Лекция по обработке и интерпретации сигналов №2

Тищенко Анастасия, 5030102/20401

• Код – набор кодовых слов.

Эффективные коды:

– длинные (n) → большое min расстояние

– сложность кодера и декодера

Лин. коды → G $m \cdot G = C$

• порождающая матрица лин. (n, k)-кода матрица размер $k \times n$, строки – базисные вектора лин. простр-ва

• Кодовые слова – лин. комбинации базисных векторов.

$m = \underbrace{(m_1, \dots, m_k)}_{k}$ $\vec{c} = \vec{m} \cdot G$

$\vec{c} = \underbrace{(c_1, \dots, c_n)}_{n}$

$\underbrace{\vec{h}}_{\text{проверка}} = (h_1, \dots, h_n)$ $c \in C$ $(\vec{c}, \vec{h}) = 0$

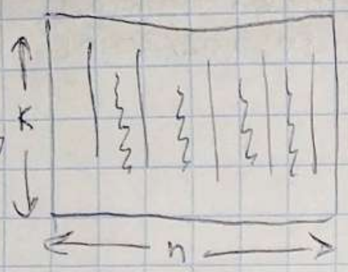
$G \cdot h^T = 0$ $k \times n \cdot (1 \times n)^T = k \times n \cdot n \times 1 = k \times 1$

• Какова размерность лин. пр-ва проверок?

H $G \cdot H^T = 0$

G $k \times n$ – k-лин. независ. строк – ранг

$k \updownarrow \underbrace{\boxed{}}_{n}$ ⇒ в G $\exists$ k – лин. независ. столбцов.



индексы ЛН образуют ~~инф. совокупность~~.

остальные — ~~проверочная совокупность~~.

$F^{-1}(\,)$

$$G \cdot h^T = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k,1} & g_{k,2} & \cdots & g_{k,k} \end{pmatrix}}_{\text{инф. совокупность}}\underbrace{\begin{pmatrix} g_{1,k+1} & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k,k+1} & \cdots & g_{k,n} \end{pmatrix}}_{\text{проверочная}} \cdot \overset{h^T}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ h_{k+1} \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}} \Big\} n-k$$

$h_{k+1} \ldots h_n$ — зафиксируем

$x_1, \ldots, x_k$

$$\vec{g}_i = \begin{pmatrix} g_{1,i} \\ \vdots \\ g_{k,i} \end{pmatrix} \qquad \vec{g}_1 \cdot x_1 + \vec{g}_2 \cdot x_2 + \ldots + \vec{g}_k \cdot x_k + \vec{g}_{k+1} \cdot h_{k+1} + \ldots +$$

$$+ \vec{g}_n \cdot h_n = \varnothing \qquad \vec{g}_1 \cdot x_1 + \vec{g}_2 \cdot x_2 + \ldots + \vec{g}_k x_k = -(\vec{g}_{k+1} h_{k+1} + \ldots + \vec{g}_n h_n)$$

$H = (n-K) \times n$ $\quad r = n-K$ — избыточность кода

$$G \cdot H^T = \varnothing$$

$$G_{K \times n} = [\,I_{K \times K} \;\; P\,] = \Big[\underbrace{\begin{smallmatrix} 1 & & 0 & P \\ & 1 & & \\ 0 & & 1 & \end{smallmatrix}}_{n}\Big] \Big\} \text{ систем. вид}$$

$$c = m \cdot G = (\underbrace{m}_{K} \;\; \underbrace{m \cdot P}_{r = n-K})$$

$$H = (P^T \; I_r)$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_{sys} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{=P}{}$$

$$H_{sys} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F^{-1}_{()}$ $H = \begin{pmatrix} 100101 \\ 010110 \\ 001011 \end{pmatrix}$

$$\left[d_{min} = \min_{m \neq 0} w(m \cdot G) \right] \qquad 2^k - 1$$

(n,k)-код $\quad 2^k - 1 \quad R = \frac{k}{n} > \frac{1}{2}$

$G \quad k \big| \underset{n}{\_\_\_} \qquad H \quad n-k \big| \underset{n}{1000}$

$c \cdot H^T = \varnothing \qquad w(c) = 3$

$c = (\underline{1} \ldots 0 \ldots \underline{1} \ldots \underline{1} \ldots 0)$

столбцы H лин. завис.

- Чтобы найти d_{min} → найти min набор лин. завис. столбцов H.

<u>Теорема</u>: min расстояние лин. (n,k)-кода равно d в том и только в том случае, когда $\forall\, d-1$ столбец провер. матрицы лин. независ. и $\exists$ набор из d лин. завис. столбцов.

- Сколько в H лин. независ. столбцов?

<u>Теорема</u> (Граница Синглтона) min расст. лин. (n,k)-кода удовл. нерав-ву: $d \leq \underbrace{n-k}_{r}+1$

- Дуальный код к данному – лин. код, порождающая матрица которого явл провер. матрицей данного кода.

$G_1 \cdot H_1^T = 0 \quad G_2 = H_1 \quad H_2 = G_1$

<u>Примеры кодов.</u>

$(n, n-1)$-код $\quad H = (1 \dots 1)$

$$G \quad \left(I_{n-1 \times n-1} \;\middle|\; \vdots \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 1 \\ & 1 & & 1 \\ 0 & & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Код с проверкой на четность.

не может исправить ошибки, <u>но</u> может обнаружить $\forall$ ошибки нечетного веса.

Строим код, который исправляет любые одиночные ошибки.

$$m, \; c = m \cdot G, \; c + \overset{w(e)=1}{e}$$

$$(c+e)H^T = \underbrace{c \cdot H^T}_{0} + e \cdot H^T = e \cdot H^T = \vec{h_j}$$

$[0, 0, 0 \dots 1 \dots 0]$

$$e \cdot \left[\; \vdots \; \underset{\vec{h_j}}{\vdots} \; \vdots \; \right] = \vec{h_j}$$

$n - k = 3$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$k = 2^r - 1 - r$

$n = 2^r - 1$

коды Хемминга.

Д6. коды Хемминга оптимальны в том смысле, что не сущ. кодов (даже нелин.) с бо́льшим числом кодовых слов с расст. 3 при такой же длине.

$G = H_{\text{хэмм}}$

Для дуальных кодов кодам Хемминга $d = 2^{r-1}$ (симплексный код)

• Расшир. код Хемминга

$$H \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$(n,k) = (7,4) \to (8,4)$

2^{r-1}

$2^{r-1} - r$