APPENDICE A

FUNZIONI E LINEARITÀ

Durante lo studio sulla teoria dei circuiti ci si troverà ad usare espressioni come « elemento lineare », « spazio lineare », « circuito lineare », « funzione lineare », ecc. Per spiegare tali concetti iniziamo a rivedere quelli più fondamentali, il concetto di *funzione* e qui i il concetto di *funzione lineare*. Se si hanno ben chiari questi concetti fondamentali si può avere una idea molto più precisa dei problemi dell'ingegneria. Una volta che si sono capiti i concetti di *funzione* e di *funzione lineare* (e ciò richiede un ragionamento delicato), gli altri concetti sono semplici.

1.1 *Introduzione al concetto di funzione*

La maggior parte del vostro lavoro si è svolto fino ad ora utilizzando una classe particolare di funzioni come i polinomi, i seni, i coseni, e gli esponenziali, i quali fanno corrispondere ad un qualsiasi numero reale un altro numero reale. L'idea di funzione è, d'altra parte, molto più generale. Per sviluppare questo concetto, si esaminino gli esempi seguenti.

Esempio 1 - La funzione più semplice e più familiare è quella defini da un polinomio. Sia

$y = x + x^2 + x^3$

Per ogni numero reale x questa equazione definisce un solo nu reale y. Si dice che questa equazione definisce una funzione che trasfo numeri reali in numeri reali.

Esempio 2 - Si considerino le tre equazioni

$y_1 = x_1 + 3x_2 + 5x_3$
$y_2 = 3x_1 + 2x_2 + 7x_3$
$y_3 = x_1 + x_2 + 5x_3$

oppure, in forma vettoriale,

(1) $\quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

L'equazione (1) assegna ad ogni vettore $\mathbf{x}$ un unico vettore $\mathbf{y}$. Si che l'eq. (1) definisce una funzione che t forma vettori in vettori.

Esempio 3 - Si consideri una funzione periodica di periodo T; si supponga che essa sia abbastanza regolare da avere una rappresentazione tramite serie di Fourier nel modo seguente:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn2\pi t/T}$$

I coefficienti di Fourier $(\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)$ sono calcolati t funzione nel seguente modo:

(2) $\quad c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(t)e^{-jn2\pi t/T}\,dt$

L'equazione (2) associa alla funzione F e ad ogni numero intero n un numero complesso c_n. Considerando tutti i coefficienti di Fourier nel loro complesso, si vede che l'eq. (2) è uno strumento che permette di calcolare, per qualsi i funzione regolare periodica F, la sequenza $(\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)$ dei suoi coefficienti di Fourier. Si dice che l'eq. (2) definisce una nuova fu 'one la quale trasforma qualsiasi funzione regolare periodica F nell'insieme di tutti i suoi coefficienti di Fourier $(\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)$.

Si derivino da questi esempi le caratteristiche comuni dell'idea di funzione.

1. *C'è un insieme (detto X) di elementi.* Nel caso di polinomi, X era l'insieme di tutti i numeri reali; nell'esempio 2, X era l'insieme di tutti i vettori dello « spazio » geometrico; nell'esempio 3, X era l'insieme di tutte le funzioni regolari periodiche di periodo T.

2. *C'è un altro insieme (detto Y) di elementi*. Per i polinomi, Y era l'insieme di tutti i numeri reali; nell'esempio 2, Y era l'insieme di tutti i vettori dello « spazio » geometrico; nell'esempio 3, Y era l'insieme di tutte le infinite sequenze di numeri complessi $(\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)$.

3. La funzione f assegna ad ogni elemento x di X un solo elemento y di Y. Questo particolare elemento y è indicato con $f(x)$, da cui la notazione $y = f(x)$. Si dice che la funzione f trasforma l'elemento x in X nell'elemento $f(x)$ in Y, e $f(x)$ è detto il valore di f in x.

4. L'insieme X è detto il dominio della funzione f.

Si deve mettere in rilievo che la generalità e l'importanza del concetto di funzione sta nel fatto che gli insiemi X e Y sono arbitrari. Ad esempio, gli elementi di X e di Y possono essere essi stessi funzioni, come illustrato dagli esempi seguenti derivati dalla fisica.

Esempio 4 - Si consideri il seguente problema di elettrostatica. Su di un nastro di nylon, infinitamente lungo, c'è una distribuzione di carica specificata dalla densità di carica $\rho(\xi)$ coul/m. Si sa che il potenziale elettrostatico di ascissa x è dato da

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi)}{|x-\xi|} d\xi \tag{3}$$

L'equazione suddetta definisce una funzione; il suo dominio è l'insieme di tutte le possibili densità di carica ρ, ed il suo campo è l'insieme di tutte le distribuzioni di potenziale ϕ. Infatti l'eq. (3) fornisce una regola per calcolare l'*unico* ϕ associato ad un qualsiasi ρ dato.

Siamo ora pronti per formulare la definizione formale di funzione.

1.2 *Definizione formale*

Sia f un assortimento di coppie ordinate (x, y) dove il primo elemento x appartiene ad un certo insieme arbitrario X ed il secondo elemento y appartiene ad un altro insieme arbitrario Y. L'assortimento di coppie ordinate è detto *funzione* se ha la proprietà che per ogni x in X esiste un unico y in Y tale che la coppia (x, y) appartenga all'assortimento f.

L'insieme X di tutti i primi elementi possibili è detto *dominio* della funzione f. Si dice che la funzione f è *definita in* X e che *assume i suoi valori in* Y.

In altre parole, se f è una funzione e se le coppie ordinate (x, y) e (x, z) appartengono all'assortimento che definisce f, allora $y = z$.

Osservazioni

È importante capire la differenza tra una fu 'one f e $f(x)$, il suo valore in un punto x. Si consideri, ad esempio, il logaritmo (base 10). Per conoscere la funzione logaritmica, è necessario avere una intera tavola composta dall'assortimento di tutte le coppie ordinate (x, $\log x$). Per conoscere, invece, il log 2, si ha soltanto bisogno di ricordare il numero 0.30103.Insomma, è meglio ricordare che la definizione di una funzione è fissata dall'insieme di coppie ordinate (x, $f(x)$), che si possono pensare elencate in una tabella. Nella prima colonna della tabella si elencano tutti gli elementi x del dominio; poi per ogni x si elenca nella seconda colonna $f(x)$, il valore della funzione f per quella x. *La funzione f è l'intera tabella.* Il simbolo $f(x)$ indica solo il valore corrispondente ad x.

si esprime la stessa idea in termini geometrici per il caso in cui i insiemi X e Y sono l'asse reale, si pensa alla funzione f come se fosse l'*intero grafico*; $f(x)$ è semplicemente l'ordinata che corrisponde all'asci x. Nella teoria dei circuiti, si incontrano tensioni (oppure correnti, cariche, ecc.) che cambiano con il tempo. Per cui si pensa ad esse come funzioni del tempo. Quando si vuol sottolineare che si è interessati alla *funzione*, si parlerà della funzione $v(\cdot)$ oppure dell'*andamento* $v(\cdot)$ per sottolineare che si intende l'intero grafico (vedere anche l'es. 4, par. 2).

3. Sia f una funzione che trasforma X in Y, ovvero f sia una *trasformazione* (o operatore) di X in Y. Per cui « funzione », « trasformazione » ed « operatore » sono termini sinonimi. Quale termine usare è solo questione di tradizione. È spesso conveniente scrivere $f(\cdot)$ invece di f per mettere in rilievo la differenza tra $f(x)$ e $f(\cdot)$. Infatti $f(x)$ è il valore della funzione f in x, mentre $f(\cdot)$ — oppure f — indica la funzione stessa, cioè, l'insieme di *tutte le coppie ordinate* (x, $f(x)$).

4. In alcuni casi, come nei circuiti non lineari, si incontrano quelle che di solito vengono dette « funzioni multivalori », per le quali vengono assegnati parecchi valori ad alcuni, oppure a tutti, gli elementi del dominio della funzione. Nella terminologia moderna, il termine « funzione » indica sempre una funzione ad un solo valore ed il termine « funzioni multivalore » sta per essere sostituito da « rel 'oni multivalore » oppure semplicemente da « rel 'one ».

2. *Funzioni lineari*

Questo paragrafo esprime con terminologia moderna parecchi fatti noti. Prima di capire il concetto di *funzione lineare*, d'altronde, si deve essere d'accordo sul significato di *spazio lineare*. In parole povere, uno spazio lineare è ottenuto combinando un insieme di *scalari* con un insieme di *vettori* e con due operazioni: la *somma di vettori* e la *moltiplicazione dei vettori con gli scal* .

2.1 *Scal*

L'insieme degli scalari, tecnicamente, dovrebbe essere un *campo* (il termine « campo » è un termine algebrico tecnico). In ingegneria si hanno quattro campi: (1) l'insieme di tutti i numeri reali; (2) l'insieme di tutti i numeri complessi; (3) l'insieme di tutte le funzioni razionali con coefficienti réali (oppure complessi); per esempio,

$$\frac{1 + 2s + \sqrt{3}s^2}{1 + s^4}$$

(4) l'i ieme di numeri binari $\{0, 1\}$. Su ognuno di questi insiemi le operazioni di addizione e moltiplicazione (ed i loro opposti, sottrazione e divisione) sono definiti secondo un metodo ben noto. Dato che, d'altra parte, ognuno di tali i iemi costituisce un campo, le regole per combinare queste operazioni sono identiche.

Tecnicamente, se si desidera verificare se un insieme di elementi su cui sono definite due operazioni sia adatto oppure no come insieme di scalari per un certo spazio vettoriale, si ha solo bisogno di verificare i nove seguenti assiomi di un campo.

Sia F un insieme di elementi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Affinché l'insieme F sia un *campo*, esso deve soddisfare gli assiomi seguenti.

1. *Legge associativa dell'addizione.* Per qualsiasi α, β, γ in F, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
2. *Legge commutativa dell'addizione.* Per qualsiasi α, β in F, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
3. Esiste un elemento 0 in F tale che $0 + \alpha = \alpha$ per ogni α in F. Questo elemento 0 è detto *identità additiva.*
4. *Additivo inverso.* Per ogni elemento α in F esiste un elemento in F detto $-\alpha$ tale che $\alpha + (-\alpha) = 0$.

5. *Legge associativa della moltiplicazione.* Per qualsiasi α, β, γ in F, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.
6. *Legge commutativa della moltiplicazione.* Per qualsi i α, β in F, $\alpha\beta = \beta\alpha$.
7. Esiste un elemento $1 \neq 0$ in F tale che $1\alpha = \alpha$ per ogni α in F. Questo elemento 1 è detto *identità moltiplicativa.*
8. *Moltipli tiva inversa.* Per ogni $\alpha \neq 0$ in F, esiste un elemento in F, detto α^{-1}, tale che $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$.
9. *Legge distributiva.* Per qualsiasi α, β, γ in F, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Nella teoria dei circuiti ci troviamo ad usare i campi di scalari seguenti: i numeri reali, i numeri complessi, e le funzioni razionali. Nello studio dei calcolatori si incontrerà il campo dei numeri binari.

2.2 *Spazi lineari*

Uno spazio lineare è un insieme di elementi detti vettori. L'idea base associata ai vettori è che essi possono sempre essere combinati linearmente; cioè essi possono essere sommati l'uno con l'altro e moltiplicati per scalari. Alcuni autori usano il termine altisonante di *spazio dei vettori lineari*, o semplicemente, *spazio vettoriale*, invece che *s zio lineare*. Si sono incontrati parecchi spazi lineari:

1. L'insieme di tutti i vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ dello « spazio » geometrico.
2. L'insieme di tutte le n-ple $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ dove gli x_i sono numeri reali; questo spazio lineare è detto R^n.
3. L'insieme di tutte le n-ple $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ dove gli x_i sono numeri complessi; tale spazio lineare è detto C^n.
4. L'insieme di tutte le funzioni periodiche di periodo T.
5. L'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea $d^2y/dt^2 + 3(dy/dt) + 2y = 0$. Ricordare che qualsiasi soluzione è della forma $c_1 \epsilon^{-t} + c_2 \epsilon^{-2t}$, dove c_1 e c_2 sono numeri reali fissati qualsiasi.
6. Si supponga di pilotare un circuito con un generatore di tensione e di considerare l'effetto sul circuito di tutte le forme d'onda possibili del generatore. Per una tale ricerca l'insieme di tutte le forme d'onda possibili $e(\cdot)$ costituisce uno spazio lineare; le fo e d'onda pos-

sono essere sommate insieme oppure moltiplicate per uno scalare per formare una nuova forma d'onda.

Si introduca ora la definizione formale di uno spazio lineare. V è detto *spazio lineare sul campo F* e gli elementi di V sono detti *vettori*, se sono soddisfatti gli assiomi seguenti:

1. Per ogni $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, in V, l'operazione di somma definisce un solo elemento $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ in V.
2. Per qualsiasi $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ in V, $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.
3. Per qualsiasi $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ in V, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
4. Esiste un elemento $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ per qualsiasi $\mathbf{x}$ in V. Tale elemento $\mathbf{0}$ è detto *vettore zero* oppure *origine* dello spazio lineare V.
5. Per ogni elemento $\mathbf{x}$ in V esiste un elemento $-\mathbf{x}$ in V tale che $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$.
6. Per ogni scalare α in F e per ogni vettore $\mathbf{x}$ in V, l'operazione di moltiplicazione scalare definisce un unico elemento $\alpha\mathbf{x}$ in V.
7. Per qualsiasi α, β in F e per qualsiasi $\mathbf{x}$ in V, $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$.
8. Per qualsiasi α in F e per $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ in V, $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
9. Per qualsiasi α, β in F e per qualsiasi $\mathbf{x}$ in V, $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.
10. Se 1 è l'elemento identità della moltiplicazione in F, per qualsiasi $\mathbf{x}$ in V, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

È facile verificare che i 10 assiomi sono validi per qualsiasi spazio lineare indicato all'inizio del paragrafo.

Il fatto che i primi quattro assiomi di un campo sono identici agli assiomi dal 2 al 5 di uno spazio lineare non è un caso; è una conseguenza del fatto che l'addizione su un campo e l'addizione su uno spazio lineare devono essere entrambe gruppi commutativi, il che significa precisamente che devono soddisfare gli assiomi dal 2 al 5.

2.3 *Funzioni lineari*

Prima di definire il concetto di funzione lineare si deve dire ciò che si intende per *campo di variazione* di una funzione. La funzione f sia definita da tutte le sue coppie ordinate (x, y), dove x varia in X, il dominio di f. Si dice *campo di variazione* di f l'insieme di tutti gli y in Y per cui esiste un x tale che (x, y) appartiene all'insieme che definisce f. Se si pensa ad f come ad una tavola contenente tutti i $(x, f(x))$, il dominio di f è l'insieme di tutti i primi valori della tavola e il campo di variazione di f è l'insieme di tutti i secondi valori della tavola.

Si dovrà imporre il requisito che le funzioni considerate abbiano un dominio ed un campo di variazione che siano entrambi spazi lineari. Questo è un requisito solamente tecnico, così che dato qualsiasi $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ nel dominio e gli scalari α_1, α_2, le espressioni $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2$, $\alpha_1 f(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{x}_2)$ hanno un significato preciso; infatti una volta che i requisiti suddetti siano soddisfatti, queste espressioni rappresentano combinazioni lineari di vettori.

Una funzione f è detta *lineare* se

1. Il suo dominio ed il suo campo di variazione sono spazi lineari sullo stesso campo scalare.
2. *Proprietà di omogeneità*. Per ciascun $\mathbf{x}$ nel dominio e per ciascun scalare α, $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$.
3. *Proprietà additiva*. Per ciascuna coppia di elementi $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ del suo dominio, $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$.

Osservazione

Le condizioni 2 e 3 sono equivalenti alla semplice condizione
Proprietà di sovrapposizione. Per ciascuna coppia di scalari α_1, α_2 e per ciascuna coppia di vettori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ nel dominio,

$$f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1 f(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{x}_2)$$

Si verifichi che le condizioni 2 e 3 sono equivalenti alla condizione 2'.

a. Si supponga che la 2 e la 3 siano valide; si dimostra che ne deriva la 2'. Si calcola

$$f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = f(\alpha_1\mathbf{x}_1) + f(\alpha_2\mathbf{x}_2)$$

in cui l'eguaglianza deriva dalla 3 una volta osservato che, essendo $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ elementi dello spazio vettoriale lineare, saranno tali anche $\alpha_1\mathbf{x}_1$ e $\alpha_2\mathbf{x}_2$. Dalla 2, il secondo membro può essere facilmente riscritto per ottenere

$$f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1 f(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{x}_2)$$

b. Si supponga che la 2' sia valida; si dimostri che conseguono la 2 e la 3. Sia $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$; allora la 2' diventa la 2. Sia $\alpha_2 = 0$; allora la 2' diventa la 3. Ciò completa la dimostrazione.

Così, per dimostrare che una funzione è lineare, si può verificare o che soddisfa la proprietà di sovrapposizione (nel senso indicato sopra) oppure che soddisfa la proprietà additiva e la proprietà di omogeneità.

Esercizio - Sia $f(\cdot)$ una funzione lineare, che trasforma numeri reali in numeri reali; dimostrare che $f(0) = 0$. (Suggerimento: usare la proprietà di omogeneità).

Esempio 1 - Considerare la funzione f, il cui grafico sul piano xy è la linea retta che passa per l'origine definita da

$$y = f(x) = 2x$$

Si dice che f è una funzione lineare. Infatti,

per qualsiasi α e per quals' i x $\quad f(\alpha x) = 2\alpha x = \alpha(2x) = \alpha f(x)$

e

$$f(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2 =$$

per qualsiasi x_1, x_2

Generalizzando un poco questi cal li si osserva che una funzione il cui dominio ed il cui campo di variazione sono l'insieme di tutti i numeri reali è una funzione *lineare* se e soltanto se ha la forma $y = kx$, dove k è una costante (cioè, dove k è indipendente da x). Equivalentemente, una funzione è *lineare* se e soltanto se il suo grafico è una linea retta passante per l'origine del piano xy. Si noti che una funzione della forma $y = kx + b$, dove b è una costante *non nulla*, è non lineare, poiché quando $x = 0$, $y = b = 0$.

Esempio 2 - Si supponga che il contatto strisciante del reostato illustrato in fig. 1 sia mosso avanti ed indietro in modo che la resistenza tra i morsetti A e B all'istante t sia $(5 + \cos t)$ ohm. L'equazione che mette in relazione la tensione istantanea $v(t)$ con la corrente istantanea $i(t)$ è

$$v(t) = (5 + \cos t)i(t)$$

Questa equazione può essere considerata come se definisse una funzione

$$(4) \quad v(t) = f[i(t),t] = (5 + \cos t)i(t)$$

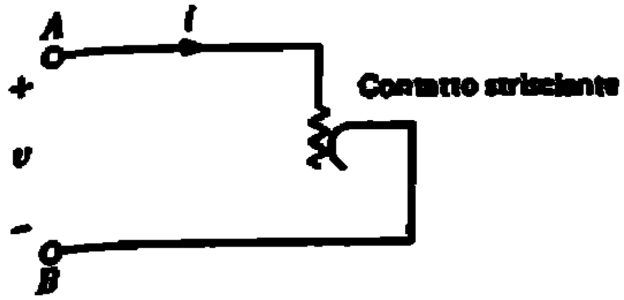

Fig. 1 - Un resistore lineare tempo-variante ottenuto muovendo il contatto strisciente del reostato avanti ed indietro.

Si noti che f ha due variabili indipendenti: il valore istantaneo della corrente $i(t)$, ed il tempo t. Per ogni t prefissato, l'eq. (4) può essere vista come se definisse una funzione che associa ad ogni numero un numero reale $i(t)$ il numero reale $v(t)$; si indica tale funzione con $f(\cdot, t)$. Si dice che $f(\cdot, t)$ è una *funzione lineare*; cioè per ogni valore fissato della sua seconda variabile t, la funzione f nella (4) è lineare rispetto alla sua prima variabile. L'additività deriva dai calcoli seguenti:

$$\begin{aligned} f[i_1(t) + i_2(t), t] &= (5 + \cos t)[i_1(t) + i_2(t)] \\ &= (5 + \cos t)i_1(t) + (5 + \cos t)i_2(t) \\ &= f[i_1(t), t] + f[i_2(t), t] \end{aligned}$$

Poiché per o i t fissato, questo è valido per tutti i numeri reali $i_1(t)$, $i_2(t)$ allora $f(\cdot, t)$ è additivo. L'omogeneità è ver cata nel modo seguente

$$f[\alpha i_1(t), t] = (5 + \cos t)\alpha i_1(t) = \alpha(5 + \cos t)i_1(t) = \alpha f[i_1(t), t]$$

Si vedrà in seguito che la (4) descrive la caratteristica di un *resistore lineare tempo-variante*.

Esempio 3 - Si consideri la funzione $\mathbf{f}$ il cui dominio ed il cui campo di definizione è lo spazio vettoriale R^n (l'insieme di tutte le n-ple reali) definita da

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

dove $\mathbf{A}$ è una matrice data $n \times n$ i cui elementi sono numeri reali. Segue immediatamente che $\mathbf{f}$ è una fun ne lineare, poiché

$$\mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2$$

r tutti i numeri reali α_1, α_2 e per tutte le n-ple $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$.

Esempio 4 - Questo esempio mostra precisamente il perché si è avuto bisogno del concetto generale di *funzione* e del concetto generale di *funzione lineare*. Si consideri il circuito di fig. 2, dove un generatore di tensione pilota un circuito lineare tempo-invariante serie RL. Si supponga che all'istante $t = 0$, la corrente che attraversa l'induttore (di induttanza L) sia nulla e che da $t = 0$ in poi, il generatore di tensione applichi una tensione e_s ai morsetti A e B del circuito. Fisicamente, è ovvio che ad ogni andamento di tensione $e_s(\cdot)$ corrisponde un unico andamento di corrente $i(\cdot)$. È doveroso osservare che con la forma d'onda $e_s(\cdot)$ si intende la « curva » completa che specifica le tensioni $e_s(t)$ per qualsiasi $t \geq 0$; in modo simile, con la forma d'onda $i(\cdot)$ si intende la « curva » completa che specifica la corrente $i(\cdot)$ per quasiasi $t \geq 0$. Tecnicamente, le forme d'onda $e_s(\cdot)$ e $i(\cdot)$ sono funzioni reali i cui domini sono l'intervallo di tempo $t \in [0, \infty)$.[1] Così, si può pensare al circuito RL illust lo come ad un dispositivo che definisce una funzione f per cui, si scrive $i = f(e_s)$. Più oltre si mostrerà che il valore di i all'istante t, che è anche il valore all'istante t della forma d'onda $f(e_s)$, ed è quindi indicato con la strana notazione $[f(e_s)](t)$, è dato da

$$i(t) = [f(e_s)](t) = \int_0^t \frac{1}{L} e^{-(R/L)(t-t')} e_s(t')\, dt'$$

per qualsiasi $t \geq 0$

La funzione f è completamente defini iché questa equazione fornisce per ogni t il valore di $f(e_s)$ per qualsiasi e_s.

Si dice che la *funzione f è lineare*. In primo luogo, si verifica l'*omogeneità*. Sia α un numero reale qualsiasi. Sia i la risposta alla forma d'onda di e_s; cioè, $i = f(e_s)$. Si consideri adesso la forma d'onda di tensione αe_s; per cui

$$[f(\alpha e_s)](t) = \int_0^t \frac{1}{L} e^{-(R/L)(t-t')} \alpha e_s(t')\, dt'$$

Da una nota proprietà dell'integrale — se tutte le ordinate di u curva sono moltiplicate per α, l'area sottesa dalla curva è moltiplicata

[1] Il simbolo $[a, b]$ indica l'insieme di tutti i
mentre (a, b) indica l'insieme di tutti i t tali c
l'insieme di tutti i t tali che $0 \leq t < \infty$.

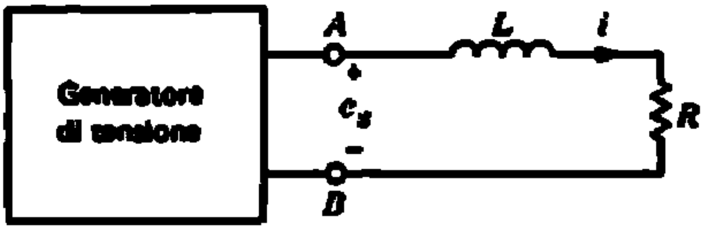

Fig. 2 - Un circuito serie RL pilotato da un generatore di tensione.

per α — la parte destra dell'equazione diventa

$$[f(\alpha e_s)](t) = \alpha \int_0^t \frac{1}{L} e^{-(R/L)(t-t')} e_s(t')\, dt'$$
$$= \alpha[f(e_s)](t)$$

Po' é l'ultima uguaglianza è valida per qualsiasi t, si conclude che

$$f(\alpha e_s) = \quad e_s)$$

per quals' i numero reale α e per qualsiasi forma d'onda e_s; cioè, f è omogenea. Fisicamente, tale equazione indica che l'andamento di corrente dovuta all'andamento di tensione αe_s è α volte l'andamento di corrente dovuta all'andamento di tensione e_s.

Si verifichi ora la *proprietà additiva*. Sia i_1 la forma d'onda di corrente prodotta da una certa forma d'onda di tensione e_1; per cui $i_1 = f(e_1)$. Più esplicitamente,

$$i_1(t) = [f(e_1)](t) = \int_0^t \frac{1}{L} e^{-(R/L)(t-t')} e_1(t')\, dt' \qquad \text{per } t \geq 0$$

Sia i_2 la forma d'onda di corrente prodotta da una certa forma d'onda i tensione e_2; per cui $i_2 = f(e_2)$. Più esplicitamente.

$$t) = [f(e_2)](t) = \int_0^t \frac{1}{L} e^{-(R/L)(t-t')} e_2(t')\, dt' \qquad \text{per } \geq 0$$

Si consideri ora la corrente i_{1+2} prodotta dalla forma d'onda di tensione $e_1 + e_2$; in tal caso $i_{1+2} = f(e_1 + e_2)$. Più esplicitamente,

$$i_{1+2}(t) = [f(e_1 + e_2)](t) = \int_0^t \frac{1}{L} e^{-(R/L)(t-t')} [e_1(t') + e_2(t')]\, dt' \qquad \text{per } t \geq 0$$

Scrivendo ora quest'ultimo integrale come somma di due integrali ed usando le due equazioni precedenti, si ottiene

$$
\begin{aligned}
i_{1+2}(t) &= \int_0^t \frac{1}{L} e^{-(R/L)(t-t')} e_1(t')\,dt' + \int_0^t \frac{1}{L} e^{-(R/L)(t-t')} e_2(t')\,dt' \\
&= [f(e_1)](t) + [f(e_2)](t) \\
&= i_1(t) + i_2(t)
\end{aligned}
$$

Poiché le equazioni sono valide per qualsiasi t

per qualsiasi e_1, e_2 $\quad i_{1+2} = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = i_1 + i_2$

Così, la funzione f è additiva. Fisicamente, si osserva che se $i_1(\cdot)$ e $i_2(\cdot)$ sono, rispettivamente, le correnti prodotte dalla forma d'onda di tensione $e_1(\cdot)$ e $e_2(\cdot)$, quando agiscono da sole nel circuito, allora la corrente prodotta dalla forma d'onda di tensione $e_1(\cdot) + e_2(\cdot)$ è $i_1(\cdot) + i_2(\cdot)$. Dato che f è omogenea ed additiva, essa è, per definizione, una funzione *lineare*. In termini fisici, posto che $i(0) = 0$, la forma d'onda di corrente $i(\cdot)$ che risulta da una forma d'onda di tensione applicata $e_s(\cdot)$ è una *funzione lineare* di $e_s(\cdot)$.

APPENDICE B

MATRICI E DETERMINANTI

Lo scopo di questa appendice è di richiamare le definizioni concetti di base che riguardano le matrici ed i determinanti.

1. *Matrici*

1.1 *Definizioni*

Un raggruppamento rettangolare di *scalari* è detto *matrice*. Per definizione, questi scalari possono essere elementi di un campo. (La parola *campo* si riferisce, in questo caso, al concetto algebrico definito nell'app. A, par. 2. Tale concetto di campo non ha nulla a che fare con i campi della fis'). Molto spesso si incontrano nell'ingegneria quattro campi di scalari:

1. il campo dei numeri reali;
2. il campo dei numeri complessi;
3. il campo delle funzioni razionali, con coefficienti r i o complessi [ad esempio, $(s + 1)/(s^2 + 2s + 4)$];
4. il campo dei numeri binari, più tecnicamente gli interi modulo 2.

Dato che gli scalari, per definizione, sono elementi di un campo, le loro regole algebriche sono precisamente le stesse dell'algebra dei numeri reali.

Il raggruppamento rettangolare

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

è detto *matrice m righe ed n colonne*. Lo scalare a_{ij} è detto l'elemento della i-sima riga e della j-sima colonna oppure l'ij-simo elemento della matrice. Si useranno lettere maiuscole, come **A**, per indicare le matrici e lettere minuscole con pedici, come a_{ij}, per indicare i suoi elementi. È conveniente qualche volta scrivere $\mathbf{A} = (a_{ij})$ per indicare che l'ij-simo elemento di **A** è a_{ij}.

Una matrice con m righe ed n colonne è detta matrice $m \times n$ (leggere « matrice m per n »). Se una matrice ha n righe ed n colonne, si dice che è una *matrice quadrata di ordine n*. Una matrice con una sola riga ed n colonne è detta *vettore riga*. Una matrice con m righe ed una colonna è detta *vettore colonna*. Due matrici si dicono della *stessa misura* se e soltanto se hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.

1.2 *Operazioni*

Moltiplicazione di una matrice con uno scalare - Se **A** è una matrice e c è uno scalare (per esempio, un numero reale o complesso), allora $c\mathbf{A}$ è la matrice ottenuta moltiplicando *ogni* elemento di **A** per lo scalare c.

Addizione di matrici - Se **A** e **B** sono matrici della stessa misura la loro *somma* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ è definita come la matrice **C** con elementi c_{ij}, tali che $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ per ogni i e j.

Eguaglianza di matrici - Due matrici **A** e **B** sono uguali
se hanno la stessa misura e $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni i e j.

Moltiplicazione di matrici - Se **A** è una matrice $m \times n$ e **B** è una matrice $n \times p$, allora il prodotto **AB** è definito come la matrice **C** $m \times p$ con elementi c_{ij} dati da

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i}$$

Osservazioni

1. La somma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ non è definita, se non quando **A** e **B** abbiano lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.
2. Il prodotto **BA** *non è definito* se non è $m = p$.
3. Di lito $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$.

1.3 *Altre definizioni*

Se **A** è una matrice quadrata, gli elementi del tipo a_{ii} sono detti *elementi diagonali*. Una matrice in cui tutti gli elementi tranne quelli dia-diagonali sono nulli è detta *matrice diagonale*. Se **A** e **B** sono matrici diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$. Se, in una matrice *diagonale* **A**, $a_{ii} = 1$ per qualsiasi i, la matrice è detta *matrice identità* (*oppure unità*); si indica con **1**. Se **A** è una matrice $n \times n$ qualsiasi ed **1** è la matrice unitaria $n \times n$, allora $A1 = 1A$.

Se $a_{ij} = 0$ per qualsiasi i e per qualsiasi j, la matrice è detta *matrice zero*; è indicata con **0**. Se **A** è una matrice $n \times n$ qualsiasi e **0** la matrice zero di ordine n, allora $A + 0 = A$.

Se **A** è una matrice quadrata $n \times n$ e se c'è una matrice quadrata $n \times n$ **B** tale che

$$AB = BA = 1$$

B è detta *inversa* di **A** ed è indicata con A^{-1}. Se **A** ha un'inversa, si dice che **A** è *non sin lare*. Si può dimostrare che se **A** è non singolare, la sua inversa è unica. Si può inoltre dimostrare che **A** è non singolare se e solo se $\det A \neq 0$. Il calcolo di A^{-1} sarà visto in particolare nel par. 2.3.

Teorema

1. Se **A** e **B** sono matrici

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2. Se **A**, **B** e **C** sono matrici non singolari n

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

Se **A** è una matrice $m \times n$, allora la matrice $n \times m$ ottenuta scambiando fra loro le righe e le colonne di **A** è detta *trasposta* di **A** ed è indicata col simbolo A^T.

Teorema

1. Se **A** è una matrice $m \times n$ e **B** è una matr'

$$(AB)^T = B^TA^T$$

2. Se le mat ' i **A**, **B**, **C** hanno dimensioni li che il prodotto **ABC** è definito, allora

$$(ABC)^T = C^TB^TA^T$$

1.4 *L'algebra delle matrici $n \times n$*

Nel seguito **A**, **B**, **C** indichino matrici n
campo.

1. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se e soltanto se $a_{ij} = b_{ij}$ per $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots,$
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$; l'addizione è commutativa.
3. *Proprietà distributiva.*
   $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$; $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
4. Di solito, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$; la moltiplicazione di matrici non è commutativa.
5. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$, per qualsiasi **A**.
6. $\mathbf{A1} = \mathbf{1A} = \mathbf{A}$, per qualsiasi **A**.

L'algebra delle matrici $n \times n$ è sostanzialmente diversa da quella dei numeri reali o complessi. Il motivo è che la classe delle matrici $n \times n$ non costituisce un campo. Si considerino i fatti seguenti:

1. In generale, la moltiplicazione non è commutativa; ad esempio,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Se $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ (cioè, la matrice **A** non è la matrice zero; ossia gli a_{ij} non sono tutti nulli) **A** non ha necessariamente un'inversa (in più si richiede che $\det \mathbf{A} = 0$). Ad esempio,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   non ha inversa. Infatti non vi è una matrice 2×2 di numeri reali la quale moltiplicata per **A** dia la matrice identità **1**.

3. In generale, non si possono cancellare fattori. Ciò significa che se $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, *non deriva* che $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. (Per potere fare ciò occorre prima verificare che **A** non è singolare). Per esempio,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Determi'

2.1 *Definizioni*

Si chiama *determinante* u funzione il cui dominio è l'insieme delle matrici *quadrate* (i cui elementi sono scalari, cioè, elementi di un campo) ed il cui campo di variazione è il campo degli scalari. Il determinante associato alla matrice quadrata $\mathbf{A}$ è indicato con det $\mathbf{A}$. Così, se $\mathbf{A}$ ha come elementi numeri reali, det $\mathbf{A}$ è un numero reale; se $\mathbf{A}$ ha come elementi funzioni razionali, det $\mathbf{A}$ è una funzione razionale. Daremo in seguito una procedura induttiva per determinare il valore del det $\mathbf{A}$ per qualsiasi matrice quadrata $\mathbf{A}$.

Il determinante associato alla sottomatrice di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando la sua i-esima riga e la sua j-esima colonna è detto il *minore* dell'elemento a_{ij} ed indicato con M_{ij}.

Il *cofattore* A_{ij} dell'elemento a_{ij} è definito dalla relazione

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Valutazione di un determinante - Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$ con $n \geq 2$, per cui

1. $\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ per qualsiasi $j = 1, 2, \ldots, n$.
   Questa formula è detta *espansione del det* $\mathbf{A}$ *secondo la colonna j-esima*. È chiaro che la regola 1 definisce induttivamente il determinante di una matrice $n \times n$ come una combinazione lineare di determinanti di matrici $(n-1) \times (n-1)$. Si può dimostrare che la regola 1 è equivalente alle regole 2 e 3 seguenti.

2. $\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ per qualsiasi $i = 1, 2, \ldots, n$. Questa formula è detta *espansione del det* $\mathbf{A}$ *secondo la riga i-esima*.

3. $\det \mathbf{A} = \sum \varepsilon_i a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$ per qualsiasi permutazione $i_1, i_2, \ldots, i_n$, dove ε_i è $+1$ o -1 a seconda che la permutazione $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sia pari oppure dispari.

a. $\det A^T = \det A$.

b. $\det (AB) = \det A \cdot \det B$.

2. Sia k un numero intero con $1 \leq k \leq n$. Se tutti gli elementi k-esima riga o della k-esima colonna della matrice A sono nulli, $\det A = 0$.

3. Se la matrice A′ è ottenuta da A moltiplicando tutti gli elementi della k-esima riga (oppure della k-esima colonna) per uno scalare c e lasciando tali e quali gli altri elementi, si ha

$$\det A' = c \det A$$

Osservazione - Una conseguenza della proprietà 3 e della regola di moltiplicazione di una matrice per uno scalare è che se A è una matrice $n \times n$ e c è uno scalare, si ha

$$\det (cA) = c^n \det A$$

4. Sia A una matrice $n \times n$. Si supponga che la k-esima riga di rappresentata da una somma,

$$a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Chiamiamo A′ e A″ le matrici uguali ad A eccetto il fatto che le loro k-esime righe sono formate da $a'_{k1}, a'_{k2}, \ldots, a'_{kn}$ e $a''_{k1}, a''_{k2}, \ldots, a''_{kn}$ rispettivamente. Per cui

$$\det A = \det A' + \det A''$$

Per esempio

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+5 & 3+6 & 4+7 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

5. È valido il medesimo risultato per la k-esima colonna.

6. Se A′ è ottenuto da A cambiando due righe (o due colonne) si ha

$$\det A' = -\det A$$

7. Se A′ è ottenuto da A moltiplicando la k-esima riga per lo scalare c e sommando il risultato alla i-esima riga, dove $i \neq k$, si ha

$$\det A' = \det A$$

8. È valido il medesimo risutato per due colonne.

9. a. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq j \\ \det \mathbf{A} & \text{if } k = j \end{cases}$

b. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ \det \mathbf{A} & \text{if } i = j \end{cases}$

Nella definizione di determinante di una matrice quadrata e nella formulazione delle proprietà del determinante, si assume che tutti gli elementi della matrice quadrata siano scalari; cioè elementi di un campo. Nella teoria dei circuiti questo è il caso dell'analisi di circuiti lineari resistivi (dove gli elementi delle matrici sono numeri reali perché sono resistenze, oppure combinazioni lineari delle stesse) e dell'analisi in regime sinusoidale di circuiti lineari tempo-invarianti (dove gli elementi delle matrici sono numeri complessi perché sono impedenze oppure combinazioni lineari delle stesse). Nello scrivere le equazioni differenziali di circui ˙ lineari tempo-invarianti, si incontrano matrici i cui elementi sono polinomi nell'operatore differenziale $D \triangleq d/dt$. Si potrebbe, ad esempio, avere

$$\begin{bmatrix} D^2 + 2D + 2 & D + 1 \\ D + 1 & D^2 + 5D + 7 \end{bmatrix}$$

La somma ed i prodotti i operatori polinomiali sono perfettamente significativi (sebbene la divisione di due operatori polinomiali porti delle difficoltà nell'interpret ˙one). Si può verificare ciò che segue.

La definizione di determinante di una matrice quadrata e tutte le proprietà dei determinanti precedentemente elencate sono ancora valide quando gli elementi delle matrici sono polinomi dell'operatore $D \triangleq d/dt$.

È importante notare che, iché i polinomi in D non costituiscono un campo, la regola di Cramer (formulata di seguito) non è applicata a tali matrici.

2.3 *Regola di Cramer*

Si consideri adesso il sistema di n equazioni incognite

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Si può scrivere questo sistema in forma matriciale

(1) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

dove $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ sono i vettori colonna, rispettivamente con componenti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Se $\det \mathbf{A} \neq 0$, il sistema di equazioni suddetto ha un'unica solu

(2) $$x_k = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots & & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

In altre parole, il numeratore è il determinante di una nuova matrice ottenuta da $\mathbf{A}$ sostituendo la k-esima colonna con il vettore colonna $\mathbf{b}$. Usando la regola (1) per la valutazione di un determinante, si ottiene

(3) $$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}}{\det \mathbf{A}} \quad \text{dove } A_{ik} \triangleq \text{cofattore di } a_{ik}$$

Applicazione - Si supponga $\det \mathbf{A} \neq 0$; si

$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

come un insieme di n sistemi di n equazioni algebriche lineari, con un sistema per ogni colonna incognita di $\mathbf{A}^{-1}$. La regola di Cramer implica che se c_{ij} è l'elemento della i-esima riga e della j-esima colonna di $\mathbf{A}^{-1}$, si ha

(4) $$c_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}$$

dove A_{ji} è il cofattore di a_{ji} in $\mathbf{A}$. Si ti che nella (4) i pedici del cofattore A_{ji} sono quelli di c_{ij} ma in *ordine inverso*. Una conseguenza immediata della (4) è il corollario seguente.

Corollario - Sia A una matrice $n \times n$ non singolare. Se A è una matrice simmetrica (cioè, $a_{ij} = a_{ji}$ per qualsiasi i e j) allora anche A^{-1} è una matrice simmetrica.

Esempio - Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

per cui

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}$$

2.4 *Disuguaglianze di determin*

Nello studio di reti lineari resistive, è molto utile una estensione della famosa disuguaglianza di Hadamard (chiarita da O. Taussky).

Teorema - Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ con ele nti reali. supponga quanto segue:

1. Ogni elemento diagonale è più grande oppure uguale alla somma dei valori assoluti degli altri elementi della stessa riga; cioè,

$$(5) \quad a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

2. Il numero delle disuguaglianze nella (5) che sono val' segno uguale è al massimo $(n - 1)$.

3. La matrice A non può essere trasformata nella forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

con gli stessi cambiamenti di righe e colonne, dove A_{11} e A_{22} sono matrici quadrate.[1] Allora

$$\det \mathbf{A} > 0$$

Teorema - Sia $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ una matrice $n \times n$ con elementi complessi. Si facciano le seguenti ipotesi:

1. Ogni elemento diagonale è, in assoluto, più grande o uguale alla somma del valore assoluto degli altri elementi della stessa riga; c'

$$(6) \quad |z_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |z_{ij}|$$

2. Il numero di disuguaglianze nella (6) che sono vali uguale non supera $(n - 1)$.
3. La matrice $\mathbf{Z}$ non può venir t lla forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ 0 & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix}$$

con gli *stessi* cambiamenti di righe e colonne, dove $\mathbf{Z}_{11}$ e $\mathbf{Z}_{22}$ sono matrici *quadrate*.[2] Allora

$$\det \mathbf{Z} \neq 0$$

3. *Dipendenza lineare e rango*

3.1 *Vettori linearmente indipendenti*

Un insieme di vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ è detto *lin rmente dipendente* se vi è un insieme di scalari $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *non tutti nulli*, e che

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = 0$$

I vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ sono quindi detti *linearmente dipendenti*. un insieme di vettori *non* è linearmente dipendente, si dice che esso è *linear-*

[1] La condizione 3. sebbene spesso dimenticata da molti autori, è indispensabile. Senza di essa il teorema è falso. Dal punto di vista della teoria dei circuiti, se le equazioni sono scritte nel solito modo, è sempre soddisfatta per le reti resistive lineari (reti composte di resistori positivi e negativi) i cui grafi sono connessi e non separati.

[2] La condizione 3, sebbene sia indispensabile per dimostrare il teorema, è sempre soddisfatta quando la rete ha un grafo che è connesso e non separato e quando le equazioni sono scritte nel solito modo.

mente indipendente. In altre parole, l'insieme dei vettori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., linearmente indipendente se

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

comporta

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

Se questo è il caso si ..., $\mathbf{x}_k$ sono *linearmente indipendenti*.

3.2 *Rango di una matrice*

Si consideri una matrice rettangolare $\mathbf{A}$ con m righe ed n colonne. Qualsiasi matrice ottenuta da $\mathbf{A}$ cancellando alcune righe e/o alcune colonne è detta una *sottomatrice* di $\mathbf{A}$. Il numero r è detto *rango* di $\mathbf{A}$ se (1) tutte le sottomatrici $l \times l$ con $l > r$ hanno un determinante che è uguale a zero, e se (2) almeno una sottomatrice $r \times r$ ha una determinante che è diverso da zero.

Poiché il determinante di qualsiasi matrice è uguale al determinante della sua trasposta, il rango di $\mathbf{A}$ è uguale al rango di $\mathbf{A}^T$.

Il collegamento tra la nozione di indipendenza lineare e quella di rango è trattato in seguito. I vettori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ abbiano le componenti seguenti

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ \\ x_{m1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ \\ x_{m2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{bmatrix}$$

Sia $k \leq m$: per cui l'insieme di vettori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ è linearmente indipendente se e soltanto se la matrice $\mathbf{X}$, $m \times k$, ha rango k, dove

$$\mathbf{X} \triangleq \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} \cdots x_{2k} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_{m1} & x_{m2} \cdots x_{mk} \end{bmatrix}$$

Si può pensare alle n colonne della matrice $\mathbf{A}$, $m \times n$, come vettori (con n componenti). Se il rango di $\mathbf{A}$ è r, allora (1) qualsiasi sotto' ieme composto di $r+1$ dei suoi ttori colonna è un insieme linearmente dipendente di vettori, (2) qualsiasi sottoinsieme composto di $r+1$ dei suoi vettori riga è un insieme di vettori linearmente dipendenti, e (3) esiste almeno un insieme linearmente indipendente. Un collegamento tra le nozioni di indipendenza lineare, rango, e matrice inversa è dato dal teorema seguente.

Teorema - Sia $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$. Le affermazioni seguenti equivalenti:

1. tale che $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$.
2. $\det \mathbf{A} \neq 0$.
3. Il rango di $\mathbf{A}$ è uguale a n.
4. Le n colonne di $\mathbf{A}$ formano un insieme di n vettori linearmente indipendenti.
5. Le n righe di $\mathbf{A}$ formano un insieme di n vettori linearmente indipendenti.

Un teorema utile sul rango di un prodotto di matrici è il seguente.

Teorema - Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due matrici quadrate di ordine n. $\rho(\mathbf{A})$ e $\rho(\mathbf{B})$ indicano il rango di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, rispettivamente. Allora

$$\rho(\mathbf{A}) + \rho(\mathbf{B}) - n \leq \rho(\mathbf{AB}) \leq \min[\rho(\mathbf{A}), \rho(\mathbf{B})]$$

In particolare, se $\mathbf{A}$ è non singolare

$$\rho(\mathbf{AB}) = \rho(\mathbf{BA}) = \rho(\mathbf{B})$$

Si osservi che questo teorema può essere appl to al prodotto di due mat i rettangolari. Sommando, infatti, opportune righe o colonne di zeri si otterranno delle matrici quadrate e ciò non altera il rango delle mat i e del loro prodotto.

3.3 *Equazioni lineari indipendenti*

Si consideri ora il seguente sistema di m equazioni omogenee algebriche lineari in n incognite:

$$(7) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n =$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

Queste m equazioni sono dette linearmente dipendenti se vi sono m

costanti $c_1, c_2, \ldots, c_m$, non tutte nulle, in modo che la prima equazione moltiplicata per c_1, la seconda per c_2, ..., e la m-esima equazione per c_m sommate insieme diano come risultato *identicamente* zero. Se ci riferiamo alla definizione di vettori linearmente indipendenti e se consideriamo gli n coefficienti di ogni equazione come definizione di un vettore, si osserva che le m equazioni precedenti sono linearmente indipendenti se e soltanto se gli m vettori riga della matrice dei coefficienti sono linearmente dipendenti. Un altro metodo per esprimere l'idea di dipendenza lineare è quello di osservare che se le m equazioni sono linearmente dipendenti, allora alcune di esse possono essere espresse come una combinazione lineare di alcune delle altre; cioè, alcune equazioni non danno alcuna informazione che non sia già in alcune delle altre. Perciò, si può concludere la discussione formulando il seguente teorema.

Teorema - Il sistema di equazioni (7) è linearmente dipendente se e ltanto se il rango della matrice dei coefficienti $m \times n$ (a_{ij}) è più piccolo i m. Inoltre, il sistema è un sistema di equ 'oni linearmente indipennti se e solo se la matrice $m \times x$ dei coefficienti ha rango m; analoganle, ciò è vero se e solo se gli m vettori riga della matrice dei coefficienti sono linearmente indipendenti.

4. *Matrici definite positive*

Sia $\mathbf{A}$ una matrice simmetrica $n \times n$ con ele nti reali. Dato un vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ con componenti reali, si può costruire la forma quadrat'

$$(8) \quad \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Esempio 1 - Sia

$$\text{Let } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$$

Questa forma quadratica può essere scritta come

Perciò, per

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = -2$$

per

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2^T\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = 6$$

e per

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3^T\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = 0$$

A seconda di ciò che è il vettore $\mathbf{x}$, la forma quadratica assume valori positivi, nulli o negativi.

Esempio 2 - Sia

$$\text{Let } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

allora

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 \end{aligned}$$

È chiaro, in tal caso, che ogni volta che $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ non è il vettore zero, la forma quadratica assume valori positivi. Ciò suggerisce la definizione seguente.

Definizione - La matrice simmetrica $n \times n$, $\mathbf{A}$, è detta *definita positiva* se $\mathbf{x} \neq 0$ comporta $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$. Se $\mathbf{A}$ è una matrice definita positiva, la forma quadratica $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ è detta *forma quadratica definita positiva*.

Si vede immediatamente che una matrice *diagonale* con elementi diagonali *positivi* è una matrice definita positiva; la forma quadratica corrispondente, infatti è

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$$

Esiste una caratteristica semplice delle matrici nite positi miamo *minore principale fondamentale di ordine k* il determinante della sottomatrice che consta delle *prime k* righe e delle *prime k* colonne.

La caratteristica è fornita dal teorema seguente.

Teorema - Una matrice simmetrica $n \times n$ è definita positiva se e ltanto se tutti i suoi minori principali fondamentali sono positivi.

Così, per verificare se una matrice simmetrica $n \times n$ e definita positiva, o no, si devono calcolare gli n determinanti rispettivamente di ordine $1, 2, ..., n-1, n$.

Esempio - Sia

$$\text{Let } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

I minori principali fondamentali sono

$$\det \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 26 \qquad \det \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix} = 4$$

Di conseguenza la matrice data è definita positiva.

In alcuni casi, il teor. 1 del par. 2.4 è utile per verificare se tutti i minori principali fondamentali sono positivi.

APPENDICE C

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Lo scopo di questa appendice è di riassumere un numero di fatti fondamentali che riguardano le equazioni differenziali. Non vengono date dimostrazioni perché queste sono disponibili nei moderni testi di analisi. Speriamo che questa raccolta di proprietà delle equazioni differenziali sia utile per una rapida consultazione.

1. *L'equazione lineare di ordi*

1.1 *Definizioni*

Ovunque useremo la notazione $y^{(n)}$ per $d^n y/dt$. L'equazione differen-
· le

$$(1)\quad y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(1)}(t) + a_n(t)y(t) = b(t)$$

dove i coefficienti $a_i(\cdot)$ e la funzione forzante $b(\cdot)$ sono funzioni note continue, è detta *equazione lineare differenziale di ordine n*. Se i coefficienti $a_i(t)$ sono tutti costanti, l'equazione è detta *lineare con coefficienti costanti*. Se uno o più coefficienti sono funzioni del tempo, l'equazione è detta *lineare con coefficienti tempo-varianti*. Se la funzione forzante $b(\cdot)$ è *identicamente* nulla, l'eq. 1 è detta *equazione omogenea lineare differenziale di ordine n*, e diventa

$$(1H)\quad y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(1)}(t) + a_n(t)y =$$

Una funzione ψ che sostituita a y nell'equazione differenziale, fa diventare la parte sinistra uguale a $b(t)$ *per qualsi i t*, è detta *soluzione particolare* della (1).

Una funzione ϕ, che sostituita a y nell'equazione omogenea (1 *O*) fa diventare la parte sinistra uguale a zero *per qualsi i t*, è detta *solu-*

zione dell'equazione omogen

Esempio - Si consideri l'

$$y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = 1$$

È facile verificare che $\psi_1(t) = 1 + \quad e^{-t}$ e $\psi_2(t) = 1 + \quad e^{-2t}$ sono soluzioni particolari di tale equazione.

Per l'equazione omogenea

$$y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = 0$$

è facile verificare che, qualunque siano le costanti c_1 e c_2, la funzione $\phi(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{-2t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea.

Questi esempi chiariscono il fatto per cui, quando non sono specificate le condizioni iniziali, un'equazione lineare differenziale ha infinite soluzioni.

Prima di prendere in considerazione quali altre condizioni siano richieste per fare in modo che le soluzioni siano uniche, si considerino le relazioni fra le soluzioni della (1) e della (1 *O*).

1.2 *Proprietà basate sulla linearit*

Le proprietà elencate in seguito sono tutte conseguenze del fatto che la parte sinistra dell'eq. (1) e (1 *O*) può essere considerata come il risultato dell'applicazione dell'operatore differenziale

$$(2) \quad L(D,t) \triangleq D^n + a_1(t)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)D + a_n(t)$$

alla funzione y. (D è qui un simbolo abbreviato per d/dt).
eq. (1) e (1 *O*) possono essere scritte, rispettivamente, come,

$$(3) \quad L(D,t)y(t) = b(t) \qquad e \qquad L(D,t)y(t) = 0$$

Le equazioni differenziali (1) e (1 *O*) sono giustamente dette *lineari* perché $L(D, t)$ è un *operatore lineare*. Infatti, esso è omogeneo. Se c'è una costante, si ha

$$L(D,t)[cy(t)] = cL(D,t)y(t)$$

È anche additivo; per cui

$$L(D,t)[y_1(t) + y_2(t)] = L(D,t)y_1(t) + L(D,t)y_2(t)$$

Stabiliamo ora le proprietà delle equazioni differenziali 1ª sono basate sulla linearità.

Proprietà 1 - Se ϕ_1 e ϕ_2 sono due soluzioni dell'equazione omogenea (1 *O*) e se c_1 e c_2 sono costanti qualsiasi, allora $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ è pure una soluzione dell'equazione omogenea (1 *O*).

Dimostrazione - Per qualsiasi t, si ha

$$L(D,t)[c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)] = c_1L(D,t)\phi_1(t) + c_2L(D,t)\phi_2(t) = 0$$

Proprietà 2 - Se ϕ è una soluzione qualsiasi dell'equazione omogenea (1 *O*) e ψ è una soluzione qualsiasi dell'equazione non omogenea (1) (cioè, ψ è una soluzione particolare), allora $\phi + \psi$ è pure una soluzione dell'equazione non omogenea (1).

Dimostrazione - Per qualsiasi t, si ha

$$L(D,t)[\phi(t) + \psi(t)] = L(D,t)\phi(t) + L(D,t)\psi(t) = 0 + b(t) = b(t)$$

Proprietà 3 - Se ψ_1 e ψ_2 sono soluzioni dell'equazione non omogenea (1), allora $\psi_1 - \psi_2$ è una soluzione dell'equazione omogenea (1 *O*).

Dimostrazione - Per qualsiasi t, si ha

$$L(D,t)[\psi_1(t) - \psi_2(t)] = L(D,t)\psi_1(t) - L(D,t)\psi_2(t) = b(t) - b(t) = 0$$

Proprietà 4 - Si supponga che nell'eq. (1) la funzione forzante $b(\cdot)$ possa essere scritta come una combinazione lineare di due altre funzioni $g_1(\cdot)$ e $g_2(\cdot)$; cioè $b(\cdot) = c_1g_1(\cdot) + c_2g_2(\cdot)$, dove c_1 e c_2 sono due costanti. Siano $\psi_1(\cdot)$ e $\psi_2(\cdot)$ soluzioni particolari delle

$$L(D,t)\psi_1(t) = g_1(t)$$
$$L(D,t)\psi_2(t) = g_2(t)$$

rispettivamente; per cui la funzione $c_1\psi_1(\cdot) + c_2\psi_2(\cdot)$ è una soluzione particolare della (1); cioè,

$$L(D,t)[c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t)] = c_1g_1(t) + c_2g_2(t)$$

Dimostrazione - Per qualsiasi t, si ha

$$
\begin{aligned}
L(D,t)[c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t)] &= L(D,t)[c_1\psi_1(t)] + L(D,t)[c_2\psi_2(t)] \\
&= c_1 L(D,t)\psi_1(t) + c_2 L(D,t)\psi_2(t) \\
&= c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) = b(t)
\end{aligned}
$$

Esercizio - Verificare le quattro proprietà basate sulla linearità per le equazioni seguenti:

$$y^{(2)} + 4y^{(1)} + 3y = 8e^t \qquad \begin{cases} \psi_1(t) = e^t,\ \psi_2(t) = e^t + e^{-3t} \\ \phi_1(t) = e^{-t},\ \phi_2(t) = e^{-3t} \end{cases}$$

$$t^2 y^{(2)}(t) - 2t y^{(1)}(t) + 2y(t) = 1 \qquad \begin{cases} \psi_1(t) = 1,\ \psi_2(t) = 1 + 2t^2 \\ \phi_1(t) = t,\ \phi_2(t) = t^2 \end{cases}$$

$$(t-1)y^{(2)}(t) - t y^{(1)}(t) + y(t) = 1 \qquad \begin{cases} \psi_1(t) = 1,\ \psi_2(t) = 1 + 5t \\ \phi_1(t) = e^t,\ \phi_2(t) = t \end{cases}$$

1.3 *Esistenza ed unicità*

Per esperienza si sa che per qualsiasi data funzione forzante $b(\cdot)$ e per qualsiasi insieme dato di coefficienti $a_1(\cdot)$, $a_2(\cdot)$, ..., $a_n(\cdot)$, l'eq. (1) ha un numero infinito di soluzioni. Possono venire imposti altri requisiti per fare in modo che la soluzione sia unica. Se si sceglie un *qualsiasi istante* t ed un *qualsiasi insieme* di n numeri reali α_0, α_1, α_2, ..., α_{n-1}, esiste una ed una sola soluzione dell'eq. (1), detta ϕ, tale che

$$
\begin{aligned}
\phi(t_0) &= \alpha_0 \\
\phi^{(1)}(t_0) &= \alpha_1 \\
\phi^{(2)}(t_0) &= \alpha_2
\end{aligned}
$$

Si dice che le eq. (4) impongono le condizioni iniziali α_0, α_1, ..., α_{n-1} alla soluzione ϕ. Analogamente, si dice che la soluzione ϕ *soddisfa le condizioni iniziali* α_0, α_1, ..., α_{n-1} in t_0. Si noti che per ottenere l'unicità, il numero delle condizioni iniziali che debbono essere specificate come nella (4) è uguale all'*ordine* n dell'equazione differenziale. È possibile trovare sistemi di n soluzioni della (1 O) ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_n, tali che per *qualsiasi* soluzione ϕ della (1 O) possa essere scritta come

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n$$

dove le costanti c_1, c_2, ..., c_n devono essere scelte convenientemente, in modo che ϕ soddisfi le condizioni iniziali imposte. Un tale sistema di soluzioni è detto *sistema fondamentale di soluzioni*. Le funzioni ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_n di un sistema fondamentale di soluzioni sono dette linearmente indipendenti perché è impossibile trovare n scalari c_1, c_2, ..., c_n, che non siano tutti uguali a zero, tali che

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t) = 0 \qquad \text{per tutti i } t$$

Se ψ_0 è una qualsiasi soluzione particolare dell'equazione non omogenea (1) e se ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_n è un sistema fondamentale di soluzioni dell'eq. (1 *O*), allora qualsiasi soluzione dell'eq. (1 *O*), ψ, può essere scritta come

$$\psi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n + \psi_0$$

dove le costanti c_1, c_2, ..., c_n devono essere convenientemente scelte in modo che ψ soddisfi le condizioni iniziali volute. La soluzione ψ ora definita è detta *soluzione generale* dell'equazione lineare differenziale (1). Essa è « generale » nel senso che con una scelta appropriata delle costanti c_1, c_2, ..., c_n essa può soddisfare qualsiasi insieme di condizioni iniziali come le (4).

2. *L'equazione lineare omogenea con coefficienti costanti*

Sia $L(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n$, dove $L(D)$ è un polinomio di grado n con coefficienti costanti. L'equazione differenziale omogenea può essere scritta come

(5 *O*) $\qquad L(D)y = 0.$

L'equazione algebrica nella variabile s

(6) $\qquad L(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

è detta *equazione caratteristica* dell'equazione differenziale (5 *O*). radici dell'equazione caratteristica sono dette *radici caratteristiche*.

2.1 *Radici caratteristiche distinte*

Se l'equazione caratteristica ha n radi

zioni (7) $\phi_1(t) = e^{s_1 t}, \phi_2(t) = e^{s_2 t}, \dots, \phi_n(t) = e^{s_n t}$
formano un sistema fondamentale di soluzioni della (5 O).
Perciò *qualsiasi* soluzione della (5 O) può essere scritta nella fo

(8) $\phi(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \cdots + c_n e^{s_n t}$

dove le costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ sono scelte in modo tale che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali volute.

2.2 *Radici caratteristiche multiple*

Se l'equazione caratteristica ha m radici distinte $s_1, s_2, \dots, s_m$, dove $m < n$, e se le molteplicità di tali radici sono, rispettivamente, $k_1, k_2, \dots, k_m$, si ha

1. $k_1 + k_2 + \cdots$

2. Le n funzioni

$$\phi_1(t) = e^{s_1 t}, \phi_2(t) = te^{s_1 t}, \dots,$$

(9) $$\phi_{k_1+1}(t) = e^{s_2 t}, \phi_{k_1+2}(t) = t$$

$$\phi_{n-k_m+1}(t) = e^{s_m t}, \phi_{n-k_m+2}(t) = te^{s_m t}, \dots, \phi_n(t) = t^{k_m-1}e^{s_m t}$$

costituiscono un insieme fondamentale di sol 'oni dell'eq. (5 O); perciò qualsiasi soluzione dell'eq. (5 O) può essere scritta come una combinazione lineare delle n soluzioni sopra elencate. In altre parole, qualsiasi sol 'one della (5 O) può essere scritta nella forma

(10) $\phi(t) = p_1(t)e^{s_1 t} + p_2(t)e^{s_2 t} + \cdots + p_m(t)e^{s_m t}$

in cui $p_1, p_2, \dots, p_m$ sono polinomi nella variabile t di grado, rispettivamente, $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_m - 1$. I coefficienti di tali polinomi devono essere scelti in modo che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali.

Osservazione - Nelle applicazioni, i coefficienti dell'equazione caratteristica sono numeri reali; di conseguenza, se $s_1 \triangleq \alpha_1 + j\omega_1$ è una radice caratteristica, anche $s_2 \triangleq \alpha_1 - j\omega_1$ lo è. In tal caso è spesso conveniente usare $e^{\alpha_1 t}\cos\omega_1 t$ e $e^{\alpha_1 t}\sin\omega_1 t$
come soluzioni piuttosto che $e^{(\alpha_1+j\omega_1)t}$ e $e^{(\alpha_1-j\omega_1)t}$,

le quali erano state suggerite nella (7).

3. *Soluzioni particolari di* $L(D)y(t) = b(t)$

Caso 1 - Si consideri l'equazione

(11) $L(D)y = e^{\lambda t}$

a. Se $L(\lambda) \neq 0$ (c' , λ non è una radice caratteristica), allora

(12) $\psi(t) = \dfrac{1}{L(\lambda)} e^{\lambda t}$

è una soluzione particolare dell'eq. (11).

b. Se λ è una radice di ordine k dell'equazione caratteristica $L(s) = 0$ e se $p(t)$ è un polinomio appropriato in t di grado k, si ha che

(13) $\psi(t) = p(t)e^{\lambda t}$

è una soluzione particolare dell'eq. (11); i coefficienti di $p(t)$ possono essere ottenuti con la sostituzione della (13) nella (11).

Caso 2 - Si consideri l'equazione

(14) $L(D)y = A \cos(\omega t + \phi)$

dove A, ω e ϕ sono costanti.

Se $L(j\omega) = 0$ e se θ è definito da

$L(j\omega) = |L(j\omega)|e^{j\theta}$

allora

(15*a*) $\psi(t) = \dfrac{A}{|L(j\omega)|} \cos(\omega t + \phi - \theta)$

è una soluzione particolare dell'eq. (14).

Esiste un altro modo di scrivere la soluzione particolare della (1). Posto

(15*b*) $\psi(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$

dove le costanti B e C sono ottenute in primo luogo dalla sostituzione della (15*b*) nella eq. (14), in secondo luogo, scrivendo la parte destra della (14) nella forma

$A \cos \phi \cos \omega t - A \sin \phi \sin \omega t$

ed, in terzo luogo, eguagliando i coefficienti di cos ωt e sin ωt in entrambi i membri dell'equazione che ne risulta.

D'altra parte, se si usano le identità trigonometriche ben note, si può riscrivere l'eq. (15*b*) nella forma seguente

(15*c*) $\psi(t) = \sqrt{B^2 + C^2}\cos(\omega t + \alpha)$

dove

$$\cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{-C}{\sqrt{B^2 + C^2}}$$

Si noti che la (15*c*) è della fo a (15*a*), perciò

$$\frac{A}{|L(j\omega)|} = \sqrt{B^2 + C^2}$$

e $\alpha = \phi - \theta$.

Se $j\omega$ è una radice di ordine k dell'equazione $L(s) = 0$ e se $p_1(t)$ e $p_2(t)$ sono polinomi appropriati in t di grado k, si ha che

$$p_1(t)\cos\omega t + p_2(t)\sin\omega t$$

è una soluzione particolare dell'eq. (14). I coefficienti dei pol' possono essere ottenuti sostituendo l'espressione suddetta nell' uguagliando i coefficienti con la stessa potenza in t.

Caso 3 - Si consideri l'equazione

(16) $L(D)y = f(t)$

dove f è un polinomio in t di grado k. Se $L(0) \neq 0$, esiste allora un polinomio $p(t)$ di grado k che è una soluzione particolare della eq. (16). Il polinomio p può essere trovato con la sostituzione nella (16) ed uguagliando i coefficienti di uguale potenza in t.

Se 0 è una radice di ordine m di $L(s) = 0$ e se p è un polinomio appropriato di grado k, si ha che

$$t^m p(t)$$

è una soluzione particolare dell'eq. (16).

4. *Equazioni differenziali non lineari*

Dato un qualsiasi circuito elettrico concentrato e posto che i suoi elementi abbiano caratteristiche ragionevolmente regolari, le equazioni del circuito possono essere scritte nel modo seguente:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$

$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$

oppure, in forma vettoriale,

(17) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$

Un tale sistema di equazioni differenziali è detto essere in forma normale. Di solito le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ possono essere considerate come le cariche dei condensatori ed i flussi degli induttori, oppure le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori (ad esempio, si veda il cap. 5, par. 5 ed il cap. 12, par. 3). La presenza di t come variabile nella parte destra è dovuta a due possibilità: gli elementi del circuito sono tempo-varianti oppure esistono degli ingressi che dipendono da t.

Descriveremo qui di seguito la proprietà di esistenza ed unicità per $n = 2$; è scontato che essa è ancora valida per qualsiasi intero n. Così, si consideri il sistema seguente di due equazioni differenziali ordinarie in x_1 e x_2:

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1[x_1(t), x_2(t), t] \\ \dot{x}_2(t) &= f_2[x_1(t), x_2(t), t] \end{aligned}$$

4.1 *Interpretazione dell'equazione*

Il metodo migliore per comprendere il significato delle equazioni (18), è di interpretarle geometricamente nel piano x_1x_2. Le due funzioni

$f_1(x_1, x_2, t)$

$f_2(x_1, x_2, t)$

possono essere viste come se definissero, per ogni punto (x_1, x_2) per qualsiasi istante t, la velocità $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ di una particella. In altre parole, si può interpretare la parte destra della (18) come se si specificasse un campo di velocità (vedi fig. 1). Il problema della « soluzione » delle eq. (18) può venire formulato nella maniera che segue: dato un punto arbitrario (x_1^0, x_2^0) ed un istante iniziale arbitrario t_0, trovare il moto di una particella, soggetta alle condizioni che (1) all'istante t_0 essa parta da (x_1^0, x_2^0) e (2) ad ogni istante $t \geq t_0$, la velocità della particella sia uguale a quella imposta dal campo delle velocità. Analiticamente, il moto della particella può essere descritto da due funzioni $\xi_1(\cdot)$ e $\xi_2(\cdot)$ sottoposte alle condizioni

$$(19) \quad \begin{aligned} \xi_1(t_0) &= x_1^0 \\ \xi_2(t_0) &= x_2^0 \end{aligned}$$

$$(20) \quad \left.\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= f_1[\xi_1(t), \xi_2(t), t] \\ \dot{\xi}_2(t) &= f_2[\xi_1(t), \xi_2(t), t] \end{aligned}\right. \qquad \text{per } t \geq t_0$$

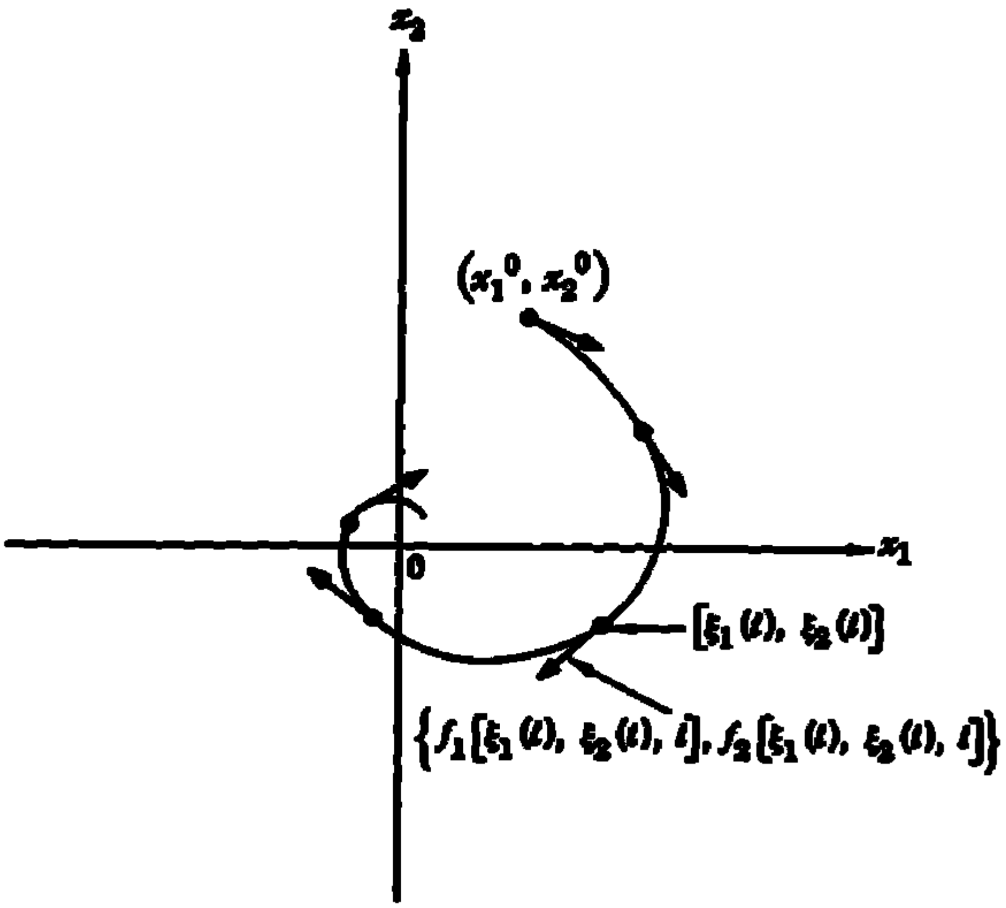

Fig. 1 - Esempio di un campo di velocità e di traiettoria che parte dal punto (x^0_1, x^0_2).

La coppia di funzioni (ξ_1, ξ_2) è detta *soluzione del sistema di equazioni differenziali* (18). Infatti per la (19) la soluzione (ξ_1, ξ_2) *soddisfa la condizione iniziale* x_1^0, x_2^0 *all'istante* t_0.

Geometricamente, le funzioni ξ_1 e ξ_2 possono essere viste come equazioni parametriche di una curva nel piano x_1x_2; infatti

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1(t) \\ x_2 &= \xi_2(t) \end{aligned} \qquad t \geq t_0$$

Tale curva è detta *traiettoria*, o, più precisamente, la traiettoria che inizia da (x_1^0, x_2^0) all'istante t_0.

Osservazione - Se le funzioni f_1 e f_2 non dipendono esplicitamente da t, il campo di velocità può essere calcolato una volta per tutte; non è più necessario tener conto del tempo quando si calcola una velocità in un punto particolare nel piano x_1x_2.

4.2 *Esistenza ed unicità*

Fino ad ora abbiamo imposto condizioni alle funzioni f_1 e f_2. Desideriamo adesso formulare una restrizione utilizzata spesso — la *condizione di Lipschitz* — che garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione. L'esempio seguente dimostrerà come una equazione in apparenza semplice possa avere parecchie soluzioni che soddisfano la stessa condizione iniziale.

Esempio - Si consideri l'equazione

(21) $\quad \dot{x}_1(t) = 2\sqrt{|x_1(t)|}$

(Il segno di valore assoluto è usato per garantire che non si dovrà mai prendere la radice quadrata di un numero negati). Si considerino ora le soluzioni dell'eq. (21) che soddisfano la condizione iniziale

(22) $\quad x_1(0) = 0$

È facile verificare che ci sono infinite soluzioni della (21) le quali soddisfano la condizione iniziale (22). Infatti, le funzioni ϕ_1 e ϕ_2 definite in seguito, sono soluzioni della (21) che soddisfano la (22); quindi,

$$\phi_1(t) = 0 \qquad \text{per } t \geq 0$$

e, se c è un número *arbitrario* non ne

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq t \leq c \\ 2(t - c)^2 & \text{per } c \leq t \end{cases}$$

Tali soluzioni sono mostrate nella fig. 2. La ragione di tale infinità di soluzioni è dovuta al salto *infinito* della pendenza del secondo membro dell'eq. (21) quando è tracciata rispetto a x_1 (vedere fig. 3). Ciò suggerisce che per garantire l'unicità si devono imporre condizioni di regolarità alle funzioni f_1 e f_2; ciò è fatto tramite la condizione di Lipschitz.

Si dice che le funzioni f_1 e f_2 soddisfano le condizioni di Lipschitz in un dominio D del piano x_1x_2 se c'è una costante k tale che, per qualsiasi t considerato e per qualsiasi coppia di punti (x_1,x_2), $(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ nel dominio D,

$$|f_1(x_1,x_2,t) - f_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2,t)| + |f_2(x_1,x_2,t) - f_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2,t)| \leq k[|x_1 - \hat{x}_1| + |x_2 - \hat{x}_2|]$$

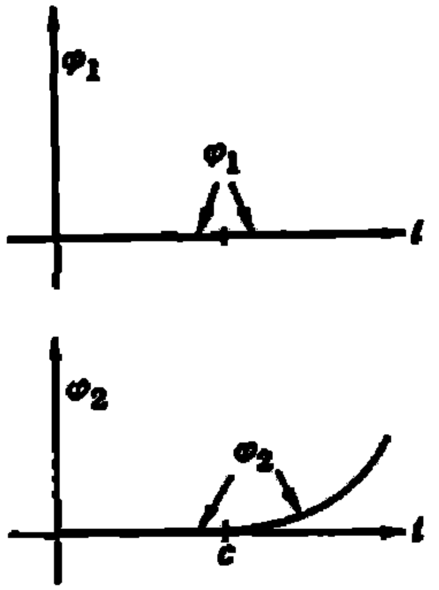

Fig. 2 - Due soluzioni di $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$ con la condizione $x(0) = 0$; le curve ϕ_1 e ϕ_2 soddisfano la stessa equazione differenziale e le stesse condizioni iniziali; si osservi che c è un numero arbitrario non negativo.

Se, ad esempio, le funzioni $\partial f_1/\partial x_1$, $\partial f_1/\partial x_2$, $\partial f_2/\partial x_1$ e $\partial f_2/\partial x_2$ sono funzioni *continue* in D, allora c'è una costante k per cui è soddisfatta la condizione di Lipschitz.

Può ora essere formulato il risultato fondamentale.

Si supponga che f_1 e f_2 soddisfino le condizioni di Lipschitz. Sia t_0 un istante arbitrario e (x_1^0, x_2^0) sia un punto arbitrario nel dominio D; allora

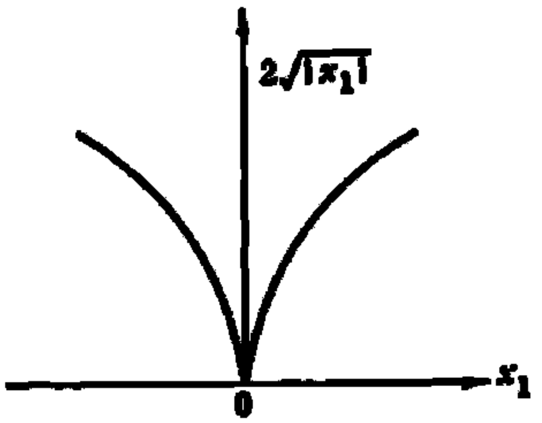

Fig. 3 - La parte destra della . (21) tracciata rispetto a x_1; si osservi la pendenza a $x_1 = 0$.

esiste una ed una sola soluzione, $[x_1(t), x_2(t)]$, *della* (18) *che s* *condizione iniziale*

$$x_1(t_0) = x_1^0$$
$$x_2(t_0) = x_2^0$$

Geometricamente, ciò significa che dato un qualsiasi istante iniziale t_0 ed un qualsiasi stato iniziale (x_1^0, x_2^0) in D, esiste una ed una sola tra- ttoria in D la quale soddisfi le equazioni differenziali (18). Nella teoria i circuiti, tali condizioni sono sempre soddisfatte, posto che le caratteristiche degli elementi siano regolari. Una discussione particolareggiata di questo argomento appartiene a corsi più avanzati.