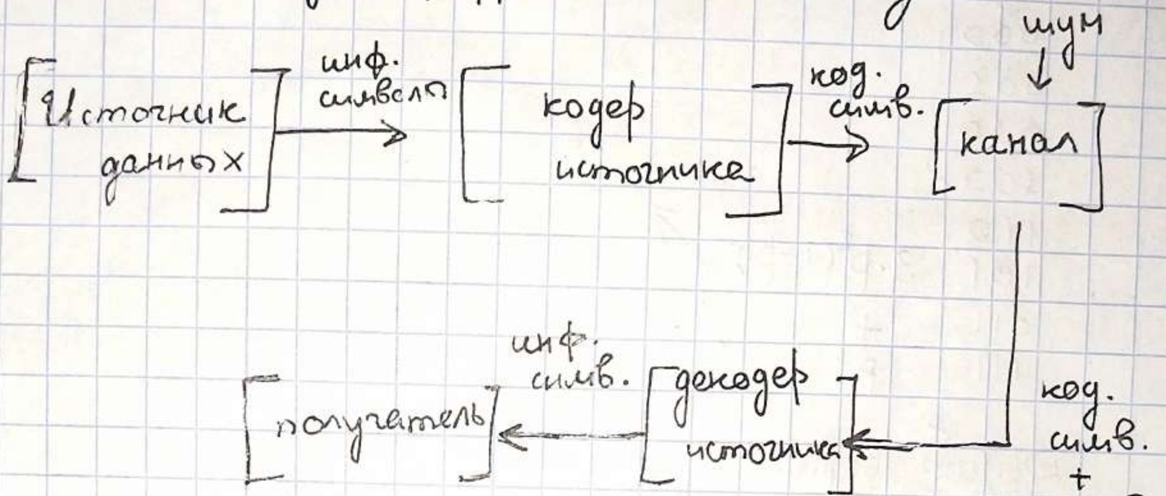
Обработка и интерпретация сигналов

Тищенко А.Д.
5030102/20401

Лекция № 1

Упрощенная модель цифровой системы связи.

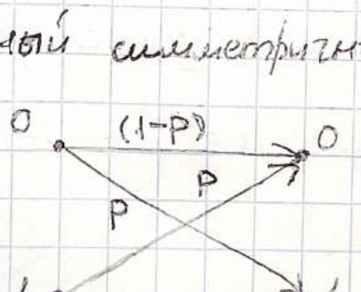


Мы будем работать с дискретными последовательностями.

$GF(2)=\{0,1\}$

[источник] $\xrightarrow{01001\ldots}$ [кодер] $\xrightarrow{\overbrace{01100\ldots}^{\text{больше, чем до}}}$ [канал]

Двоичный симметричный канал



p - переходная в-сть (в-сть ошибки одного символа)

$p=10^{-3}$

Для улучшения можно: дублировать данные.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \to 000 \\ \underbrace{1}_{\text{инф. символ}} \to \underbrace{111}_{\text{код. симв.}} \end{array}\right\} \text{кодирование}$$

Я есть ДСК $p=10^{-3}$

P_e (при дублировании) $\simeq 10^{-6}$

000
↓
$\left.\begin{array}{l}000\\001\\010\\100\end{array}\right\}$
110
101 $\quad 3\cdot p^2(1-p)$
011 $\quad +$
111 $\quad p^3$ $\Big) \nearrow \approx 10^{-6}$

Другой вариант:

k: 00 → 00000 (1) (n)
01 → 10110 (2)
10 → 01011 (3)
11 → 11101 (4)

[код исправляет 1 ошибку.]

ДСК $p=10^{-3}$

Сколько ошибок может исправить такой код?

Мы можем показать, что этот код линеен.

Я пришло: $\underline{1}0000$ ⇒ придем к (1), т.к. меньше всего отличий.

[Второй вариант оптимальнее]

$R=\frac{k}{n}$ - скорость кода.

Для ДСК с перех. вер. p вводится пропускная способность:

$$C=1-h(p)$$

$$h(x)=-x\cdot\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)$$ (энтропия двоичного ансамбля)

При скорости передачи R меньшей величины C, может быть обеспечена сколь угодно малая вер-сть ошибки декодирования за счет увеличения длины используемых кодов. (=> увеличение сложности код-я и декод-я). Если R > C => надежная передача невозможна.

Вес Хемминга. Если x - кодовое слово, то $w(x)$ наз. весом Хемминга и опр. как число ненулевых эл-тов в x.

Расстояние Хемминга. x и y → $d(x,y)$ опр. как кол-во эл-тов слова, которые отличаются друг от друга.

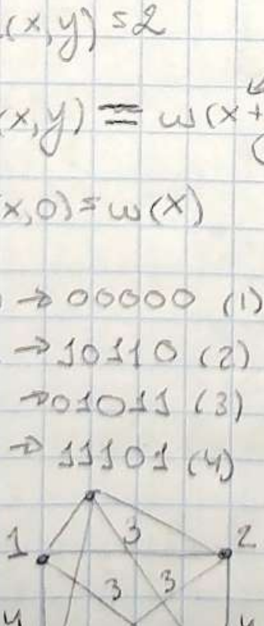
001101 - 3; 101001 - 3

$d(x,y) = 2$

$d(x,y) = w(x \overset{\text{побитово по mod2}}{+} y)$

$d(x,0) = w(x)$

00 → 00000 (1)
01 → 10110 (2)
10 → 01011 (3)
11 → 11101 (4)



y \ x	1	2	3	4
1	0	3	3	4
2	3	0	4	3
3	3	4	0	3
4	4	3	3	0

$d(x,y)$

d_{min} - мин. расст. кода

$$d_{min} = \min_{x \neq y} d(x,y)$$

Линейный код. Код, в котором сумма двух любых кодовых слов тоже является кодовым словом.

C – мн-во кодовых слов.

$\forall x, y \in C: (x+y) \in C \qquad GF(2)$

$$z = x+y \in C$$

$$d(x,y) = w(x+y) = w(z) = w(z+0) = d(z,0)$$

$$d_{min} = \min_{x,y \in C,\, x \neq y} d(x,y) = \min_{z \in C;\, z \neq 0} w(z)$$

Линейный q-й код. $(GF(q))$ (n,k) код

$\forall$ k-мерное подпр-во пр-ва F_q^n всевозможных векторов длины n.

$\exists\ q = 3 \quad k = 2 \quad n = 5$

$q^k \qquad GF(3) = \{0,1,2\}$

F_3^2

$q^k = 3^2 = 9$

00
01
02
10
11
12
20
21
22

00000

$q^n = 3^5$

F_3^5

00000
10110
01011
11101

$$\begin{bmatrix} 10110 \\ 01011 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{matrix}$$

$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = c_1$

$0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = c_3$

$1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = c_2$

$1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = c_4$

Порождающей матрицей (n,k) кода наз. матрицу размера $k \times n$, где строки базис. вектора.

Кодовые слова - лин. комбинации базис. векторов.

G - порожд. матрица.

m - информ. слово

$m = (m_1, \ldots, m_k)$ $\quad 2^k$

c - кодовое слово

$c = m \cdot G$

Предположим, что для некоторого вектора

все баз. слова

$h = (h_1, \ldots, h_n)$ удовл.: $(\bar{c}_i, \bar{h}) = $ $\quad \bar{c}_i = (c_1, \ldots, c_n)$

$= c_1 \cdot h_1 + c_2 \cdot h_2 + \ldots + c_n h_n = \varnothing$

00000
10110
01011
11101

$h = [00111]$ - ортог. коду

↓ проверка

$G \cdot h^T = 0$

$n-k$ проверок $\quad 3$

H = размера $(n-k, n)$ $\quad 3,5$

$G \cdot H^T = \varnothing$

$c \cdot H^T = \varnothing$

↓ провер. матрица