Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

I СЕМЕСТР

Лектор: *Олег Константинович Подлипский*

Автор: *Анастасия Петракова*
Проект на Github

осень 2023

Содержание

1 Матрицы

1.1 Матрицы. Специальные виды матриц

Определение 1.1. *Матрицей* $m \times n$ называется упорядоченный набор из m*n чисел, записанных в таблицу, состоящую из m строк и n столбцов.

Обозначения:

- A, B - матрицы
- (...), ||...|| - матрицы
- a_{ij} - элемент матрица, расположенный в i-той строке j-того столбца

Специальные виды матриц

- *строка* — матрица, состоящая из 1 строки и n столбцов
- *столбец* — матрица, состоящая из n строк и 1 столбца
- *квадратная* — матрица, в которой количество строк равняется количеству столбцов
- *единичная* — матрица, элементы главной диагонали которой являются единицами, а остальные — нулями, обозначается буквой E
- *треугольная* — матрица, у которой элементы над (нижняя треугольная) или под главной диагональю (верхняя треугольная) являются нулями
- *диагональная* — матрица, у которой все элементы кроме элементов главной диагонали являются нулями, обозначается diag
- *симметрическая* — матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали
- *кососимметрическая* — матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали, но противоположны по знаку, элементы главной диагонали — нули
- *нулевая* — матрица, полностью состоящая из нулей

При этом к квадратным матрицам относятся единичные, треугольные, диагональные, симметрические и кососимметрические.

1.2 Операции над матрицами

1. A = B, если матрицы имеют одинаковые размеры и равны поэлементно
2. Сложение $C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$ определено для матриц одного размера, при чём $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
3. Умножение матрицы A на число $\alpha \in \mathbb{R}$ $B = \alpha A, b_{ij} = \alpha a_{ij}$
4. Транспонирование матрицы $A^T_{m\times n} = B_{n\times m}$, где $b_{ij} = a_{ji}$

Свойства операций:

- $\triangleright$ A + B = B + A
- $\triangleright$ A + (B + C) = (A + B) + C
- $\triangleright$ α(A + B) = αA + αB
- $\triangleright$ $(\alpha\beta)\mathrm{A} = \alpha(\beta A)$
- $\triangleright$ $(\alpha+\beta)\mathrm{A} = \alpha A + \beta A$
- $\triangleright$ $A^T = A$ для симметрической матрицы
- $\triangleright$ $A^T = -A$ для кососимметрической матрицы
- $\triangleright$ $(A^T)^T = A$
- $\triangleright$ $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $\triangleright$ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

1.3 Определитель(детерминант) матрицы

Определение 1.2. *Определитель(детерминант) матрицы* — функция или числовая характеристика квадратной матрицы. Обозначается как det A, |A|.

Определитель n-мерной матрицы вычисляется как

1. $|a_{11}| = a_{11}$, при n = 1
2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$ - $a_{12}a_{21}$, при n = 2
3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - $a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$ - $a_{11}a_{23}a_{32}$ - $a_{12}a_{21}a_{33}$ - $a_{13}a_{22}a_{31}$, при n = 3

1.4 Решение систем линейных уравнений

Определение 1.3. *Система линейных уравнений* — система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы

b = $\begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов

(A | b) = $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & |b_1 \\ ... & ... & ... & |... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & |b_m \end{pmatrix}$ — расширенная матрица системы

Совместная система имеет хотя бы одно решение, иначе система считается *несовместной*.

Система называется *однородной*, если $\begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, иначе *неоднородной*.

Теорема 1.1. *Однородная система всегда совместна.*

Доказательство. Если $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, то система имеет решение. □

Правило Крамера (для двухмерной матрицы). Система $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ имеет единстывенное решение $\longleftrightarrow$ $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$.

Решения могут быть найдены по *формуле Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \text{где}$$

Δ – определитель матрицы системы;
$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Свойства детерминанта:

- ▷ det A^T = det A
- ▷ определитель треугольной (и диагональной) матрицы равен производонию диагональных элементов
- ▷ det E = 1
- ▷ если поменять местами две строки, то детерминант умножится на -1
- ▷ если в матрице есть нулевая строка, то det A = 0

1.5 Умножение матриц

Умножение определено только для матриц с количеством столбцов в первой, равным количеству строк во второй.

$$\begin{pmatrix} a_1 & ... & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + ... + a_nb_n \end{pmatrix}$$

Матрица C, являющаяся результатом умножения матрицы $A_{n\times m}$ на матрицу $B_{m\times k}$, имеет размеры $n \times k$, причём $c_{ij} = \sum_{S=1}^{m} a_{is}b_{sj}$.

Если AB = BA, то такие матрицы A и B называются *перестановочными*. Так, единичная матрица является перестановочной с любой другой матрицей подходящего размера.

Теорема 1.2. *Если определено A(BC), то определено и (AB)C, а результаты этих операций равны.*

Доказательство. Пусть матрицы A, B и C имеют размеры соответственно $m \times n, n \times p$ и $p \times q$. Тогда умножение для них определено и выполняется

$$\begin{cases} A \cdot (B \cdot C) = A \cdot (BC)_{n \times q} = (ABC)_{m \times q} \\ (A \cdot B) \cdot C = (AB)_{m \times p} \cdot C = (ABC)_{m \times q} \end{cases} \longrightarrow \text{мы доказали равенство размеров.}$$

Докажем равенство элементов.
$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $(AB)C_{il} = \sum_{j=1}^{p} (AB)_{ij} \cdot c_{jl} = \sum_{l=1}^{p} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k_j}) \cdot c_{jl} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{p} b_{kj} c_{jl} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (BC)_{kl} = A(BC)_{il}$ □