UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Ajuste con procesos de las carteras C2 y C15 sobre el número de siniestros en seguros de autos

Presentado por:
Alejandro Arias Garzón

Presentado a:
José Alfredo Jiménez Moscoso

Bogotá, Colombia, 23 de febrero de 2024

Cartera C2

La cartera C2 se compone de la siguiente manera:

Siniestros	**C-2**
0	20592
1	2651
2	297
3	41
4	7
5	0
6	1
≥ 7	-
Total pólizas	23589

Cálculo índice de dispersión

Hacemos el respectivo cálculo de $\bar{n}$ y de s_n^2.

$$\bar{n} = \frac{\sum \text{Siniestros} \times \text{C-2}}{\text{Total pólizas}} = \frac{3402}{23589} = 0{,}1442198$$

$$s_n^2 = 0{,}1846623 - (0{,}1442198)^2 = 0{,}163863$$

Decimos que d es el índice de dispersión muestral, luego

$$d = \frac{s_n^2}{\bar{n}} = 1{,}136204$$

Como $d > 1$, existe sobredispersión. Se ajustarán los diferentes procesos dados y se buscará el que mejor ajuste los datos.

Con esto, determinamos un intervalo de confianza al 95 % para I_n.

$$IC(I_n) = (1{,}107197, 1{,}16521)$$

Estimación de parámetros

Proceso Poisson

Por el método de momentos y por máxima verosimilitud, se obtiene que

$$\widehat{\lambda} = \bar{n} = 0{,}1442198$$

Proceso de la binomial negativa

Por el método de momentos, se obtiene que

$$\widehat{q} = 1 - \frac{\bar{n}}{s_n^2} \approx 0{,}119876$$

$$\widehat{r} = \frac{\bar{n}^2}{s_n^2 - \bar{n}} \approx 1{,}058855$$

Y, por el método de máxima verosimilitud, se obtiene lo siguiente

$$\widehat{q} = 0{,}1142683$$

$$\widehat{r} = 1{,}117895$$

Proceso de Hofmann

Para determinar los parámetros de la familia de Hofmann se usan las expresiones dadas, luego tomando $t = 1$ se obtiene

$$\widehat{q} = \bar{n} = 0{,}1442198$$

$$\widehat{k} = \frac{s_n^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = 0{,}1362035$$

Ahora con

$$m_{[3]} = 0{,}2142886$$

y

$$\widehat{c} = 0{,}4308702$$

se determina

$$\widehat{a} = \frac{\widehat{k}}{\widehat{c}} = 0{,}3161126$$

Síntesis

En resumen tendríamos

Procesos teóricos	**Parámetros estimados**		
	λ, $\widehat{r}$, $\widehat{a}$	$\widehat{q}$	$\widehat{k}$
Poisson	0.1442198	-	-
Binomial negativa	1.058855	0.1198760	-
Hofmann	0.3161126	0.1442198	0.1362035

Puesto que $\widehat{a} \neq 1$, ajustar un proceso de Panjer no es apropiado.

Aproximaciones con cada proceso

En la siguiente tabla se presentan las aproximaciones obtenidas con cada uno de los diferentes procesos trabajados

Siniestros (k)	n_k	P. Poisson	P. BN1	P. BN2	P. Hofmann
0	20592	20420.938	20605.803	20596.759	20591.691
1	2651	2945.103	2615.521	2631.03	2651.732
2	297	212.371	322.765	318.366	296.949
3	41	10.209	39.451	37.809	40.255
4	7	0.368	4.799	4.448	6.723
5	0	0.011	0.582	0.520	1.296
6	1	0	0.07	0.061	0.274
$7 \geq$	-	-	-	-	-
Total pólizas	23589	23589	23588.99	23588.99	23588.92
Test χ^2	-	203.881	3.80001	3.61108	0.02435
v	-	2	2	2	1

[1]Método de momentos
[2]Método máxima verosimilitud

Los grados de libertad (v) se calculan según la definición y se agrupa según el criterio para usar la bondad de ajuste χ^2. Así, Para 2 grados de libertad y $\alpha = 0.05$, se obtiene que el límite de significancia de χ^2 es

$$\chi^2_{2,\alpha} = 5{,}99146$$

En este caso, se rechaza H_0 si $\chi^2_{2,\alpha} > 5{,}99146$. Luego para los valores menores a 5.99146 no hay evidencia para rechazar los modelos supuestos y, por ende, se puede decir que, con una confianza del 5 %, la distribución Hofmann y el proceso de la binomial negativa proporcionan un ajuste razonable de los datos.

Cartera C15

La cartera C15 se compone de la siguiente manera:

Siniestros	**C-15**
0	371481
1	26784
2	2118
3	174
4	18
5	2
6	2
7	0
≥ 8	0
Total pólizas	400579

Cálculo índice de dispersión

Hacemos el respectivo cálculo de $\bar{n}$ y de s_n^2.

$$\bar{n} = \frac{\sum \text{Siniestros} \times \text{C-15}}{\text{Total pólizas}} = \frac{31636}{400579} = 0{,}07897568$$

$$s_n^2 = 0{,}09294546 - (0{,}07897568)^2 = 0{,}0867083$$

Decimos que d es el índice de dispersión muestral, luego

$$d = \frac{s_n^2}{\bar{n}} = 1{,}097911$$

Como $d > 1$, existe sobredispersión. Se ajustarán los diferentes procesos dados y se buscará el que mejor ajuste los datos.

Con esto, determinamos un intervalo de confianza al 95 % para I_n.

$$IC(I_n) = (1{,}090627, 1{,}105196)$$

Estimación de parámetros

Proceso Poisson

Por los métodos de los momentos y máxima verosimilitud, se obtiene que

$$\widehat{\lambda} = \bar{n} = 0{,}07897568$$

Proceso de binomial negativa

Por el método de momentos, se obtiene que

$$\widehat{q} = 1 - \frac{\bar{n}}{s_n^2} \approx 0{,}0891797$$

$$\widehat{r} = \frac{\bar{n}^2}{s_n^2 - \bar{n}} \approx 0{,}8066035$$

Y, por el método de máxima verosimilitud, se obtiene lo siguiente

$$\widehat{q} = 0{,}08791084$$

$$\widehat{r} = 0{,}8193855$$

Proceso de Hofmann

Para determinar los parámetros de la familia de Hofmann se usan las expresiones dadas, luego tomando $t = 1$ se obtiene

$$\widehat{q} = \bar{n} = 0{,}07897568$$

$$\widehat{k} = \frac{s_n^2 - \bar{n}}{\bar{n}} = 0{,}09791141$$

Ahora con

$$m_{[3]} = 0{,}1044323$$

y

$$\widehat{c} = 0{,}1941907$$

se determina

$$\widehat{a} = \frac{\widehat{k}}{\widehat{c}} = 0{,}5042023$$

Síntesis

En resumen tendríamos

Procesos teóricos	**Parámetros estimados**		
	λ, $\widehat{r}$, $\widehat{a}$	$\widehat{q}$	$\widehat{k}$
Poisson	0.07897568	-	-
Binomial negativa	0.8066035	0.0891797	-
Hofmann	0,5042023	0,07897568	0,09791141

Aproximaciones con cada proceso

A continuación, en la tabla se presentan las aproximaciones obtenidas con cada uno de los diferentes procesos trabajados

Siniestros (k)	n_k	P. Poisson	P. BN1	P. BN2	P. Hofmann
0	371481	370159.99	371506.532	371486.741	371469.032
1	26784	29233.638	26723.451	26759.254	26825.960
2	2118	1154.373	2152.739	2139.987	2068.357
3	174	30.389	179.604	176.802	192.400
4	18	0.600	15.243	14.841	20.520
5	2	0.009	1.307	1.258	2.391
6	2	0	0.113	0.107	0.296
7	0	0	0.010	0.009	0.038
$8 \geq$	0	0	0.001	0.001	0.005
Total pólizas	400579	400579	400579	400579	400579
Test χ^2	-	1892.685	2.576	2.356	3.917
v	-	2	2	2	2

[1]Método de momentos
[2]Método máxima verosimilitud

Los grados de libertad (v) se calculan según la definición y se agrupa según el criterio para usar la bondad de ajuste χ^2. Así, Para 2 grados de libertad y $\alpha = 0.05$, se obtiene que el límite de significancia de χ^2 es

$$\chi^2_{2,\alpha} = 5{,}99146 \tag{1}$$

En este caso, se rechaza H_0 si $\chi^2_{2,\alpha} > 5{,}99146$. Luego para los valores menores a 5.99146 no hay evidencia para rechazar los modelos supuestos y, por ende, se puede decir que, con una confianza del 5 %, el proceso de Hofmann y el proceso de la binomial negativa proporcionan un ajuste razonable de los datos.

Código de R

Cartera C2

```
##########################CARTERA C2###############################3

install.packages("orthopolynom")
install.packages("gtools")
library(orthopolynom)
library(gtools)
### Numero de siniestros
k<-c(0:6)
n_k<-c(20592,2651,297,41,7,0,1)
Tcasos<-sum(n_k)
freqrel<-(n_k/Tcasos)
eps=0.000001;
n_bar <- sum(k*n_k)/Tcasos
sum(k*n_k)
(sum(k^2*n_k)/Tcasos)
(n_bar^2)
s_cua <- (sum(k^2*n_k)/Tcasos)-(n_bar^2)
n_bar;s_cua

### Prueba Chicuadrado
Chi_cua<- function(obs, esp,alpha=0.05,m=8,gl=2){
  chi<-sum((obs-esp)^2/esp)
  vchi<-qchisq(1-alpha,df = gl )
  if(chi<vchi){
    return(list("No hay evidencia para rechazar H_0",
                chi,"Valor critico"=vchi))
  }
  if(chi>=vchi){
    return(list("Existe evidencia para rechazar H_0",
                chi, "Valor critico"=vchi))
  }
}
### intervalo de confianza para el índice de dispersión
d <- s_cua/n_bar #índice de dispersión muestral

d
z <- qnorm(0.975, mean = 0, sd = 1)
z
der <- d + z * d * sqrt((1 / Tcasos) * (2 + ((d - 1) * (3 * d - 1)) / s_cua))
izq <- d - z * d * sqrt((1 / Tcasos) * (2 + ((d - 1) * (3 * d - 1)) / s_cua))

izq;der

# Estimación de parámetros

# Distribucion Poisson
lambda<-n_bar
lambda

# Binomial Negativa (método de momentos)
q_bin <- 1-(n_bar/s_cua)
r_bin <- round(n_bar^2/(s_cua-n_bar),10)
q_bin;r_bin
```

```
###Newton

f_r<-function(r,n_bar= n_bar,n_k= n_k){
  as=0;al=0;sol=0
  for(k in 1:(length(n_k)-1)){
    for(m in 0:(k-1)){
      as<-(1/(m+r))+as
    }
    al<- (n_k[k+1]*as)+al
    as=0
  }
  sol<-(log(1+(n_bar/r))*Tcasos)-al
  return(sol)
}
# Funcion f'(r)-----------------
f_der<- function(r,n_bar,n_k){
  as=0;al=0;sol=0
  for(k in 1:(length(n_k)-1)){
    for(m in 0:(k-1)){
      as<-(1/(m+r)^2)+as
    }
    al<-(n_k[k+1]*as)+al
    as=0
  }
  sol <- (-n_bar/(r^2+(n_bar*r)))*Tcasos+al
  return(sol)
}
i=0
r<-r_bin
repeat{
  r1<-r-(f_r(r = r,n_bar = n_bar,n_k = n_k)/
           f_der(r = r,n_bar = n_bar,n_k = n_k))
  i=i+1
  if(abs(r1-r)<eps){break}
  r=r1
  r1=0
}
r1
q<-n_bar/(n_bar+r1)
q

# Familia Hofmann------------------------
# Momentos-------------------------------
q_t <- n_bar
k_t <- (s_cua-n_bar)/n_bar
m_3 <-sum((k-n_bar)^3*freqrel)
c_t <- (m_3-s_cua)/(n_bar*k_t)-k_t-2
a_t <- k_t/c_t
q_t;k_t;m_3;c_t;a_t
# Distribución de Hofmann
Lamb<- q_t*(1+c_t)^(-a_t)
p0<- exp(-(q_t/c_t)*((((1+c_t)^(1-a_t)-1) )/(1-a_t)))
Hofmann <- function(p_0,n,a,q,c){
  p1=0;pa=0
  valores<-numeric(n+1)
```

```
  valores[1]<-p_0
  for(i in 1:n){
    for(k in 0:(i-1)){pa=
      ( pochhammer(a,k)/factorial(k)*((c^k)/((1+c)^(a+k)))*
          valores[i-k])+pa
    }
    p1=(q/(i))*pa
    valores[i+1]<-p1
    pa=0
  }
  return(valores)
}

###################### Estimación de probabilidades ###############################3

# Estimación de las probabilidades
Estpois <- dpois(x = k,lambda = lambda)
# Estimacion No. de casos con Poisson
estp<-round(Estpois*Tcasos,3)
estp
data.frame(estp)
sum(estp) # Casos Totales con Poisson
ajuspois1 <- c(estp[1:3],sum(estp[4:7]))
# Se agrupan los datos
n_ka<-c(n_k[1:3],sum(n_k[4:7]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
Chi_p<-sum((n_ka-ajuspois1)^2/ajuspois1)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajuspois1)

# Estimacion de probabilidades con Binomial
# negativa por el metodo de los momentos
Estbinom1 <- dnbinom(x=k,size=r_bin,prob=(1-q_bin))
# Estimación número de casos con binomial negativa
estbinn1 <- round(Estbinom1*Tcasos,3)
data.frame(estbinn1)
# Casos Totales con la estimación binomial negativa
sum(estbinn1)
ajusbinn11 <- c(estbinn1[1:4],sum(estbinn1[5:7]))
n_ka<-c(n_k[1:4],sum(n_k[5:7]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
Chi_binn1<-sum((n_ka-ajusbinn11)^2/ajusbinn11)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajusbinn11)

# Estimacion de probabilidades con Binomial
# negativa por el metodo MV
Estbinom2 <- dnbinom(x = k,size = r1,prob = (1-q))
# Estimacion No. de casos con binomial negativa, por MV
estbinn2 <- round(Estbinom2*Tcasos,3)
data.frame(estbinn2)
# Casos Totales con la estimacion binomial negativa por MV
sum(estbinn2)
ajusbinn21 <- c(estbinn2[1:4],sum(estbinn2[5:7]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
n_ka<-c(n_k[1:4],sum(n_k[5:7]))
```

```
Chi_binn2<-sum((n_ka-ajusbinn21)^2/ajusbinn21)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajusbinn21)


#CON HOFMANN

Est_hof<-Hofmann(p_0 = p0,n = 6,a = a_t,q = q_t,c = c_t)
est_hof <- round(Est_hof*Tcasos,3)
est_hof
sum(est_hof)
ajushof <- c(est_hof[1:4],sum(est_hof[5:7]))
n_ka<-c(n_k[1:4],sum(n_k[5:7]))
Chi_hof<-sum((n_ka-ajushof)^2/ajushof)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajushof)


### Salida Final
test=c("test",".",round(Chi_p,3),round(Chi_binn1,3),
       round(Chi_binn2,3),round(Chi_hof,3))
salida=cbind(k,n_k,estp,estbinn1,estbinn2,est_hof)
salida=rbind(salida,test)
salida
```

Cartera C15

```
##########################CARTERA C15###############################3

install.packages("orthopolynom")
install.packages("gtools")
library(orthopolynom)
library(gtools)
### Numero de siniestros
k<-c(0:8)
n_k<-c(371481,26784,2118,174,18,2,2,0,0)
Tcasos<-sum(n_k)
freqrel<-(n_k/Tcasos)
eps=0.000001;
n_bar <- sum(k*n_k)/Tcasos
sum(k*n_k)
(sum(k^2*n_k)/Tcasos)
(n_bar^2)
s_cua <- (sum(k^2*n_k)/Tcasos)-(n_bar^2)
n_bar;s_cua

### Prueba Chicuadrado
Chi_cua<- function(obs, esp,alpha=0.05,m=8,gl=2){
  chi<-sum((obs-esp)^2/esp)
  vchi<-qchisq(1-alpha,df = gl )
  if(chi<vchi){
    return(list("No hay evidencia para rechazar H_0",
                chi,"Valor critico"=vchi))
  }
  if(chi>=vchi){
    return(list("Existe evidencia para rechazar H_0",
                chi, "Valor critico"=vchi))
```

```
  }
}
### intervalo de confianza para el índice de dispersión
d <- s_cua/n_bar #índice de dispersión muestral

d
z <- qnorm(0.975, mean = 0, sd = 1)
z
der <- d + z * d * sqrt((1 / Tcasos) * (2 + ((d - 1) * (3 * d - 1)) / s_cua))
izq <- d - z * d * sqrt((1 / Tcasos) * (2 + ((d - 1) * (3 * d - 1)) / s_cua))

izq;der

# Estimación de parámetros

# Distribucion Poisson
lambda<-n_bar
lambda

# Binomial Negativa (método de momentos)
q_bin <- 1-(n_bar/s_cua)
r_bin <- round(n_bar^2/(s_cua-n_bar),10)
q_bin;r_bin

###Newton

f_r<-function(r,n_bar= n_bar,n_k= n_k){
  as=0;al=0;sol=0
  for(k in 1:(length(n_k)-1)){
    for(m in 0:(k-1)){
      as<-(1/(m+r))+as
    }
    al<- (n_k[k+1]*as)+al
    as=0
  }
  sol<-(log(1+(n_bar/r))*Tcasos)-al
  return(sol)
}
# Funcion f'(r)-----------------
f_der<- function(r,n_bar,n_k){
  as=0;al=0;sol=0
  for(k in 1:(length(n_k)-1)){
    for(m in 0:(k-1)){
      as<-(1/(m+r)^2)+as
    }
    al<-(n_k[k+1]*as)+al
    as=0
  }
  sol <- (-n_bar/(r^2+(n_bar*r)))*Tcasos+al
  return(sol)
}
i=0
r<-r_bin
repeat{
  r1<-r-(f_r(r = r,n_bar = n_bar,n_k = n_k)/
           f_der(r = r,n_bar = n_bar,n_k = n_k))
```

```
  i=i+1
  if(abs(r1-r)<eps){break}
  r=r1
  r1=0
}
r1
q<-n_bar/(n_bar+r1)
q

# Familia Hofmann------------------------
# Momentos------------------------------
q_t <- n_bar
k_t <- (s_cua-n_bar)/n_bar
m_3 <-sum((k-n_bar)^3*freqrel)
c_t <- (m_3-s_cua)/(n_bar*k_t)-k_t-2
a_t <- k_t/c_t
q_t;k_t;m_3;c_t;a_t
# Distribución de Hofmann
Lamb<- q_t*(1+c_t)^(-a_t)
p0<- exp(-(q_t/c_t)*((((1+c_t)^(1-a_t)-1) )/(1-a_t)))
Hofmann <- function(p_0,n,a,q,c){
  p1=0;pa=0
  valores<-numeric(n+1)
  valores[1]<-p_0
  for(i in 1:n){
    for(k in 0:(i-1)){pa=
      ( pochhammer(a,k)/factorial(k)*((c^k)/((1+c)^(a+k)))*
          valores[i-k])+pa
    }
    p1=(q/(i))*pa
    valores[i+1]<-p1
    pa=0
  }
  return(valores)
}

###################### Estimación de probabilidades ##############################3

# Estimación de las probabilidades
Estpois <- dpois(x = k,lambda = lambda)
# Estimacion No. de casos con Poisson
estp<-round(Estpois*Tcasos,3)
estp
data.frame(estp)
sum(estp) # Casos Totales con Poisson
ajuspois1 <- c(estp[1:3],sum(estp[4:9]))
# Se agrupan los datos
n_ka<-c(n_k[1:3],sum(n_k[4:9]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
Chi_p<-sum((n_ka-ajuspois1)^2/ajuspois1)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajuspois1)

# Estimacion de probabilidades con Binomial
# negativa por el metodo de los momentos
Estbinom1 <- dnbinom(x=k,size=r_bin,prob=(1-q_bin))
```

```
# Estimación número de casos con binomial negativa
estbinn1 <- round(Estbinom1*Tcasos,3)
data.frame(estbinn1)
# Casos Totales con la estimación binomial negativa
sum(estbinn1)
ajusbinn11 <- c(estbinn1[1:4],sum(estbinn1[5:9]))
n_ka<-c(n_k[1:4],sum(n_k[5:9]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
Chi_binn1<-sum((n_ka-ajusbinn11)^2/ajusbinn11)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajusbinn11)

# Estimacion de probabilidades con Binomial
# negativa por el metodo MV
Estbinom2 <- dnbinom(x = k,size = r1,prob = (1-q))
# Estimacion No. de casos con binomial negativa, por MV
estbinn2 <- round(Estbinom2*Tcasos,3)
data.frame(estbinn2)
# Casos Totales con la estimacion binomial negativa por MV
sum(estbinn2)
ajusbinn21 <- c(estbinn2[1:4],sum(estbinn2[5:9]))
# Se agrupa de la misma manera los observados
n_ka<-c(n_k[1:4],sum(n_k[5:9]))
Chi_binn2<-sum((n_ka-ajusbinn21)^2/ajusbinn21)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajusbinn21)


#CON HOFMANN

Est_hof<-Hofmann(p_0 = p0,n = 8,a = a_t,q = q_t,c = c_t)
est_hof <- round(Est_hof*Tcasos,3)
data.frame(est_hof)
sum(est_hof)
ajushof <- c(est_hof[1:5],sum(est_hof[6:9]))
n_ka<-c(n_k[1:5],sum(n_k[6:9]))
Chi_hof<-sum((n_ka-ajushof)^2/ajushof)
# Se hace la prueba Chi-cuadrado
Chi_cua(obs = n_ka,esp=ajushof)


### Salida Final
test=c("test",".",round(Chi_p,3),round(Chi_binn1,3),
       round(Chi_binn2,3),round(Chi_hof,3))
salida=cbind(k,n_k,estp,estbinn1,estbinn2,est_hof)
salida=rbind(salida,test)
salida
```

Referencias

[Jiménez, J. A. (2022)] Introducción a la teoría estadística del riesgo

[Vanegas, L. H. (2022)] https://r2022.netlify.app/