806= 1.29 USD

Para un cliente con accidente en el primer año=300*0.02903226=8.70 USD

Para un cliente con accidente en el último año= 300*0.02903226=8.70 USD

Total prima= 112.55 USD

c.

```
> esergodica<-is.irreducible(markov7)
> esergodica
[1] TRUE
> esrecurrente<-recurrentClasses(markov7)
> esrecurrente
[[1]]
[1] "e1" "e2" "e3" "e4"

> aperiodica<-period(markov7)
> aperiodica
[1] 1
> comunica<-communicatingClasses(markov7)
> comunica
[[1]]
[1] "e1" "e2" "e3" "e4"
```

Probabilidades de Estado Estable

```
> estadoestable<-steadyStates(markov7)
> estadoestable
            e1          e2         e3         e4
[1,] 0.9387097 0.003225806 0.02903226 0.02903226
```

Tiempos promedio primer paso

```
         e1       e2        e3       e4
e1 0.000000 343.3333 34.444444 33.33333
e2 2.176403   0.0000  1.111111 34.44444
e3 1.065292 343.3333  0.000000 33.33333
e4 2.176403 310.0000  1.111111  0.00000
```

Las probabilidades de estado estable durante los dos últimos años son del 93.87% para que un cliente no tenga accidentes en los próximos dos años.

Las probabilidades de estado estable son de 0.03% para que un cliente tenga un accidente en cada uno de los dos años.

Las probabilidades de estado estable son de 0.03% para que un cliente tenga un accidente en el primero de los dos últimos años.

Las probabilidades de estado estable son de 0.03% para que un cliente tenga un accidente en el segundo de los dos últimos años.

Respecto a los dos últimos años en promedio pasarán 2.17, 1.06 y 2.17 años para que un cliente sin accidentes pase a tener uno en cada uno, uno el primero y uno el ultimo, respectivamente.

Pasarán 34.44, 1.11 y 1.11 años para que un cliente con un accidente el primero pase a no tener accidentes, a tener uno en cada uno y uno el último, respectivamente

Pasaran 33.33, 34.44, 33.33 años para que un cliente con un accidente en el último, pase a no tener accidentes, a tener uno en cada uno y uno el último.

d. No es absorbente

```
> eab<-absorbingStates(markov7)
> eab
character(0)
```

8. Una computadora se inspecciona cada hora. Se encuentra que está trabajando o que está descompuesta. En el primer caso, la probabilidad de que siga así la siguiente hora es de 0,95. Si está descompuesta, se repara, lo que puede llevar más de una hora. Siempre que la computadora esté descompuesta (sin importar cuánto tiempo pase), la probabilidad de que siga descompuesta una hora más es de 0,50.

a) Construya la matriz de transición de un paso de esta cadena de Markov.

b) Si ahora está trabajando, ¿Cuál es la probabilidad de que en 4 hrs siga trabajando?

c) Determine si la Cadena de Markov es Ergódica, de ser así calcule las Probabilidades de Estado Estable y los Tiempos Promedio de Primer Paso.

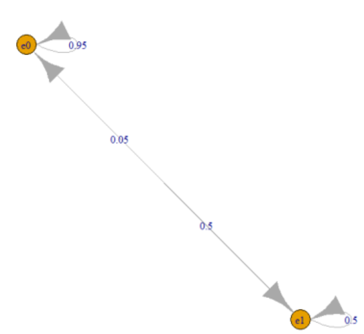
a. Matriz de Transición

E0=computadora trabajando

E1=computadora descompuesta

```
Unnamed Markov chain
 A  2 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 e0, e1
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
     e0   e1
e0 0.95 0.05
e1 0.50 0.50
```

Diagrama de Transición



b.

```
Unnamed Markov chain^4
 A  2 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 e0, e1
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
          e0         e1
e0 0.9128187 0.08718125
e1 0.8718125 0.12818750
```

Si ahora esta trabajando, la probabilidad de que siga trabajando es del 12,81%

c.

```
> ergodica<-is.irreducible(markov8)
> ergodica
[1] TRUE
>
> esrecurrente<-recurrentClasses(markov8)
> esrecurrente
[[1]]
[1] "e0" "e1"

> aperiodica<-period(markov8)
> aperiodica
[1] 1
> comunica<-communicatingClasses(markov8)
> comunica
[[1]]
[1] "e0" "e1"

> estadoestable
            e0         e1
[1,] 0.9090909 0.09090909

> estadoestable<-steadyStates(markov8)
> estadoestable
            e0         e1
[1,] 0.9090909 0.09090909
>
> #Tiempo promedio de primer paso
>
> pp<-meanFirstPassageTime(markov8)
> pp
   e0 e1
e0  0 20
e1  2  0
```

Las probabilidades de Estado Estable para el E0=Computadora Trabajando es de 91% y de 9% para el E1=Computadora descompuesta.

Pasarán 20 horas para que la computadora mientras está descompuesta sea arreglada y 2 horas para que la computadora mientras trabaja se descomponga.

9. El departamento de mantenimiento de una empresa da servicio a tres departamentos (A, B y C), sujeto a ciertas restricciones. Nunca se da servicio al mismo departamento en días seguidos. Si se atiende al departamento A, entonces al día siguiente se atiende al B. Sin embargo, si se atiende a uno de los departamentos B o C, entonces el día siguiente se tiene doble probabilidad de atender a A, que de atender a otro departamento.

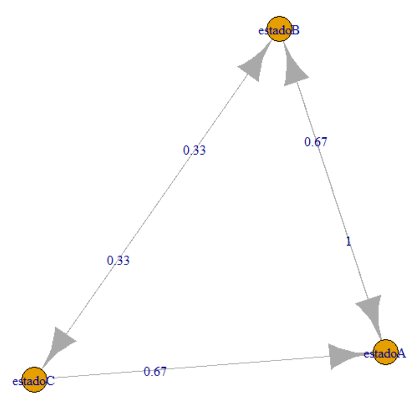
a) Construya la matriz de transición.

b) Determine si la Cadena de Markov es Ergódica, de ser así calcule las Probabilidades de Estado Estable y los Tiempos Promedio de Primer Paso.

a. Matriz de Transición

```
Unnamed Markov chain
 A  3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 estadoA, estadoB, estadoC
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
          estadoA   estadoB   estadoC
estadoA 0.0000000 1.0000000 0.0000000
estadoB 0.6666667 0.0000000 0.3333333
estadoC 0.6666667 0.3333333 0.0000000
```

Diagrama de Transición



b.

```
> ergodica<-is.irreducible(markov9)
> ergodica
[1] TRUE
>
> recurrente<-recurrentClasses(markov9)
> recurrente
[[1]]
[1] "estadoA" "estadoB" "estadoC"

> aperiodica<-period(markov9)
> aperiodica
[1] 1
> comunica<-communicatingClasses(markov9)
> comunica
[[1]]
[1] "estadoA" "estadoB" "estadoC"
```

Probabilidades Estado Estable y Tiempos Promedios de Primer Paso.

```
> estadoestable<-steadyStates(markov9)
> estadoestable
     estadoA estadoB estadoC
[1,]     0.4    0.45    0.15
>
> pp<-meanFirstPassageTime(markov9)
> pp
        estadoA  estadoB estadoC
estadoA     0.0 1.000000       6
estadoB     1.5 0.000000       5
estadoC     1.5 1.666667       0
```

Las probabilidades de estado estable son:

Del 40% para que al departamento A se le continúe brindando atención

Del 45% para que el departamento B siga siendo atendido

Del 15% para que permanezca en atención el departamento C.

En promedio pasaran 1.5 y 1.5 días para que, de atenderse al departamento A pasen a ser atendidos los departamentos B y C. 6 y 5 días para que, de atenderse el C pasen a ser atendidos los departamentos A y B. 1 y 1.66 días pasaran para que, de atenderse al departamento B pasen a ser atendidos los departamentos A y C.