SUBJECT TO THE STATE DYNAMICS $x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$. THE MATRIX N IS SET TO ZERO WHEN OMITTED. ALSO RETURNED ARE THE RICATTI EQUATION SOLUTION S:

$$A^T S A - S - (A^T S B + N)(B^T S B + R)^{-1}(B^T S A + N^T) + Q = 0$$

Exercícios - Resolução de Testes

Teste 2009/2010

1) Em que consiste a técnica de colocação de polos?

→ A técnica de colocação dos polos consiste num método de projeto de controladores baseado em modelos internos do sistema, cuja a ideia é calcular o feedback de modo a que os polos em malha fechada se mantenham.

→ Permite determinar o ganho do controlador, seguindo a lei de controlo $u(t) = -Lx(t)$. Esta técnica apenas pode ser aplicada a sistemas controláveis.

2) Explique porque o regulador LQ é um regulador ótimo. Qual o critério utilizado? Quais os parâmetros do projecto? Que significam?

Pois selecciona os polos em malha fechada de forma a haver um balanço entre os erros do sistema e o esforço do controlo, tendo como objetivo minimizar ao máximo os seus valores.

Os seus parâmetros são assim:

↳ Q - pesa o tamanho do estado - erro

↳ R - pesa o controlo - esforço do sistema

3) Considere o sistema:

$$x(kh+h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(kh) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(kh)$$

Determine pela técnica de colocação de polos, os ganhos da lei de controlo $u(t) = -Kx(t)$ de modo a que o sistema em malha fechada apresente um comportamento sobreamortecido com coeficiente de amortecimento de 1 e uma frequência natural de oscilação 1.

→ Sabendo que a equação do sistema de 2ª ordem é:

$$s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 = 0$$

Assim sendo

$$s^2 + 2s + 1 = 0 \Leftrightarrow s_1 = \frac{-3}{2} \lor s_2 = \frac{-1}{2}$$

→ Começemos por verificar se o sistema é controlável $(\det(W_c) \neq 0)$

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

logo $W_c = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(W_c) = 16 \Leftrightarrow$ sistema controlável

→ Sabendo que o método de Ackermann:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} W_c^{-1} \, P(\phi)$$

1) Calculando W_c^{-1}

$$W_c^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(W_c)}{\det(W_c)} = \frac{\begin{bmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}}{-16} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Calculando $P(\phi) = \phi^2 + p_1 \phi + p_2 I$

$$\phi^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

logo $P(\phi) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_4$$

→ Por último

$$L = [0 \quad 1] \; W_c^{-1} \; P(A)$$

$$= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Teste: 29 de Setembro de 2015

① Dado um sistema descrito em espaço de estados, definido pelas matrizes A e B seguintes. Determine valores de α que resultam num sistema não-controlável. Justifique.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

→ Para o sistema não ser controlável é necessário que

$$\det(W_c) = 0$$

Logo temos de determinar a matriz W_c que é dada por

$$W_c = [B \quad AB]$$

Assim sendo,

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

Resultando assim

$$W_c = \begin{bmatrix} 1 & -2+\alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \det(W_c) = -\alpha - [\alpha(-2+\alpha)] =$$

$$= -\alpha + 2\alpha - \alpha^2 =$$

$$= -\alpha^2 + \alpha$$

Sendo assim $\det(W_c) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\alpha^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 1$ //

2) Uma representação em espaço de estados possível para o sistema massa - mola - amortecedor é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\zeta w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t) \qquad \begin{aligned} 2\zeta w_n &= c/m \\ w_n^2 &= k/m \end{aligned}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= z(t) \\ x_2(t) &= \dot{z}(t) \end{aligned}$$

1) Determine a matriz de ganhos do controlador ($u = -Kx$) de modo a que o sistema em malha fechada opere no regime sub-amortecido, com a resposta ao degrau unitário a atingir uma sobre-elongação de 4%, e com um tempo de pico aproximadamente igual a 1 seg. Considere $K = m = 1$ e que o sistema em malha ~~fechada~~ aberta não apresenta oscilações. Indique todos os passos da resolução do exercício. Faça todas as considerações que achar conveniente.

→ Em malha aberta não há oscilações, logo $\zeta = 1$

↳ Como $k = m = 1 \Rightarrow w_n^2 = 1 \Leftrightarrow w_n = 1$

Assim $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & 2\zeta w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

↳ Como $t_p = 1 \Rightarrow w_d = \pi$

→ Em malha fechada: $s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = 0$

logo como $PO\% = 4\%$

↳ $\ln(0{,}04) = \dfrac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}04) \times \sqrt{1-\zeta^2} = \zeta\pi$

$\Leftrightarrow 1 - \zeta^2 = \dfrac{(\zeta\pi)^2}{\ln^2(0{,}04)}$

$\Leftrightarrow \ln^2(0{,}04)\zeta^2 + (\zeta\pi)^2 = \ln^2(0{,}04) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \zeta^2 = \dfrac{\ln^2(0{,}04)}{\ln^2(0{,}04) + \pi^2}$

$\Leftrightarrow \zeta = 0{,}7156$

↳ Se $T_P = 1s$ ⇒ $1 = \dfrac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-0{,}7156^2}}$ ⇒ $\omega_n = 4{,}418$

Sendo assim $\begin{cases} p_1 = 2\xi\omega_n = 2 \times 0{,}7156 \times 4{,}418 = 6{,}438 \\ p_2 = \omega_n^2 = 4{,}493^2 = 20{,}23 \end{cases}$

→ Temos então de determinar a matriz L

→ Pelo método de Ackerman

1) Determinar $W_c = [B \ \ AB]$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2) Determinar W_c^{-1}

$$W_c^{-1} = \frac{\text{adjunta}(W_c)}{\det(W_c)} = \frac{\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Determinar o polinômio $P(A)$

$$P(A) = A^2 + p_1 A + p_2 I$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

logo

$$p(A) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 6{,}438 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + 20{,}23 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19{,}23 & 4{,}438 \\ -4{,}438 & 12{,}354 \end{bmatrix}$$

Logo $L = [0\ 1]\ Wc^{-1}\ P(A)$

$$= [0\ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19,23 & 4,432 \\ -4,432 & 19,174 \end{bmatrix}$$

$$= [19,23 \quad 4,432]$$

Sendo assim $u = -Lx$

$$\Rightarrow u = -[19,23 \quad 4,432]\, x$$

③ Considere o sistema dinâmico dado por:

$$x' = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} u \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Admitindo que o sinal de controlo seja $u(t) = -Kx(t)$ com referência nula calcular a matriz ganho da realimentação K ótima tal que o seguinte índice de desempenho seja minimizado:

$$J = \int_0^\infty u^T(t) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)\, dt$$

Quais os parâmetros de projeto? Que significam?

Para resolver este exercício é necessário recorrer ao Matlab

1) Definir o sistema

A = [-0,5 0,5; 3 -1]

B = [2 1, 2 0]

C = [1 0; 0 1]

D = [0 0]

2) Definir os parâmetros do projeto

Q = [0 0; 0 0]

R = [2 0; 0 1]

3) Aplicar lqr (isto dá-nos a matriz K)

(K, P, e) = lqr(A, B, Q, R)