Tarefa 04 de Métodos II - Antônio Anderson Costa Pereira - 422029

June 19, 2021

ESTIMATIVA DO ERRO DA FÓRMULA DE NEWTON-COTES DE GRAU 2 ABORDAGEM ABERTA

Fórmula de Newton-Cotes de grau 2 abordagem aberta:

$$I_f = \frac{4h}{3}(2f(x+h) - f(x+2h) + 2f(x+3h))$$

Fazendo o ponto central ser $\overline{x} = x + 2h$, logo:

$$I_f = \frac{4h}{3}(2f(\overline{x}-h) - f(\overline{x}) + 2f(\overline{x}+h))$$

Recorrendo à Série de Taylor para encontrarmos $f(\overline{x}-h)ef(\overline{x}+h)$, temos:

$$f(\overline{x}-h) = f(\overline{x}) - f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})h^2}{2!} - \frac{f'''(\overline{x})h^3}{3!} + \frac{f^{(iv)}(\overline{x})h^4}{4!} - ...$$

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})h^2}{2!} + \frac{f'''(\overline{x})h^3}{3!} + \frac{f^{(iv)}(\overline{x})h^4}{4!} + ...$$

Somando $f(\overline{x}-h) + f(\overline{x}+h)$, temos:

$$f(\overline{x}-h) + f(\overline{x}+h) = 2f(\overline{x}) + \frac{2f''(\overline{x})h^2}{2!} + \frac{2f^{(iv)}(\overline{x})h^4}{4!} + ...$$

Dobrando o valor e dimimuindo $f(\overline{x})$:

$$2f(\overline{x}-h) + 2f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) = 3f(\overline{x}) + \frac{4f''(\overline{x})h^2}{2!} + \frac{4f^{(iv)}(\overline{x})h^4}{4!} + ...$$

Logo:

$$I_f = \frac{4h}{3}(3f(\overline{x}) + \frac{4f''(\overline{x})h^2}{2!} + \frac{4f^{(iv)}(\overline{x})h^4}{4!} + ...)$$

$$I_f = 4f(\overline{x})h + \frac{8f''(\overline{x})h^3}{3} + \frac{16f^{(iv)}(\overline{x})h^5}{4!3} + ... \qquad (I)$$

Da equação (9) da aula 09, temos:

$$I_e = \int_a^b f(x)\ dx = p\int_{-1}^{1} f(\overline{x} + \xi h)\ d\xi$$

$$= p\int_{-1}^{1}(f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(\xi p) + \frac{f''(\overline{x})(\xi p)^2}{2!} + \frac{f'''(\overline{x})(\xi p)^3}{3!} + \frac{f^{(iv)}(\overline{x})(\xi p)^4}{4!} + ...)d\xi \qquad (II)$$

Integrando (II):

$$I_e = p(2f(\overline{x}) + \frac{(p)^2}{2!}f''(\overline{x})\frac{2}{3} + \frac{(p)^4}{4!}f^{(iv)}(\overline{x})\frac{2}{5} + ...)$$

Onde $p = \frac{\Delta x}{2}$. Já $h = \frac{\Delta x}{2}$, logo $p = 2h$, então:

$$I_e = 2h(2f(\overline{x}) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(\overline{x})\frac{2}{3} + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(iv)}(\overline{x})\frac{2}{5} + ...)$$

$$I_e = 4hf(\overline{x}) + \frac{(2h)^3}{2!}f''(\overline{x})\frac{2}{3} + \frac{(2h)^5}{4!}f^{(iv)}(\overline{x})\frac{2}{5} + ... \qquad (III)$$

Fazendo (III) - (I) e nos concentrando no termo dominante:

$$I_e - I_f = \frac{2^6 f^{(iv)}(\overline{x})h^5}{4!5} - \frac{16f^{(iv)}(\overline{x})h^5}{4!3} = \frac{2^4 f^{(iv)}(\overline{x})h^5}{4!}(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}) =$$

$$= \frac{2^4 f^{(iv)}(\overline{x})h^5}{4!}\frac{7}{15} = \frac{14f^{(iv)}(\overline{x})h^5}{45}$$

Logo o erro é:

$$\boxed{+\frac{14h^5 f^{(iv)}(\overline{x})}{45}}$$