Apprentissage Probabiliste

Par

Abdellatif El Afia

Plan de cours

1. Chaine de Markov à Temps Discret
2. Chaine de Markov à Temps Continu
3. Chaine de Markov Caché à Temps Discret
4. Chaine de Markov Caché à Temps Continu
5. Processus de décision Markovien
6. Apprentissage par Renforcement

Chaine de Markov à Temps Discret

1. Processus Stochastique
2. Chaine de Markov a temps discret
3. Probabilité et matrice de transition
   a) Graphe représentatif
   b) Classification des états et chaines
   c) Chaine de Markov périodique
4. Comportement transitoire et asymptotique
   a) Les chaînes irréductibles
      - Les chaînes irréductibles apériodiques
      - Les chaînes irréductibles périodiques
   b) Les chaînes réductibles
      - Les chaînes absorbantes

Processus Stochastique

Définition :

- Fonction aléatoire généralement dans le temps d'une variable aléatoire $\{X_t\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$
- Distribution de probabilité sur un espace de chemins
- Phénomène temporel où intervient le hasard
- Système dynamique pouvant se trouver dans différents configurations appelée état

On désigne par:

- X_t est une variable aléatoire dont l'indice t est le temps.
  - Lorsque t est dénombrable on parle du temps discret
  - Si non on parle du temps continu.
- S est l'ensemble des résultats de ces variables qui est appelée espace d'état.
  - Si S est fini ou dénombrable donc le processus est appelé chaine.

Processus stochastique

Exemple

1. $X_t = t \quad \forall t \; avec \; Prob = 1$

2. $X_t = t \quad avec \; Prob = \frac{1}{2}$ et $X_t = -t \; avec \; Prob = \frac{1}{2}$

3. $X_t = \begin{cases} t & avec \;\; Prob = \frac{1}{2} \\ -t & avec \;\; Prob = \frac{1}{2} \end{cases}$

- Quelles sont les dépendances dans la séquence de valeurs?
- Quel est le comportement à long terme de la séquence?
- Quels sont les événements aux limites?

Processus stochastique

***Exemple:* Marche aléatoire**

Soit $\{Y_i\ ,\ \mathrm{i} \in \mathbb{N}\}$ des variables aléatoires de même loi et indépendantes(i.i.d)

$\{X_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une marche aléatoire si

$$X_0 = 0 \quad et \;\; X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

X_n est-elle une chaîne de Markov(le futur ne dépend que du présent)

Si Y_i une suite de variables de Bernoulli i.i.d. centrées de paramètre p, c'est-à-dire $\mathrm{P}(Y_i = 1) = p$ et $\mathrm{P}(Y_i = -1) = 1 - p = q$

On peut interpréter:

- X_n comme la fortune d'un joueur de roulette ou de pile ou face(marche aléatoire simple).
- La probabilité de gagner pour le joueur est p et sa mise est supposée unitaire
- Y_n désigne le n-ième tirage
- La marche est appelée symétrique si $p = q = \frac{1}{2}$

Processus Stochastique

Exemple : Gestion de stock

- On s'intéresse au nombre de pièces d'un même type en stock dans un entrepôt,
- à différents instants (t_n) $n \in \mathbb{N}$, par exemple à chaque fin de journée ou de semaine,
- la demande pour ce type de pièces dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}[$ est une variable aléatoire entière D_n. La suite des v.a. $(D_n), n \in \mathbb{N}$ est supposée indépendante et de même loi connue.
- La politique de gestion est la suivante :
  - lorsque le niveau du stock à un des instants (t_n) descend en dessous d'un seuil s fixé on se réapprovisionne de façon à ramener le stock à son niveau maximal S déterminé par exemple par la taille de l'entrepôt ou les moyens financiers de l'entreprise.
  - On admet que la livraison intervient sans délai, c'est-à-dire avant le début de la période suivante.

$X_n =$ nombre de pièces en stock dans l'entrepôt à l'instant t_n

La taille X_n du stock à l'instant t_n vérifie $\forall n \in \mathbb{N} = \begin{cases} X_{n+1} = (X_n - D_n)^+ & si\ s \leq X_n \leq S \\ X_{n+1} = (S - D_n)^+ & si\ X_n \leq s \end{cases}$

Chaine de Markov a temps discret

Propriété de Markov

la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs, étant donné les états passés et l'état présent, ne dépend en fait que de l'état présent et non pas des états passés

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

Chaine de Markov

Processus aléatoire portant sur un nombre finie d'état avec des probabilités de transition sans mémoire

Chaine de Markov a temps discret

- Processus a temps discret
- S est fini ou dénombrable
- Processus satisfait la propriété de Markov

Probabilité et Matrice de transition

Probabilité de transition :

$\boldsymbol{p_{ij}}$ c'est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en une étape. Elle est égale aussi à la probabilité conditionnelle que le système se retrouve dans l'état j à l étape suivante sachant qu'il se trouve actuellement à l'étape i.

$$p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

Matrice de transition :

$\boldsymbol{P = (pij)}$ est la matrice dont l élément (i, j) est égale à la probabilité de transition en une étape de l'état i à l'état j et elle appelé aussi matrice stochastique .Elle est caractérisé par:

- p_{ij} >0
- $\sum_j p_{ij} = 1 \quad \forall i$

Probabilité et Matrice de transition

Exemple: Endettement

On pense qu'un individu non endetté a une possibilité sur 3 de devenir endetté. Un individu endetté a une possibilité sur 6 de régler ses dettes

On représente une chaîne de Markov avec une matrice de transition. Chaque rangée de la matrice correspond à un état et donne la probabilité de passer à un autre état. Dans le cas de notre individu endetté, la matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} & Sans\ dette & Avec\ dette \\ Sans\ dette & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ Avec\ dette & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Probabilité et Matrice de transition

Exemple en écologie

On s'intéresse au développement d'une forêt naturelle en région tempérée sur une parcelle en friche (par exemple par abandon d'une zône cultivée ou suite à un incendie).

Notre modèle simplifié comporte 3 états.

- L'état 1 est celui d'une végétation constituée d'herbes ou d'autres espèces pionnières
- l'état 2 correspond à la présence d'arbustes dont le développement rapide nécessite un ensoleillement maximal
- l'état 3 celui d'arbres plus gros qui peuvent se développer dans un environnement semi ensoleillé.

Si l'on note h, a, f ces trois états (herbe, arbustes, forêt), on a donc ici $S = \{h, a, f\}$.

Dans ce modèle, on a 9 probabilités de transition $p_{ij} = P(X_1 = j/X_0 = i)$ pour chaque valeur $i, j \in \{h, a, f\}$, alors on a la matrice de transition:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,45 & 0,05 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Probabilité et Matrice de transition

Probabilité à plusieurs étapes:

c'est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en **k** étapes

$$\begin{cases} \boldsymbol{p_{ij}^{(k)}} = \boldsymbol{P(X_{n+k} = j | X_n = i)} \\ \boldsymbol{P^k} = \left(\boldsymbol{p_{ij}^{(k)}}\right)_{\boldsymbol{i,j \in S^2}} \end{cases}$$

Et $\boldsymbol{P^k}$ est la matrice de transition en $\boldsymbol{k}$ étapes.

Chaine de Markov Homogène(dans le temps): $(\boldsymbol{X_n})$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N})$

- Si $P(\boldsymbol{X_{n+1}} = j \,|\boldsymbol{X_n} = i)$ ne dépend pas de n.

$$P(\boldsymbol{X_{n+1}} = j \,|\boldsymbol{X_n} = i) = P(\boldsymbol{X_{n+k}} = j \,|\boldsymbol{X_{n-1+k}} = i) \quad \forall k$$

- Si la probabilité d'effectuer une transition d'un état à un autre est indépendant de l'instant auquel a lieu cette transition , pout tout paire d'état (i,j).

Probabilité et Matrice de transition

Equation de Chapman Kolmogorov:

Soit $\mathbf{P}^{\mathbf{k}}$ la matrice de transition en **k** étapes d'une chaîne de Markov, alors pour tout entier non négatif m et l

$$P^{(l+m)} = P^{l}\,P^{m}$$

$$P^{n} = P^{(n-1)}P$$

Ce qui s'écrit sous forme développé

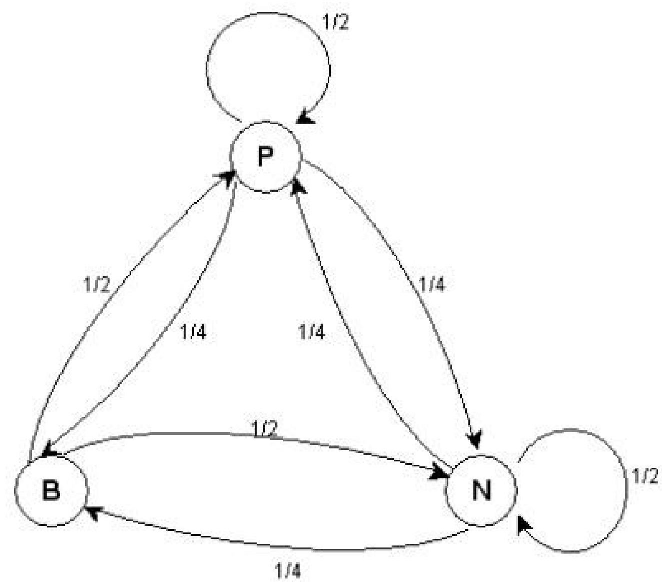
$$P^{(l+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{l}\, p_{kj}^{m}$$

Graphe Représentatif

Définition:
C'est la représentation de la matrice de transition où les sommets sont les états et les arcs sont les probabilités de transition positives d'un état à un autre état

Exemple:

- $$\begin{array}{c} \\ P \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & B & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$



Construction de phrases avec chaînes de Markov

Contexte : On veut générer une phrase cohérente en modélisant les transitions entre mots.
États possibles : Les états sont les **mots** possibles.

Définition de la variable aléatoire
La variable aléatoire X_t représente le mot à la position $\boldsymbol{t}$ dans une séquence de mots.

$$X_t \in \{\text{Je}, \text{mange}, \text{une}, \text{pomme}, \text{bois}, \text{un}, \text{jus}, \text{est}, \text{rouge}, \text{sucre}'\}$$

L'état actuel de X_t dépend uniquement de l'état précédent X_{t-1}, ce qui suit la propriété de Markov.

Construction de phrases avec chaînes de Markov

Corpus annoté

Supposons un petit corpus annoté où les phrases sont organisées :

1. ***"Je mange une pomme."***
2. ***"Je bois un jus."***
3. ***"Une pomme est rouge."***
4. ***"Un jus est sucré. "***

Extraction des transitions:

On extrait toutes les transitions entre les mots dans chaque phrase. Voici les phrases réorganisées sous forme de séquences de mots:

1. ***Je → mange → une → pomme → .***
2. ***Je → bois → un → jus → .***
3. ***Une → pomme → est → rouge → .***
4. ***Un → jus → est → sucré → .***

Construction de phrases avec chaînes de Markov

Mot actuel → suivant	Occurrences
Je → mange	1
Je → bois	1
mange → une	1
bois → un	1
une → pomme	1
un → jus	1
pomme → est	1
pomme → .	1
jus → .	1
jus → est	1
est → rouge	1
est → sucré	1

Construction de phrases avec chaînes de Markov

sucré → .	1
rouge → .	1

Matrice de transition:

À partir des occurrences des transitions, nous pouvons calculer la probabilité de passer d'un mot à un autre.

Je → mange	0.5
Je → bois	0.5
mange → une	1
bois → un	1

Construction de phrases avec chaînes de Markov

une → pomme	1
un → jus	1
pomme → est	0.5
pomme → .	0.5
jus → est	0.5
jus → .	0.5
est → rouge	0.5
est → sucré	0.5
rouge → .	1
sucré → .	1

Construction de phrases avec chaînes de Markov

	Je	mange	une	pomme	bois	un	jus	est	rouge	sucré	.
Je (1)	0	0.5	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0
mange	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
une	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
pomme	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0.5
bois	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
un	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
jus	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5
est	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5	0
rouge	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
sucré	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Construction de phrases avec chaînes de Markov

Génération d'une phrase avec la chaîne de Markov

Nous avons maintenant une matrice de transition.
Pour générer une phrase, on peut choisir un mot initial, puis suivre les transitions basées sur les probabilités.
Par exemple, partons de "Je" :

1. Je → avec une probabilité de 0.5 → "mange" ou "bois".
2. Ensuite, supposons que nous avons choisi "mange". Le mot suivant sera forcément "une".
3. Ensuite, avec une probabilité de 0.5 → "Pomme" ou ".".
4. Ensuite, supposons que nous avons choisi "est".
5. Puis, est → "rouge" (probabilité 0.5).
6. Enfin, rouge → ".".

Donc, une phrase générée pourrait être : **"Je mange une pomme est rouge."**

Analyse de sentiments avec chaînes de Markov

Objectif :

Analyser et modéliser les transitions de sentiments à travers les mots d'une phrase pour prédire ou comprendre la dynamique du sentiment global de cette phrase.

Variable aléatoire :

La variable aléatoire S_t représente l'état du sentiment à un instant t, basé sur les mots analysés dans une phrase donnée. Les états possibles de S_t sont les suivants :

Pos: Positif

Neu: Neutre

Neg: Négatif

Analyse de sentiments avec chaînes de Markov

Corpus annoté de phrases:

Voici un corpus simple avec des phrases annotées par leur sentiment global :

Phrase	Sentiment global
"Le film est excellent !"	Positif
"L'histoire était moyenne."	Neutre
"Les acteurs sont incroyables."	Positif
"Le scénario est décevant."	Négatif
"La fin était ennuyeuse."	Négatif
"La musique était correcte."	Neutre

Analyse de sentiments avec chaînes de Markov

Chaque phrase peut être décomposée en mots, et chaque mot peut être associé à un sentiment :

- **Positif (Pos)** : excellent, incroyables.
- **Neutre (Neu)** : moyenne, correcte.
- **Négatif (Neg)** : décevant, ennuyeuse.

Construction des transitions entre les sentiments:

Pour extraire les transitions, nous analysons les sentiments des mots dans chaque phrase.

"Le film est excellent !" → Neu → Neu → Pos
"L'histoire était moyenne." → Neu → Neu → Neu
"Les acteurs sont incroyables." → Neu → Neu → Pos
"Le scénario est décevant." → Neu → Neu → Neg
"La fin était ennuyeuse." → Neu → Neu → Neg
"La musique était correcte." → Neu → Neu → Neu

Analyse de sentiments avec chaînes de Markov

Transition	Nombre d'occurrences
Neu → Pos	2
Neu → Neu	8
Neu → Neg	2
Pos → Neu	1
Neg → Neu	0
Neg → Neg	1

Analyse de sentiments avec chaînes de Markov

Matrice de transition des sentiments:

Sentiment actuel →suivant	Pos	Neu	Neg
Pos	0	1	0
Neu	0.17	0.67	0.17
Neg	0	0	1

Exemple d'analyse d'une nouvelle phrase:

Prenons une nouvelle phrase :

"Le film était incroyable mais la fin décevante.«

Étapes d'analyse :

On décompose la phrase en mots :

"Le → film → était → incroyable → mais → la → fin → décevante."

Analyse de sentiments avec chaînes de Markov

On associe chaque mot à un sentiment :
"incroyable" → **Pos** ; "décevante" → **Neg**
Les autres mots non trouvés → **Neu**
Séquence de sentiments **: Neu → Neu → Neu → Pos → Neu → Neu → Neg**
En utilisant la matrice de transition, on suit les probabilités des transitions entre les sentiments :
Neu → Neu : 0.67
Neu → Pos : 0.17
Pos → Neu : 1.0
Neu → Neu : 0.67
Neu → Neg : 0.17
Probabilité globale de la séquence $0.67 \times 0.67 \times 0.17 \times 1.0 \times 0.67 \times 0.17 \approx 0.0090$

Conclusion:

La faible probabilité indique que la phrase contient un mélange de sentiments. Toutefois :
La présence du mot "**incroyable**" contribue à une composante **positive**.
Le mot "**décevante**" apporte un sentiment **négatif**.
On peut conclure que la phrase a un sentiment global légèrement mitigé, avec une tendance négative en raison de la fin.

Classification des états et des chaines

Définitions :

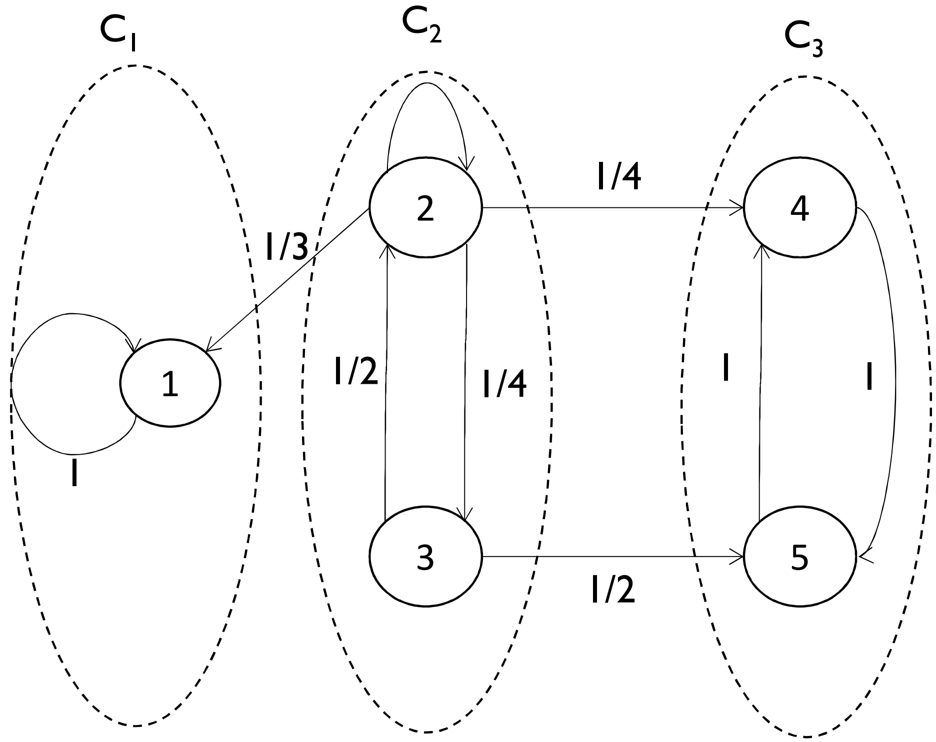
- Soient deux états i et j d'une chaine de Markov. L'état j est accessible depuis l'état i si i=j ou il y a un chemin entre i et j . Ils communiquent si l'un est accessible depuis l'autre.

- Dans un graphe orienté G, Tout sommet appartient exactement à une composante fortement connexe. Ensemble de ces composantes définit donc une partition des sommets du graphe G , on les note C_1 , C_2 ,.. C_r , nous pouvons associer à G un graphe réduit G_r dont les sommets correspondent aux composantes fortement connexes

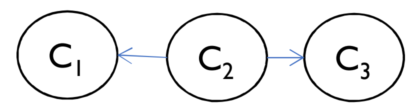
Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Classification des états et des chaines



G



G_r

Classification des états et des chaines

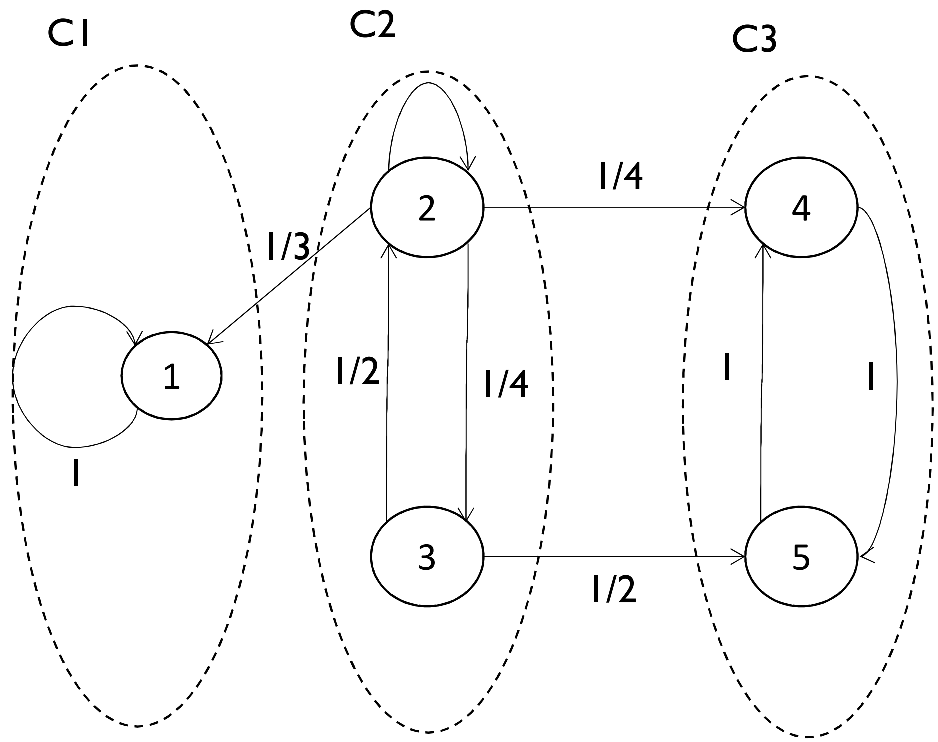
Définitions:

- **Classe persistante**: correspond aux sommets sans successeur dans un graphe réduit, si non elle est **transitoire**
- **Etat persistant** est un état qui appartient à une classe persistante
- **Etat transitoire** est un état qui appartient à une classe transitoire
- **Etat absorbant**: s’il forme à lui seul une classe persistante

- Une chaine de Markov est **irréductible** si son graphe représentatif est fortement connexe si non elle est dite **réductible**

- Une chaine de Markov est **absorbante** si tous ses états sont absorbantes autrement dit si chacune de ses classes persistante ne contient qu'un seul état

Classification des états et des chaines

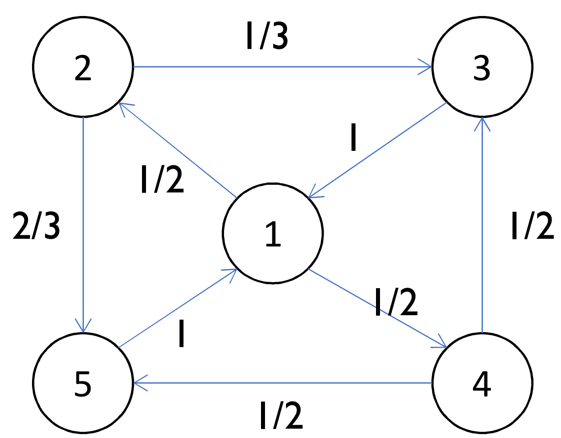


Chaine de Markov périodique

Définition

- Tous les états sont visités à des instants qui sont des multiples d'un nombre entier d > 1
- La période d est considéré comme le plus grand diviseur commun des longueurs des circuits.

Exemple :



Comportement transitoire et asymptotique

L'étude du comportement à long terme d'une chaine de Markov cherche à répondre à des questions aussi diverses que

- ➢Quelle est la probabilité que le système se trouve dans l'état i après n transitions?

- ➢Si l'état i est persistant :
  - quelle est la proportion du temps que le système passé dans cet état ?
  - quel est le nombre moyen de transitions entre deux visites successives de cet état?

- ➢Si l'état i est transitoire, quel est le nombre moyen de visites de cet état ?

- ➢Si le système est initialement dans l'état i, combien de transitions fera-t-il, en moyenne, avant de visiter pour la première fois l'état j?

Comportement transitoire et asymptotique

Besoin

- **Distribution de l'état initial**
  - $\pi_i^{(0)} = P(X_0 = i)$
  - $\pi^0 = (P(X_0 = i), i \in S)$
- **Distribution de l'état après n étapes**

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$$

1. Quelle condition doit vérifier pour que limite de $\pi^{(n)}$ existe?
2. Sous quelles conditions cette limite est elle indépendante de la distribution initiale?
3. Lorsqu'elle existe, quelle est la valeur de cette limite π^*?

Les chaînes irréductibles apériodiques

Propriété :

Une chaîne de Markov irréductible est apériodique si et seulement s'il existe un entier m tel que , pour tout n≥m et pour toutes paires d'états i et j, $p_{ij}^{n} > 0$

Théorème

Soit P la matrice de transition d'une chaine irréductible et apériodique. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) La matrice P^n tend vers une matrice stochastique P* lorsque n tend vers l'infini.
2) Les lignes de P* sont toutes égales entre elles
3) $p_{ij}^{*} > 0$ pour tout i,j ∊ S

Les chaînes irréductibles apériodiques

Corollaire
Soit la matrice de transition d'une chaîne irréductible et apériodique.
Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) Pour toute distribution initiale $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \pi^{(0)} P^n = \pi^*$$

2) $\boldsymbol{\pi}^*$ est la solution unique du système

$$\pi P = \pi$$

$$\pi 1 = 1$$

2) $\boldsymbol{\pi}^*$ est égal à n'importe quelle ligne de la matrice

$$P^* = \lim_{n\to\infty} P^n$$

Les chaînes irréductibles apériodiques

Exemple:

Soit la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Déterminer π^*

Les chaînes irréductibles apériodiques

Théoreme:

La distribution stationnaire π^* d'une chaine de Markov irréductible apériodique satisfait

$$\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i}$$

Où μ_i est l'espérance du nombre de transition entre deux visites successives de l'état i

Théoreme:

Soit $\{X_n, n=0,1,..\}$ une chaine de Markov irréductible apériodique de distribution stationnaire π^* et f une fonction réelle définie sur l'espace S des états de la chaine. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f(X_k)}{n+1} = \sum_{i\in S} \pi_i^* \, f(i)$$

Presque sûrement

Les chaînes irréductibles apériodiques

Application 1 : Vieillissement d'une machine

Une machine peut se trouver dans quatre états d'usure différents numérotés de 1 à 4.

- l'état 1 correspond à une machine fonctionnant parfaitement
- l'état 4 à une machine inutilisable;
- les états 2 et 3 dénotent des stades de dégradation croissante des performances de l'installation.

Les probabilité, P, que la machine se retrouve dans l'état j un certain matin sachant qu'elle se trouvait dans l'état i la veille au matin sont résumées dans la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.80 & 0.20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questions

1. Modéliser la matrice de transition sous forme d'un graphe.
2. Déduire π^*
3. Etant donné les productions journalières comme suit : r=(900,800,400,0). Quelle est la production journalière moyenne de l'installation ?

Les chaînes irréductibles apériodiques

Application 2 : Gestion de stocks

La gestion de stock d'un article se déroule de la manière suivante :

1) Au début de chaque semaine, le niveau de stock est examiné et s'il est inférieur à 2 unités, une commande remplace de manière à ramener le niveau de stock à 3 unités, le prix unitaire d'un achat d'un article est $c = 2$ et pour chaque commande un cout fixe $k = 2$ doit être payé.
2) La commande est réceptionnée le jour même, avant toute demande.
3) Pendant la semaine, la demande est satisfaite immédiatement dans les limites du stock disponible. En cas de rupture, elle est mise en attente, jusqu'à la réception de la prochaine commande. Les ventes de chaque semaine sont comprises entre 0 et 4 unités et suivent la loi de probabilités :

K	0	1	2	3	4
P[D=K]	3/10	3/10	2/10	1/10	1/10

Les chaînes irréductibles apériodiques

Application 2 : Gestion de stocks(suite)

4) A la fin de la semaine, un coût unitaire de stockage h = 2 doit être payé pour chaque unité non vendue et un coût unitaire de pénurie

   p = 4 est encouru pour chaque demande non satisfaite.

Travail demandé :

a) Calculer la matrice de transition et la distribution stationnaire
b) Calculer le niveau moyen du stock
c) Calculer la probabilité de tomber en rupture
d) Calculer les coûts moyens hebdomadaires de réapprovisionnement et de gestion de stock.

Algorithme pour vérifier l'ergodicité d'une chaîne de Markov

Vérifier si une chaîne de Markov est ergodique.

Une chaîne de Markov est ergodique si elle est :

- Irréductible : Tous les états peuvent être atteints depuis n'importe quel autre état.
- Apériodique : Aucun état ne possède de cycle avec une période > 1.

Entrée :

- Une matrice de transition P (taille $n \times n$), où $P_{i,j}$ est la probabilité de transition de i à j.

Sortie :

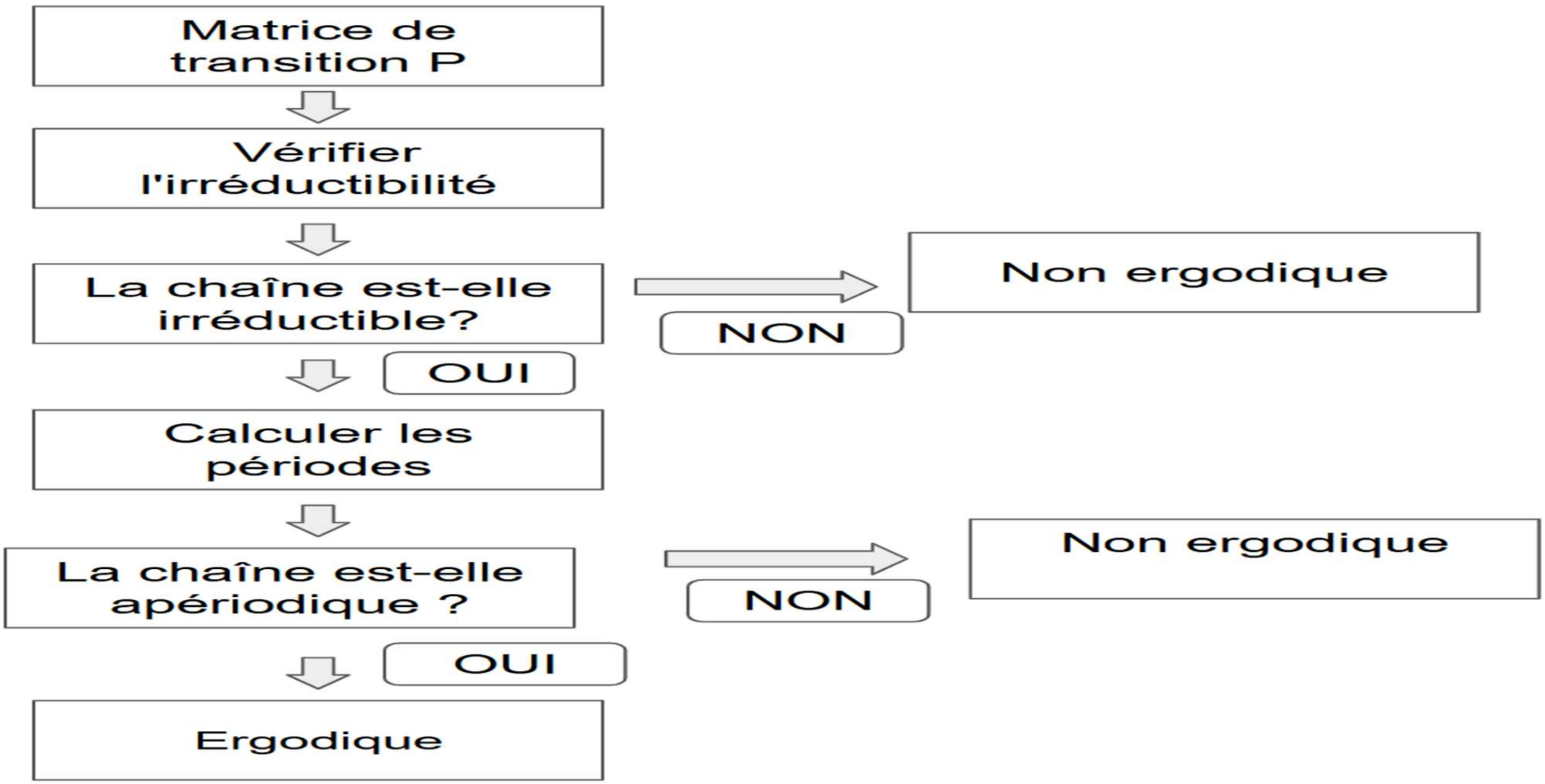
- True : Si la chaîne est ergodique.
- False : Si elle ne l'est pas.

Algorithme pour vérifier l'ergodicité d'une chaîne de Markov

Étapes principales de l'algorithme:

1. **Etape1: Vérifier l'irréductibilité :**
   - Utiliser une matrice de connectivité pour s'assurer que tous les états sont atteignables.
2. **Etape 2: Calculer les périodes :**
   - Déterminer les cycles des états pour vérifier la périodicité.
3. **Etape 3: Décider de l'ergodicité :**
   - La chaîne est ergodique si elle est irréductible et apériodique.

Processus de Vérification de l'Ergodicité d'une Chaîne de Markov



Algorithme pour vérifier l'ergodicité d'une chaîne de Markov

Étape 1 : Vérifier l'irréductibilité

Entrée : Matrice de transition P (taille n × n)

Sortie : Vrai si P est irréductible, Faux sinon.

Pseudo-code :

1. Fonction $Est\_Irréductible(P)$ **:**
   - $n \leftarrow Taille$ de P
   - $Matrice\_connectivite \leftarrow (P > 0)$
   - Pour $i = 1$à $i = n - 1$:

     $$Matrice\_connectivite \leftarrow Matrice_{connectivite} \times Matrice_{connectivite}$$

   - Retourner **Vrai** si tous les éléments de $Matrice\_connectivite > 0$**,** sinon **Faux.**
2. Si $Est\_Irréductible(P)$ retourne **Faux :**
   - Retourner **Faux.**

Algorithme pour vérifier l'ergodicité d'une chaîne de Markov

Étape 2 : Vérifier l'apériodicité

Entrée : Matrice de transition P (taille $n \times n$)

Sortie :

- Liste des périodes pour chaque état.
- Vrai si tous les états ont une période égale à 1 (apériodique), Faux sinon.

Pseudo-code :

1.Fonction $Trouver\_Périodes(P)$:

- $n \leftarrow Taille$ de
- Période ←Liste vide
- Pour chaque état i de 0 à $n-1$:
  - $Temps\_retours$ ←Liste vide
  - $Etat\_actuel$ ← Vecteur unité correspondant à i
  - Pour $t = 1$à $2n$:
    $Etat\_actuel \leftarrow Etat\_actuel \times P$
    Si i a une probabilité de retour > 0: Ajouter t à $Temps\_retours$
  - Si $Temps\_retours \neq \emptyset$: $Période \leftarrow PGCD(Temps\_retours)$
  - Sinon : $Période \leftarrow 0$
  - Ajouter $Période$
- Retourner Tous les $Périodes = 1$

Algorithme pour vérifier l'ergodicité d'une chaîne de Markov

Étape 3 : Vérifier l'ergodicité

Entrée :

- Résultats de l'étape 1 (irréductibilité).
- Résultats de l'étape 2 (Apériodicité).

Sortie :

- Vrai si la matrice P est ergodique, Faux sinon.

Pseudo-code :

- Si Apériodique: Retourner Vrai.
- Sinon : Retourner Faux.

Les chaînes irréductibles périodiques

Lemme

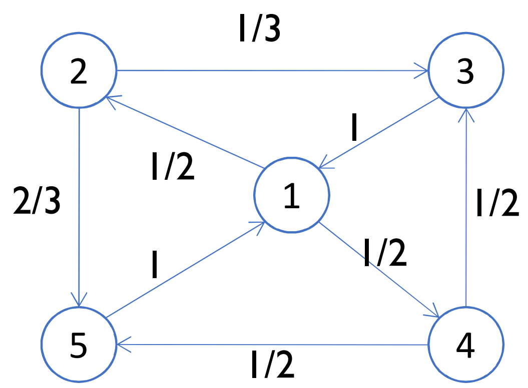
L'ensemble S des états d'une chaîne de Markov irréductible de période d peut être partitionné en d classes D_0, D_1,…,D_{d-1} disjointes et telle que, partant d'un état de D_j, la chaîne se retrouve à l'étape suivante dans un état de D_{j+1} pour j = 0,1,…, d-2.

depuis un état de D_{d-1}, la chaîne retourne à l'étape suivante dans un état de D_0.

Les chaînes irréductibles périodiques

Exemple

La chaîne de Markov a une période égale à 3.



- ➢ Un retour à l'état 1 n'est possible qu'aux instants n de la forme n = 3m
- ➢ Une visite des états 2 et 4 n'est possible qu'aux instants n de la forme n = 3m+1
- ➢ Une visite des états 3 et 5 n'est possible qu'aux instants n=3m+2

Les chaînes irréductibles périodiques

Exemple

La partition de l'ensemble des états S est donc :

D1 = {1}   D2 = {2,4}   D3 = {3,5}

La matrice de transition de la chaîne est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les chaînes irréductibles périodiques

Exemple

Son cube :

$$\check{P}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 & 0 & 7/12 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 & 0 & 7/12 \end{pmatrix}$$

Après permutation :

$$\check{P}^3 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/12 & 7/12 \\ 0 & 0 & 0 & 5/12 & 7/12 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Les chaînes irréductibles périodiques

- La matrice de stochastique P^3 correspond à une chaîne de Markov formée de 3 sous-chaînes irréductibles et apériodique.
- Chacune de ces sous-chaînes a pour ensemble d'états d'une classe D_k

Remarque:

Dans une chaîne irréductible de période d , la matrice $R=P^d$ contient les matrices de transition de d sous-chaînes irréductibles et apériodiques, chacune étant définie sur l'une des classes D_k . En utilisant la nouvelle matrice $R=(r_{ij})$, les théorèmes de la section précédentes restent valables.

Les chaînes irréductibles périodiques

Définition :

Une suite $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ converge au sens de Cesàro vers X* si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = X^*$$

Remarque:

Si une suite converge au sens ordinaire, elle converge également au sens Cesàro et les deux limites sont les mêmes.

La réciproque n'est pas vraie:

la suite {1,0,1,0, …} ne converge pas au sens ordinaire mais, au sens de Cesàro, sa limite est égale à 1/2

Les chaînes irréductibles périodiques

Théorème:

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible.

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- La suite $\{P, P^2, P^3, \ldots\}$des puissances de P converge au sens de Cesàro vers une matrice stochastique P^*.
- Les lignes de P^* sont toutes égales à un même vecteur de probabilités π^*.
- Pour tout états $i \in S$ on a $\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i} > 0$

  où μ_i est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i
- Pour toute distribution initiale $\pi^{(0)}$, la suite $\{\pi^{(n)}, n = 0,1,2, \ldots\}$,

  où $\pi^{(n)}= \pi^{(0)} P^n$, converge au sens de Cesàro vers π*.
- π^* est la solution unique du système

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \end{cases}$$

- π^* est égal à n'importe quelle ligne de matrice P^*.

Les chaînes irréductibles périodiques

Exemple:

Pour la matrice P de l'exemple précédent, la limite au sens de Cesàro de la suite des puissances de P existe et à toutes ses lignes égales au vecteur de probabilités $\pi^* = (1/3, 1/6, 5/36, 1/6, 7/36)$

Remarquons que $\pi^* = 1/3(\pi^0 + \pi^1 + \pi^2)$

Où $\pi^0 = (1,0,0,0,0)$, $\pi^1 = (0,1/2,0,1/2,0)$ et $\pi^2 = (0,0,5/12,0,7/12)$ correspond aux distributions invariantes des sous-chaînes définies par la matrice $R = P^3$ sur les classes D_0, D_1 et D_2

Remarque:

Si la chaine a période d, chaque matrice P_i définit une chaine irréductible périodique possédant une distribution stationnaire unique. On a alors

$$\pi^* = 1/d(\pi^0 + \pi^1 + \pi^2 + \ldots + \pi^{d-1})$$

Les chaînes réductibles

Si les numérotation des états de la chaîne satisfait les deux condition :
- Les états d'une même classe sont numérotés consécutivement
- Les états des classes persistantes sont numérotés en premier .

La matrice de transition, P, s'écrit de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} P1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & . \\ 0 & \cdots & Pk & 0 \\ \hline R1 & \dots & Rk & Q \end{array}\right)$$

Nous dirons que P est sous ***forme canonique***. chaque matrice Pi est une matrice stochastique.

Les chaînes réductibles

Théorèmes :

- Pour toute chaîne de Markov et pour tout état initial, la probabilité de se retrouver dans un état persistant à l'étape n tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.
- Pour tout état transitoire j, $\lim p^{(n)}_{ij} = 0, \forall\, i \in S$
- Les trajectoires d'une chaîne de Markov dont l'évolution débute dans un état transitoire obéissent toutes au même schéma général.

Définition

Une chaîne de Markov est ergodique si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- La chaîne possède une seule classe persistante,
- Tous ces états persistants sont apériodiques

Les chaînes réductibles

Propriétés :

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique

- La matrice P^n tend vers une matrice stochastique P* lorsque n tend vers l'infini.
- Les lignes de P* sont toutes égales à un même vecteur de probabilité π*
- Pour tout état i appartient à S,

$$\pi_i^* = 0 \quad si\ i\ est\ transitoire$$
$$\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i} > 0 \quad si\ i\ est\ persistant$$

- Pour toute distribution initiale

$$\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \pi^{(0)} P^n = \pi^*$$

- π^* est la solution unique du système

$$\pi P = \pi$$
$$\pi\, 1 = 1$$

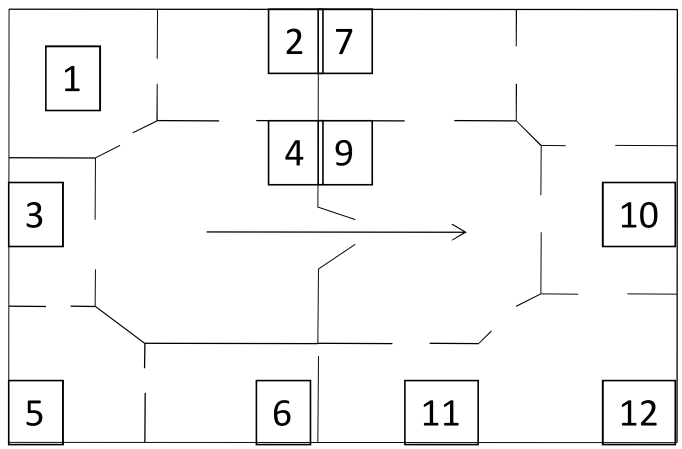
Les chaînes réductibles

Exemple Labyrinthe

Une souris se déplace dans les douze pièces du labyrinthe.

A chaque déplacement, elle choisit une direction au hasard mais ne peut traverser les parois séparant certaines pièces.

De plus s'il est possible d'aller de la pièce 4 à la pièce 9, le déplacement inverse est impossible.



Les chaînes réductibles

Exemple Labyrinthe :

Si X_n dénote l'emplacement de la souris après n mouvements, la suite $\{X_n , n = 0,1,..\}$ est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est :

$$P = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Les chaînes réductibles

Exemple Labyrinthe

La chaîne possède deux classes :

$C1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $C2 = \{7,8,9,10,11,12\}$

La première est transitoire et la seconde persistante et apériodique. La chaîne est donc ergodique et son unique distribution invariante, solution du système

$$\pi P = \pi$$

$$\pi 1 = 1$$

est

$$\pi^* = 1/14(0,0,0,0,0,0,2,2,4,3,1,2)$$

Les chaînes réductibles: Les chaînes Absorbantes

Les chaîne absorbantes sont importantes à plus d'un titre.

- Elles apparaissent naturellement et fréquemment lors de la modélisation de systèmes réels.
- De nombreux problèmes de la théorie de chaîne de Markov se résolvant facilement en modifiant les probabilités de transition du processus initial de manière à le rendre absorbant.

Rappelons

- Les classes persistantes d'une chaîne de Markov absorbantes sont toutes réduites à un seul état. Ainsi, la matrice P_i associé à une classe absorbante C_i est d'ordre1 et son unique élément est égal à 1
- La forme canonique de la matrice de transition d'une chaîne absorbante est donc :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R & Q \end{array}\right)$$

Les chaînes réductibles: Les chaînes Absorbantes

Théorèmes

Dans une chaine absorbante on a:

- $\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (I-Q)^{-1}R & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\lim_{n\to\infty} Q^n = 0$

La matrice $N = (I-Q)^{-1}$ joue un rôle particulièrement important et est appelée la matrice fondamentale de la chaine

- Le nombre moyen n_{ij} de visites de l'état transitoire j avant absorption sachant que le processus débute dans l'état transitoire i est donné par

$$\mathbf{n_{ij} = N_{ij}}$$

- Pour un processus débutant dans l'état transitoire i, le nombre moyen N_i de transitions avant absorption est donné par

$$N_i = \sum_{j\ transitoire} n_{ij}$$

Les chaînes réductibles: Les chaînes Absorbantes

Exemple: Vieillissement d'une machine(Suite)

Le nombre moyen de jours avant que la machine ne doive subir une révision peut être calculé en modifiant les probabilités de transition du processus de manière à rendre l'état 4 absorbante. La nouvelle matrice de transition est, pour l'ordre des états 4,1,2,3.

$$P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.95 & 0.04 & 0.01 \\ 0.05 & 0 & 0.9 & 0.05 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \end{array}\right)$$

Ainsi,

$$Q = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 \\ 0 & 0.9 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Les chaînes réductibles: Les chaînes Absorbantes

Exemple: Vieillissement d'une machine(Suite)

D'où :

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.05 & -0.04 & -0.01 \\ 0 & 0.1 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 8 & 3 \\ 0 & 10 & 2.5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Si la machine sort de révision et se trouve donc dans l'état 1,

- Le nombre moyen de jours avant sa prochaine révision est égal au nombre moyen de transitions de la chaîne avant absorption par l'état 4.
- Cette quantité est donnée par la somme de la première Ligne de N et vaut 31

Les chaînes réductibles: Les chaînes Absorbantes

Théorème

Dans une chaîne de Markov absorbante, la probabilité **d'*absorption*** par l 'état absorbant j sachant que le processus débute dans l'état transitoire i est égale au terme b_{ij} de la matrice

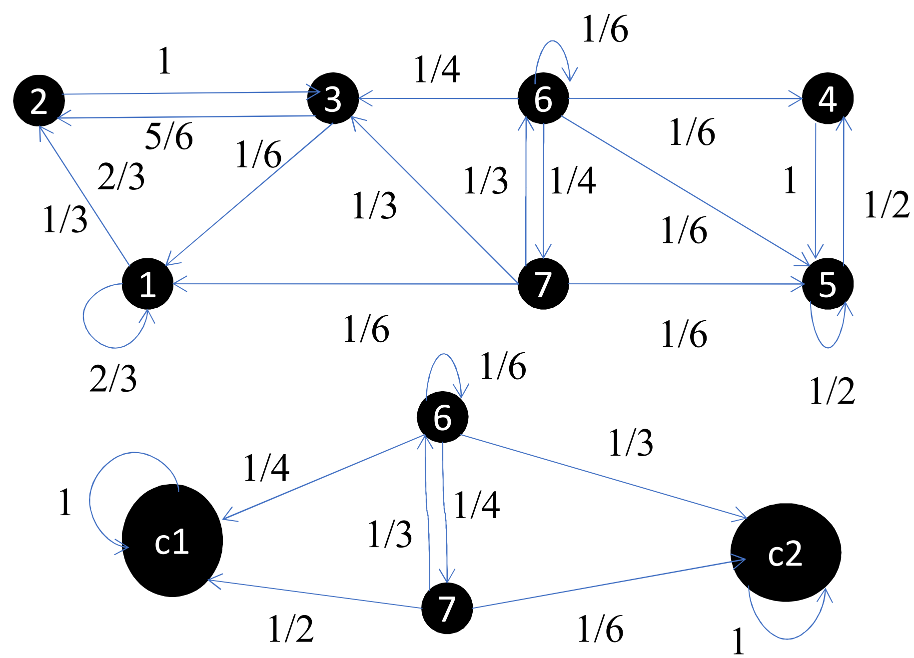
$$\mathbf{B = NR = (I\text{-}Q)^{-1} R}$$

Exemple (Suite):Vieillissement d'une machine

$$B = NR = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 3 \\ 0 & 10 & 2.5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les chaînes réductibles

Exemple:
Graphe représentatifs d’une chaine réductible, avant et après contraction de ses classes persistantes.



Les chaînes réductibles

Exemple: ***Matrices de transition***

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc}
2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/4 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/4 \\
1/6 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 & 1/3 & 0
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\left(\begin{array}{cc|cc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
1/4 & 1/3 & 1/6 & 1/4 \\
1/2 & 1/6 & 1/3 & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

Les chaînes réductibles : Exemple

$$Q = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/4 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \\ 4/9 & 10/9 \end{pmatrix}$$

- Le nombre moyen de transitions avant que le processus ne se trouve dans un état persistant est de 5/3 s'il débute dans l'état 6 et de 14/9 s'il débute dans l'état 7

$$B = NR = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \\ 4/9 & 10/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- Partant de l'état 6, nous avons autant de chances de finir dans l'une ou l'autre des deux classes persistantes C_1 et C_2. En revanche, si 7 est l'état initial, la probabilité d'absorption par la classe C_1 est deux fois plus grande que pour la classe C_2

Les chaînes réductibles : Exemple

Ainsi, définissant

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\hat{B} = N\hat{R} = \begin{pmatrix} 1/18 & 0 & 4/9 & 2/9 & 5/18 \\ 5/27 & 0 & 13/27 & 2/27 & 7/27 \end{pmatrix}$$

L'élément $\hat{b}_{ij}$ de cette matrice représente la probabilité que le premier état persistant visité soit j si le processus débute dans l'état transitoire i. Ainsi, partant de 6, la probabilité que le premier état persistant visité soit 1 est 1/18 et un tel processus termine son évolution dans la classe C_1 avec probabilité

$$\hat{b}_{61} + \hat{b}_{62} + \hat{b}_{63} = \frac{1}{18} + 0 + \frac{4}{9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

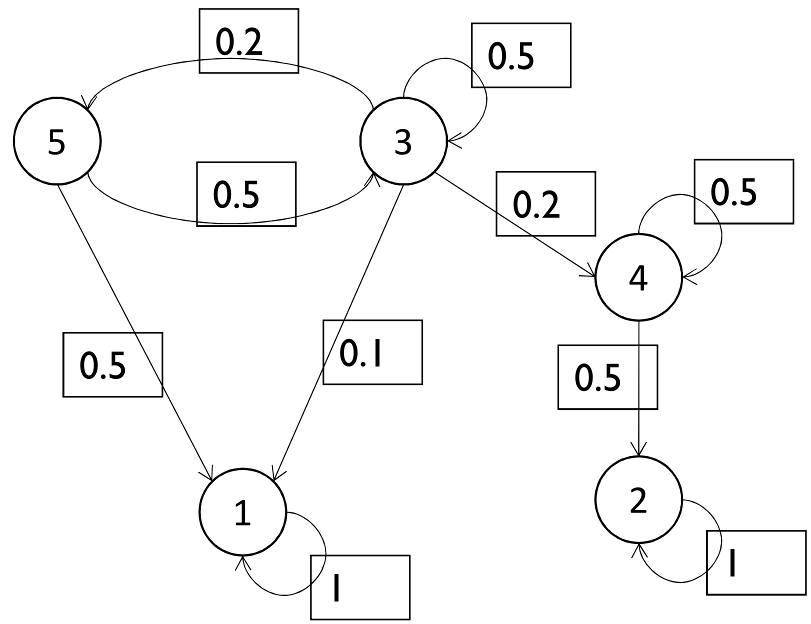
Nous retrouvons évidemment le résultat obtenu précédemment

Exercice

Considérer la chaîne de Markov définie par le graphe représentatif de la figure suivante

1) Classer les états, les classe et la chaîne.
2) Déterminer la forme canonique de la matrice de transition et calculer la matrice fondamentale de la chaîne.
3) Déterminer le nombre moyen de transitions avant absorption si le processus débute dans l'état 3.
4) Si l'état initial est choisi au hasard , déterminer les probabilités d'être absorbé par l'un ou l'autre des états absorbants.

Exercice



Graphe représentatif de la chaîne de l’exercice