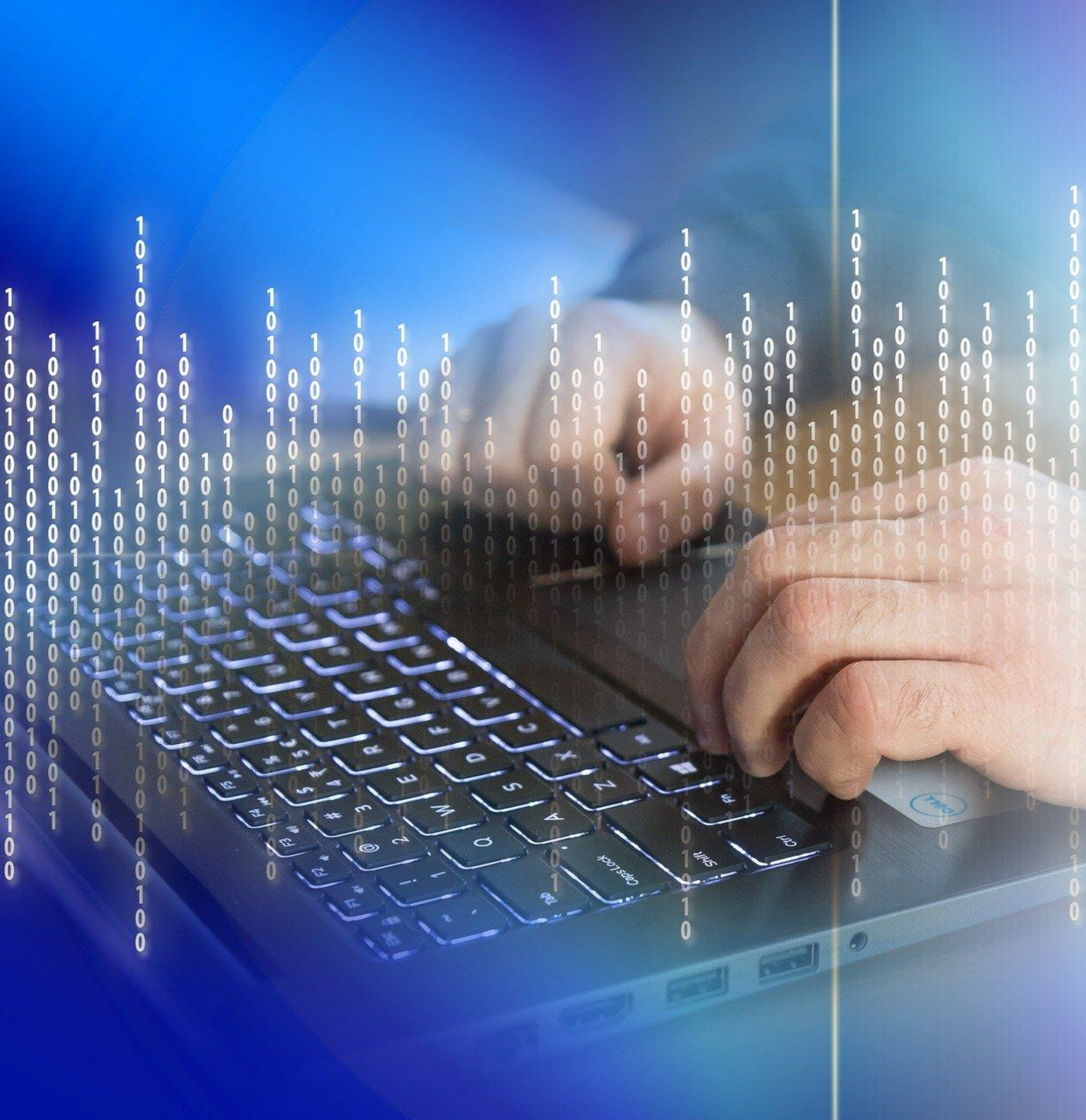


컴퓨터과학기초

7주차

논리식의 간소화(2)

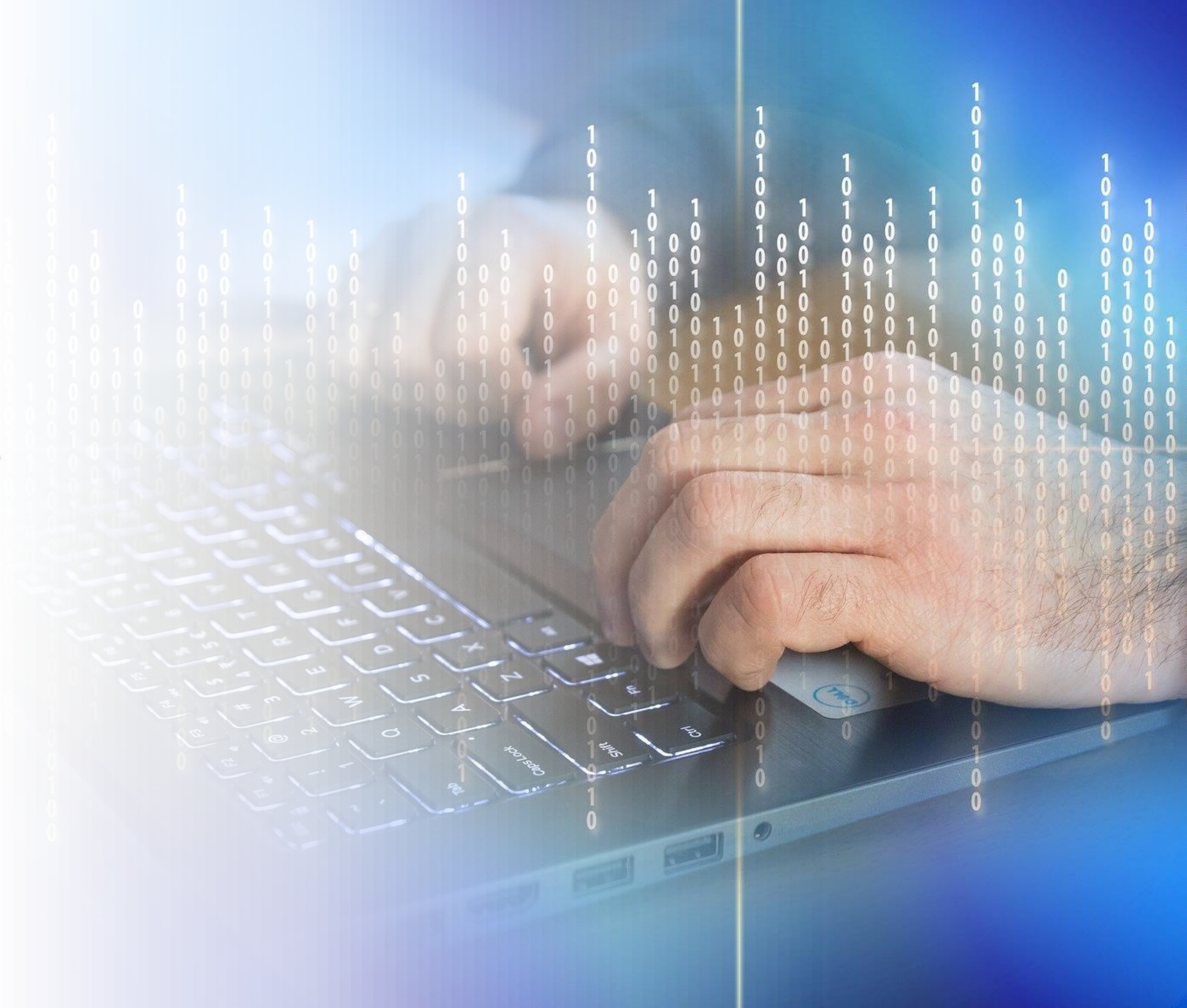
인하공업전문대학 컴퓨터정보과

이수정 교수

차례

Ch.6 논리식의 간소화

1. 2변수 카르노 맵
2. 3변수 카르노 맵
3. 4변수 카르노 맵



2. 3변수 카르노 맵

- 3변수 카르노 맵 표현 방법

A \ BC	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$
A	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	$AB\overline{C}$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

AB \ C	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$
$\overline{A}B$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
AB	$AB\overline{C}$	ABC
$A\overline{B}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$

C \ AB	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$
C	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$

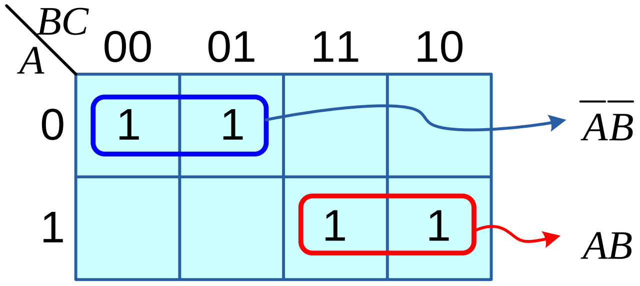
C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

AB \ C	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

행과 열을 바꾸어도 상관없다.
설계자가 선호하는 방법을 선택하면 된다.

2. 3변수 카르노 맵

- 간소화 예 1



$$F = \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

2. 3변수 카르노 맵

- 간소화 예 2

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1			1
1				

$\bar{A}\bar{C}$

$$F = \bar{A}\bar{C}$$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0				
1				

양쪽 끝은 연결
되어 있다.

동일한 카르노 맵

$A \backslash BC$	01	11	10	00
0			1	1
1				

$\bar{A}\bar{C}$

이웃하는 비트들이 한 비트만 다르면
순서는 관계없다.

$$F = \bar{A}\bar{C}$$

2. 3변수 카르노 맵

- 간소화 예 3

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	

$$F = C$$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1				

$$F = \overline{A}$$

2. 3변수 카르노 맵

- 간소화 예 4

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

$\overline{C}$

양쪽 끝은 연결되어 있다.

$$F = \overline{C}$$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	1

$\overline{A}C$

BC

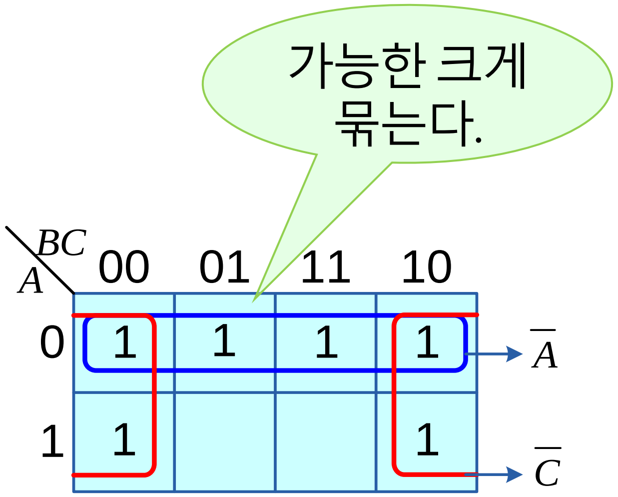
AB

다른 묶음에 모두 포함되어 있으므로 중복하여 묶지 않는다.

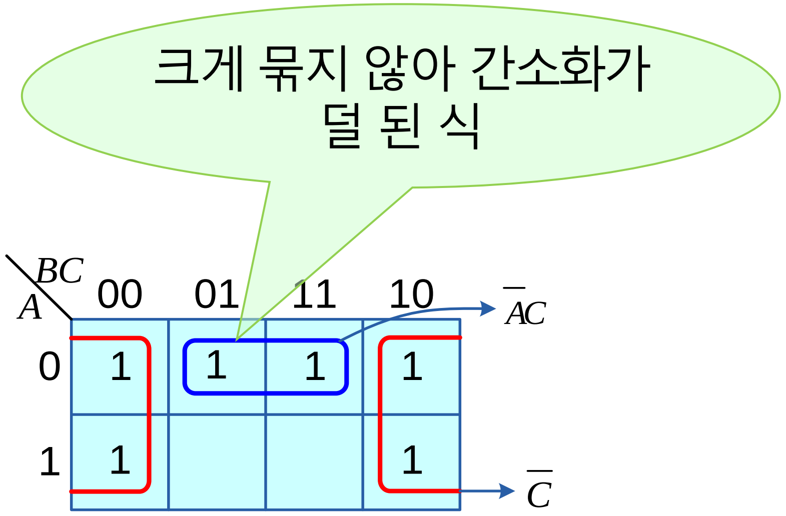
$$F = \overline{A}C + AB$$

2. 3변수 카르노 맵

- 간소화 예 5



$$F = \overline{A} + \overline{C}$$



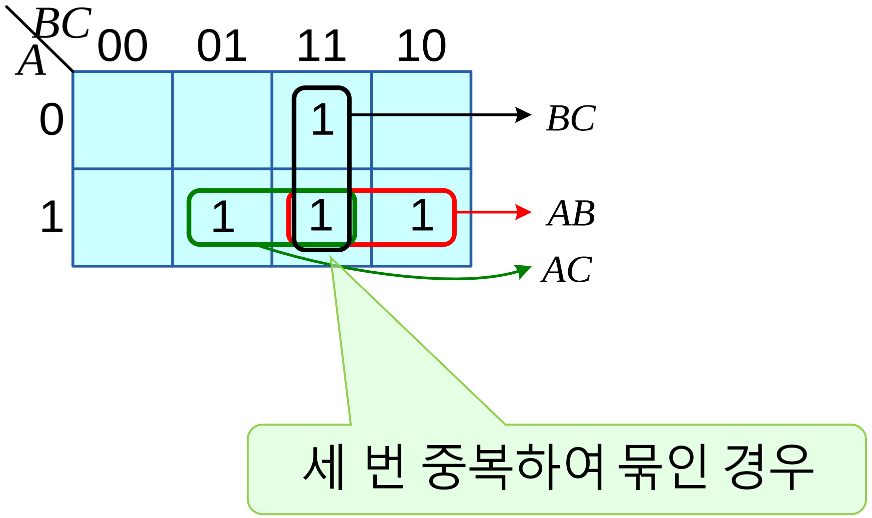
$$F = \overline{A}C + \overline{C}$$

2. 3변수 카르노 맵

- 간소화 예 6

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \sum m(3,5,6,7) = AB + BC + AC$$



2. 3변수 카르노 맵

- 간소화 예 7

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0				
1				

모두 0이면 논리식은 F=0이다.

$$F = 0$$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

모두 1이면 논리식은 F=1이다.

$$F = 1$$

3. 4변수 카르노 맵

- 4변수 카르노 맵 표현 방법

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

상하 좌우는 연결
되어 있다.

3. 4변수 카르노 맵

- 2, 3변수 카르노 맵과 같은 방법으로 간소화
- 8개나 16개도 묶을 수 있음
- 16개 모두 묶으면 F=1

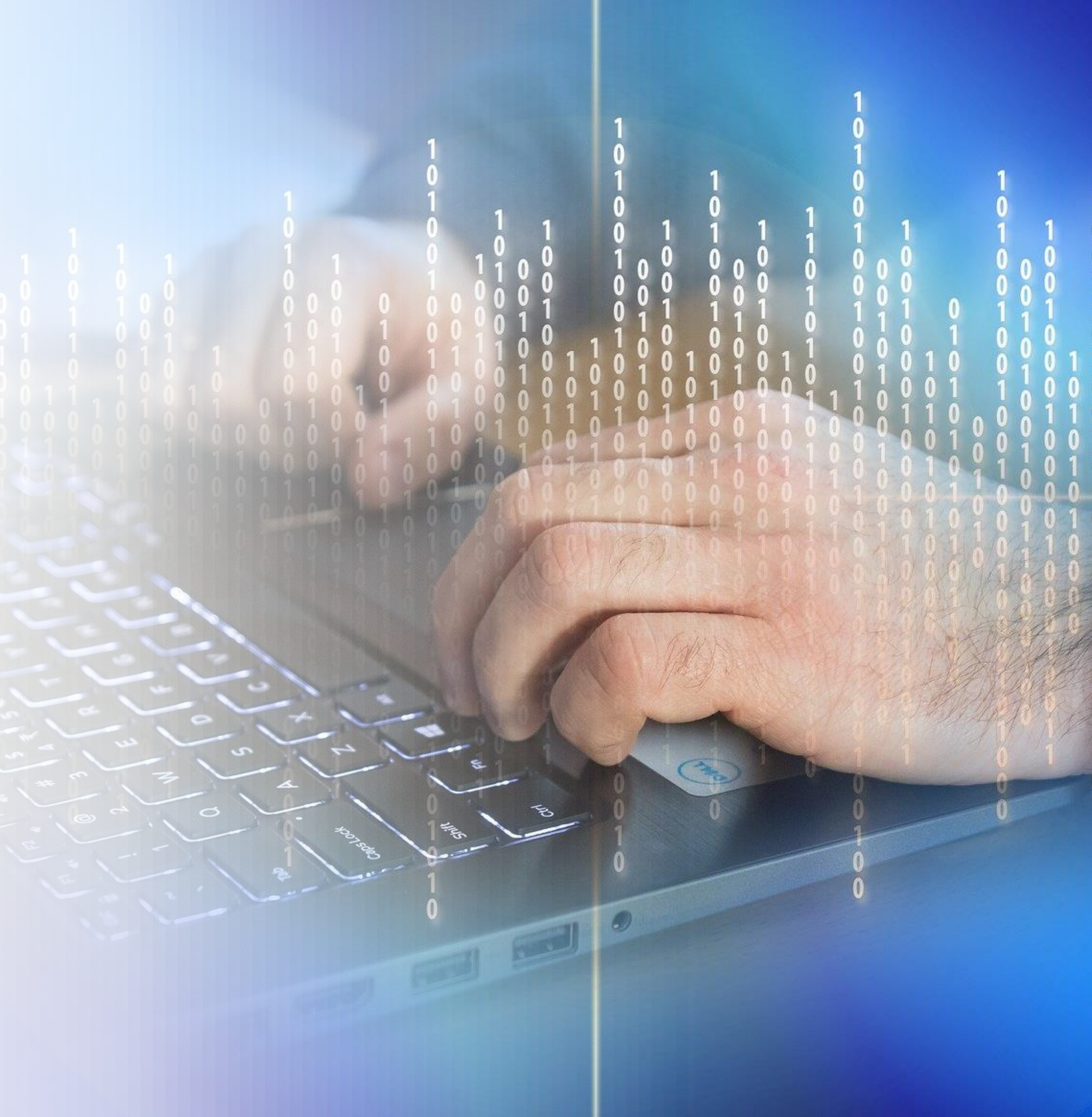
$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$F=1$$

차례

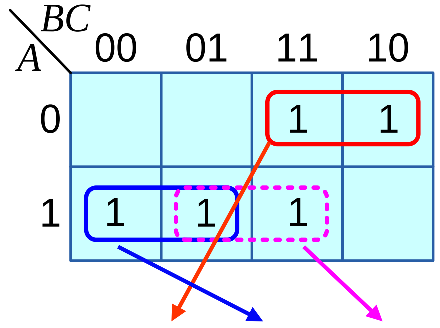
Ch.6 논리식의 간소화

1. 선택적 카르노 맵
2. 논리식의 카르노 맵 작성
3. 5변수, 6변수 카르노 맵
4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

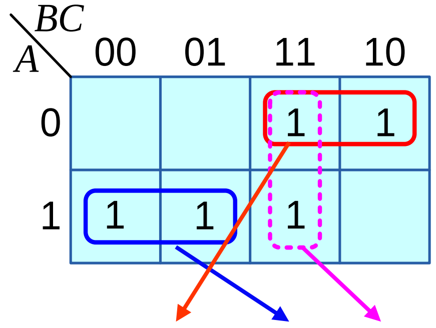


1. 선택적 카르노 맵

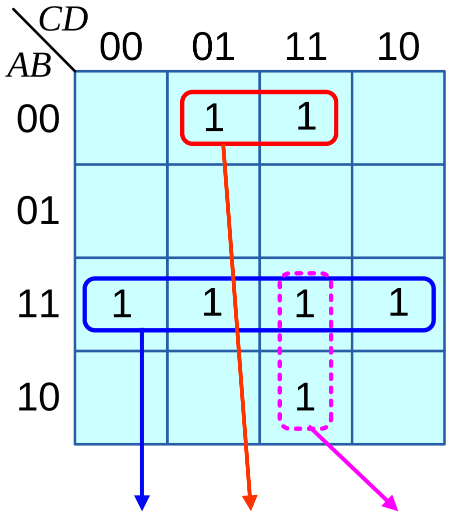
- 카르노 맵에서 선택적으로 묶을 수 있는 경우



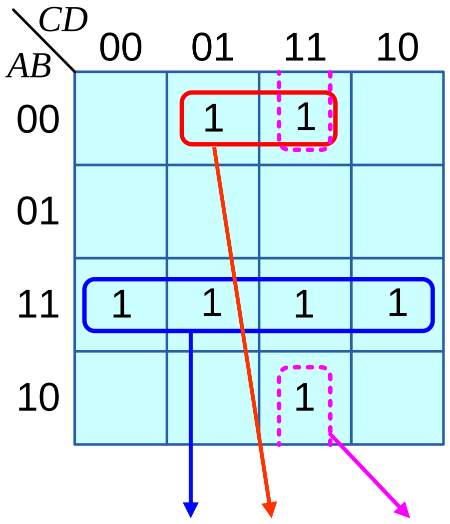
$$F = \bar{A}B + A\bar{B} + AC$$



$$F = \bar{A}B + A\bar{B} + BC$$



$$F = AB + \bar{A}\bar{B}D + ACD$$



$$F = AB + \bar{A}\bar{B}D + \bar{B}CD$$

<2가지 답이 가능한 경우>

1. 선택적 카르노 맵

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

$$F = \overline{A}\,\overline{B} + AB + B\overline{C}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

$$F = \overline{A}\,\overline{B} + AB + \overline{A}\,\overline{C}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

$$F = \overline{A}\,\overline{B} + AB + B\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

$$F = \overline{A}\,\overline{B} + AB + \overline{A}\,\overline{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	x	1	x
01	1	x		x
11	x	1	1	x
10	x			

$$F = \overline{A}\,\overline{B} + AB + \overline{C}\,\overline{D}$$

<5가지 답이 가능한 경우>

2. 논리식의 카르노 맵 작성

- 논리식에서 생략된 부분을 찾아서 최소항(**Minterm**)으로 변경

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= ABC + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} \\
&= ABC + \bar{A}B(C+\bar{C}) + \bar{A}\bar{B}(C+\bar{C}) \\
&= ABC + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \\
&= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC \\
&= \sum m(0,1,2,3,7)
\end{aligned}
$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	

$$F = \bar{A} + BC$$

2. 논리식의 카르노 맵 작성

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C,D) &= AB + ABC + \bar{A}CD + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} \\
&= AB(C+\bar{C})(D+\bar{D}) + ABC(D+\bar{D}) + \bar{A}(B+\bar{B})CD \\
&\quad + \bar{A}(B+\bar{B})\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} \\
&= (ABC + AB\bar{C})(D+\bar{D}) + ABCD + ABC\bar{D} + \bar{A}BCD + \bar{A}\bar{B}CD \\
&\quad + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} \\
&= ABCD + ABC\bar{D} + AB\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} + ABCD + ABC\bar{D} + \bar{A}BCD \\
&\quad + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} \\
&= \sum m(15,14,13,12,7,3,5,1,6) = \sum m(1,3,5,6,7,12,13,14,15)
\end{aligned}
$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	1
11	1	1	1	1
10				

$$F = AB + \bar{A}D + BC$$

3. 5변수, 6변수 카르노 맵

- 5변수인 경우

A=0

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

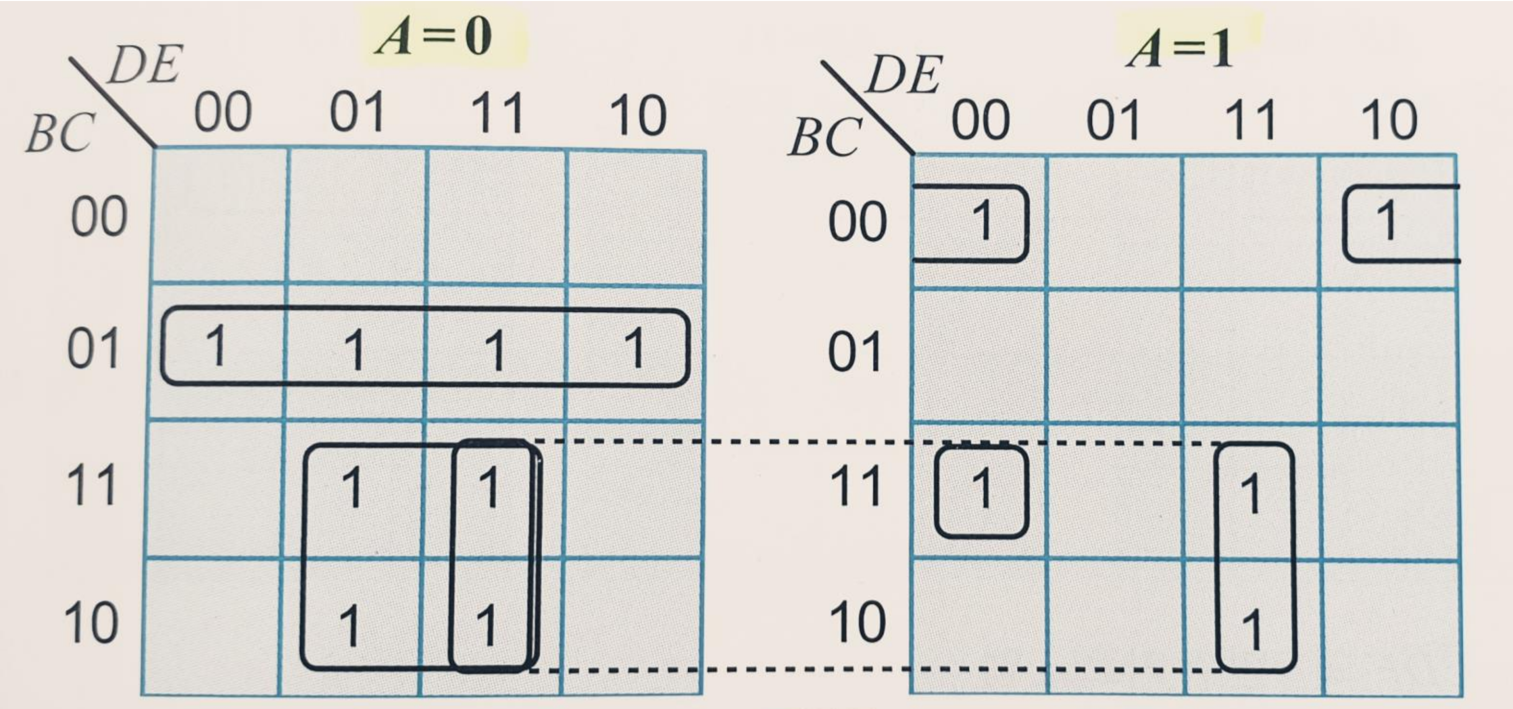
A=1

BC \ DE	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

<5변수 카르노 맵>

3. 5변수, 6변수 카르노 맵

- 예제) $F(A,B,C,D,E)=\sum m(4,5,6,7,9,11,13,15,16,18,27,28,31)$ 의 카르노 맵



$$F=\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BE+A\bar{B}\bar{C}\bar{E}+ABC\bar{D}\bar{E}+DBE$$

3. 5변수, 6변수 카르노 맵

6변수인 경우

AB=00

CD \ EF	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

AB=01

CD \ EF	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

AB=11

CD \ EF	00	01	11	10
00	48	49	51	50
01	52	53	55	54
11	60	61	63	62
10	56	57	59	58

AB=10

CD \ EF	00	01	11	10
00	32	33	35	34
01	36	37	39	38
11	44	45	47	46
10	40	41	43	42

<6변수 카르노 맵>

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

1) QM 알고리즘

- 퀸-맥클러스키(Quine-McCluskey) 간소화 알고리즘
  - 퀸(Willard Van Orman Quine)과 맥클러스키(Edward J. McCluskey)가 1956년에 개발
  - 컴퓨터 알고리즘으로 개발하기에 적합
  - 입력변수가 4개 이하 : 카르노 맵을 이용하는 것이 편리
  - 입력변수가 5개 이상 : 퀸-맥클러스키(이하 QM) 알고리즘이 유용

❖용어정리
- Implicant: 간소화되거나 최소화될 항
- PI(Prime Implicant) : 최종적으로 남아있는 곱의 항. 더 이상 간단히 되지 않는 항목
- EPI(Essential Prime Implicant) : PI중에서 유일한 PI

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- Quine-McCluskey 방법
  - QM 방법은 최소 SOP 식으로 만들어 진다.
  - QM 방법의 과정

❶ 진리표에서 최소항을 모두 찾는다.

❷ 최소항 중에서 입력변수에 1이 나타나는 개수에 따라서 인덱스(index)를 매겨 그룹을 만든다.

❸ 각 그룹내의 항들을 모두 비교하여 한 비트만 다른 항들을 찾아서 간소화하고, 간소화에 사용된 항들을 표시한다.

❹ ❸의 과정을 반복하여 더 이상 간소화되지 않을 때까지 계속한다.

❺ 간소화 과정이 끝나고 표시되지 않은 항들이 PI(prime implicants, 주항)가 된다.

❻ 중복된 PI를 찾기 위하여 차트를 만들고, EPI(essential prime implicants, 필수주항)를 찾는다.

❼ EPI에 포함되는 PI들을 제거한다.

❽ EPI에 포함되지 않은 항들에 대해서 최소 개수의 SOP 식을 찾는다.

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- QM 방법은 크게 2단계로 이루어진다.
  - 단계 1 : 인덱스별로 구분하고 $AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$ 를 적용하여 가능한 변수들을 제거한다. 결과 항들은 PI가 된다.
  - 단계 2 : PI 차트를 이용하여 함수를 PI의 최소 집합들로 표현한다.
- QM 방법을 이용한 간소화 과정

입력
민텀항의 합

→

$AB+A\overline{B}=A$ 규칙을 이용하여 PI 들을 구한다.

→

PI 차트를 이용하여 PI 집합을 구한다.

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

▪기본 규칙

- QM 방법은 규칙 $A+\overline{A}=1$ 을 반복 적용하여 최소화한다.
- 함수의 각 항들은 2진 형태(0과 1)로 표현하고, 변수가 제거된 곳은 대시(-)를 사용한다.

$A\overline{B}C$: 101로 표현 (A=1, B=0, C=1)
$\overline{A}B\overline{C}$: 010로 표현 (A=0, B=1, C=0)
$A\overline{B}$: 10-로 표현 (A=1, B=0, C= ×)
AC : 1-1로 표현 (A=1, B=×, C=1)

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- QM 방법을 이용한 간소화 과정

A	B	C	D
0	0	1	1
1	0	1	1
-	0	1	1

<변수가 결합되는 경우>

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0011, 1011)$$
$$= \overline{A}\,\overline{B}CD + A\overline{B}CD = \overline{B}CD$$

A	B	C	D
0	1	1	1
1	0	1	1
?			

두 자리가
다르기 때문에
결합될 수 없다.

<변수가 결합되지 못하는 경우>

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0111,\ 1011)$$
$$= \overline{A}BCD + A\overline{B}CD$$

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- **QM 방법을 이용한 간소화 과정**
  - 두 항을 결합하기 위한 QM 방법의 첫 번째 규칙은 오직 한 비트만 다를 때 제거된다는 것이다.
  - 첫 번째 규칙을 적용하기 위해서 minterm 항들을 1의 개수에 따라서 서로 재배열한다.
  - minterm 항을 2진 형태로 표현하여 1의 개수에 따라서 인덱스를 매기며, 인덱스 0, 인덱스 1, 인덱스 2 등으로 나열한다.

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- QM 방법에서의 인덱스 분류

	A	B	C	D	10진 표기
index 0	0	0	0	0	0
index 1	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	2
	0	1	0	0	4
	1	0	0	0	8
index 2	0	0	1	1	3
	0	1	0	1	5
	0	1	1	0	6
	1	0	0	1	9
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
index 3	0	1	1	1	7
	1	0	1	1	11
	1	1	0	1	13
	1	1	1	0	14
index 4	1	1	1	1	15

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- 다음 식을 인덱스로 분류하면 표와 같다.

$$F(A,B,C)=\sum m(0,1,2,3,4,6)=\sum m(000,001,010,011,100,110)$$

$A\ B\ C$	F
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

➡

인덱스	10진수	$A\ B\ C$
0	0	0 0 0
1	1	0 0 1
	2	0 1 0
	4	1 0 0
2	3	0 1 1
	6	1 1 0

* 출력이 1인 항만 표시한다.

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

2) QM 알고리즘을 이용한 간소화

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$
$$= \sum m(0,1,4,5)$$
$$= \sum m(000, 001, 100, 101)$$

minterm	10진	2진	index
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	0 0 0	0
$\bar{A}\bar{B}C$	1	0 0 1	1
$A\bar{B}\bar{C}$	4	1 0 0	1
$A\bar{B}C$	5	1 0 1	2

- 인덱스 표 만들기

Column 1			
index	decimal	$A\ B\ C$	
0	(0)	0 0 0	
1	(1) (4)	0 0 1 1 0 0	
2	(5)	1 0 1	

4. 퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- 첫 번째 과정

Column 1				Column 2			
index	decimal	ABC		index	decimal	ABC	
0	(0)	0 0 0	✓	0	(0,1) (0,4)	0 0 - - 0 0	
1	(1) (4)	0 0 1 1 0 0	✓ ✓	1	(1,5) (4,5)	- 0 1 1 0 -	
2	(5)	1 0 1	✓				

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

$$F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{B}C+A\overline{B}$$

- 두 번째 과정

Column 1				Column 2				Column 3		
index	decimal	ABC		index	decimal	ABC		decimal	ABC	
0	(0)	0 0 0	✓	0	(0,1) (0,4)	0 0 - - 0 0	✓ ✓	(0,1, 4,5)	**- 0 -**	●
1	(1) (4)	0 0 1 1 0 0	✓ ✓	1	(1,5) (4,5)	- 0 1 1 0 -	✓ ✓			
2	(5)	1 0 1	✓							

$$F(A,B,C)=\overline{B}$$

다음 시간

8주차 : 중간 평가