



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

AJUSTE DATOS REALES Y COMPOSICIÓN DE PORTAFOLIOS

Presentado por:
Alejandro Arias Garzón

Presentado a:
José Alfredo Jiménez Moscoso

Bogotá, Colombia, 17 de mayo de 2024

Datos históricos elegidos

He seleccionado las acciones de Microsoft (MSFT), Netflix, Inc. (NFLX) y Adobe (ADBE) para este análisis debido a su relevancia en el mercado financiero como líderes en las industrias de tecnología, software y entretenimiento. Estas empresas nos ofrecen la oportunidad de examinar el rendimiento de acciones en un entorno de mercado estable y diversificar nuestro estudio. Todos los datos utilizados corresponden al período comprendido entre el 9 de enero de 2017 y el 9 de enero de 2019, y fueron obtenidos de Yahoo Finanzas. A continuación, se muestran:

Microsoft Corporation (MSFT)



Figura 1: Microsoft Corporation (MSFT).

Netflix, Inc. (NFLX)



Figura 2: Netflix, Inc. (NFLX).

Adobe Inc. (ADBE)



Figura 3: Adobe Inc. (ADBE).

Cierres y retornos logarítmicos

Usando Excel, se han calculado los retornos logarítmicos de las acciones obtenidas del repositorio histórico. Aquí se presentan estos y los precios de cierre usados para hacerlo.

Cierres

Microsoft Corporation (MSFT)

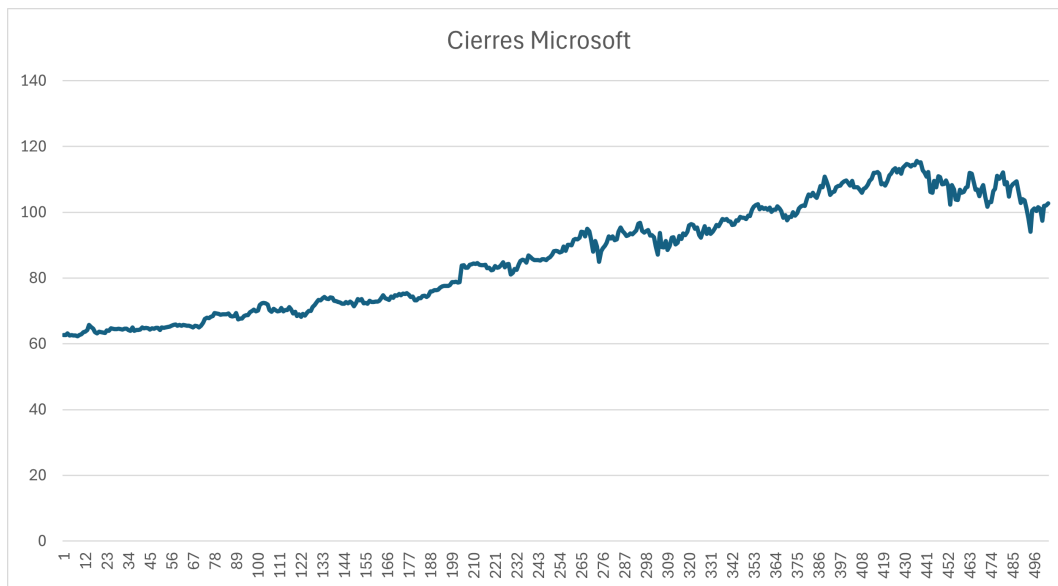


Figura 4: Gráfico de los cierres históricos de Microsoft Corporation (MSFT).

Netflix, Inc. (NFLX)

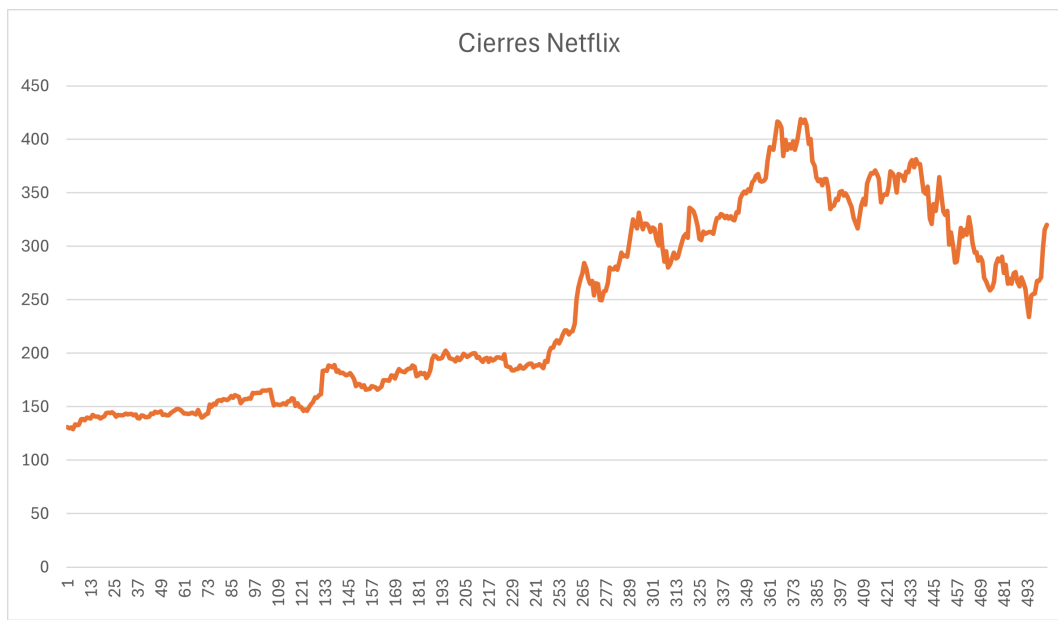


Figura 5: Gráfico de los cierres históricos de Netflix, Inc. (NFLX).

Adobe Inc. (ADBE)



Figura 6: Gráfico de los cierres históricos de Adobe Inc. (ADBE).

Retornos logarítmicos

Microsoft Corporation (MSFT)

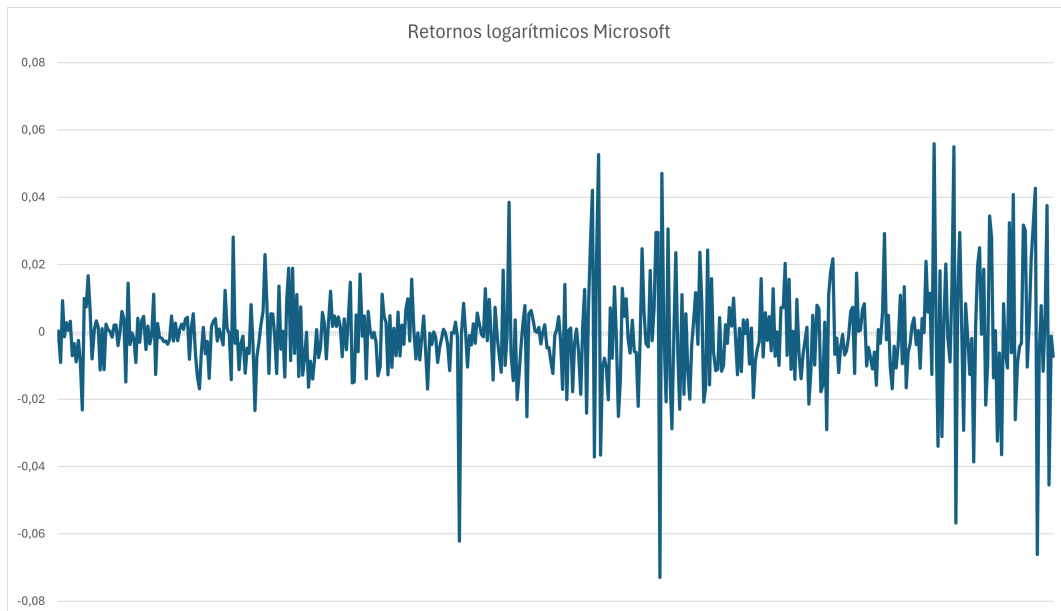


Figura 7: Gráfico de los retornos logarítmicos de Microsoft Corporation (MSFT).

Netflix, Inc. (NFLX)

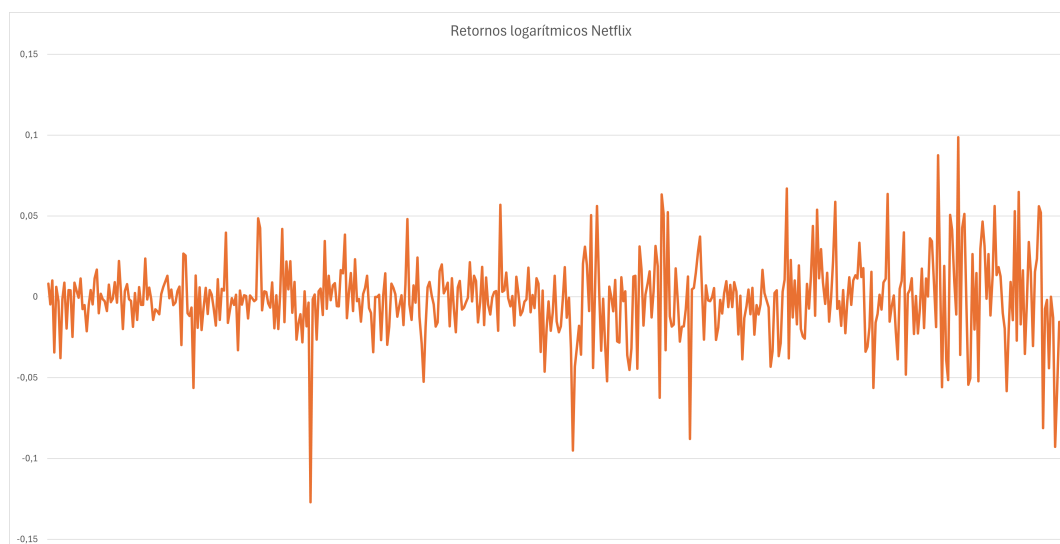


Figura 8: Gráfico de los retornos logarítmicos de Netflix, Inc. (NFLX).

Adobe Inc. (ADBE)

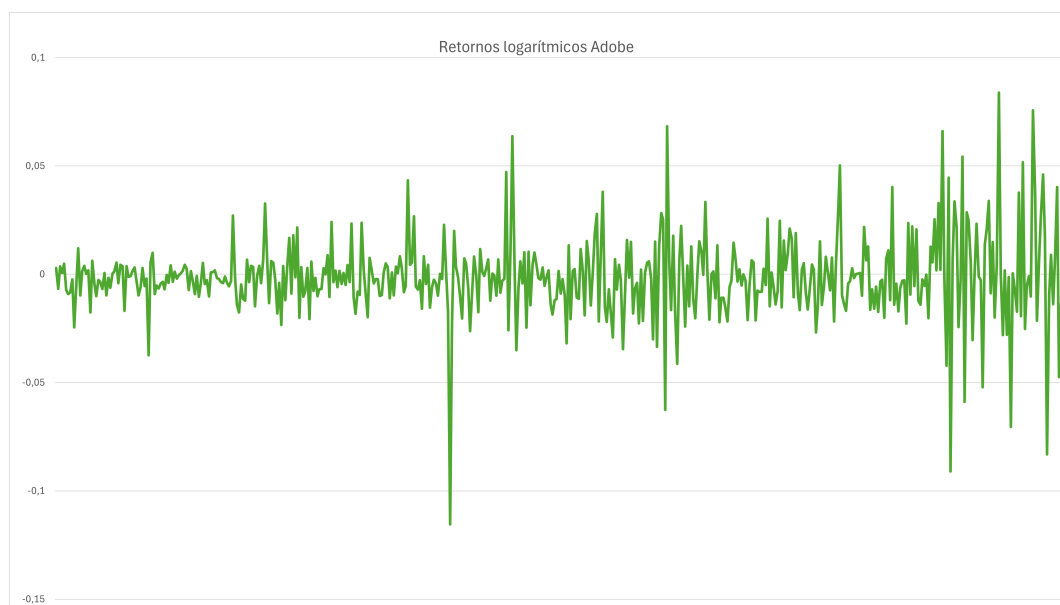


Figura 9: Gráfico de los retornos logarítmicos de Adobe Inc. (ADBE).

Ajuste de los datos

Utilizando el software EasyFit, se ajustan distintas distribuciones a estos datos y se evalúa su bondad de ajuste con las dos diferentes formas de hacerlo (Anderson-Darling (AD) y Kolmogorov-Smirnov (KS)), ya que se trata de datos continuos. Además, se presentan algunas estadísticas descriptivas para complementar el análisis.

Estadísticas descriptivas

Primeramente se dan a conocer las estadísticas descriptivas obtenidas, las cuales son:

Microsoft Corporation (MSFT)

| Estadística descriptiva | | | |
|-------------------------|------------|---------------|----------|
| Estadística | Valor | Percentil | Valor |
| Tamaño de la muestra | 502 | Min | -0,07298 |
| Rango | 0,12885 | 5% | -0,02136 |
| Media | -9,8682E-4 | 10% | -0,01444 |
| Varianza | 2,0795E-4 | 25% (Q1) | -0,00786 |
| Desviación estándar | 0,01442 | 50% (Mediana) | -0,00129 |
| Coef. de variación | -14,613 | 75% (Q3) | 0,00471 |
| Error estándar | 6,4361E-4 | 90% | 0,01464 |
| Asimetría | -0,06658 | 95% | 0,0242 |
| Curtosis | 4,3485 | Max | 0,05587 |

Figura 10: Estadísticas descriptivas de Microsoft Corporation (MSFT).

Netflix, Inc. (NFLX)

| Estadística descriptiva | | | |
|-------------------------|-----------|---------------|----------|
| Estadística | Valor | Percentil | Valor |
| Tamaño de la muestra | 502 | Min | -0,12702 |
| Rango | 0,22578 | 5% | -0,04245 |
| Media | -0,00178 | 10% | -0,02964 |
| Varianza | 5,9845E-4 | 25% (Q1) | -0,0143 |
| Desviación estándar | 0,02446 | 50% (Mediana) | -0,00102 |
| Coef. de variación | -13,731 | 75% (Q3) | 0,00972 |
| Error estándar | 0,00109 | 90% | 0,02338 |
| Asimetría | -0,18825 | 95% | 0,04248 |
| Curtosis | 3,1813 | Max | 0,09876 |

Figura 11: Estadísticas descriptivas de Netflix, Inc. (NFLX).

Adobe Inc. (ADBE)

| Estadística descriptiva | | | |
|-------------------------|-----------|---------------|----------|
| Estadística | Valor | Percentil | Valor |
| Tamaño de la muestra | 502 | Min | -0,11549 |
| Rango | 0,19927 | 5% | -0,02455 |
| Media | -0,00152 | 10% | -0,01989 |
| Varianza | 3,4756E-4 | 25% (Q1) | -0,0098 |
| Desviación estándar | 0,01864 | 50% (Mediana) | -0,00212 |
| Coef. de variación | -12,277 | 75% (Q3) | 0,00507 |
| Error estándar | 8,3207E-4 | 90% | 0,01901 |
| Asimetría | -0,16394 | 95% | 0,02779 |
| Curtosis | 6,8397 | Max | 0,08379 |

Figura 12: Estadísticas descriptivas de Adobe Inc. (ADBE).

Pruebas de bondad de ajuste

- **Anderson-Darling (AD):** Esta prueba es una medida de bondad de ajuste que se utiliza para evaluar si una muestra de datos proviene de una población con una distribución específica. En esta prueba, se calcula una estadística de Anderson-Darling que compara los valores observados con los valores esperados bajo la distribución ajustada. Si el valor calculado de la estadística de Anderson-Darling es significativo, se rechaza la hipótesis nula de que los datos siguen la distribución propuesta.
- **Kolmogorov-Smirnov (KS):** La prueba de Kolmogorov-Smirnov se utiliza para determinar si una muestra de datos sigue una distribución específica. En esta prueba, se compara la distribución acumulativa empírica de los datos con la distribución acumulativa teórica ajustada. Se calcula la distancia máxima (llamada estadística D) entre estas dos distribuciones acumulativas. Si el valor de la estadística D es menor que el valor crítico correspondiente a un nivel de significancia dado, no se rechaza la hipótesis nula de que los datos siguen la distribución propuesta.

Ahora, al aplicar las dos pruebas a los retornos seleccionados, obtenemos las distribuciones con mejor ajuste y las gráficas de las mismas vs. los retornos logarítmicos respectivos. Así se presentan los resultados:

Microsoft Corporation (MSFT)

La tabla presentada a continuación muestra que la distribución de Laplace es la que mejor se ajusta a los datos según AD y KS, es decir, las dos pruebas coinciden.

| Bondad de ajuste - Resumen | | | | | |
|----------------------------|--------------|--------------------|-------|------------------|-------|
| # | Distribución | Kolmogorov Smirnov | | Anderson Darling | |
| | | Estadística | Rango | Estadística | Rango |
| 21 | Laplace | 0,04168 | 1 | 1,2081 | 1 |
| 6 | Error | 0,04168 | 2 | 1,2081 | 2 |
| 3 | Cauchy | 0,04707 | 3 | 2,551 | 3 |

Figura 13: Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para Microsoft Corporation (MSFT).

Como vimos, la distribución Laplace es la “elegida”. Veamos más a fondo qué nos dice el estudio:

Bondad de ajuste - Detalles [\[ocultar\]](#)

| Laplace [#21] | | | | | |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Kolmogorov-Smirnov | | | | | |
| Tamaño de la muestra | 502 | | | | |
| Estadística | 0,04168 | | | | |
| Valor P | 0,33838 | | | | |
| Rango | 1 | | | | |
| α | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 |
| Valor crítico | 0,04789 | 0,05459 | 0,06061 | 0,06775 | 0,07271 |
| Rechazar? | No | No | No | No | No |
| Anderson-Darling | | | | | |
| Tamaño de la muestra | 502 | | | | |
| Estadística | 1,2081 | | | | |
| Rango | 1 | | | | |
| α | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 |
| Valor crítico | 1,3749 | 1,9286 | 2,5018 | 3,2892 | 3,9074 |
| Rechazar? | No | No | No | No | No |

Figura 14: KS y AD para Microsoft Corporation (MSFT).

Podemos percatarnos de que, en el caso de la prueba Kolmogorov - Smirnov, los valores críticos asociados a cada nivel de significancia evaluado (α) son siempre mayores que la estadística de la prueba (0,04168). Por ende, según lo explicado anteriormente, en ningún caso se rechaza la hipótesis de que los retornos provengan de una distribución de Laplace.

Ahora, viendo la segunda prueba, la de Anderson - Darling, podemos decir que para cada nivel de significancia evaluado (α), el valor crítico es siempre mayor a la estadística asociada a AD (1,2081), luego, por lo explicado al inicio de la sección, se acepta por Anderson - Darling que los retornos vienen de una distribución Laplace.

En este caso, tanto AD como KS coinciden en que los retornos están distribuidos según una distribución Laplace, es decir, su función de densidad de probabilidad (*pdf*) está dada por:

$$f(x|\lambda, \mu) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\lambda}\right)$$

y sus parámetros son:

$$\lambda = 98,071$$

$$\mu = -9,8682 \times 10^{-4}$$

La gráfica que relaciona la *pdf* mencionada anteriormente y los retornos logarítmicos usados se muestra a continuación:

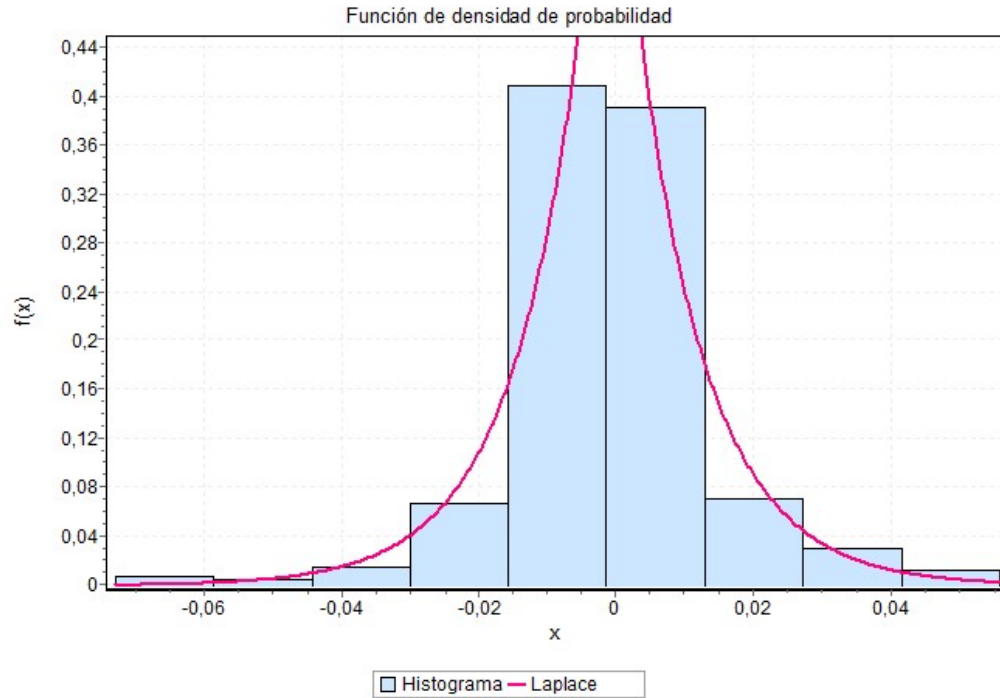


Figura 15: Gráfica de la distribución Laplace ajustada para Microsoft Corporation (MSFT).

Netflix, Inc. (NFLX)

La tabla presentada muestra que la distribución de Laplace es la que mejor se ajusta a los datos según las pruebas de Anderson-Darling (AD) y Kolmogorov-Smirnov (KS). Es decir, ambas pruebas coinciden en este caso específico.

| Bondad de ajuste - Resumen | | | | | |
|----------------------------|--------------|--------------------|-------|------------------|-------|
| # | Distribución | Kolmogorov Smirnov | | Anderson Darling | |
| | | Estadística | Rango | Estadística | Rango |
| 21 | Laplace | 0,03177 | 1 | 0,66877 | 1 |
| 6 | Error | 0,03177 | 2 | 0,66877 | 2 |
| 3 | Cauchy | 0,04724 | 3 | 3,0976 | 8 |

Figura 16: Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para Netflix, Inc. (NFLX).

Después de identificar que la distribución de Laplace es la elegida para modelar los datos de Netflix, es importante profundizar en el estudio y analizar los resultados con mayor detalle.

| Bondad de ajuste - Detalles [ocultar] | | | | | |
|---------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Laplace [#21] | | | | | |
| Kolmogorov-Smirnov | | | | | |
| Tamaño de la muestra | 502 | | | | |
| Estadística | 0,03177 | | | | |
| Valor P | 0,67938 | | | | |
| Rango | 1 | | | | |
| α | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 |
| Valor crítico | 0,04789 | 0,05459 | 0,06061 | 0,06775 | 0,07271 |
| Rechazar? | No | No | No | No | No |
| Anderson-Darling | | | | | |
| Tamaño de la muestra | 502 | | | | |
| Estadística | 0,66877 | | | | |
| Rango | 1 | | | | |
| α | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 |
| Valor crítico | 1,3749 | 1,9286 | 2,5018 | 3,2892 | 3,9074 |
| Rechazar? | No | No | No | No | No |

Figura 17: KS y AD para Netflix, Inc. (NFLX).

Al observar los resultados de las pruebas de bondad de ajuste, se destaca que tanto la prueba de Kolmogorov-Smirnov como la de Anderson-Darling indican que los retornos siguen una distribución de Laplace. En ambos casos, los valores críticos son mayores que las estadísticas de las pruebas, lo que sugiere que la hipótesis nula de que los retornos provienen de una distribución de Laplace no se rechaza.

En resumen, ambas pruebas coinciden en que los retornos están distribuidos según una distribución de Laplace, lo que indica que su función de densidad de probabilidad (*pdf*) está dada por:

$$f(x|\lambda, \mu) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\lambda}\right)$$

y sus parámetros son:

$$\lambda = 57,81$$

$$\mu = -0,00178$$

La gráfica que muestra esta *pdf* junto con los retornos logarítmicos usados se presenta a continuación:

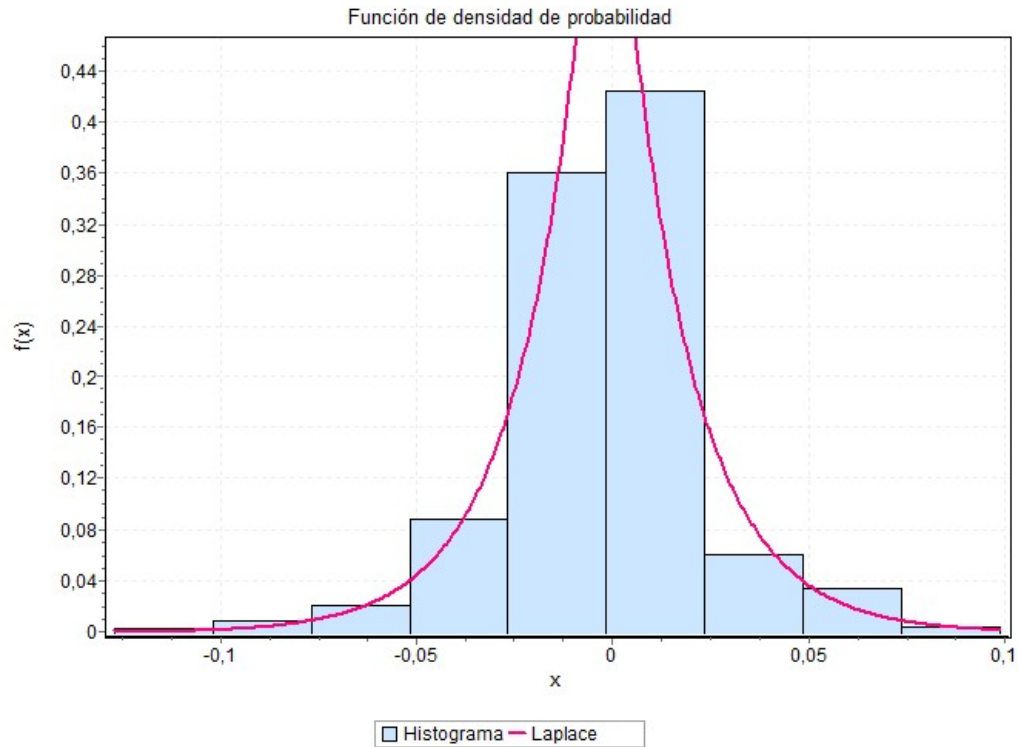


Figura 18: Gráfica de la distribución Laplace ajustada para Netflix, Inc. (NFLX).

Adobe Inc. (ADBE)

La tabla que se presenta a continuación revela que la distribución de Cauchy es la que mejor se ajusta a los datos según las pruebas de Anderson-Darling (AD) y Kolmogorov-Smirnov (KS), lo que indica que ambas pruebas coinciden en este caso.

| Bondad de ajuste - Resumen | | | | | |
|----------------------------|--------------|--------------------|-------|------------------|-------|
| # | Distribución | Kolmogorov Smirnov | | Anderson Darling | |
| | | Estadística | Rango | Estadística | Rango |
| 3 | Cauchy | 0,05033 | 1 | 2,2463 | 1 |
| 21 | Laplace | 0,07136 | 2 | 2,7237 | 2 |
| 6 | Error | 0,07136 | 3 | 2,7237 | 3 |

Figura 19: Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para Adobe Inc. (ADBE).

Después de confirmar que la distribución de Cauchy es la más adecuada para modelar los datos, es esencial profundizar en el análisis para comprender mejor los resultados obtenidos.

| Bondad de ajuste - Detalles [ocultar] | | | | | |
|---------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Cauchy [#3] | | | | | |
| Kolmogorov-Smirnov | | | | | |
| Tamaño de la muestra | 502 | | | | |
| Estadística | 0,05033 | | | | |
| Valor P | 0,15199 | | | | |
| Rango | 1 | | | | |
| α | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 |
| Valor crítico | 0,04789 | 0,05459 | 0,06061 | 0,06775 | 0,07271 |
| Rechazar? | Sí | No | No | No | No |
| Anderson-Darling | | | | | |
| Tamaño de la muestra | 502 | | | | |
| Estadística | 2,2463 | | | | |
| Rango | 1 | | | | |
| α | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 |
| Valor crítico | 1,3749 | 1,9286 | 2,5018 | 3,2892 | 3,9074 |
| Rechazar? | Sí | Sí | No | No | No |

Figura 20: KS y AD para Adobe Inc. (ADBE).

Al examinar los resultados de las pruebas de bondad de ajuste, podemos observar que, en el caso de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, los valores críticos asociados a cada nivel de significancia evaluado (α) son mayores que la estadística de la prueba (0.05033) en cuatro casos, específicamente cuando $\alpha \leq 0,1$. Esto sugiere que la prueba de KS generalmente acepta la hipótesis de que los retornos logarítmicos provienen de una distribución de Cauchy, siempre que el nivel de significancia cumpla con lo mencionado anteriormente.

Ahora, al considerar la segunda prueba, la de Anderson-Darling, notamos que para cada nivel de significancia evaluado (α), el valor crítico es siempre mayor que la estadística asociada a AD (2.2463), siempre que se cumpla $\alpha \leq 0,05$. Por lo tanto, según lo explicado al inicio de la sección, se acepta por Anderson-Darling que los retornos provienen de una distribución de Laplace, dependiendo del nivel de significancia.

En este caso, tanto AD como KS coinciden en que los retornos están distribuidos según una distribución Cauchy. Esto significa que su función de densidad de probabilidad (*pdf*) está dada por:

$$f(x|x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma} \right)^2 \right]}$$

y sus parámetros son:

$$x_0 = -0,0021$$

$$\gamma = 0,00715$$

La gráfica que muestra esta *pdf* junto con los retornos logarítmicos usados se presenta a continuación:

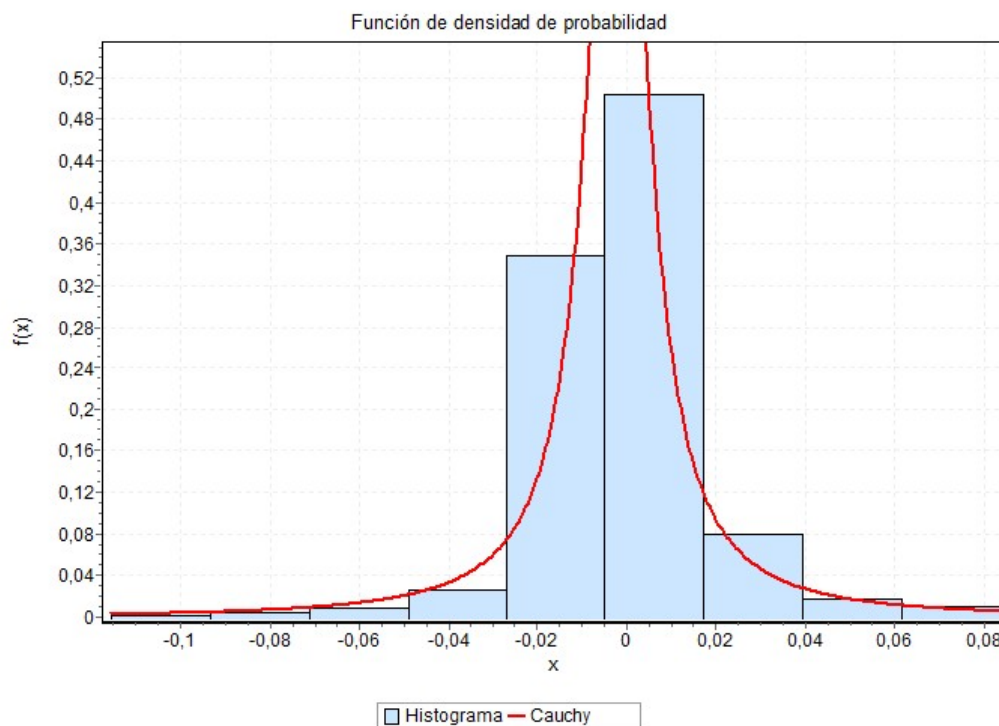


Figura 21: Gráfica de la distribución de Cauchy ajustada para Adobe Inc. (ADBE).

NOTA:

En los 3 activos seleccionados, tanto la prueba de Anderson-Darling (AD) como la de Kolmogorov-Smirnov (KS) coincidieron en la función de densidad de probabilidad (*pdf*) que mejor se ajusta. Sin embargo, es importante destacar que esto no siempre ocurre. Por ejemplo, en el caso de los retornos logarítmicos de la empresa Meta Platforms, Inc. (META), la prueba de AD indica que la *pdf* que mejor se ajusta es la Log-Logistic (3P), mientras que la prueba KS arroja la *pdf* Dagum (4P).

Comparación de la distribución ajustada con los retornos originales

Microsoft Corporation (MSFT)

Veremos las comparaciones de las estadísticas descriptivas encontradas en los datos originales y las proporcionadas por la distribución Laplace.

- En primer lugar, observamos que la media de los retornos es de $-9,8682 \times 10^{-4}$ y es la misma para la distribución de Laplace. Por lo tanto, ambas arrojan la misma media.
- La varianza de los retornos es de $2,0795 \times 10^{-4}$, al igual que en la *pdf* de Laplace. Por lo tanto, también concluimos que son iguales. Además, el coeficiente de variación en ambos casos es de $-14,613$.
- La asimetría de los retornos fue de $-0,06658$, mientras que para la *pdf* de Laplace fue de 0. Esto indica que los retornos tienen sesgo a la izquierda, mientras que la *pdf* ajustada Laplace no lo tiene.
- Por último, la curtosis de los retornos logarítmicos es de 4,3485, mientras que para la distribución ajustada es de 3. Ambos valores son mayores a 0, lo que significa que ambas distribuciones son leptocúrticas. Sin embargo, se destaca que hay una diferencia significativa entre ellas.

Netflix, Inc. (NFLX)

Ahora, enfocándonos en los datos de Netflix, examinaremos detenidamente las comparaciones entre las estadísticas descriptivas de los retornos originales y las proporcionadas por la distribución Laplace.

- En primer lugar, se destaca que la media de los retornos es de $-0,00178$, cifra que coincide con la media proporcionada por la distribución de Laplace. Esto implica que ambos conjuntos de datos tienen la misma media.
- La varianza de los retornos, es $5,9845 \times 10^{-4}$, coincide con la varianza calculada a partir de la distribución de Laplace. Por lo tanto, también podemos concluir que las varianzas son iguales. Además, el coeficiente de variación para ambos casos es de $-13,731$.
- Al observar la asimetría, notamos que los retornos tienen un sesgo a la izquierda, con una asimetría de $-0,18825$, mientras que la distribución de Laplace muestra una asimetría de 0, lo que indica una distribución simétrica. Esta diferencia en la forma de la distribución es un aspecto importante a considerar.
- Por último, al evaluar la curtosis, encontramos que los retornos logarítmicos tienen una curtosis de 3,1813, mientras que la distribución ajustada tiene una curtosis de 3. Ambos valores son mayores a 0, lo que sugiere que ambas distribuciones son leptocúrticas. Sin embargo, la diferencia en los valores de curtosis implica una diferencia pequeña en la forma de las colas de las distribuciones, pues no hay mucha brecha entre las mismas.

Adobe Inc. (ADBE)

Ahora examinamos las estadísticas descriptivas encontradas al inicio del estudio y las que arroja la *pdf* seleccionada:

- En primer lugar, es importante destacar que la distribución de Cauchy, aunque útil por sus colas pesadas, presenta limitaciones debido a la indefinición de sus momentos. Esta característica implica que no existen valores definidos para la media, la varianza, la asimetría, la curtosis y otros momentos de orden superior. Esto dificulta la interpretación de medidas estadísticas estándar y limita su aplicación en comparación con distribuciones que sí tienen momentos definidos. Además, la indefinición de la asimetría impide medir la inclinación o sesgo de la distribución hacia un lado. Por lo tanto, aunque la distribución de Cauchy es útil en ciertos contextos, es fundamental tener en cuenta sus limitaciones inherentes debido a la falta de momentos definidos.
- A continuación, al comparar la mediana de los retornos logarítmicos, que es -0.00212 , con la mediana de la *pdf*, que es -0.0021 , notamos una ligera diferencia. Esto se debe a que, dada la naturaleza de la distribución de Cauchy y su comportamiento asintótico, es común encontrar pequeñas variaciones en los valores centrales al compararlos con los de otras distribuciones.
- Además, observamos que los retornos logarítmicos tienen una asimetría de -0.16394 , lo que indica un sesgo hacia la izquierda, y una curtosis de 6.8397, lo que sugiere una distribución leptocúrtica.

Cartera de mínima varianza

Para determinar los pesos y el riesgo de la cartera de mínima varianza obtenemos la matriz de varianzas y covarianzas de los tres activos, la cual es:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0,0002079455 & 0,0002183817 & 0,000210063 \\ 0,0002183817 & 0,0005984482 & 0,0002743175 \\ 0,0002100633 & 0,0002743175 & 0,0003475558 \end{bmatrix}$$

Donde la primera varianza corresponde a los retornos de Microsoft (1), la segunda a Netflix (2) y la última a Adobe (3).

Si en este punto asignamos el mismo peso a los tres activos, el riesgo sería:

$$\sigma_c^2 = \vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c = \frac{1}{9} \mathbf{1}_3^t \Sigma \mathbf{1}_3 = 0,000284386 \quad (1)$$

Ahora, buscaremos el modelo *GMVP*. Establecemos el siguiente sistema de ecuaciones, pues no tenemos rentabilidades preestablecidas:

$$\begin{bmatrix} 0,0002079455 & 0,0002183817 & 0,000210063 & -1 \\ 0,0002183817 & 0,0005984482 & 0,0002743175 & -1 \\ 0,0002100633 & 0,0002743175 & 0,0003475558 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

La solución de este sistema nos da el respectivo vector de pesos o ponderaciones junto con el multiplicador de Lagrange (δ), que es:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,03224 \\ -0,02755 \\ -0,00469 \\ 0,000208 \end{bmatrix},$$

Lo cual nos indica que se deben invertir todos los fondos en la compañía 1, ya que los pesos de las otras dos son negativos, lo que indica ventas en corto. Más adelante veremos de forma más clara qué significa esto.

El riesgo del modelo *GMVP* sería:

$$\sigma_c^2 = \vec{w}_c^t \Sigma \vec{w}_c = 0,000208$$

$$\sigma_c = 0,014422205$$

Lo cual es inferior al riesgo del modelo planteado inicialmente donde dábamos el mismo peso a las tres empresas. Ahora veremos la frontera eficiente. Para esto, calculamos los valores de la matriz de Merton:

$$A = -4,16, \quad B = 0,00567, \quad C = 4816, \quad D = 9,9735$$

La ecuación cuadrática es:

$$C \vec{w}^t \Sigma \vec{w} - \frac{C^2}{D} \left(\tilde{E} - \frac{A}{C} \right)^2 = 1$$

Reemplazando, quedaría:

$$4816 \vec{w}^t \Sigma \vec{w} - \frac{4816^2}{9,9735} \left(\tilde{E} + \frac{4,16}{4816} \right)^2 = 1$$

La hipérbola tiene su centro en:

$$\left(0, \frac{A}{C} \right) = \left(0, -\frac{4,16}{4816} \right)$$

Luego, la gráfica de la frontera eficiente, junto con sus asíntotas, es:

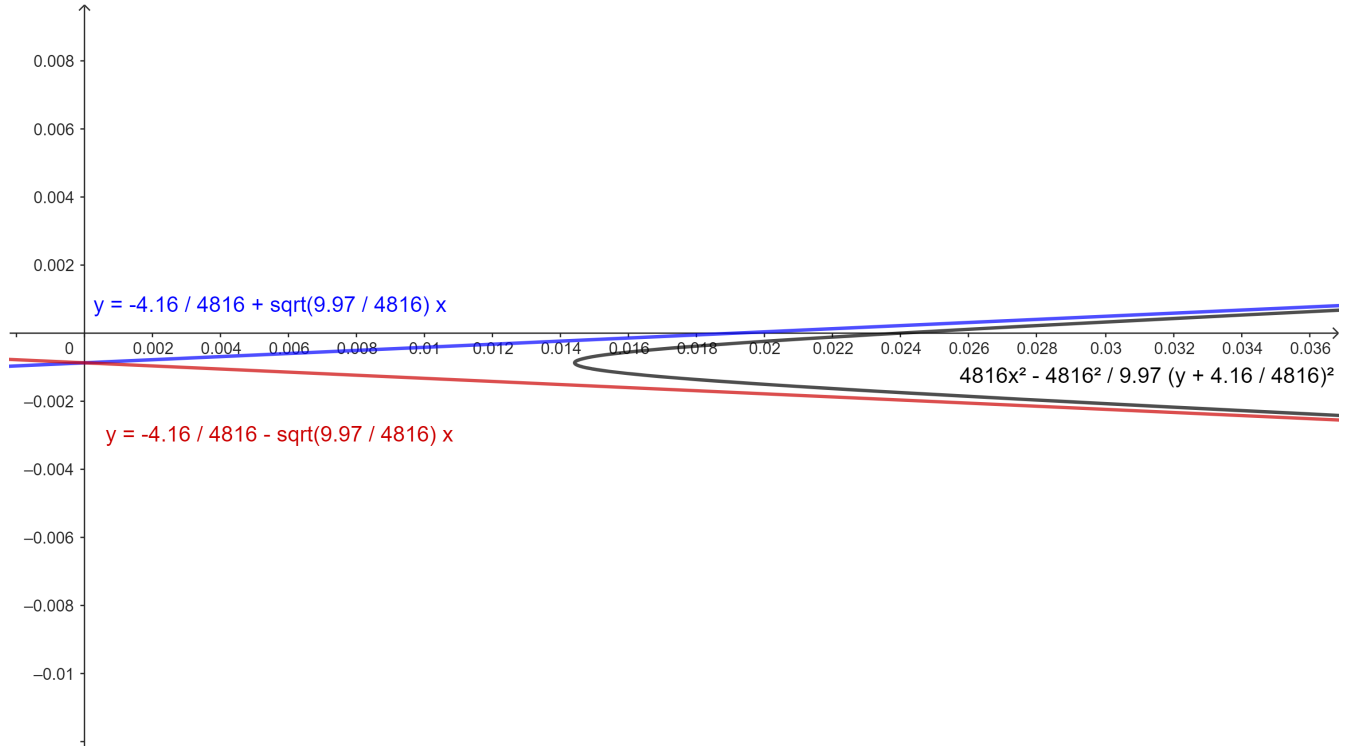


Figura 22: Frontera eficiente

Como podemos observar en la gráfica, de manera similar a lo que se evidenciaba en los pesos, los rendimientos del portafolio que combina las acciones de las tres empresas son inferiores a cero, lo que podría indicar que no sería muy conveniente invertir en ellas. Además, en los pesos vimos que el modelo recomendaba invertir todo en la empresa 1. Esto podría significar que esta empresa es la que menos pérdidas nos causaría en caso de invertir en ella. Por lo tanto, los mejores rendimientos, con menor riesgo, se obtendrían al invertir todo en esta empresa en lugar de distribuir porcentajes con las demás. Esta información sugiere que las empresas podrían estar enfrentando dificultades financieras o desafíos en su desempeño, lo cual podría explicar los rendimientos negativos y la preferencia del modelo por la empresa 1 como opción de inversión más "segura", sin que esto signifique ganancias, tal vez son menos pérdidas.

Quiz 10 - Estimación de los parámetros de las pdf

pdf Laplace

Necesitamos encontrar los MLEs y MMEs para μ y λ cuando X_1, X_2, \dots, X_n representan una muestra aleatoria iid. Sea la pdf a tratar la que siguiente

$$f(x|\lambda, \mu) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\lambda}\right)$$

Método de máxima verosimilitud

1. Primero calculamos la función de verosimilitud con $\mu = \theta$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x_i - \theta|}{\lambda}\right)$$
$$L(\theta) = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \theta|}{\lambda}\right)$$

Ahora pasamos a la log-verosimilitud

$$\Psi(\theta) = -n \ln(2\lambda) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \theta|}{\lambda}\right)$$

Luego, derivando respecto a θ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(\theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \left(-n \ln(2\lambda) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \theta|}{\lambda}\right) \right) \\ &= -\frac{d}{d\theta} \left(\sum_{i=1}^n \frac{((x_i - \theta)^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} \right) \\ &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d}{d\theta} ((x_i - \theta)^2)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(x_i - \theta)}{((x_i - \theta)^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \theta}{\lambda |x_i - \theta|} \end{aligned}$$

Es fácil ver que las derivadas existen siempre y cuando se cumpla que $\theta \neq X_1, X_2, \dots, X_n$ y, además, la última expresión no es más que la suma de unos y menos unos.

Así, sean y_1, y_2, \dots, y_n las estadísticas de orden de la muestra. Para $\theta < y_1$, $\Psi'(\theta) = \frac{n}{\lambda}$ ya que $(x_i - \theta)/|x_i - \theta| = 1$ para todo i . Si $y_1 < \theta < y_2$, entonces $\Psi'(\theta) = \frac{n-2}{\lambda}$, mientras que si $y_2 < \theta < y_3$, entonces $\Psi'(\theta) = \frac{n-4}{\lambda}$, y así sucesivamente. Es decir, hay un momento en el que la función se vuelve decreciente y es cuando el valor de θ supera a la mitad de los valores y_i , esto es la mediana.

Ahora para n impar se puede ver que Ψ es creciente en el intervalo $(-\infty, y_{(n+1)/2}]$ y decreciente en el intervalo $[y_{(n+1)/2}, \infty)$ de manera que en $\theta = y_{(n+1)/2}$ las funciones Ψ y L alcanzan su máximo.

Si n es par, tendríamos los intervalos de crecimiento en $(-\infty, y_{(n/2)})$ y decrecimiento en $[y_{(n/2)+1}, \infty)$, luego $y_{(n/2)} \leq \theta \leq y_{(n/2)+1}$

Por lo tanto, la mediana muestral es un MLE para $\theta = \mu$.

2. Ahora veremos para el otro parámetro, en este caso $\lambda = \theta$, la función de verosimilitud nos queda

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x_i - \mu|}{\theta}\right)$$

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \mu|}{\theta}\right)$$

Ahora pasamos a la log-verosimilitud

$$\Psi(\theta) = -n \ln(2\theta) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \mu|}{\theta}\right)$$

Luego, derivando respecto a θ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(\theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \left(-n \ln(2\theta) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \mu|}{\theta}\right) \right) \\ &= \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \mu|}{\theta^2} \end{aligned}$$

Igualando a 0 y despejando, nos queda

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \mu|}{\theta^2} \\ \theta &= \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \mu|}{n} \end{aligned}$$

y este seria el estimador MLE cuando $\theta = \lambda$.

Método de momentos

Tenemos que $X \sim \text{Laplace}(\mu, \lambda)$, donde μ será θ_1 y λ será θ_2 respectivamente. Miramos los dos primeros momentos ordinarios, los cuales son

$$\begin{aligned} E(X) &= \theta_1 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}_n \\ E(X^2) &= \theta_1^2 + 2\theta_2^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

Despejando θ_2 de la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{X}_n^2 + 2\theta_2^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \theta_2 &= \sqrt{\frac{(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2) - \bar{X}_n^2}{2}} \end{aligned}$$

luego, concluimos que

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \bar{X}_n \\ \hat{\theta}_2 &= \sqrt{\frac{(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2) - \bar{X}_n^2}{2}} \end{aligned}$$

son los respectivos estimadores por el método de momentos.

pdf Cauchy

Necesitamos encontrar los MLEs y MMEs para x_0 y γ cuando X_1, X_2, \dots, X_n representan una muestra aleatoria iid. Sea la pdf a tratar la que siguiente

$$f(x|x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$$

Método de máxima verosimilitud

Primero obtenemos la función de verosimilitud

$$L(x|x_0, \gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$$
$$L(x|x_0, \gamma) = \frac{1}{(\gamma\pi)^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$$

Ahora la función de log.verosimilitud

$$\Psi(x|x_0, \gamma) = -n \ln \gamma\pi - \sum_{i=1}^n \ln \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]$$

Tomando la derivada para x_0 y γ e igualando a 0 respectivamente nos queda lo que sigue:

Derivada respecto a x_0 :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} = \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - x_0)}{\gamma^2 + (x_i - x_0)^2} = 0$$

Derivada respecto a γ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = -\frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \frac{2(x_i - x_0)^2}{\gamma(\gamma^2 + (x_i - x_0)^2)} = 0$$

Como podemos ver, la complejidad de las ecuaciones resultantes, generadas al igualar a cero las derivadas de la función de log-verosimilitud con respecto a x_0 y γ , hace que sea inviable encontrar soluciones analíticas simples. Estas ecuaciones, no lineales y posiblemente con múltiples soluciones o mínimos locales, requieren enfoques numéricos para su resolución. Métodos como el método de Newton-Raphson o el método de optimización de Powell son utilizados para encontrar soluciones aproximadas que converjan a la solución óptima. Estos métodos permiten una estimación efectiva de los parámetros de la distribución de Cauchy al proporcionar soluciones iterativas que se acercan a la solución óptima deseada.

Algo que vale la pena mencionar es que el estimador MLE es asintóticamente eficiente cuando se garantizan condiciones de regularidad, es decir, la eficiencia, a medida que el tamaño de muestra aumenta, puede alcanzar su máximo teniendo en cuenta la cota de Crámer-Rao. Esto es valioso porque indica que, bajo ciertas condiciones, el estimador proporciona estimaciones cada vez más precisas a medida que se aumenta el tamaño de la muestra. En otras palabras, para muestras grandes, el estimador se comporta de manera óptima y ofrece estimaciones cercanas al valor real de los parámetros poblacionales. Esto cobra sentido cuando se usan los métodos numéricos mencionados antes.

Método de momentos

El método de momentos no puede usarse para estimar los parámetros de la distribución de Cauchy porque esta distribución no tiene momentos finitos. El método de momentos compara los momentos de una muestra con los de la distribución teórica para obtener las estimaciones de los parámetros. Pero con la distribución de Cauchy, que tiene colas pesadas, los momentos no están definidos (algunos son infinitos). Entonces, no podemos calcular los momentos y eso significa que el método de momentos no sirve aquí. Necesitamos métodos alternativos, como usar

la mediana y el rango intercuartil, por ejemplo, usando la mediana de la muestra como una estimación para x_0 y la mitad del rango intercuartil (la diferencia entre el tercer cuartil (Q3) y el primer cuartil (Q1) de un conjunto de datos) de la muestra como una estimación para γ .

Código R

```
#modelo GMVP
library(readxl)
nose <- read_excel("nose.xlsx")
matriz_cov <- cov(nose)
matriz_cov
#si tomamos todos los pesos iguales el riesgo sería
unos <- c(1, 1, 1)
riesgoigual <- (1/9)*(t(unos) %*% matriz_cov %*% unos)

#usando lo visto en clase

unos1 <- c(-1, -1, -1, 0)
unos2 <- c(1, 1, 1, 0)
matriz1 <- matrix(0, nrow = 4, ncol = 4)
matriz1[1:3, 1:3] <- matriz_cov
matriz1[, 4] <- unos1
matriz1[4, ] <- unos2
b <- c(0, 0, 0, 1)
pesosymulti <- solve(matriz1,b)
pesos <- head(pesosymulti, -1)
riesgo <- t(pesos)%*%matriz_cov%*%pesos
#los rendimientos esperados son (-0,0882685,-0,1482254,-0,134427) respectivamente
#Frontera eficiente
reesp <- c(-0.000882685,-0.001482254,-0.00134427)
A <- t(reesp)%*%solve(matriz_cov)%*%unos
B <- t(reesp)%*%solve(matriz_cov)%*%reesp
C <- t(unos)%*%solve(matriz_cov)%*%unos
D <- B*C-(t(unos)%*%t(solve(matriz_cov))%*%reesp%*%t(reesp)%*%solve(matriz_cov)%*%unos)
rentmini <- t(reesp)%*%pesos
```

Referencias

- [1] Jiménez Moscoso, J. (2022). *Introducción a la teoría estadística del riesgo*. Universidad Nacional de Colombia.
- [2] Meta Platforms, Inc. - Historial de precios. Recuperado de <https://es.finance.yahoo.com/quote/META/history>
- [3] Microsoft Corporation - Historial de precios. Recuperado de <https://es.finance.yahoo.com/quote/MSFT/history>
- [4] Netflix, Inc. - Historial de precios. Recuperado de <https://es.finance.yahoo.com/quote/NFLX/history>
- [5] Adobe Inc. - Historial de precios. Recuperado de <https://es.finance.yahoo.com/quote/ADBE/history>
- [6] Distribución de Cauchy. En Wikipedia. Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_distribution
- [7] Distribución de Laplace. En Wikipedia. Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_distribution
- [8] Rothenberg, T. J., Fisher, F. M., & Tilanus, C. B. (1964). A note on estimation from a Cauchy sample. *Journal of the American Statistical Association*, 59(306), 460–463. doi:10.1080/01621459.1964.10482170.
- [9] Bloch, D. (1966). A note on the estimation of the location parameters of the Cauchy distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 61(316), 852–855. doi:10.1080/01621459.1966.10480912. JSTOR 2282794.
- [10] Ferguson, T. S. (1978). Maximum Likelihood Estimates of the Parameters of the Cauchy Distribution for Samples of Size 3 and 4. *Journal of the American Statistical Association*, 73(361), 211–213. doi:10.1080/01621459.1978.10480031. JSTOR 2286549.
- [11] Cohen Freue, G. V. (2007). The Pitman estimator of the Cauchy location parameter. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137(6), 1901. doi:10.1016/j.jspi.2006.05.002. Archived from the original (PDF) on 2011-08-16.
- [12] Wilcox, R. (2012). *Introduction to Robust Estimation & Hypothesis Testing*. Elsevier.
- [13] Barnett, V. D. (1966). Order Statistics Estimators of the Location of the Cauchy Distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 61(316), 1205–1218. doi:10.1080/01621459.1966.10482205. JSTOR 2283210.
- [14] Norton, R. M. (May 1984). The Double Exponential Distribution: Using Calculus to Find a Maximum Likelihood Estimator. *The American Statistician*, 38(2), 135–136. American Statistical Association. doi:10.2307/2683252. JSTOR 2683252.
- [15] Torres, C. J. (2022). Métodos para obtener estimaciones de parámetros en distribuciones. Recuperado de https://cjtorresj.quarto.pub/ie/metod_obten_estim.html.