

TALLER 2

CADENAS DE MARKOV

CRISTIAN ARIAS
ANTONIO ANAYA
OSCAR RODRIGUEZ

PhD. DELIMIRO VISBAL CADAVID

INVESTIGACION DE OPERACIONES II



UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA
PROGRAMA DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Santa Marta, 01 de Mayo de 2020

1. El Herald Tribble obtuvo la siguiente información acerca de sus suscriptores: durante el primer año como suscriptores, el 20% cancelan sus suscripciones. De los que se han suscrito por un año, el 10% cancelan durante el segundo año. De los que se han suscrito por mas de dos años, el 4% cancelan durante cualquier año dado. En promedio, ¿cuanto tiempo se suscribe una persona al Herald Tribble?

Estados de Suscripciones

E1= Suscriptores de 0 a 1 año(s)

E2= Suscriptores de 1 a 2 años

E3= Suscriptores mayores a dos años

R= Suscripciones Canceladas.

Matriz de Transición P

	e1	e2	e3	R
e1	0	0.8	0.00	0.20
e2	0	0.0	0.90	0.10
e3	0	0.0	0.96	0.04
R	0	0.0	0.00	1.00

I-Q

	e1	e2	e3
e1	1	-0.8	0.00
e2	0	1.0	-0.90
e3	0	0.0	0.04

$(I-Q)^{-1}$

	e1	e2	e3
e1	1	0.8	18.0
e2	0	1.0	22.5
e3	0	0.0	25.0

Según los resultados de $(I-Q)^{-1}$ la sumatoria de los valores diagonales de dicha matriz indica que el tiempo promedio en que se suscribe una persona al Herald Tribble son 27 años.

2. Un bosque consta de dos tipos de árboles: los que son de 0 a 5 pies y los que son mas altos de 5 pies. Cada año muere el 40% de los arboles con una altura de 0 a 5 pies, 10% se venden a 20 dólares cada uno, 30% se quedan con una altura entre 0 y 5 pies, y el 20% crecen mas de 5 pies. Cada año, 50% de los arboles con mas de 5 pies se venden a 50 dólares, 20% se venden a 30 dólares y 30% permanecen en el bosque.

Estados de Tipos de Arboles

E1 = Arboles de 0 a 5 pies

E2 = Arboles mayores a 5 pies

E3 = Arboles que mueren

E4 = Arboles de 20 dolares

E5 = Arboles de 50 dolares

E6 = Arboles de 30 dólares

MATRIX DE TRANSICION

Cadena 2

A 6 - dimensional discrete Markov chain defined by the following states:

e1, e2, e3, e4, e5, e6

The transition matrix (by rows) is defined as follows:

```
      e1 e2 e3 e4 e5 e6
e1 0.3 0.2 0.4 0.1 0.0 0.0
e2 0.0 0.3 0.0 0.0 0.5 0.2
e3 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
e4 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0
e5 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0
e6 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
```

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que muera un árbol de 0 a 5 pies antes de venderse?

```
#a
estado_inicial<-c(1,0,0,0,0,0)
pasos<-3
estado_final<-estado_inicial*mc2^pasos
estado_final
```

```
      e1 e2 e3 e4 e5 e6
[1,] 0.027 0.054 0.556 0.139 0.16 0.064
```

La probabilidad de que muera un árbol de 0 a 5 pies antes de venderse es de 55,6 %

- b. Si se planta un árbol de menos de 5 pies, ¿Cuál es el ingreso esperado que se va a tener con ese árbol?

Q

```
> Q
      e1 e2
e1 0.3 0.2
e2 0.0 0.3
```

I

```
> I
      e4 e5
e4 1 0
e5 0 1
```

R

```
> R
      e3 e4 e5 e6
e1 0.4 0.1 0.0 0.0
e2 0.0 0.0 0.5 0.2
```

I-Q

	e4	e5
e4	0.7	-0.2
e5	0.0	0.7

$(I-Q)^{-1}$

	e4	e5
e4	1.428571	0.4081633
e5	0.000000	1.4285714

$(I-Q)^{-1} \cdot R$

	e3	e4	e5	e6
e4	0.5714286	0.1428571	0.2040816	0.08163265
e5	0.0000000	0.0000000	0.7142857	0.28571429

Ingreso Esperado= $(\$50 \cdot 0.20408163) + (\$30 \cdot 0.0816326) + (\$20 \cdot 0.14285714) = \15.5102023

El ingreso esperado con el árbol de menos de 5 pies es de 15,51 dólares.

3. Freezco Inc vende refrigeradores. La compañía emitió una garantía para los refrigeradores en la que se establece la sustitución sin cargos de cualquier refrigerador que se descomponga antes de 3 años de uso. Se tiene la siguiente información: (1) 3% de los refrigeradores nuevos se descomponen durante su primer año de operación; (2) 5% de los refrigeradores con un año de antigüedad se descomponen durante su segundo año de operación, y (3) 7% de los refrigeradores con dos años de uso se descomponen durante su tercer año de operación. La garantía no es válida para un refrigerador de reemplazo.
 - a. Utilice la teoría de las cadenas de Markov para predecir la fracción de los refrigeradores que Freezco tendrá que reemplazar.
 - b. Suponga que Freezco gasta 500 dólares en reemplazar un refrigerador y que las ventas anuales de Freezco suman 10000 refrigeradores. Si la compañía redujera el periodo de garantía a dos años, ¿cuánto se ahorraría en costos de sustitución?

Estados de Refrigeradores

E0=refrigerador nuevo

E1=refrigerador 1 año antigüedad

E2=refrigerador 2 años antigüedad

E3=refrigerador dañado en 3er año antigüedad

E4=refrigerador reemplazado

Matriz de Transición

```

      e0    e1    e2    e3    e4
e0  0 0.97 0.00 0.03 0.00
e1  0 0.00 0.95 0.05 0.00
e2  0 0.00 0.00 0.07 0.93
e3  0 0.00 0.00 1.00 0.00
e4  0 0.00 0.00 0.00 1.00

```

Q

```

> Q
      e0    e1    e2
e0  0 0.97 0.00
e1  0 0.00 0.95
e2  0 0.00 0.00

```

R

```

> R
      e3    e4
e0 0.03 0.00
e1 0.05 0.00
e2 0.07 0.93

```

I-Q

```

      e0    e1    e2
e0  1 -0.97 0.00
e1  0  1.00 -0.95
e2  0  0.00  1.00

```

$(I-Q)^{-1}$

```

      e0    e1    e2
e0  1 0.97 0.9215
e1  0 1.00 0.9500
e2  0 0.00 1.0000

```

$(I-Q)^{-1} \cdot R$

```

      e3    e4
e0 0.143005 0.856995
e1 0.116500 0.883500
e2 0.070000 0.930000

```

- La fracción de refrigeradores que la compañía tendrá que reemplazar es de 14,30%
- Costos de sustitución: $0,0143005 \cdot 10000 \cdot 500 = 715.000$ dolares se ahorraría en costos de sustitución

4. Las cadenas absorbentes de Markov se usan en ventas para modelar la probabilidad de que un cliente que se localiza por teléfono compre finalmente algún producto. Considere un cliente posible a quien nunca le ha llamado acerca de comprar un producto. Después de una llamada, hay una probabilidad de 60% de que tenga poco interés en el producto, de 30% que muestre un gran interés en el producto, y 10% de que sea borrado de la lista de los posibles clientes de la compañía. Se tiene un cliente que actualmente tiene poco interés en el producto. Después de otra llamada, hay 30% de probabilidades de que compre el producto, 20% de probabilidades de que sea borrado de la lista, 30% de que el cliente aún tenga poco interés y 20% de que exprese un interés alto. Para un cliente que actualmente expresa alto interés, después de otra llamada hay 50% de probabilidades de que compre el producto, 40% de probabilidades de que siga teniendo gran interés y 10% de probabilidades que tenga poco interés.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un nuevo posible cliente al final compre el producto?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un posible cliente con poco interés sea borrado de la lista finalmente?
 - En promedio, ¿cuántas veces habrá que llamar por teléfono a un nuevo posible cliente para que compre el producto, o para que sea borrado de la lista?

Estados

E1= nuevo interes

E2= poco interes

E3= gran interes

E4= interes borrado

E5= Compre

Matriz de Transición

	e1	e2	e3	e4	e5
e1	0	0.6	0.3	0.1	0.0
e2	0	0.3	0.2	0.2	0.3
e3	0	0.1	0.4	0.0	0.5
e4	0	0.0	0.0	1.0	0.0
e5	0	0.0	0.0	0.0	1.0

Q

	e1	e2	e3
e1	0	0.6	0.3
e2	0	0.3	0.2
e3	0	0.1	0.4

I-Q

	e1	e2	e3
e1	1	-0.6	-0.3
e2	0	0.7	-0.2
e3	0	-0.1	0.6

R

	e4	e5
e1	0.1	0.0
e2	0.2	0.3
e3	0.0	0.5

$(I-Q)^{-1}$

	e1	e2	e3
e1	1	0.975	0.825
e2	0	1.500	0.500
e3	0	0.250	1.750

$(I-Q)^{-1}R$

	e4	e5
e1	0.295	0.705
e2	0.300	0.700
e3	0.050	0.950

- (a) La probabilidad de que un cliente nuevo compre el producto es de 70%
- (b) La probabilidad de que un cliente con poco interés sea borrado de la lista es 30%
- (c) En promedio hay que llamar 2.8 veces a un cliente para que compre el producto o sea borrado de la lista

5. General Motors tiene tres divisiones automotrices (1,2 y 3). También tiene una división de contabilidad y una de consultoría en administración. La pregunta es: ¿Qué fracción del costo de las divisiones de contabilidad y consultoría en administración se debe asignar a las tres divisiones automotrices? Durante un año específico de trabajo de la división de contabilidad y consultoría en administración se asigna como se muestra en la tabla.

Por ejemplo, contabilidad gasta el 10% de su tiempo en problemas que genera el departamento de contabilidad, 20% de su tiempo en trabajo que genera la división 3 y así sucesivamente. cada año, cuesta \$63 millones operar el departamento de contabilidad y \$210 millones operar el departamento de consultoría en administración. ¿Qué fracción de estos costos debe asignarse a cada automotriz? Considere que el costo en que se incurre por el trabajo de contabilidad es 1 dólar. Hay una probabilidad de 0.20 de que ese dólar se deba asignar a cada división automotriz, se sabe a qué división se debe cargar el dólar. Si se carga el dólar consultoría, por ejemplo, se repite el proceso hasta que finalmente se carga el dólar a una división automotriz. Utilice lo que sabe de cadenas absorbentes para entender como asignar los costos de operar los departamentos de contabilidad y consultoría en administración entre las tres divisiones automotrices.

	Contabilidad	Consultoría en administración	División 1	División 2	División 3
Contabilidad	10%	30%	20%	20%	20%
Administración	30%	20%	30%	0%	20%

Q

```
> Q
      e1 e2
e1 0.1 0.3
e2 0.3 0.2
```

(I-Q)

```
> IQ
      e1 e2
e1 0.9 -0.3
e2 -0.3 0.8
```

(I-Q)⁻¹

```
      e1 e2
e1 1.2698413 0.4761905
e2 0.4761905 1.4285714
```

R

```
> R
      e3 e4 e5
e1 0.2 0.2 0.2
e2 0.3 0.0 0.2
```

(I-Q)⁻¹*R

```
      e3 e4 e5
e1 0.3968254 0.2539683 0.3492063
e2 0.5238095 0.0952381 0.3809524
```

Prorratio de los costos x departamento (en Miles de pesos)

```
      e3 e4 e5
e1 25000 16000 22000
e2 110000 20000 80000
```