

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

RECUPERACIÓN ESTRATÉGICA DE SISTEMAS COMPLEJOS
CON DAÑO

ANGIE ANTIVAR GONZALEZ

BOGOTÁ, COLOMBIA, MARZO 2025

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi profunda gratitud a la complejidad, ese camino alternativo que apareció en mi vida y transformó radicalmente mi manera de ver el mundo y de hacerme preguntas sobre él. Este enfoque no solo enriqueció mi pensamiento, sino que además renovó mi motivación y me devolvió el sentido profundo del acto de investigar, impulsándome a asumir la investigación como un compromiso con la transformación social.

Extiendo un especial reconocimiento a la Universidad Nacional de Colombia por ser un espacio que posibilita la circulación constante de ideas y el intercambio intelectual. Las múltiples discusiones, cuestionamientos y reflexiones que tuvieron lugar allí fueron fundamentales para nutrir mi pensamiento y facilitar un proceso profundo de transformación académica y personal que se ve reflejado en este trabajo.

De manera especial, extiendo mi gratitud al profesor Alejandro Pérez Riascos, asesor de este trabajo, por su constante disposición a escuchar, considerar y acompañarme en la exploración de mis ideas, por sus valiosas orientaciones técnicas y por su exigencia académica, factores decisivos para la culminación exitosa de este proceso investigativo.

Reconozco profundamente a todas aquellas personas que fortalecieron mi confianza y creyeron en mis capacidades, dándome la fuerza necesaria para finalizar el pregrado y asumir el desafío de investigar. En particular agradezco a Juanca Higuera, Manu Barros, Tania Prieto, Luis Higuera, Diego Heredia, Héctor Gutierrez, Juanse Sanchez y Laura Triana, así como a quienes su acompañamiento fue indispensable en algún momento de este largo recorrido, aunque hoy ya no estén presentes en mi vida.

A mi familia le expreso mi agradecimiento más sincero por su apoyo emocional, acompañamiento y sostenimiento permanente durante todos estos años. De manera especial, agradezco a mis padres, Luz Ángela González y Wilson Fernando Antivar, quienes han sido un soporte esencial en la realización de esta meta.

Finalmente, quiero manifestar un especial agradecimiento a Juanca Higuera, quien ha sido clave tanto en la discusión profunda de las ideas que dieron forma a esta investigación, como en

el acompañamiento emocional y afectivo durante este periodo. Su amor, su compañía, y su particular perspectiva del mundo han sido decisivos para despertar en mí la pasión y compromiso por la investigación como vía hacia la transformación social.

Resumen

Ante la necesidad creciente de entender cómo los sistemas complejos recuperan su funcionalidad tras ser afectados por deterioro progresivo, en este trabajo de investigación se plantea una estrategia eficiente para la recuperación de redes con daño acumulado. Este fenómeno se caracteriza por el debilitamiento gradual de las conexiones, que reduce significativamente el desempeño global del sistema. Se propone un método basado en la priorización estratégica de intervenciones en elementos críticos, combinando información sobre la relevancia estructural de cada enlace con métricas cuantitativas del daño. Este enfoque permite asignar recursos limitados de forma óptima, logrando no solo restablecer la funcionalidad original, sino incluso mejorarla respecto al estado inicial. Para evaluar su efectividad, la estrategia se implementa en redes de transporte urbano, demostrando su capacidad para identificar rápidamente las zonas vulnerables y focalizar esfuerzos en elementos clave. Los resultados obtenidos sugieren que este método puede aplicarse eficazmente a diversos contextos, proporcionando una metodología generalizable para abordar la recuperación de sistemas complejos afectados por daño acumulado.

Índice general

Resumen	4
Introducción	7
1. Daño acumulado en redes	9
1.1. Introducción	9
1.2. Redes y sistemas complejos	10
1.3. Caminantes aleatorios en redes	12
1.4. Algoritmo generador de daño acumulado	13
1.5. Sistemas de metro con daño	15
2. Un algoritmo para la recuperación estratégica de redes	18
2.1. Introducción	18
2.2. Detalles de la recuperación estratégica	20
2.2.1. Función de recuperación	20
2.2.2. Función de evolución	23
2.3. Resultados ilustrativos	24
2.3.1. Identificación de elementos clave	24
2.3.2. Estrategias de recuperación alternativas	28

Conclusiones	30
--------------	----

Bibliografía	31
--------------	----

Introducción

Una amplia variedad de fenómenos, desde la dinámica de redes neuronales y la regulación genética hasta la movilidad urbana y los ecosistemas sociales, pueden entenderse y estudiarse como sistemas complejos [1, 2]. Estos sistemas se caracterizan por estar formados por múltiples elementos interactuantes, cuya dinámica da lugar a comportamientos emergentes que no pueden explicarse a partir del análisis aislado de cada componente [1, 3]. Para abordar estas interacciones y su impacto global, la ciencia de redes ha desarrollado un marco teórico y computacional que permite modelar, caracterizar y analizar la estructura de estos sistemas [4]. Esta aproximación ha sido clave para comprender la organización y funcionamiento de redes de transporte [5], sistemas neuronales [6], biología de sistemas [7] y ecología [8], permitiendo evaluar su robustez, capacidad de comunicación y resiliencia ante perturbaciones [9]. En particular, la modelación mediante grafos -donde los elementos del sistema se representan como nodos y sus interacciones como enlaces- ha facilitado el estudio de propiedades fundamentales como la conectividad [4], la estructura de comunidades y la relevancia de cada nodo en la dinámica global de la red [10].

A pesar de los avances en la comprensión de la estructura y funcionalidad de los sistemas complejos, estos no son estáticos, sino que evolucionan continuamente debido a diversos procesos [11], entre ellos el deterioro gradual de sus componentes e interacciones [12]. Este fenómeno, presente en redes de transporte, biológicas y sociales, afecta la capacidad del sistema para gestionar eficazmente sus dinámicas internas [12, 13]. Gran parte de los estudios existentes modelan estos efectos a través de ataques dirigidos o fallas aleatorias, eliminando repentinamente nodos o enlaces para evaluar la robustez estructural del sistema [9]. Sin embargo, estas aproximaciones ignoran la naturaleza acumulativa del daño observado en muchos sistemas reales, donde las conexiones suelen debilitarse paulatinamente antes del colapso definitivo [14, 12].

Si bien los modelos actuales permiten caracterizar cómo los sistemas complejos se deterioran gradualmente, aún falta profundizar en estrategias que permitan recuperar su

desempeño una vez ha sido afectado. Diferentes enfoques han abordado esta problemática, incluyendo métodos basados en estructuras locales que restauran conexiones de manera eficiente tras eliminar nodos específicos [15]. Otras aproximaciones han integrado técnicas de aprendizaje profundo por refuerzo combinado con redes neuronales para optimizar secuencias de reparación posteriores a desastres naturales [16]. También se han desarrollado metodologías que evalúan índices de vulnerabilidad y accesibilidad para identificar enlaces críticos en redes afectadas por daños puntuales [17], y análisis que consideran interdependencias estructurales entre redes para manejar escenarios complejos de fallas en cascada [18]. Es particularmente relevante la incorporación de dinámicas no Markovianas en modelos de recuperación, donde la memoria de estados previos del sistema mejora significativamente su resiliencia frente a fallas de gran escala [19].

No obstante, pese a los avances mencionados, persiste la necesidad de plantear métodos de recuperación más flexibles que identifiquen y prioricen las intervenciones más efectivas que aseguren la restauración del funcionamiento global del sistema. Con este objetivo, en la presente investigación se propone un enfoque estratégico que combina información sobre la relevancia estructural de cada enlace con métricas que cuantifican su estado de deterioro, de modo que la asignación de recursos, usualmente limitados, en los elementos afectados maximice el impacto en la recuperación total. De esta forma, la estrategia evita intervenciones innecesarias, enfocando sus esfuerzos en los puntos más críticos y adaptándose a distintas condiciones de deterioro. Dicho planteamiento ofrece un potencial significativo para redes en distintos contextos, desde infraestructuras de transporte hasta sistemas biológicos, al permitir restaurar -e incluso superar- niveles óptimos de funcionalidad con una inversión de recursos altamente focalizada y eficiente.

Para desarrollar esta propuesta y mostrar su potencial de aplicabilidad, este documento se organiza de la siguiente manera: inicialmente, en el capítulo 1, se presentan los fundamentos teóricos necesarios para comprender la recuperación estratégica propuesta, iniciando con una contextualización general sobre redes y sistemas complejos, seguida de una profundización en el concepto de daño acumulado y su impacto sobre el desempeño global de estos sistemas. Posteriormente, en el capítulo 2, se introduce en detalle la estrategia de recuperación desarrollada en este trabajo, incluyendo los principios fundamentales del método, su implementación matemática y los resultados ilustrativos obtenidos mediante ejemplos concretos y comparaciones con métodos de recuperación alternativos. Finalmente, en las conclusiones, se destacan los principales aportes de esta investigación y se proponen posibles líneas de trabajo futuro sobre recuperación estratégica en sistemas complejos.

Capítulo 1

Daño acumulado en redes

1.1. Introducción

Este capítulo introduce los fundamentos teóricos y metodológicos necesarios para estudiar el impacto del daño acumulado en redes complejas. Partiendo de la formulación matemática de las redes como grafos y de la caracterización de sus propiedades estructurales y dinámicas, se presenta un marco conceptual que permite analizar cómo la degradación progresiva afecta la funcionalidad global de estos sistemas.

Las redes complejas han sido ampliamente utilizadas para modelar sistemas reales en diversos ámbitos, desde infraestructuras críticas y redes de transporte hasta sistemas biológicos y redes sociales [3, 5, 6]. En estos contextos, la integridad de la red es clave para garantizar el flujo de información, energía o recursos. Sin embargo, factores como fallos estructurales, ataques dirigidos o envejecimiento natural pueden desencadenar procesos de deterioro que comprometen su funcionamiento global. El estudio del daño acumulado permite identificar patrones de degradación y evaluar la resiliencia de los sistemas ante fallos progresivos [14, 20].

Para abordar esta cuestión, se plantea un enfoque metodológico en el que se evalúa la funcionalidad de la red por medio de un modelo dinámico de caminantes aleatorios [21], cuando el sistema es afectado por daño acumulado, modelado a partir de un algoritmo de generación de daño preferencial, en el que las conexiones más afectadas tienden a deteriorarse con mayor probabilidad. De esta forma, se simula la evolución del daño en redes reales y se evalúa su impacto en la capacidad de la red para distribuir flujos a través

de sus vínculos [14, 20]. Los resultados obtenidos en este capítulo establecerán las bases para el siguiente, donde se explorarán estrategias de recuperación que permitan revertir los efectos del daño y restaurar la funcionalidad de la red de manera eficiente.

1.2. Redes y sistemas complejos

Los sistemas complejos se definen como aquellos compuestos por múltiples partes interactuantes, cuyas interacciones generan comportamientos emergentes que no pueden reducirse al análisis de sus componentes de forma aislada [3]. Por ello, su estudio requiere herramientas capaces de modelar y analizar la estructura de las interacciones entre las distintas partes y su impacto en el conjunto. En los últimos años, la ciencia de redes se ha consolidado como un campo de investigación fructífero y eficaz para abordar este desafío, al ofrecer un marco conceptual y matemático que permite describir y caracterizar las estructuras de interacción presentes en estos sistemas. Esta aproximación facilita la realización de evaluaciones e intervenciones dirigidas al comportamiento emergente de diversos sistemas, como lo evidencian estudios en redes de transporte [5], neurociencia [6], biología de sistemas [7], ecología [8] y otras áreas.

La ciencia de redes tiene sus raíces en una amplia variedad de disciplinas, desde las matemáticas discretas, como la teoría de grafos y la geometría algebraica, pasando por la física estadística, la sociología con el análisis de redes sociales, los sistemas dinámicos mediante estudios de redes booleanas discutidas en biología de sistemas, e incluso el campo de las redes neuronales artificiales estudiadas desde las ciencias de la computación [22].

Para estudiar un sistema como red, el primer paso consiste en modelar las partes y las interacciones de interés como nodos y vínculos, respectivamente, lo que permite asociar un grafo al sistema. Al analizar la estructura de estos grafos se obtiene información relevante sobre la estructura de interacciones del sistema. Los grafos son objetos matemáticos compuestos por una dupla $G = (V, E)$, donde $V = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ es el conjunto de nodos o vértices y $E \subseteq [V]^2$ es el conjunto de enlaces que corresponden a pares del conjunto de nodos [23]. El tamaño del grafo N es igual al número de nodos. Los grafos se pueden representar mediante una matriz, conocida como matriz de adyacencia, en la que las filas y columnas representan los nodos y las componentes A_{ij} indican los vínculos, siendo $A_{ij} = 1$ cuando existe un vínculo entre dos nodos y $A_{ij} = 0$ cuando no lo hay. En la figura 1.1 se presenta un grafo no dirigido con su respectiva matriz de adyacencia.

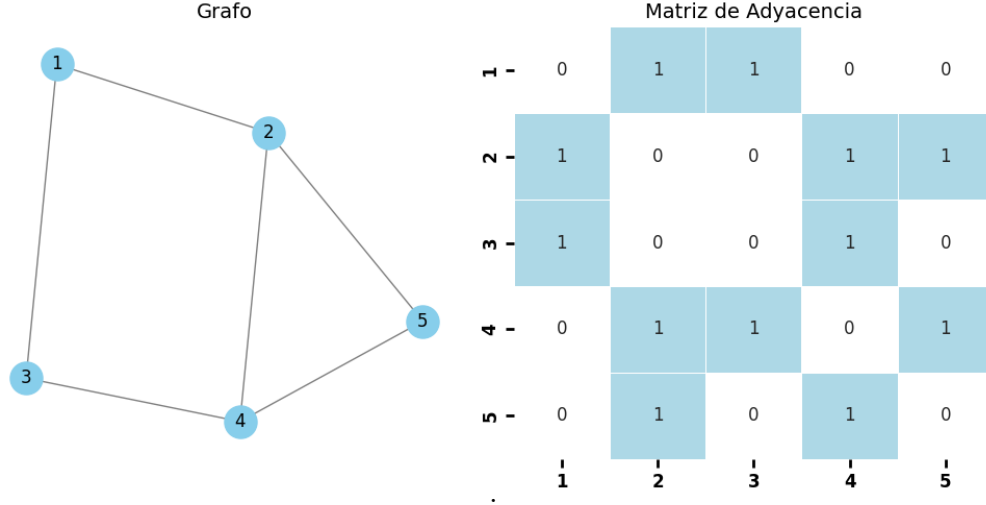


Figura 1.1: Ejemplo de grafo con su correspondiente matriz de adyacencia, $N = 5$, $\varepsilon = 6$.

Una vez que se ha obtenido el grafo que modela la estructura de conectividad entre las partes del sistema, es posible emplear una serie de índices definidos para caracterizar diversos aspectos de dicha estructura. Por ejemplo, el número de vértices en los que participa un nodo se conoce como grado y se puede calcular como:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad (1.1)$$

Estos índices, al describir la estructura de conectividad de la red, brindan información sobre aspectos relevantes de su funcionalidad, tales como la facilidad de comunicación [24], la estructura de comunidades [25], la robustez del sistema ante fallas [9] y la importancia de nodos o vínculos particulares para la comunicación en la red [10], entre otros.

Dentro de este amplio universo de índices para caracterizar la estructura de las redes y la relevancia de sus componentes, resulta de particular interés para este trabajo la centralidad de intermediación geodésica de los vínculos. Este índice se define como la proporción de caminos geodésicos que atraviesan un determinado vínculo respecto al total de caminos geodésicos en el grafo, donde un camino geodésico se entiende como el trayecto más corto entre un par de nodos [26].

$$C_B(\varepsilon) = \sum_{u \neq v} \frac{\sigma(u, v | \varepsilon)}{\sigma(u, v)}, \quad (1.2)$$

donde $\sigma(u, v)$ es el número total de caminos más cortos desde el nodo u hasta el nodo v , y $\sigma(u, v | \varepsilon)$ es el número de esos caminos que pasan por ε (sin contar los casos en los que

ε es un punto final).

Además de los diferentes índices que dan información sobre los nodos, es posible utilizar modelos dinámicos que aprovechan la información de la red para evaluar cómo distintas estructuras de conectividad afectan los resultados del modelo. Un ejemplo de estas aplicaciones es el uso de modelos de difusión de caminantes aleatorios sobre las redes [21] y de sincronización [27].

1.3. Caminantes aleatorios en redes

Una caminata aleatoria es un proceso dinámico que describe un movimiento de pasos aleatorios. Este tipo de proceso es ampliamente utilizado para describir otros procesos como la difusión, el movimiento de seres vivos [28], propagación de enfermedades [29] o para diseñar algoritmos de búsqueda en la web [30]. En esta sección se describen algunos aspectos matemáticos de los caminantes aleatorios en una red.

Si el proceso es Markoviano y suponiendo que el caminante aleatorio inicia su movimiento en el nodo i al tiempo $t = 0$, la probabilidad $p_{ij}(t)$ de encontrar al caminante en el nodo j después de un tiempo $t = 1, 2, \dots$ está descrita por la ecuación maestra en tiempo discreto [30]:

$$p_{ij}(t+1) = \sum_{l=1}^N p_{il}(t) w_{l \rightarrow j}, \quad (1.3)$$

donde $w_{i \rightarrow j}$ corresponde al elemento i, j de la matriz de transición \mathbf{W} y representa la probabilidad de transición del caminante para ir del nodo i al nodo j en un solo paso. En el caso de un caminante simple, donde el agente se mueve a sus primeros vecinos con igual probabilidad, la matriz de transición del caminante queda descrita en términos de la matriz de adyacencia de la red donde el caminante se mueve, de tal manera que las probabilidades de transición se calculan como [31]:

$$w_{i \rightarrow j} = \frac{A_{ij}}{k_i}. \quad (1.4)$$

Por otra parte, la matriz de ocupación $\mathbf{P}(t)$ al tiempo t se puede expresar como:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{W}^t = \sum_{m=1}^N \lambda_m^t |\phi_m\rangle \langle \bar{\phi}_m|, \quad (1.5)$$

donde se emplea la notación de Dirac y $|\phi_m\rangle$ y $\langle\bar{\phi}_m|$ corresponden a los eigenvectores derechos e izquierdos de \mathbf{W} asociados al eigenvalor λ_m [32].

Dentro de los problemas de caminantes aleatorios una pregunta importante que surge es sobre el tiempo promedio que le toma al caminante iniciar en un nodo i y llegar por primera vez al nodo j . Este tiempo se conoce como tiempo medio de primer paso y se calcula como [32]:

$$\langle\mathcal{T}_{ij}\rangle = \frac{1}{p_j^{(\infty)}} \left[\delta_{ij} + \sum_{\ell=2}^N \frac{\langle j|\phi_\ell\rangle \langle\bar{\phi}_\ell|j\rangle - \langle i|\phi_\ell\rangle \langle\bar{\phi}_\ell|j\rangle}{1 - \lambda_\ell} \right], \quad (1.6)$$

donde $p_j^{(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$ representa la distribución estacionaria de la ecuación maestra (1.3) y viene dada por:

$$p_j^{(\infty)} = \langle i|\phi_1\rangle \langle\bar{\phi}_1|j\rangle, \quad (1.7)$$

los elementos $\langle i|\phi_1\rangle$ son constantes e independientes de i . Si el punto de partida y el de llegada coinciden $j = i$ se obtiene el tiempo medio de retorno $\langle\mathcal{T}_{ii}\rangle = \frac{1}{\langle i|\phi_1\rangle \langle\bar{\phi}_1|i\rangle}$ [32]. El cual coincide con el inverso de la distribución estacionaria del proceso, este resultado es conocido en la literatura como teorema de Kac.

1.4. Algoritmo generador de daño acumulado

El envejecimiento es un proceso común en la naturaleza, no sólo los seres vivos lo experimentan si no también civilizaciones, compañías [33]. Su importancia ha hecho que muchos investigadores le dediquen su atención y existe una variada literatura dedicada a estudiarlo y a proponer modelos que lo expliquen, especialmente en sistemas biológicos [34]. Este fenómeno ha sido investigado en el contexto de la ciencia de sistemas complejos [35], bajo esta perspectiva el envejecimiento puede ser visto como un proceso dinámico donde la acumulación de daño disminuye la funcionalidad del sistema para realizar cierta tarea [14, 20].

Las redes permiten modelar sistemas donde las interacciones entre los elementos se establecen mediante las aristas que conectan los nodos, bajo este panorama el daño que sufre la red se representa como la reducción del valor del peso de las líneas de la red [14]. Dependiendo del tipo de red y su función puede significar una disminución en la capacidad de transporte a través de esa línea o la disminución del acoplamiento entre pares de nodos

conectados [14]. En esta sección se describe un algoritmo de daño en redes, se explica la forma como se genera el daño y se construye la matriz de pesos de la red dañada así como una medida para evaluar la capacidad de transporte a nivel global de la red.

El algoritmo inicia con una red conectada de N nodos cuya topología está representada a través de la matriz de adyacencia \mathbf{A} y el estado de daño de la red se establece mediante la matriz de pesos $\mathbf{\Omega}$, tal que $\Omega_{ij} \geq 0$ y $\Omega_{ii} = 0$. En un principio se considera que todas las conexiones de la red tienen el mismo peso y son recíprocas por tanto la red también es no dirigida, este estado inicial representa un sistema en perfectas condiciones que puede desempeñar su función de manera óptima. Luego, mientras el tiempo global T transcurre, algunas líneas de la red son escogidas aleatoriamente y se disminuye su peso. Este proceso hace que $\mathbf{\Omega}(T)$ cambie con el daño generado [14]. El tiempo global T es también un contador del daño total que recibe la red.

El daño que recibe la línea (i, j) de la red está cuantificado en la variable entera y aleatoria $h_{ij}(T)$ de tal forma que $h_{ij}(T) - 1$ da el número de golpes que ha recibido (i, j) al tiempo T , considerando que $h_{ij}(0) = 1$. La probabilidad $\pi_{ij}(T)$ de que la línea (i, j) sea dañada depende de la cantidad de daño que sufrió con anterioridad [14]:

$$\pi_{ij}(T) = \frac{h_{ij}(T-1)}{\sum_{(l,m) \in \mathcal{E}} h_{lm}(T-1)}. \quad (1.8)$$

De tal manera que el proceso de daño es preferencial donde líneas que han recibido daño antes tienden a seguir acumulando más daño. Ahora en términos de $h_{ij}(T)$ la matriz de pesos es definida como [14]:

$$\Omega_{ij}(T) = (h_{ij}(T))^{-\alpha} A_{ij}, \quad (1.9)$$

donde $\alpha \geq 0$ es un parámetro que cuantifica la respuesta del sistema ante el daño. Si $\alpha = 0$ se trata de un sistema que puede repararse perfectamente, de tal manera que no acumule daño. Por el otro lado, si $\alpha \rightarrow \infty$ implica una remoción de la conexión.

Este modelo de acumulación de daño ha sido investigado en el contexto de procesos de transporte usando caminantes aleatorios. En estos sistemas los caminantes se mueven en la red dentro de una escala de tiempo más pequeña que la asociada al daño y está caracterizada por el tiempo t tal que $t \ll \Delta T$. La matriz de transición que caracteriza estos caminantes se define en términos de la matriz de pesos en (1.9) de tal manera que sus elementos son [14]:

$$w_{i \rightarrow j} = \frac{\Omega_{ij}(T)}{\sum_l \Omega_{il}(T)}. \quad (1.10)$$

Y también se puede determinar la capacidad global de transporte de la red a medida que recibe daño a través de la medida de funcionalidad [14]:

$$\mathcal{F}(T) \equiv \frac{\tau(0)}{\tau(T)}. \quad (1.11)$$

En esta definición, $\tau(T)$ es el tiempo característico el cual mide el promedio ponderado de pasos que el caminante necesita para alcanzar cualquier nodo de la red [36]. En términos del tiempo medio de primer paso definido en (1.6) se calcula como:

$$\tau(T) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} p_i^{(\infty)} \langle \tau_{ij}(T) \rangle. \quad (1.12)$$

En este caso $\tau(0)$ corresponde al tiempo característico del caminante cuando se mueve sobre una red sin ningún daño, es decir a $T = 0$, en cuanto que $\tau(T)$ representa el tiempo característico del caminante sobre la red dañada. Usando esta metodología es posible determinar que las redes con topologías más simples son las redes que se deterioran con más facilidad, en cuanto que para topologías más complejas, los efectos del daño son menores, es decir este tipo de redes “envejecen” más lento. En la referencia [20] se consideran estructuras dirigidas, en las cuales además se establecieron algunas medidas para determinar la asimetría que genera este proceso de acumulación de daño.

1.5. Sistemas de metro con daño

Los sistemas de metro son de fundamental importancia en las grandes ciudades puesto que en condiciones óptimas permiten movilizar una gran cantidad de personas de manera rápida y eficiente. Sin embargo, no están exentos de problemas tales como la falta de mantenimiento de los vehículos o vías, fallos de la red eléctrica, condiciones meteorológicas poco favorables, entre otros, que pueden comprometer su buen desempeño. De tal manera que es importante entender cómo funcionan y desarrollar métodos que permitan evaluar la respuesta de estos sistemas al daño. Trabajos recientes han explorado la respuesta de estos sistemas de metro pero considerando que el daño que sufren es gradual, en escenarios justo antes de llegar a una situación extrema [37].

Con el fin de analizar sistemas metro, se tiene una base de datos que contiene la información de la conectividad de 33 sistemas metro en ciudades de todo el mundo [38, 39], las redes consideradas se presentan en la figura 1.2. Esta base de datos describe los sistemas

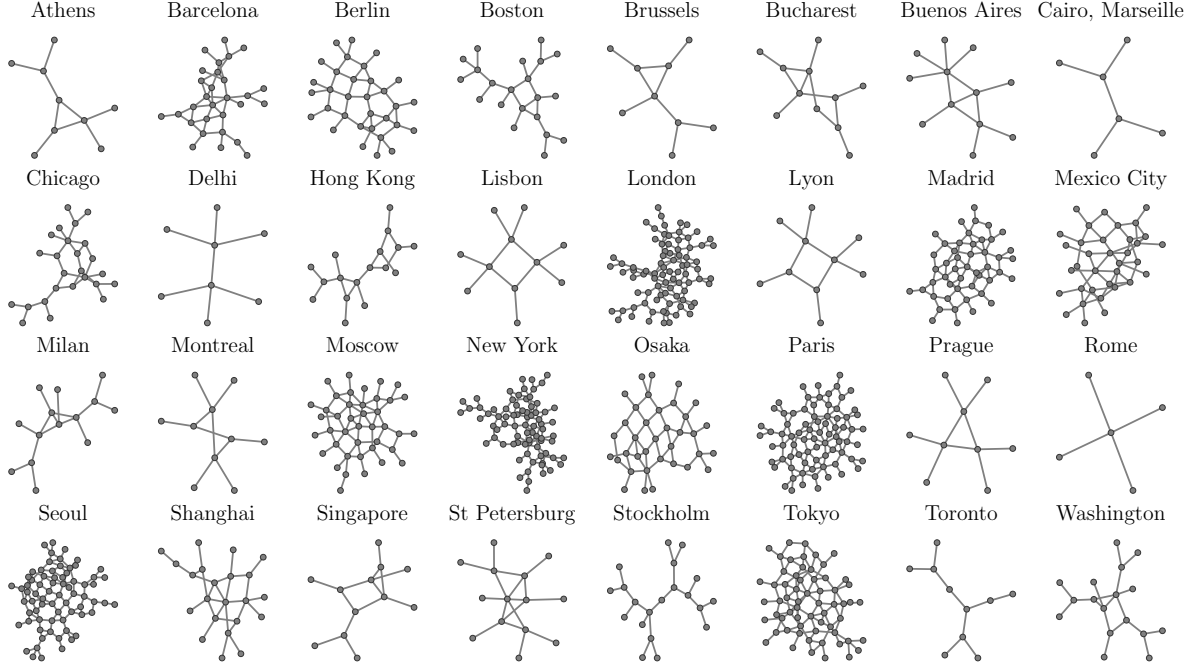


Figura 1.2: Redes metro consideradas en la base de datos de la referencia [38]. Imagen tomada de [37].

de metro como redes, donde los nodos representan las estaciones más importantes del sistema tales como las estaciones terminales donde inicia y termina una ruta del sistema y las estaciones de transferencia que son estaciones que permiten el cambio de una ruta a otra. Las aristas por otra parte conectan estas estaciones terminales y de transferencia y contienen la información de las demás estaciones. La topología de las redes así es bastante diversa pues se cuenta con estructuras simples tipo árbol como la red de Roma y el Cairo y más complejas y grandes como la red de Nueva York.

En la investigación realizada en [37], se consideran las redes de metro como redes dirigidas. Se generó daño sobre cada una de las redes y se vió su respuesta a través del movimiento de caminantes aleatorios. El daño se generó de acuerdo al valor del parámetro $\alpha = 1$ en todos los casos y se evaluó así la funcionalidad de cada una de las redes. Los resultados de esta evaluación se muestran en la figura 1.3 para las redes de metro de Nueva York y París. Para cada una de las redes se presenta el promedio de ensamble de la funcionalidad $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ definida en (1.11) para 100 realizaciones. Como se puede observar, considerando el daño desde $T = 0$ hasta $T = 10^3$, cada una de las redes responde de manera diferente al daño, nótese que el sistema de París es más resistente al daño.

En esta primera parte se puede ver que el modelo de daño acumulado arroja resultados importantes dentro del contexto de redes de transporte que permiten evaluar el compor-

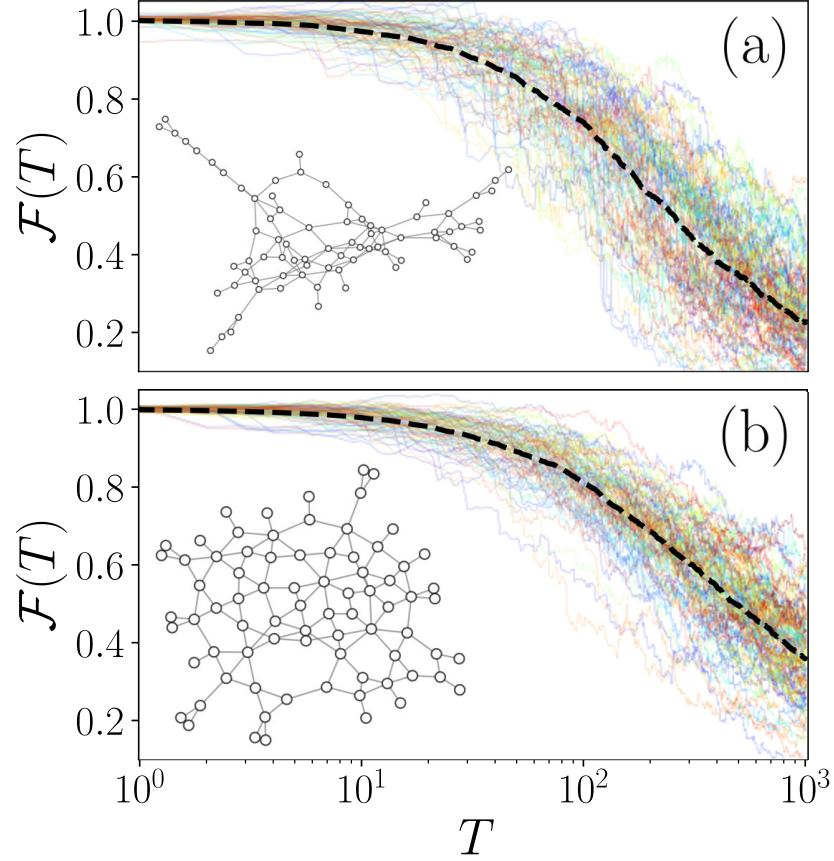


Figura 1.3: Evolución de la funcionalidad para las redes de metro de (a) Nueva York y (b) París. Las líneas delgadas indican 100 realizaciones Monte Carlo del proceso, tomando $\alpha = 1$. La línea punteada indica el promedio de ensamble de la funcionalidad $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ de las redes. Imagen tomada de [37]

tamiento y la respuesta de estas estructuras frente a escenarios de daño que afectan de manera progresiva el funcionamiento de estos sistemas. En la siguiente parte de la investigación se proponen una serie de estrategias para reparar gradualmente el sistema a partir de un cierto T donde se inicia el proceso de reparación.

Capítulo 2

Un algoritmo para la recuperación estratégica de redes

2.1. Introducción

En este capítulo se presenta el desarrollo y aplicación de un algoritmo para la recuperación estratégica de redes complejas afectadas por daño acumulado. Este enfoque, basado en los principios teóricos discutidos en el capítulo anterior busca revertir el deterioro de los sistemas mediante una estrategia de recuperación eficiente y estructurada.

El desempeño de los sistemas complejos puede verse afectado por el deterioro progresivo de sus conexiones [12], lo que limita su capacidad para distribuir recursos y sostener procesos esenciales como la difusión y la sincronización [14, 13]. Por ejemplo, en redes de transporte urbano, el daño acumulado en las conexiones se manifiesta mediante daños en la infraestructura -como hundimientos y desniveles- que afectan directamente la movilidad de las ciudades. Frente a esta situación, las entidades responsables deben asignar recursos para reparar las vías deterioradas. No obstante, surge la necesidad de desarrollar herramientas que permitan identificar de manera estratégica qué elementos deben priorizarse, maximizando el impacto del esfuerzo e insumos invertidos y restaurando de manera efectiva el desempeño general del sistema.

Si bien las redes de transporte urbano ofrecen un ejemplo claro del proceso de recuperación, su formulación matemática va más allá de las particularidades de un caso de estudio específico, convirtiéndose en una herramienta generalizable y aplicable a diversos sistemas

afectados por daño acumulado. Concebida como un proceso global, la recuperación busca restaurar la funcionalidad del sistema a un estado óptimo mediante reparaciones dirigidas a los elementos afectados; en este caso, los enlaces de la red. Estas reparaciones se coordinan de forma estratégica para maximizar su impacto, priorizando los elementos más relevantes. La integración de estas acciones asegura que la red, como un todo, recupere su funcionalidad de manera efectiva.

La estrategia de recuperación propuesta se fundamenta en dos principios clave que operan de manera complementaria. Por un lado, en una red -especialmente en redes complejas- no todos los enlaces contribuyen de manera homogénea a la funcionalidad global; algunos desempeñan un papel crucial al conectar componentes clave. Por otro lado, los enlaces más dañados pueden comprometer rápidamente el desempeño general de la red. Al combinar estos dos principios que, en síntesis, son la relevancia estructural y el nivel de daño acumulado, la estrategia permite priorizar de manera eficiente las intervenciones, logrando un equilibrio entre las prioridades globales de la red y las necesidades locales. Una característica distintiva del algoritmo que guía el proceso de recuperación es la incorporación de efectos de memoria en las decisiones de reparación, lo que convierte al proceso en no markoviano. Esto implica que la secuencia de reparaciones no solo depende del estado actual de la red, sino también de las decisiones tomadas previamente, es decir, de cuáles vínculos ya han sido reparados. Este enfoque permite optimizar progresivamente la trayectoria hacia un estado funcional óptimo del sistema.

A lo largo de este capítulo se presentan los detalles matemáticos del algoritmo de recuperación estratégica, comenzando por describir sus componentes fundamentales: la función de recuperación, que establece los criterios matemáticos para reparar progresivamente los enlaces dañados, y la función de evolución, que coordina el proceso temporal, definiendo claramente las fases de daño y recuperación. Posteriormente, se presentan resultados ilustrativos obtenidos al implementar el algoritmo en una red real de transporte urbano, destacando el funcionamiento práctico del mismo, identificando elementos clave como el tiempo de recuperación característico y analizando el impacto de asignar diferentes cantidades de recursos. Finalmente, se realiza una comparación del método propuesto con estrategias alternativas, mostrando la capacidad del algoritmo para restaurar eficazmente la funcionalidad de sistemas complejos.

2.2. Detalles de la recuperación estratégica

Expuesta la motivación detrás de la recuperación, el algoritmo propuesto tiene como objetivo restaurar progresivamente la funcionalidad global de redes afectadas por daño acumulado, tomando como referencia un estado considerado óptimo. Este estado puede coincidir con el nivel inicial de funcionalidad de la red, que refleja su configuración original antes del deterioro, o definirse de manera más específica según las necesidades del sistema y los recursos disponibles. La recuperación se plantea como un proceso iterativo que interviene directamente sobre los enlaces más críticos, buscando priorizar aquellos que maximizan el impacto global del sistema y respetando siempre las limitaciones estructurales impuestas por la red original.

El algoritmo se estructura en dos componentes principales que trabajan de manera complementaria: la “*función de recuperación*”, que define el proceso matemático de reparación y define los criterios para seleccionar los enlaces a reparar; y la “*función de evolución*”, que gestiona la dinámica temporal del algoritmo, incluyendo la transición entre daño y recuperación, además de supervisar el progreso del sistema hacia un estado funcional óptimo. A continuación, se presentan los detalles matemáticos y los principios que sustentan cada uno de estos componentes.

2.2.1. Función de recuperación

La función de recuperación constituye el núcleo del proceso de recuperación del algoritmo, ya que define las reglas que rigen cómo se reparan los enlaces dañados y establece los criterios para priorizar estas reparaciones. Esta función se centra en maximizar el impacto de cada iteración, asegurando que los recursos asignados para la reparación se utilicen de manera eficiente y estratégica.

El proceso de recuperación se modela como una intervención iterativa en la que, en cada paso, se aplica un incremento fijo, denotado por δ_r , a los pesos de los enlaces seleccionados. Este incremento representa los recursos asignados para mejorar el estado de los enlaces deteriorados, con la restricción de que el peso de los enlaces reparados no supere su valor original. Formalmente, el estado de un enlace $\varepsilon = (u, v)$ pasa de un peso dañado $\omega_d(\varepsilon)$ a un peso recuperado $\omega_r(\varepsilon)$, definido inicialmente como:

$$\omega_r(\varepsilon) = \omega_d(\varepsilon) + \delta_r. \quad (2.1)$$

Dado que el objetivo del algoritmo es restaurar progresivamente la funcionalidad global de la red sin exceder su configuración inicial, se introduce un límite superior basado en el peso original del enlace ω_0 . Este peso representa la capacidad que tenía el enlace antes de que comenzara el proceso de daño sobre la red. Con esta restricción, la ecuación (2.1) se redefine como:

$$\omega_r(\varepsilon) = \min\{\omega_d(\varepsilon) + \delta_r, \omega_0(\varepsilon)\}. \quad (2.2)$$

Esto asegura que:

- Si $\min\{\omega_d(\varepsilon) + \delta_r \leq \omega_0(\varepsilon)\}$, el enlace se repara sumando δ_r .
- Si $\min\{\omega_d(\varepsilon) + \delta_r > \omega_0(\varepsilon)\}$, el peso del enlace se ajusta al límite $\omega_0(\varepsilon)$.

Como el algoritmo es iterativo, el proceso de reparación se extiende a lo largo de múltiples iteraciones T . En cada iteración o tiempo T , el peso del enlace ε se actualiza mediante la ecuación:

$$\omega_{T+1}(\varepsilon) = \min(\omega_T(\varepsilon) + \delta_r, \omega_0(\varepsilon)). \quad (2.3)$$

De esta manera, cada reparación contribuye de forma positiva a la funcionalidad global de la red. Sin embargo, para que estas iteraciones sean efectivas, es fundamental definir un criterio estratégico que determine qué enlace debe ser reparado en cada paso.

Para garantizar que los recursos de reparación se asignen de manera estratégica y efectiva, el algoritmo utiliza un “*índice de prioridad conjunto*”, denotado como $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$. Este índice asigna un valor numérico a cada enlace, reflejando su relevancia relativa en el proceso de recuperación de la red. Se calcula combinando dos métricas clave:

1. **Daño acumulado en el enlace** $D(\varepsilon)$: Cuantifica cuánto se ha deteriorado el enlace con respecto a su estado original, definido como:

$$D(\varepsilon) = \omega_0(\varepsilon) - \omega_T(\varepsilon). \quad (2.4)$$

Un mayor daño acumulado implica una mayor urgencia de reparación.

2. **Centralidad de intermediación del enlace** $C(\varepsilon)$: Representa la importancia estructural del enlace dentro de la red, dada por la ecuación (1.2). Esta métrica captura tanto su relevancia estructural como su papel en la conectividad global.

Dado que las métricas $D(\varepsilon)$ y $C(\varepsilon)$ operan en escalas diferentes, se normalizan para hacerlas comparables y garantizar que ambas contribuyan proporcionalmente al cálculo

del índice. La normalización ajusta los valores al rango $[0, 1]$, mediante las expresiones:

$$\tilde{D}(\varepsilon) = \frac{D(\varepsilon)}{\max_{\varepsilon'} D(\varepsilon')}, \quad (2.5)$$

$$\tilde{C}(\varepsilon) = \frac{C(\varepsilon)}{\max_{\varepsilon'} C(\varepsilon')}. \quad (2.6)$$

Aquí $\max_{\varepsilon} D(\varepsilon')$ representa el mayor nivel de daño acumulado medido entre todos los enlaces de la red. De manera similar, $\max_{\varepsilon'} C(\varepsilon')$ denota el mayor valor de centralidad de intermediación entre los enlaces. De esta forma, cada enlace recibe una puntuación relativa a los valores más críticos en la red.

Por otra parte, el índice de prioridad conjunto se define como:

$$\mathcal{P}_r(\varepsilon) = \tilde{D}(\varepsilon) \times \tilde{C}(\varepsilon). \quad (2.7)$$

El diseño de este índice de prioridad se basa en la hipótesis de que una recuperación efectiva requiere un balance entre reparar los enlaces más deteriorados y priorizar los estructuralmente más importantes. Esto se logra al combinar ambos factores de forma multiplicativa, garantizando que influyen conjuntamente en la selección del enlace a reparar. Además, asegura que los recursos se asignen de manera proporcional al impacto global del enlace. Por ejemplo, un enlace con un daño elevado pero baja centralidad, o viceversa, tendrá una prioridad moderada, mientras que los enlaces que sobresalgan en ambas métricas serán seleccionados con mayor frecuencia.

En cada iteración, el algoritmo selecciona el enlace con mayor $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$, aplica el incremento δ_r a su peso y actualiza su estado. Este enfoque permite que las prioridades se ajusten de forma dinámica al estado actual de la red, ya que la prioridad de los enlaces disminuirá después de la reparación (pues disminuye el índice de daño acumulado), pero si un enlace sigue manteniendo una prioridad mayor que los demás, continuará siendo seleccionado hasta que su índice sea menor que el de los otros enlaces. De esta manera, el proceso de recuperación es adaptativo, pues responde a los cambios en las métricas de los enlaces y asegura que los recursos se dirijan estratégicamente hacia los elementos más críticos en cada iteración.

Cabe destacar que, al estar guiado por la selección de enlaces basada $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$, el proceso de recuperación no es aleatorio, sino que introduce efectos de memoria; las decisiones actuales dependen directamente de las reparaciones realizadas previamente. Esta dependencia convierte el proceso en no markoviano, de forma que la secuencia de reparaciones

influye significativamente en el resultado final, aprovechando la información acumulada en el índice de prioridad conjunto para optimizar el uso de los recursos disponibles.

Para evaluar la efectividad del índice conjunto $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$, se compara con dos estrategias alternativas de recuperación. Una basada en el daño acumulado, $\mathcal{P}_D(\varepsilon)$, que prioriza los enlaces más deteriorados ignorando su relevancia estructural, y otra basada en la centralidad de intermediación, $\mathcal{P}_C(\varepsilon)$, que prioriza los enlaces estructuralmente importantes pero descuida los enlaces más afectados por el daño. La comparación numérica de estas estrategias, presentada en la sección 2.3.2, muestra cómo el índice conjunto permite equilibrar las prioridades locales asociadas al daño y las globales relacionadas con la importancia estructural de la red.

2.2.2. Función de evolución

La función de evolución define el marco temporal y las reglas generales que rigen el comportamiento dinámico del algoritmo. Coordina el proceso de daño acumulado y recuperación, estableciendo las condiciones de transición entre ambas fases y monitoreando continuamente el progreso hacia un estado funcional óptimo de la red. Este monitoreo utiliza la funcionalidad global de la red $\mathcal{F}(T)$, calculada mediante la ecuación (1.11), no solo para determinar momentos clave como el inicio y la finalización de las fases de daño y recuperación, sino también para verificar que el sistema esté siendo llevado hacia un estado funcional óptimo. Además, esta métrica permite observar y mostrar de forma clara cómo el sistema se recupera a medida que avanza el algoritmo.

El algoritmo evoluciona a través de dos fases principales que se relacionan de manera secuencial: la fase de daño acumulado y la fase de recuperación. Durante la fase de daño acumulado, la red experimenta un proceso de deterioro preferencial progresivo en la fuerza de sus enlaces, como se detalló en el capítulo 1. Este daño se aplica sobre la red de forma iterativa hasta alcanzar un tiempo crítico, denotado como T_c , marcando el punto en el que la funcionalidad global de la red ha disminuido a un nivel lo suficientemente grave como para iniciar la fase de recuperación del sistema. La recuperación comienza inmediatamente después de T_c , en esta etapa, el daño acumulado se detiene y el algoritmo selecciona enlaces para su reparación utilizando el índice de prioridad $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$, definido previamente. Cada enlace seleccionado recibe un incremento δ_r en su peso, y su estado se actualiza siguiendo las reglas establecidas en la función de recuperación. Este proceso continúa iterativamente hasta que se alcanza un tiempo máximo (T_{max}) que puede estar asociado

a la disponibilidad de recursos o a la obtención de un nivel satisfactorio de funcionalidad global, denotado como \mathcal{F}_{optimo} . Una vez alcanzado este punto, el algoritmo finaliza el proceso, deteniendo la recuperación.

La transición entre estas fases se define formalmente como:

$$\text{Estado de la red en } \begin{cases} \text{Proceso de daño acumulado} & \text{si } 0 \leq T \leq T_c, \\ \text{Proceso de recuperación} & \text{si } T_c < T \leq T_{max}. \end{cases}$$

El monitoreo continuo de $\mathcal{F}(T)$ permite que el algoritmo tome decisiones clave a nivel global, como activar la fase de recuperación en el momento crítico y detenerla al alcanzar el estado deseado. Además de ser fundamental para mostrar e ilustrar cómo la red alcanza progresivamente su funcionalidad óptima.

2.3. Resultados ilustrativos

2.3.1. Identificación de elementos clave

En la figura 2.1 se ilustran las fases de daño acumulado y recuperación estratégica que conforman la función de evolución, introducida en la sección 2.2.2, para la red de metro de Toronto, $N = 10$ y $\varepsilon = 9$. El algoritmo de daño acumulado se ejecuta con el valor del parámetro $\alpha = 0.5$ hasta alcanzar un tiempo crítico, $T_c = 50$. A partir de este punto, se detiene el daño y comienza la fase de recuperación estratégica. Cabe destacar que, durante la recuperación, se utiliza el índice de prioridad conjunto, $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$ definido en la ecuación (2.7), que determina cuál enlace es seleccionado a reparar en cada paso de tiempo. El algoritmo de recuperación estratégica se aplica de acuerdo al parámetro $\delta_r = 0.1$, que representa los recursos disponibles para la reparación, hasta un tiempo máximo $T_{max} = 100$. En la figura 2.1 se presenta la funcionalidad $\mathcal{F}(T)$ para 100 realizaciones individuales y el promedio sobre las mismas, $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$. Las fases de daño acumulado y recuperación estratégica se distinguen mediante los colores rojo y verde respectivamente.

Para una mayor claridad del comportamiento de la evolución de las fases, la figura 2.2 muestra únicamente el promedio de la funcionalidad $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ sobre las realizaciones individuales, mostradas en la figura 2.1. En la figura 2.2 se destacan dos tiempos clave: el primero, el tiempo crítico T_c , indica el instante en el que la funcionalidad de la red ha disminuido hasta requerir intervención, marcando el cambio de la fase de daño acumulado

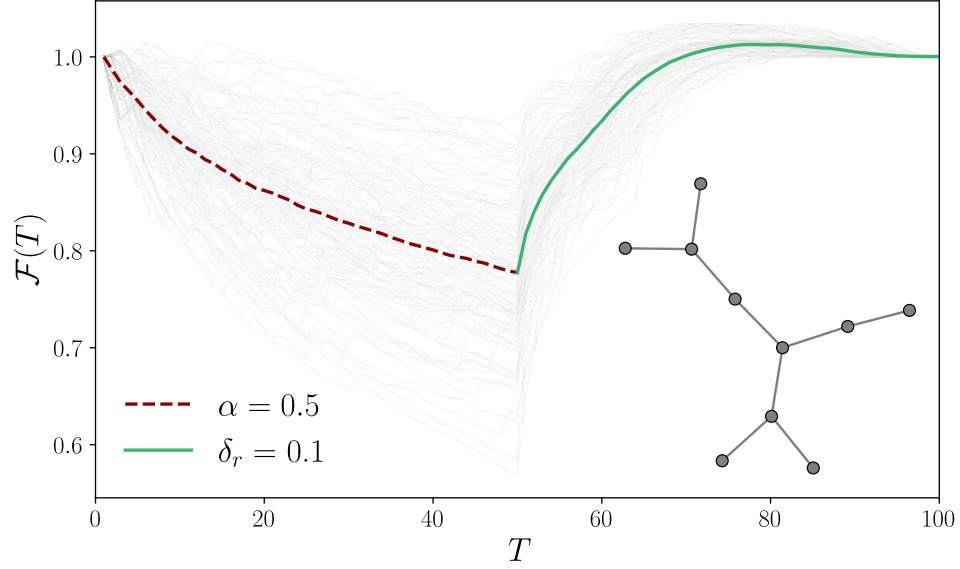


Figura 2.1: Curvas promedio de daño y recuperación para la red de metro de Toronto, con 100 realizaciones individuales y su promedio (en rojo la fase de daño acumulado y en verde la fase de recuperación estratégica). El algoritmo de daño se ejecuta hasta alcanzar un tiempo crítico $T_c = 50$, tras el cual se aplica la recuperación hasta $T_{max} = 100$

a la de recuperación estratégica; el segundo, es el tiempo de recuperación característico, T_r , que corresponde al instante en que la funcionalidad promedio por primera vez alcanza o supera el valor de 1.0, es decir, $\langle \mathcal{F}(T_r) \rangle \geq 1.0$. En este caso se configuró un tiempo crítico de $T_c = 50$ y se encuentra que el tiempo de recuperación característico de la red de metro de Toronto es $T_r = 70$.

Es importante resaltar que el daño se aplicó durante 50 pasos de tiempo, lo que llevó al sistema de una funcionalidad inicial considerada óptima, $\langle \mathcal{F}(T) \rangle = 1.0$, a un estado considerado crítico en $T_c = 50$. Mientras que, para restablecer la funcionalidad óptima, fue suficiente aplicar la recuperación estratégica durante 20 pasos de tiempo. Además, se observa que, en un intervalo específico posterior a T_r , la funcionalidad $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ se eleva por encima de 1.0, lo que indica que la recuperación logra, de manera temporal, un desempeño superior al óptimo inicial. Posteriormente, la funcionalidad descende, alcanzando nuevamente el valor de 1.0 en un tiempo T_f .

Estos hallazgos indican que la recuperación aprovecha el deterioro persistente en los enlaces de la red para mejorar su desempeño. Esta característica se conoce como la antifragilidad del sistema [40]. Con base en esta definición, se puede caracterizar un intervalo de antifragilidad de la forma $T_r \leq T \leq T_f$, donde T_f es el instante en que nuevamente la funcionalidad es 1.0, $\langle \mathcal{F}(T_f) \rangle = 1.0$. En este caso, $T_f = 95$. Si bien la región de antifragi-

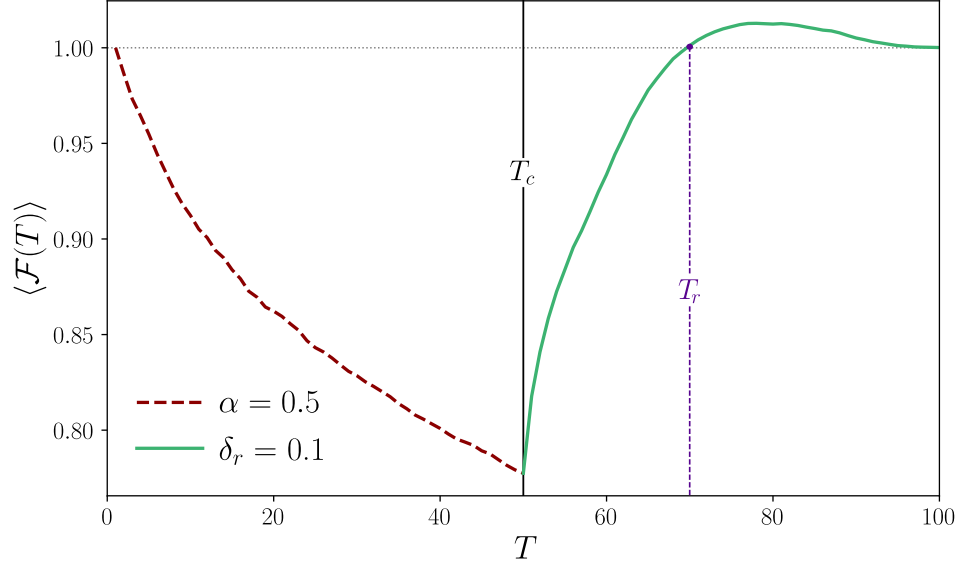


Figura 2.2: Evolución de la funcionalidad promedio $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ para la red de metro de Toronto, destacando los tiempos clave: $T_c = 50$, fin de la fase de daño, y $T_r = 70$, instante en el que la funcionalidad alcanza el valor de 1.0.

lidad se evidencia de manera clara, el análisis en profundidad de este fenómeno se dejará para futuros trabajos.

Estos resultados resaltan que, a pesar de que el daño se ejecuta con un parámetro relativamente fuerte ($\alpha = 0.5$) durante 50 pasos, el algoritmo de recuperación logra reestablecer la funcionalidad óptima en tan solo 20 pasos, utilizando $\delta_r = 0.1$, lo que se interpreta como una asignación de recursos baja. Esto muestra que, incluso con recursos muy limitados, el sistema se recupera rápidamente, alcanzando incluso intervalos en los que la funcionalidad supera el nivel inicial. Dicho hallazgo sugiere que detener la recuperación en el instante de máximo rendimiento podría permitir analizar la configuración resultante para optimizar aún más el funcionamiento del sistema.

Profundizando en la influencia de los recursos asignados, el análisis se extiende a evaluar cómo varían los tiempos de recuperación T_r de la red de metro de Toronto al modificar el parámetro δ_r . En la figura 2.3 se mantienen las mismas condiciones iniciales de daño y recuperación, con la salvedad de que en este caso, la recuperación se prolonga hasta $T_{max} = 150$. Además, se consideran tres valores de δ_r (0.05, 0.1 y 0.2). Los resultados muestran que, con $\delta_r = 0.05$, el tiempo de recuperación característico T_r alcanza un valor de 89, mientras que al incrementar a $\delta_r = 0.1$, T_r se disminuye notablemente a 69. Finalmente, con $\delta_r = 0.2$, T_r disminuye aún más hasta 61. Este patrón indica que, al aumentar los recursos disponibles en cada paso de tiempo el sistema se recupera en menos

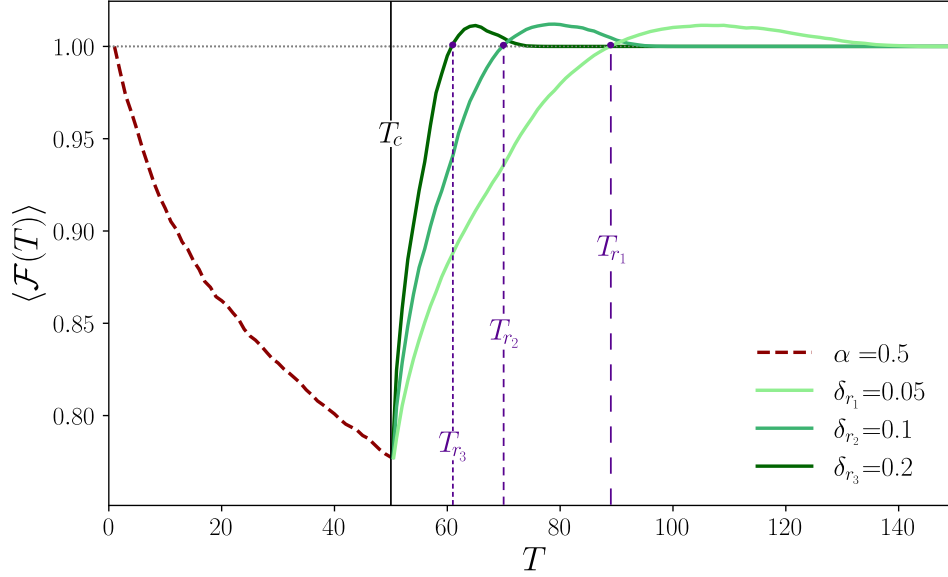


Figura 2.3: Curvas de evolución de la funcionalidad promedio $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ para la red de metro de Toronto, considerando tres valores distintos de $\delta_{r_1} = 0.05, \delta_{r_2} = 0.1, \delta_{r_3} = 0.2$, la recuperación se aplica hasta $T_{max} = 150$. Los tiempos de recuperación encontrados son respectivamente $T_{r_1} = 89, T_{r_2} = 69, T_{r_3} = 62$

pasos, aunque la reducción es mucho más pronunciada al pasar de 0.05 a 0.1 que de 0.1 a 0.2.

Por otra parte, en la figura 2.3 se evidencia que, una mayor asignación de recursos acelera el proceso de recuperación, pero reduce la duración de la región de antifragilidad, es decir, el sistema permanece menos pasos de tiempo con una funcionalidad promedio superior a la inicial. En contraste, valores menores de δ_r , aunque alargan el proceso total de recuperación, extienden el intervalo en el que se observan estados antifrágiles.

Estos hallazgos tienen importantes implicaciones prácticas. La eficiencia del algoritmo al trabajar con recursos limitados; especialmente con $\delta_r = 0.1$, que representa una baja asignación de recursos. Los resultados obtenidos reflejan el potencial de los algoritmos de reparación para aplicaciones en entornos donde se busca minimizar costos sin perjudicar el rendimiento del sistema. La relativa poca mejora al incrementar δ_r más allá de 0.1 sugiere que el sistema alcanza un punto de rendimiento óptimo, lo cual es especialmente valioso en contextos como los sistemas de transporte urbano. Además, este enfoque permite equilibrar la rapidez de la recuperación con la posibilidad de mantener desempeños superiores durante intervalos prolongados, abriendo la puerta a estrategias de reparación más adaptables a las particularidades del contexto y aumentando la eficiencia en la recuperación.

2.3.2. Estrategias de recuperación alternativas

Tal como se describe en la sección 2.2.1, la estrategia de recuperación planteada se basa en el índice de prioridad conjunto, $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$, definido en la ecuación (2.7). Para evaluar su efectividad, se contrastan los resultados obtenidos para la red de metro de Toronto con dos estrategias alternativas de recuperación: una basada únicamente en el daño acumulado, $\mathcal{P}_D(\varepsilon)$, y otra fundamentada en la centralidad de intermediación, $\mathcal{P}_C(\varepsilon)$. En la figura 2.4 se presentan las curvas de funcionalidad promedio $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ correspondientes a cada estrategia, bajo las mismas condiciones de daño y recuperación que en el escenario anterior, salvo que aquí se fija δ_r en 0.1.

En la figura 2.4 se observa que la estrategia basada en el índice conjunto, $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$, reduce significativamente el tiempo de recuperación característico (como se señaló previamente $T_r = 69$) y presenta intervalos de tiempo en los que $\langle \mathcal{F}(T) \rangle > 1.0$, lo que denota la presencia de estados antifrágiles. En contraste, la estrategia basada únicamente en el daño conduce a una recuperación más lenta, con un tiempo de recuperación $T_{r_D} = 97$ y la funcionalidad promedio nunca supera el valor de 1.0, lo que indica que dicha estrategia no genera estados antifrágiles. Por otro lado, la estrategia de recuperación fundamentada en la centralidad de intermediación, que prioriza los enlaces con mayor centralidad, no alcanza la funcionalidad óptima; si bien en un breve intervalo la funcionalidad se eleva

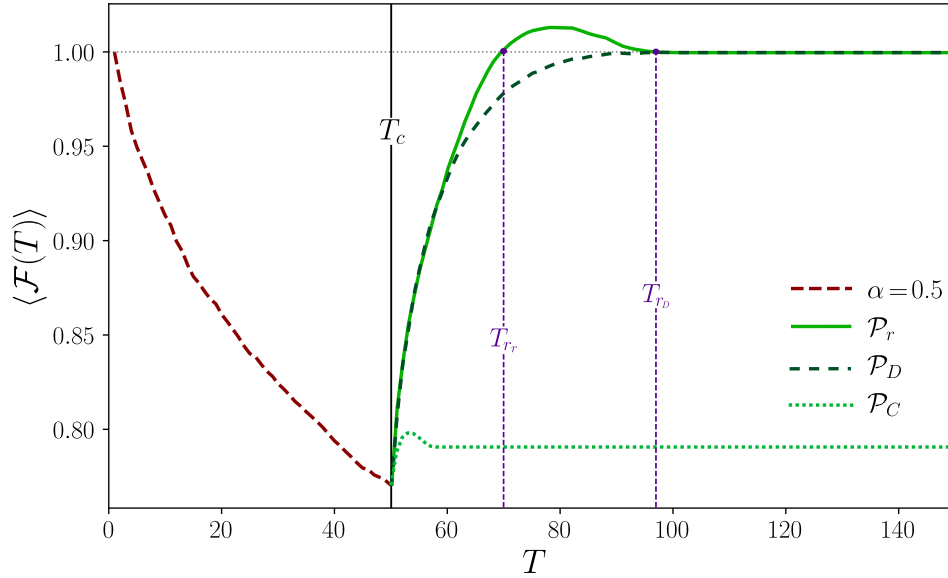


Figura 2.4: Comparación de las curvas de funcionalidad promedio $\mathcal{F}(T)$ para la red de metro de Toronto con tres estrategias de recuperación: basada en el daño acumulado $\mathcal{P}_D(\varepsilon)$, basada en la centralidad de intermediación $\mathcal{P}_C(\varepsilon)$ y basada en el índice conjunto $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$. Se fija $\alpha = 0.1$.

hasta casi 0.8, desciende inmediatamente y converge a un valor inferior, evidenciando la incapacidad de esta estrategia para lograr la recuperación del sistema.

Estos resultados confirman la ventaja del enfoque basado en $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$, al equilibrar eficazmente las prioridades locales y globales en el proceso de reparación. La presencia de intervalos antifrágiles, junto con un tiempo de recuperación notablemente menor, sugiere que la asignación óptima de recursos alcanzada mediante el índice conjunto es especialmente aplicable en contextos donde se busca minimizar costos sin comprometer el rendimiento.

En el ámbito de redes de transporte urbano, las estrategias de recuperación alternativas pueden entenderse como métodos más tradicionales de intervención. Por ejemplo, la estrategia basada en el daño consiste en reparar únicamente cuando el deterioro de las vías es elevado, sin considerar su impacto global, lo que no necesariamente optimiza la asignación de recursos. Por otra parte, la estrategia de centralidad de intermediación destina recursos únicamente a los enlaces considerados estructuralmente relevantes, sin atender al nivel real de daño, lo cual conduce a una recuperación incompleta. En contraste, la propuesta fundamentada en $\mathcal{P}_r(\varepsilon)$ equilibra tanto las necesidades locales asociadas al deterioro como las demandas globales de la red, permitiendo no solo restaurar la funcionalidad hasta su nivel óptimo, sino también superarlo. Dicha capacidad resulta de gran interés no solo en redes de transporte urbano, sino también en otros sistemas que requieran un uso eficiente de los recursos de forma que mejoren el desempeño del mismo.

Conclusiones

En este trabajo de investigación se propuso y se evaluó un algoritmo para la recuperación estratégica de sistemas complejos afectados por daño acumulado. Los resultados mostraron que este enfoque logra restaurar eficazmente la operatividad inicial de la red en pocos pasos de tiempo, incluso con recursos muy limitados, gracias al uso de un índice conjunto que integra información sobre el nivel de daño y la importancia estructural de los enlaces. Este índice mostró ser un criterio eficiente para priorizar intervenciones estratégicas y optimizar la asignación de recursos limitados, favoreciendo la recuperación rápida y efectiva del sistema, e incluso alcanzando estados antifrágiles donde el desempeño supera temporalmente al estado inicial.

Aunque en esta investigación se evaluó la recuperación únicamente luego de la fase de daño acumulado, el algoritmo de recuperación propuesto no depende de la manera particular en la que se genere el daño. Por tanto, resulta posible extender y validar su aplicabilidad en futuros estudios utilizando otros mecanismos de daño, lo que permitiría confirmar aún más su potencial generalizable y su efectividad para restaurar el desempeño óptimo en diversos contextos.

Adicionalmente, el planteamiento de una recuperación basada en reparaciones focalizadas de enlaces a partir de criterios combinados, representa una aproximación poco explorada hasta la fecha. Se sientan así bases para trabajos futuros que profundicen en la adaptación de este algoritmo a distintos procesos dinámicos sobre redes, integrando nuevos criterios en la asignación de prioridades. Del mismo modo, se vislumbra un amplio campo de aplicación en diversas áreas, desde infraestructuras deterioradas hasta sistemas biológicos, donde el desarrollo de técnicas más generales y robustas de estrategias de recuperación eficientes podría contribuir a expandir las bases matemáticas aquí planteadas y, con ello, brindar soluciones novedosas y efectivas en el análisis y restauración de sistemas complejos desde la ciencia de redes.

Bibliografía

- [1] E. Estrada. What is a complex system, after all? *Foundations of Science*, 29(4):1143–1170, 2024.
- [2] A. S. d. Mata. Complex networks: a mini-review. *Brazilian Journal of Physics*, 50:658–672, 2020.
- [3] G. Bianconi, A. Arenas, J. Biamonte, L. D. Carr, B. Kahng, J. Kertesz, J. Kurths, L. Lü, C. Masoller, A. E. Motter, et al. Complex systems in the spotlight: next steps after the 2021 nobel prize in physics. *Journal of Physics: Complexity*, 4(1):010201, 2023.
- [4] L. Turnbull, M.-T. Hütt, A. A. Ioannides, S. Kininmonth, R. Poeppl, K. Tockner, L. J. Bracken, S. Keesstra, L. Liu, R. Masselink, et al. Connectivity and complex systems: learning from a multi-disciplinary perspective. *Applied Network Science*, 3:1–49, 2018.
- [5] A. P. Riascos and J. L. Mateos. Networks and long-range mobility in cities: A study of more than one billion taxi trips in new york city. *Scientific Reports*, 10(1):4022, 2020.
- [6] E. Bullmore and O. Sporns. Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems. *Nature reviews neuroscience*, 10(3):186–198, 2009.
- [7] L. d. F. Costa, F. A. Rodrigues, and A. S. Cristino. Complex networks: the key to systems biology. *Genetics and Molecular Biology*, 31:591–601, 2008.
- [8] J. Bascompte. Networks in ecology. *Basic and applied ecology*, 8(6):485–490, 2007.
- [9] O. Artime, M. Grassia, M. De Domenico, J. P. Gleeson, H. A. Makse, G. Mangioni, M. Perc, and F. Radicchi. Robustness and resilience of complex networks. *Nature Reviews Physics*, 6(2):114–131, 2024.

-
- [10] A. Saxena and S. Iyengar. Centrality measures in complex networks: A survey. *arXiv preprint arXiv:2011.07190*, 2020.
 - [11] J. Wang, Y.-J. Zhang, C. Xu, J. Li, J. Sun, J. Xie, L. Feng, T. Zhou, and Y. Hu. Reconstructing the evolution history of networked complex systems. *Nature Communications*, 15(1):2849, 2024.
 - [12] E. D. Sun, T. C. Michaels, and L. Mahadevan. Optimal control of aging in complex networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(34):20404–20410, 2020.
 - [13] L. Eraso-Hernandez and A. Riascos. Influence of cumulative damage on synchronization of kuramoto oscillators on networks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 56(47):475001, 2023.
 - [14] A. P. Riascos, J. Wang-Michelitsch, and T. M. Michelitsch. Aging in transport processes on networks with stochastic cumulative damage. *Physical Review E*, 100(2):022312, 2019.
 - [15] A. Trehan. *Algorithms for self-healing networks*. PhD thesis, The University of New Mexico, 2010.
 - [16] X. Fan, X. Zhang, X. Wang, and X. Yu. A deep reinforcement learning model for resilient road network recovery under earthquake or flooding hazards. *Journal of Infrastructure Preservation and Resilience*, 4(1):8, 2023.
 - [17] A. M. Khaki, A. S. Mohaymany, and S. H. S. Baladehi. Evaluating the prioritization of transportation network links under the flood damage: By vulnerability value and accessibility indexes. *International Journal of Scientific Research in Knowledge*, 1(12):557, 2013.
 - [18] E. Mulowayi, V. Coffey, J. Bunker, and B. Trigunarsyah. The influence of critical infrastructure interdependencies on post-disaster reconstruction: elements of infrastructure interdependency that impede the post-disaster recovery effort. In *Proceedings of the 31st Annual Association of Researchers in Construction Management Conference, ARCOM 2015*, pages 135–144. Association of Researchers in Construction Management, 2015.
 - [19] Z.-H. Lin, M. Feng, M. Tang, Z. Liu, C. Xu, P. M. Hui, and Y.-C. Lai. Non-markovian recovery makes complex networks more resilient against large-scale failures. *Nature communications*, 11(1):2490, 2020.

-
- [20] L. K. Eraso-Hernandez, A. P. Riascos, T. M. Michelitsch, and J. Wang-Michelitsch. Random walks on networks with preferential cumulative damage: generation of bias and aging. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2021(6):063401, 2021.
 - [21] A. P. Riascos and J. L. Mateos. Random walks on weighted networks: a survey of local and non-local dynamics. *Journal of Complex Networks*, 9(5):cnab032, 2021.
 - [22] H. Sayama. *Introduction to the modeling and analysis of complex systems*. Open SUNY Textbooks, 2015.
 - [23] R. Diestel. *Graph theory*. Springer (print edition); Reinhard Diestel (eBooks), 2024.
 - [24] E. Estrada, N. Hatano, and M. Benzi. The physics of communicability in complex networks. *Physics reports*, 514(3):89–119, 2012.
 - [25] A. Lancichinetti, M. Kivelä, J. Saramäki, and S. Fortunato. Characterizing the community structure of complex networks. *PloS one*, 5(8):e11976, 2010.
 - [26] M. Girvan and M. E. Newman. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the national academy of sciences*, 99(12):7821–7826, 2002.
 - [27] A. P. Riascos. Dissimilarity between synchronization processes on networks. *Physical Review E*, 109(4):044301, 2024.
 - [28] D. Boyer, G. Ramos-Fernández, O. Miramontes, J. L. Mateos, G. Cocho, H. Larralde, H. Ramos, and F. Rojas. Scale-free foraging by primates emerges from their interaction with a complex environment. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Science*, 273:1743–1750, 2006.
 - [29] F. Iannelli, A. Koher, D. Brockmann, P. Hövel, and I. M. Sokolov. Effective distances for epidemics spreading on complex networks. *Physical Review E*, 95:012313, 2017.
 - [30] M. Naoki, A. P. Mason, and L. Renaud. Random walks and diffusion on networks. *Physics Reports*, 716-717:1–58, 2017.
 - [31] J. D. Noh and H. Rieger. Random walks on complex networks. *Phys. Rev. Lett.*, 92:118701, Mar 2004.
 - [32] A. P. Riascos and J. L. Mateos. Random walks on weighted networks: A survey of local and non-local dynamics. *Journal of Complex Networks*, 9:cnab032, 2021.

- [33] G. West. *Scale: The Universal Laws of Growth, Innovation, Sustainability, and the Pace of Life in Organisms, Cities, Economies, and Companies*. Penguin Press, New York, 2017.
- [34] T. B. L. Kirkwood. Understanding the odd science of aging. *Cell*, 120(4):437–447, 2005.
- [35] A. A. Cohen, L. Ferrucci, T. Fülöp, D. Gravel, N. Hao, A. Kriete, M. E. Levine, L. A. Lipsitz, M. G. M. Olde Rikkert, A. Rutenberg, N. Stroustrup, and R. Varadhan. A complex systems approach to aging biology. *Nature Aging*, 2(7):580–591, 2022.
- [36] A. P. Riascos and J. L. Mateos. Long-range navigation on complex networks using Lévy random walks. *Physical Review E*, 86:056110, 2012.
- [37] L. K. Eraso-Hernandez, A. P. Riascos, T. M. Michelitsch, and J. Wang-Michelitsch. Evolution of transport under cumulative damage in metro systems. *Int. J. Mod. Phys. C*, page 2450037, 2023.
- [38] S. Derrible. Wolfram demonstrations project: World metro networks, 2014.
- [39] S. Derrible. Network centrality of metro systems. *PloS One*, 7(7):e40575, 2012.
- [40] L. K. Eraso-Hernandez and A. P. Riascos. Antifragility of stochastic transport on networks with damage. *Phys. Rev. E*, 110:044309, Oct 2024.