



# RAPPORT EA DE RECHERCHE MAP511

## Variables de Contrôle Automatiques pour le Pricing d'Options par Réseaux de Neurones.

17 décembre 2023

Coordinateur: Stefano de Marco  
Élèves : METCHINJIN KOMBOU Aaron Clotaire, LEKEUKA Xavier Leprintemps



## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>Liste des Notations</b>	<b>4</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>5</b>
<b>2 Modèles et Instruments financiers de l'étude</b>	<b>6</b>
2.1 Modèles pour le sous-jacent et méthode de simulation . . . . .	6
2.1.1 Modèle de Black-Scholes . . . . .	6
2.1.2 Modèle de volatilité stochastique . . . . .	6
2.2 Instruments financiers . . . . .	7
<b>3 Construction de la variable de contrôle par apprentissage</b>	<b>9</b>
3.1 Apprentissage par Régression Linéaire . . . . .	9
3.2 Apprentissage par réseaux de neurones . . . . .	9
3.2.1 Approche par Intégration Analytique . . . . .	10
3.2.2 Approche par réduction de dimension : Intégration Numérique . . . . .	11
<b>4 Résultats expérimentaux et Comparaisons</b>	<b>13</b>
4.1 Modèle de Blackscholes . . . . .	13
4.1.1 Régression linéaire . . . . .	13
4.1.2 Intégration analytique . . . . .	14
4.1.3 Réduction de dimension : Intégration numérique . . . . .	16
4.2 Modèle de volatilité stochastique . . . . .	17
4.2.1 Intégration analytique . . . . .	17
4.2.2 Réduction de dimension : Intégration numérique . . . . .	18
4.3 Commentaires Généraux et perspectives . . . . .	19
<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>Références</b>	<b>21</b>

## INTRODUCTION

L'évaluation précise des prix des instruments financiers (ou pricing), élaborée à travers des modèles stochastiques, repose souvent sur le calcul de l'espérance du gain sous une mesure de probabilité donnée d'un processus stochastique particulier. À l'exception de quelques modèles de base, l'évaluation analytique de ces prix demeure souvent complexe, voire impossible. Dans ce contexte, les méthodes de Monte Carlo ont émergé comme un outil puissant, offrant une approche numérique pour estimer ces valeurs [6]. Ces méthodes s'appuient sur le principe fondamental de la loi des grands nombres, permettant l'estimation d'espérances par la simulation d'un grand nombre de réalisations indépendantes d'une variable aléatoire.

Le principe de base des méthodes de Monte Carlo consiste à estimer l'espérance  $\mathbb{E}[f(Z)]$ , où  $Z$  est une variable aléatoire et  $f$  une fonction d'intérêt. Cette espérance est alors estimée à l'aide de la loi des grands nombres à travers l'estimateur Monte Carlo  $S_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(Z_m)$ , où les  $Z_m$  sont des échantillons i.i.d de même loi que  $Z$  et  $M$  est un grand nombre. Cette méthode est très flexible car peut s'appliquer à un grand nombre de problèmes.

Le présent travail s'inscrit à la frontière entre le pricing d'options, les méthodes Monte Carlo et l'apprentissage. Nous nous appuyons sur l'article de Jerome Lelong, Zineb El Filali Ech-Chafiq, et Adil Reghai, intitulé *Automatic Control Variates for Option Pricing using Neural Networks* [10]. Cette référence offre des perspectives novatrices en matière de contrôle des variables pour l'évaluation des options, mettant en œuvre des réseaux de neurones pour améliorer la précision des estimations. Nous chercherons à explorer et à analyser les implications de ces approches.

L'étude est basée sur un ensemble de  $d$  actifs dont les processus  $S^i$  sont régis par des équations différentielles stochastiques de la forme

$$dS_t^i = \mu^i(t, S_t^i)dt + \sigma^i(t, S_t^i)dB_t^i.$$

où les  $\mu^i$  et  $\sigma^i$  sont des processus décrivant le drift et la volatilité des actifs et les  $B^i$  des mouvements Browniens correlés. Le prix d'un instrument financier de payoff  $f$  sur ces actifs se ramènent généralement au calcul de  $\mathbb{E}[f(Z)]$  où  $Z$  est un vecteur gaussien de dimension  $N$  dépendant du nombre d'actifs  $d$  et de l'instrument étudié.

Pour l'ingénieur financier, comme pour tout scientifique, la donnée de l'unique valeur résultant de l'approximation Monte Carlo n'est pas suffisante. En effet, la quantification d'un degré de confiance en un résultat d'expérience d'intérêt apparaît cruciale car permet de contrôler l'impact sur les décisions qui en découlent et les conséquences dues aux erreurs de ces approximations. Pour le faire, nous considérons la variance de l'estimateur  $S_M$  donnée par

$$\text{Var}(S_M) = \frac{\text{Var}[f(Z)]}{M}$$

Plusieurs méthodes sont utilisées afin de réduire cette variance et améliorer la confiance en l'estimateur, celle que nous étudions est celle des variables de contrôles. Celle-ci repose sur la construction d'une fonction auxiliaire  $h$  telle que l'espérance  $\mathbb{E}[h(Z)]$  peut être évaluée et la variable aléatoire

$$Y = f(Z) - h(Z) + \mathbb{E}[h(Z)] \quad \text{vérifie} \quad \text{Var}[Y] < \text{Var}[f(Z)] \quad (1)$$

l'échantillonage de variables  $Y_m = f(X_m) - h(Z_m) + \mathbb{E}[h(Z)]$  permet ainsi l'estimation par Monte Carlo du prix recherché par  $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Y_m$  dont la variance est  $\frac{\text{Var}[Y]}{M} < \text{Var}[S_M]$

La condition (1) se ramenant à  $\text{Cov}[f(Z), h(Z)] > \frac{1}{2}\text{Var}[h(Z)]$ , le cœur de notre travail consiste donc à construire une telle fonction assez corrélée à la fonction de payoff estimée. Pour cela nous implémentons des modèles basés sur la régression linéaire (polynomiale) et des architectures simples de réseaux de neurones. Ces méthodes appliquées à divers instruments financiers de types Option sous deux principales dynamiques d'actifs, la dynamique de BlackScholes et celle de Hessen sur volatilité stochastique.

## LISTE DES NOTATIONS

---

- $f$  : Fonction de payoff d'un instrument financier.
- $Z$  : Vecteur gaussien de dimension  $N$ .
- $\mathbb{E}[X]$  : Espérance de la variable  $X$ .
- $\text{Var}[X]$  : Variance de la variable  $X$ .
- $\text{Cov}[X, Y]$  : Covariance entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .
- $M$  : Nombre d'échantillons.
- $Z_m$  : Échantillon i.i.d de  $Z$ .
- $S_M$  : Estimateur Monte Carlo de l'espérance, défini comme  $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(Z_m)$ .
- $d$  : Nombre d'actifs étudiés.
- $S^i$  : Prix de l'actif sous-jacent  $i$ .
- $\mu^i$  : Processus décrivant le drift de l'actif  $i$ .
- $\sigma^i$  : Processus décrivant la volatilité de l'actif  $i$ .
- $B^i$  : Mouvement brownien standard associé à l'actif  $i$ .
- $r$  : Taux d'intérêt sans risque.
- $\rho^{ij}$  : Corrélation entre les mouvements browniens  $B^i$  et  $B^j$ .
- $K$  : Prix d'exercice d'une option. (Strike)
- $\Gamma$  : Matrice de corrélation entre les mouvements browniens.
- $\kappa^i, a^i, \nu^i, \gamma^i$  : Paramètres du modèle de diffusion de Heston.
- $\langle B \rangle_t, \langle \tilde{B} \rangle_t$  : Processus de covariation des mouvements browniens.
- $\mathbf{I}_d$  : Matrice identité de dimension  $d \times d$ .
- $n$  : Nombre de pas de temps d'évolution de l'actif sous-jacent.
- $G$  : Paiement fixe dans une option binaire.
- $q$  : Nombre de neurones de la première couche du réseau
- $\mathcal{N}(x)$  : fonction de répartition gaussienne standard
- $t$  : variable de temps
- $W$  : matrice des poids du réseau de neurones
- $b$  : vecteur des biais du réseau

# 1

## ETAT DE L'ART

---

La méthode de variable de contrôle que nous étudions fait partie d'un plus grand ensemble de méthodes de Monte Carlo largement utilisées pour la réduction de variance et l'amélioration de la vitesse de convergence des estimateurs . L'évolution des méthodes de Monte Carlo dans le domaine de la tarification des options a généré un corpus riche de recherches et de développements. L'efficacité de ces méthodes repose sur leur capacité à résoudre des intégrales de grande dimension, tout en confrontant le défi de la convergence relativement lente liée à la variance des fonctions à intégrer.

Parmi les techniques de réduction de variance, l'échantillonnage d'importance a été largement adopté. Cette méthode, souvent employée pour traiter les événements rares, modifie la distribution des échantillons pour donner plus de poids aux régions où la fonction à intégrer présente une plus grande variabilité. En référence à cette technique, [5] souligne son utilité dans le contexte financier.

La stratification constitue une autre approche importante. Cette méthode divise l'espace des échantillons en strates pour améliorer la précision de l'estimateur en tenant compte des différentes caractéristiques de chaque strate. [3] présentent une analyse approfondie des stratégies de stratification en lien avec les méthodes de Monte Carlo.

Dans le cadre des modèles classiques en finance, le modèle de Black-Scholes reste une référence fondamentale [2]. Toutefois, l'introduction de modèles plus complexes intégrant des processus de sauts, tels que le modèle de Merton [11], s'est avérée cruciale pour mieux représenter les mouvements discontinus des prix.

L'essor des réseaux de neurones a révolutionné la modélisation financière. Les travaux de [4] explorent l'utilisation de réseaux profonds pour la tarification d'options. De plus, les réseaux de neurones ont été appliqués avec succès à la réduction de dimension dans des contextes financiers, comme le démontrent les travaux de [8].

En ce qui concerne les approches adaptatives, les travaux de [7] sur les variables de contrôle adaptatives et les travaux de [1] sur l'adaptation automatique avec des réseaux de neurones offrent des perspectives sur l'amélioration de l'efficacité des méthodes de Monte Carlo dans le contexte financier.

## 2

## MODÈLES ET INSTRUMENTS FINANCIERS DE L'ÉTUDE

### 2.1 MODÈLES POUR LE SOUS-JACENT ET MÉTHODE DE SIMULATION

Notre étude s'est principalement concentrée sur deux modèles de base utilisés dans la tarification des options, à savoir le modèle de Black-Scholes et le modèle de volatilité stochastique.

#### 2.1.1 • MODÈLE DE BLACK-SCHOLES

Le modèle de Black-Scholes, développé par Black, Scholes, et Merton, est un modèle classique pour la tarification des options [2]. Les équations pour l'évolution des prix des actifs sous-jacent ( $S^i$ ) $_{1 \leq i \leq d}$  sont données par :

$$\begin{aligned} dS_t^i &= rS_t^i dt + \sigma^i S_t^i dB_t^i, \\ d(B_t^i B_t^j) &= \rho^{ij} dt \iff d\langle B \rangle_t = \Gamma dt \text{ avec } \Gamma = [\rho^{ij}]_{1 \leq i, j \leq d} \end{aligned}$$

où  $S_t^i$  est le prix de l'actif sous-jacent  $i$  à la date  $t$ ,  $B^i$  et  $B^j$  sont des mouvements browniens corrélés,  $r$  le taux d'intérêt sans risque,  $\sigma^i$  est la volatilité du rendement de l'actif  $i$ , et  $\rho^{ij}$  est la corrélation entre les actifs  $i$  et  $j$ .

Les hypothèses au modèle de Black-Scholes comprennent :

- Les rendements de l'actif sont distribués normalement.
- La volatilité est constante.
- Il n'y a pas de coûts de transaction ni de dividendes.
- Le marché est sans friction.

Les implications de ces hypothèses incluent l'absence d'opportunités d'arbitrage.

Pour implémenter ce modèle, nous avons tout d'abord simulé un **mouvement brownien standard dans  $\mathbb{R}^d$**  sur  $n$  pas de temps. Par la suite, nous avons appliqué ce mouvement brownien à la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation  $\Gamma$ . Cette procédure nous a permis de simuler le mouvement brownien correlé  $B$  dans  $\mathbb{R}^d$  et de reconstituer l'évolution des prix des sous-jacents à partir de la formule exacte :

$$S_t^i = S_0^i e^{(r - \frac{(\sigma^i)^2}{2})t + \sigma^i B_t^i}$$

#### 2.1.2 • MODÈLE DE VOLATILITÉ STOCHASTIQUE

Le modèle de volatilité stochastique propose une extension du modèle de Black-Scholes en tenant compte de la corrélation entre les volatilités de différents actifs.

Nous étudions ici le modèle de diffusion de Heston [9] dont les équations pour l'évolution des prix des actifs sous-jacent ( $S^i$ ) et de la volatilité ( $\sigma^i$ ) sont données par :

$$\begin{aligned} dS_t^i &= rS_t^i dt + \sqrt{\sigma_t^i} S_t^i dB_t^i, \\ d\sigma_t^i &= \kappa^i (\bar{\sigma}_t^i - \sigma_t^i) dt + \nu^i \sqrt{\sigma_t^i} (\gamma^i dB_t^i + \sqrt{1 - \gamma^i} d\tilde{B}_t^i) \\ d\langle B \rangle_t &= \Gamma dt \\ d\langle \tilde{B} \rangle_t &= I_d dt \end{aligned}$$

Où  $\Gamma$  est la matrice de corrélation entre les différents actifs,  $\mathbf{I}_d$  est la matrice identité de dimension  $d \times d$ . De plus, pour un sous-jacent  $i$  donné,  $\kappa^i$  est le taux de réversion du processus de volatilité,  $a^i$  est le niveau moyen du processus de volatilité,  $\nu^i$  est la volatilité du processus de volatilité, et  $\gamma^i$  est la corrélation entre un actif et son processus de volatilité, que nous considérons comme constante pour des raisons de simplicité.

Le modèle peut être écrit de manière équivalente :

$$\begin{aligned} dS_t^i &= rS_t^i dt + \sqrt{\sigma_t^i} S_t^i dB_t^i, \\ d\sigma_t^i &= \kappa^i(a^i - \sigma_t^i)dt + \nu^i \sqrt{\sigma_t^i} d\hat{B}_t^i \end{aligned}$$

Où  $B$  et  $\hat{B}$  sont des processus de Wiener vérifiant :

$$d\langle B \rangle_t = \Gamma dt, d\langle B, \hat{B} \rangle_t = \gamma \Gamma dt, d\langle \hat{B} \rangle_t = (\gamma^2 \Gamma + (1 - \gamma^2) \mathbf{I}_d) dt$$

Le processus  $(B, \hat{B})$  est alors un processus de Wiener dans  $\mathbb{R}^{2d}$  de matrice de covariance :

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma & \gamma \Gamma \\ \gamma \Gamma & \gamma^2 \Gamma + (1 - \gamma^2) \mathbf{I}_d \end{pmatrix}$$

Ce modèle décrit une modélisation un peu plus réaliste des marchés financiers, permettant de capturer la corrélation entre les volatilités des différents actifs.

Pour implémenter ce modèle, nous avons tout d'abord simulé un **mouvement brownien standard dans  $\mathbb{R}^{2d}$**  sur  $n$  pas de temps. Par la suite, nous avons appliqué ce mouvement brownien à la décomposition de Cholesky de la matrice de correlation  $\tilde{\Gamma}$ . Les  $d$  premières composantes du résultat permettent d'avoir  $B$  et les  $d$  autres permettent d'avoir  $\hat{B}$ .

La prochaine étape consistait à résoudre l'équation différentielle stochastique modélisant l'évolution de la volatilité. Un schéma de discrétisation d'**Euler explicite** a été utilisé. En considérant les instants  $0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n = T$  équidistants de  $\frac{T}{n}$ , le schéma de discrétisation pour un actif  $i$  donné s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{t_k}^i &= \sigma_{t_{k-1}}^i + \kappa^i(a - \sigma_{t_{k-1}}^i) \frac{T}{n} + \nu^i \sqrt{\sigma_{t_{k-1}}^i} (\hat{B}_{t_k}^i - \hat{B}_{t_{k-1}}^i) \quad \forall k \in 1, \dots, n \\ \sigma_{t_0}^i &= \sigma_0^i \end{aligned}$$

La dernière étape était de déterminer l'évolution des sous-jacents à partir de celle de la volatilité. Encore une fois, Un schéma de discrétisation d'**Euler explicite** a été utilisé. Pour un actif  $i$ , il s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} S_{t_k}^i &= S_{t_{k-1}}^i + rS_{t_{k-1}}^i \frac{T}{n} + \sqrt{\sigma_{t_{k-1}}^i} S_{t_{k-1}}^i (B_{t_k}^i - B_{t_{k-1}}^i) \quad \forall k \in 1, \dots, n \\ S_{t_0}^i &= S_0^i \end{aligned}$$

## 2.2 INSTRUMENTS FINANCIERS

---

Dans cette section, nous présentons les instruments financiers sur lesquels nous avons appliqué nos modèles. Chaque instrument est brièvement décrit avec les notations correspondantes.

**Call Européen sur un basket**

Un call sur un panier d'actifs donne au détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter un panier d'actifs à un prix prédéterminé à l'échéance. Le payoff de cette option est alors donné par la formule :

$$\max \left( 0, \sum_i \omega_i S_T^i - K \right)$$

où  $S_T^i$  est le prix de l'actif sous-jacent  $i$  à l'échéance  $T$ ,  $\omega_i$  est le poids de l'actif  $i$ , et  $K$  est le prix d'exercice.

#### **Put Européen sur un worst**

Un put sur le pire actif donne au détenteur le droit, mais non l'obligation, de vendre le pire actif d'un panier à un prix prédéterminé à l'échéance. Le payoff de cette option est alors donné par la formule :

$$\max \left( 0, K - \min_i (S_T^i) \right)$$

où  $S_T^i$  est le prix de l'actif sous-jacent  $i$  à l'échéance  $T$  et  $K$  est le prix d'exercice.

#### **Option asiatique arithmétique**

Une option asiatique arithmétique donne au détenteur le droit, mais non l'obligation, de recevoir un paiement basé sur la moyenne arithmétique des prix d'un panier d'actifs à différentes dates d'observation. Le payoff de cette option est alors donné par la formule :

$$\max \left( 0, \frac{1}{n} \sum_i \sum_j \omega_j S_{t_i}^j - K \right)$$

où  $S_{t_i}^j$  est le prix de l'actif sous-jacent  $j$  à la date  $t_i$ ,  $\omega_j$  est le poids de l'actif  $j$ ,  $K$  est le prix d'exercice, et  $n$  est le nombre de pas de temps d'évolution de l'actif sous.

#### **Option binaire (digit) sur un basket**

Une option binaire (digit) sur le panier donne au détenteur un paiement fixe  $G$  si la somme pondérée des prix d'un panier d'actifs dépasse un seuil prédéterminé à l'échéance. Le payoff de cette option est alors donné par la formule :

$$G \mathbf{1}_{(\sum_i \omega_i S_T^i \geq K)}$$

où  $S_T^i$  est le prix de l'actif sous-jacent  $i$  à l'échéance  $T$ ,  $\omega_i$  est le poids de l'actif  $i$ ,  $K$  est le seuil, et  $\mathbf{1}(\cdot)$  est la fonction indicatrice.

Il est important de rappeler que, comme dit à l'introduction, ces différents payoff peuvent s'exprimer comme une fonction  $f$  de  $N$  gaussiennes standards. la valeur de  $N$  dépend du payoff et du modèle du sous-jacent.

- Dans le modèle de **Blackscholes** : Pour le **Call Européen sur un basket**, **Put Européen sur un worst** et **Option binaire sur un basket**,  $N = d$ . Pour l'**Option asiatique arithmétique**,  $N = nd$
- Dans le modèle de **volatilité stochastique** : Pour le **Call Européen sur un basket**, **Put Européen sur un worst** et **Option binaire sur un basket**,  $N = 2d$ . Pour l'**Option asiatique arithmétique**,  $N = 2nd$

## 3

## CONSTRUCTION DE LA VARIABLE DE CONTRÔLE PAR APPRENTISSAGE

Nous rappelons que la méthode que nous étudions repose sur l'introduction d'une fonction auxiliaire  $h$  dont on peut calculer avec exactitude  $\mathbb{E}[h(Z)]$  l'espérance de la variable aléatoire  $h(Z)$ . De plus, afin d'atteindre l'objectif de réduction de variance,  $h(Z)$  doit avoir une corrélation significative avec  $f(Z)$ .

Plusieurs procédés sont possibles pour une telle construction, nous avons tout d'abord utilisé un modèle simple de régression linéaire pour les processus en dimension 1, puis des architectures de réseaux de neurones pour un meilleur apprentissage en plus grande dimension.

### 3.1 APPRENTISSAGE PAR RÉGRESSION LINÉAIRE

Dans cette section, nous optons pour une approche de régression polynomiale d'ordre 2 pour la construction de la variable de contrôle  $h(Z)$ . Nous définissons  $h(Z)$  sous la forme d'un polynôme quadratique :

$$h(Z) = a + bZ + cZ^2$$

Nous procédons à un échantillonnage de  $M$  variables aléatoires de même loi que  $Z$ ,  $Z_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ , sur lesquelles nous effectuons une régression linéaire par rapport aux payoffs  $Y_i = f(Z_i)$ . Ce qui permet de déterminer les paramètres optimaux de la régression  $a$ ,  $b$ , et  $c$ .

Le calcul de l'espérance est immédiat en utilisant la propriété de linéarité :

$$\mathbb{E}[h(Z)] = \mathbb{E}[a + bZ + cZ^2] = a + \mathbb{E}[cZ^2] = a + c$$

Ainsi, nous obtenons une expression analytique de l'espérance de  $h(Z)$ .

La méthode de Monte Carlo est ensuite appliquée à la variable de contrôle définie par :

$$H(Z) = f(Z) - h(Z) + a + c$$

Cette approche vise à réduire la variance de l'estimateur Monte Carlo en exploitant la corrélation entre  $h(Z)$  et  $f(Z)$ , ce qui permet d'améliorer la convergence de l'estimation.

### 3.2 APPRENTISSAGE PAR RÉSEAUX DE NEURONNES

Dans cette partie, il est question de la conception d'un réseau de neurone capable d'apprendre le payoff  $f$  de l'instrument financier, de construire la fonction  $h$  qui l'approche le mieux et de calculer l'espérance  $\mathbb{E}(h(Z))$  le but étant de constituer la variable de contrôle  $H(Z) = f(Z) - h(Z) + \mathbb{E}(h(Z))$ .

Cependant, la méthode utilisée pour calculer  $\mathbb{E}(h(Z))$  conditionne l'architecture du réseau. Nous explorons 2 méthodes de calcul de  $\mathbb{E}(h(Z))$  à savoir l'**intégration analytique** basée sur une formule exacte et l'**intégration numérique** basée sur l'approximation numérique d'une intégrale. L'architecture du réseau utilisé pour chaque méthode est aussi détaillée.

### 3.2.1 • APPROCHE PAR INTÉGRATION ANALYTIQUE

Le réseau de neurone implémenté possède une architecture simple représentée dans la figure 1 ci-contre :

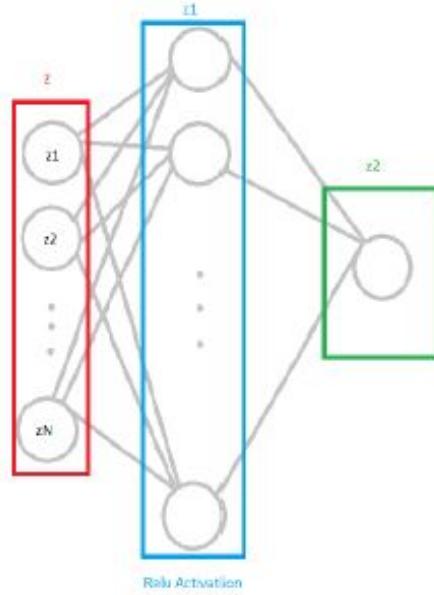


FIGURE 1 – Architecture du réseau de neuronne pour la méthode d'intégration analytique.  
Source de l'image [10]

Le réseau comporte :

- Une couche cachée 1 à de dimension d'entrée  $N$ , contenant  $q$  neurones et munie de la fonction d'activation *Relu*. Elle délivre les poids  $W_1 = [(W_1)_{ij}]_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq N}$  et biais  $b_1 = (b_1)_{1 \leq i \leq q}$ . Nous avons pris  $q = 500$
- Une couche de sortie 2 à un neuronne. Elle délivre les poids  $W_2 = (W_2)_{1 \leq i \leq q}$  et biais  $b_2$ .  
On peut écrire :

$$h(Z) = W_2(W_1Z + b_1)^+ + b_2$$

Par linéarité,

$$\mathbb{E}[h(Z)] = W_2\mathbb{E}[(W_1Z + b_1)^+] + b_2$$

Concentrons-nous sur le calcul de  $\mathbb{E}[(W_1Z + b_1)^+]$  car nous avons remarqué une erreur dans l'article.  
Nous avons l'équation suivante :

$$W_1Z + b_1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N (W_1)_{1j} Z_j + (b_1)_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N (W_1)_{qj} Z_j + (b_1)_q \end{bmatrix} \stackrel{\text{loi}}{=} \begin{bmatrix} \theta_1 Y_1 + \varphi_1 \\ \vdots \\ \theta_q Y_q + \varphi_q \end{bmatrix}$$

$\forall i \in 1, \dots, q$ , nous définissons  $\theta_i^2 = \sum_{j=1}^N (W_1)_{ij}^2$ ,  $\varphi_i = (b_1)_i$  et  $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  avec  $\theta_i > 0$ .

Maintenant, nous calculons  $E((\theta Y + \varphi)^+)$ . En effet,

$$\begin{aligned} E((\theta Y + \varphi)^+) &= \int_{-\frac{\varphi}{\theta}}^{+\infty} (\theta y + \varphi) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \theta \int_{-\frac{\varphi}{\theta}}^{+\infty} y \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy + \varphi \int_{-\frac{\varphi}{\theta}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\varphi^2}{2\theta^2}} + \varphi(1 - \mathcal{N}(-\frac{\varphi}{\theta})) \end{aligned}$$

Enfin, nous avons :

$$E(h(Z)) = W_2 \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{\theta_i}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\varphi_i^2}{2\theta_i^2}} + \varphi_i(1 - \mathcal{N}(-\frac{\varphi_i}{\theta_i})) \\ \vdots \end{bmatrix} + b_2$$

Avec  $\theta_i^2 = \sum_{j=1}^N (W_1)_{ij}^2$ ,  $\varphi_i = (b_1)_i$

La méthode de Monte Carlo est ensuite appliquée à la variable de contrôle :

$$H(Z) = f(Z) - h(Z) + \mathbb{E}[h(Z)]$$

### 3.2.2 • APPROCHE PAR RÉDUCTION DE DIMENSION : INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Tout l'enjeux de cette méthode était de réduire la dimension des données prises en charge par le réseau de telle sorte à alléger le calcul de l'espérance par intégration numérique. Cette réduction de dimension entraînant une perte d'informations, rajouter de la profondeur au réseau était nécessaire pour rattraper cette perte. la Figure 2 ci-contre présente l'architecture du réseau que nous avons utilisée

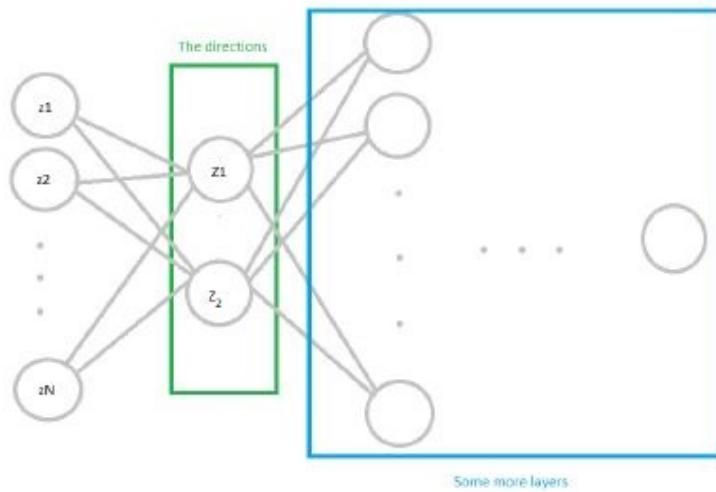


FIGURE 2 – Architecture du réseau de neuronne pour la méthode d'intégration numérique.  
Source de l'image [10]

Le réseau que nous avons implémenté comporte 4 couches au total :

- Une couche cachée 1 de dimension d'entre  $N$ , contenant 2 neurones et munie de la fonction d'activation *linear*. Cette couche ne fournit que des poids  $W_1 = [(W_1)_{ij}]_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq N}$

- Une couche cachée 2 contenant  $q$  neurones et munie de la fonction d'activation *relu*. Elle délivre les poids  $W_2$  et les biais  $b_2$ . Nous avons pris  $q = 500$
  - Une couche cachée 3 contenant  $\frac{q}{10}$  neurones et munie de la fonction d'activation *relu*. Elle délivre les poids  $W_3$  et les biais  $b_3$
  - Une couche de sortie 4 contenant 1 neurone. Elle délivre les poids  $W_4$  et les biais  $b_4$
- Ce réseau nous renvoie une variable de contrôle  $h$  qui peut s'écrire comme suit :

$$h(Z) = W_4(W_3(W_2(W_1Z) + b_2)^+ + b_3)^+ + b_4 = \tilde{h}(W_1Z) = \tilde{h}(\tilde{Z})$$

Où  $\tilde{Z} = W_1Z \sim \mathcal{N}(0, W_1W_1^T)$  vit dans  $\mathbb{R}^2$ . On a donc :

$$\mathbb{E}(h(Z)) = \mathbb{E}(\tilde{h}(Z))$$

Le calcul de cette espérance s'est fait numériquement par la **méthode des rectangles en dimension 2**.

## 4

## RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET COMPARAISONS

Dans cette partie, nous présentons les résultats des simulations et les comparons sur la base de certains résultats théoriques (notamment le prix Blackscholes d'un Call européen) et/ou des résultats figurant dans l'article. L'efficacité de chaque méthode est évaluée sur 3 principaux critères :

- $Var\_ratio$  qui est le rapport entre la variance de la méthode naïve de Monte Carlo et la variance de la variable de contrôle
- $Cost$  qui est le rapport entre le temps d'apprentissage et de calcul du prix par la méthode de la variable de contrôle et le temps de calcul du prix par la méthode naïve de Monte Carlo
- $Speed\_up = \frac{Var\_ratio}{Cost}$

### 4.1 MODÈLE DE BLACKSCHOLES

Pour le modèle de Blackscholes, les paramètres utilisés sont les suivants :

$d = 1$  actif pour la régression linéaire et  $d = 10$  actifs pour les deux autres méthodes,  $\rho^{ij} = 0.75 \forall i \neq j$  et  $\rho^{ii} = 1, \omega^i = \frac{1}{d}, T = 1, S_0^i = 100 \forall i \in 1, \dots, d, r = 0.05, \sigma^i = 0.4 \forall i \in 1, \dots, d$

#### 4.1.1 • RÉGRESSION LINÉAIRE

Elle s'est faite pour le call européen en considérant **un seul** actif sous-jacent. Etant donné que nous connaissons une formule explicite (voir ci-dessous) pour la valorisation de cet instrument financier sous les hypothèses de Blackscholes, une appréciation du niveau d'exactitude de la méthode était possible.

$$Call^{BS} = S_0 N(d_+(S_0, K e^{-rT}, \sigma^2 T)) - K e^{-rT} N(d_-(S_0, K e^{-rT}, \sigma^2 T))$$

$$\text{Avec } d_{\pm}(s, k, v) = \frac{\ln(s/k)}{\sqrt{v}} \pm \frac{\sqrt{v}}{2}$$

Nous avons réalisé la simulation avec un échantillon  $M = 1000$  gaussiennes standards.

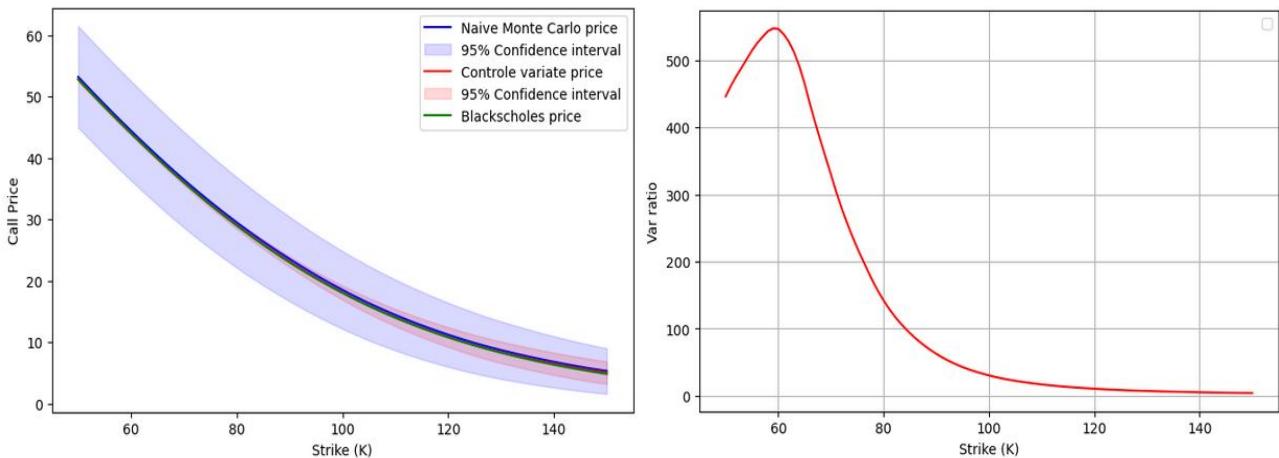


FIGURE 3 – Méthode d'intégration analytique pour le Call européen sur  $d = 1$  actif suivant la dynamique de Blackscholes. A gauche : la comparaison des prix obtenus par rapport à la méthode naïve de Monte Carlo et le prix théorique Blackscholes pour plusieurs strike  $K$ . A droite : le rapport de variance pour plusieurs strike  $K$

La figure 3 ci-dessus nous montre une superposition presque parfaite entre les courbes des valeurs obtenues par la méthode naïve, la méthode de contrôle et les prix théoriques de Black-Scholes en fonction du strike  $K$ . Cependant, les intervalles de confiance de la méthode de contrôle apparaissent notablement plus resserrés que ceux de la méthode naïve. Ce résultat suggère un gain de variance substantiel obtenu grâce à l'utilisation de la fonction de contrôle.

L'amélioration de la précision de la méthode de contrôle, particulièrement notable pour les faibles valeurs de  $K$ , indique que la fonction de contrôle  $h$  a réussi à capturer efficacement les variations du payoff, particulièrement pour les options **in-the-money**.

En effet, l'expression du payoff  $(S_T - K)_+$  suggère que de grandes valeurs de  $K$  aboutissent à un payoff très souvent nul. Ceci a deux principaux effets :

- La variance du payoff  $\text{Var}[f(Z)]$  devient faible ( toutes les réalisations sont proche de 0) et l'intervalle de confiance décroît. Ceci s'observe sur la courbe du prix (Fig.4 gauche)
- La fonction de régression de forme quadratique ne capture plus assez la forme du payoff écrasée et est de moins en moins corélée à celui-ci, ce qui explique l'augmentation de variance observé (Fig.4 gauche)
- Les deux points précédent expliquent l'évolution du rapport de variance ( Fig.4 droite ) . Grande pour de faibles  $K$  et se rapprochant de 1 pour de grande valeurs.

Les deux courbes suivantes permettent de comparer les fonctions d'apprentissage, et donc les corrélations entre  $f$  et  $h$  pour deux valeurs de  $K$  différentes et donnent une représentation visuelle du point 2 précédent.

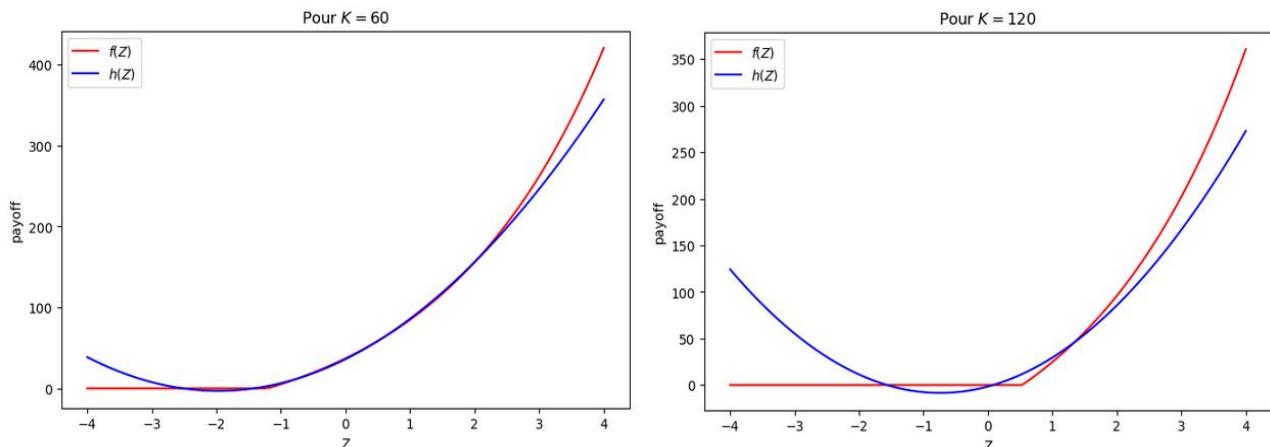


FIGURE 4 – Impact du strike  $K$  sur la précision de la régression linéaire. A gauche :  $K = 60$ . A droite :  $K = 120$

#### 4.1.2 • INTÉGRATION ANALYTIQUE

Nous avons réalisé la simulation avec échantillon de  $M = 100000$  gaussiennes standards et une discréétisation en  $n = 10$  pas de temps.

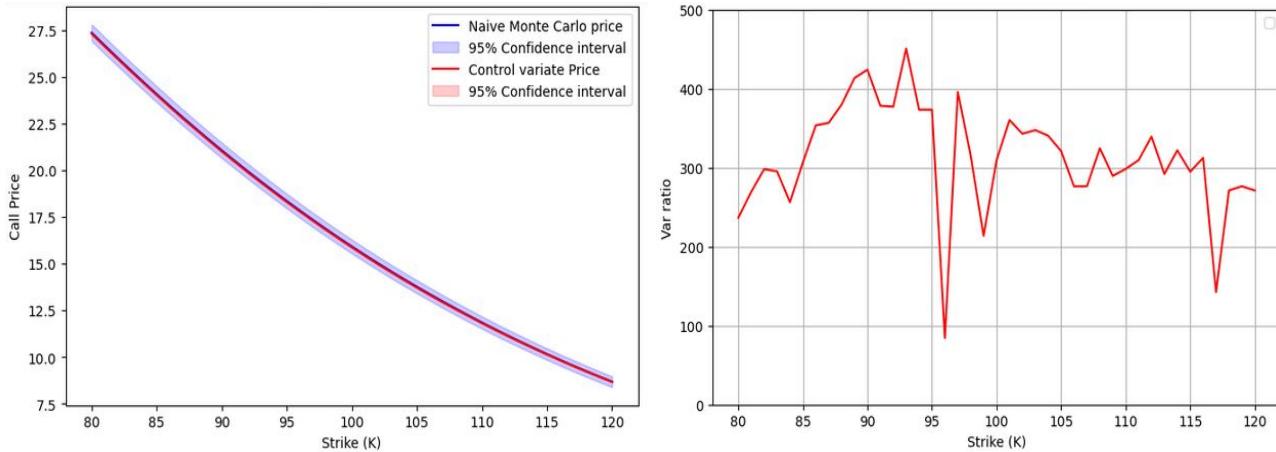


FIGURE 5 – Méthode d'intégration analytique pour le Call européen sur  $d = 10$  actifs correlés suivant la dynamique de BlackScholes pour plusieurs strike  $K$ . A gauche : la comparaison des prix obtenus par rapport à la méthode naïve de Monte Carlo. A droite : le rapport de variance pour plusieurs strike  $K$

Les résultats obtenus nous montrent un intervalle de confiance moins large pour la méthode de variable de contrôle que pour la méthode naïve (Fig 5 gauche). Le réseau a alors réussi à apprendre une fonction ayant une forte corrélation avec le payoff.

De plus, contrairement à la méthode de régression précédente ce gain de variance reste de même ordre indépendamment de la valeur de  $K$  (Fig 5 droite,) (malgré quelques oscillations observées). On notera aussi que le gain de variance est plus élevé que la méthode précédente.

La méthode donne un gain de variance du même ordre pour tous les strike utilisés. Nous nous intéressons maintenant au strike  $K = 100$  pour l'ensemble des options.

Payoff	Basket	Asian	Digit	Worst Of	Payoff	Basket	Asian	Digit	Worst Of
Monte Carlo Price	15.89	9.10	46.22	27.17	Monte Carlo Price	15.86	9.83	46.57	26.68
Control Variate	15.88	9.09	46.28	21.10	Control Variate	16.22	9.81	46.95	26.64
Var ratio	364.55	361.35	24.50	19.73	Var ratio	673.90	119.54	16.07	21.74
Cost	24.75	22.53	19.26	18.59	Cost	13.82	4.82	12.98	9.75
Speed up	14.73	16.03	12.72	10.61	Speed up	48.76	24.80	1.23	2.23

TABLE 1 – Méthode d'intégration analytique pour les options de strike  $K = 100$  sur  $d = 10$  actifs correlés suivant la dynamique de BlackScholes. A gauche : les résultats obtenus. A droite : les résultats de l'article.

Les résultats de la Table 1 ci-dessus mettent en évidence une concordance remarquable entre nos estimations de prix et celles présentées dans l'article de référence. Toutefois, des disparités significatives émergent lorsqu'on examine les métriques de performance. Nous faisons face à un délicat équilibre entre le bénéfice de la réduction de la variance (Ratio Var) et la complexité du temps de calcul (Coût et Amélioration de la Vitesse). Malheureusement, l'architecture précise du réseau, ainsi que les valeurs de certains paramètres, demeurent confidentielles dans l'article. Il est important de noter qu'un réseau plus simple peut entraîner une accélération significative du temps de calcul, bien que cela se fasse au détriment d'une proximité plus faible avec la fonction cible.

De plus, pour des sous-jacents suivants une dynamique de BlackScholes, la méthode d'intégration analytique offre une meilleure réduction de variance pour les options Basket et Asian.

#### 4.1.3 • RÉDUCTION DE DIMENSION : INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Nous avons réalisé la simulation avec  $M = 100000$  gaussiennes standards et une discréétisation en  $n = 10$  pas de temps.

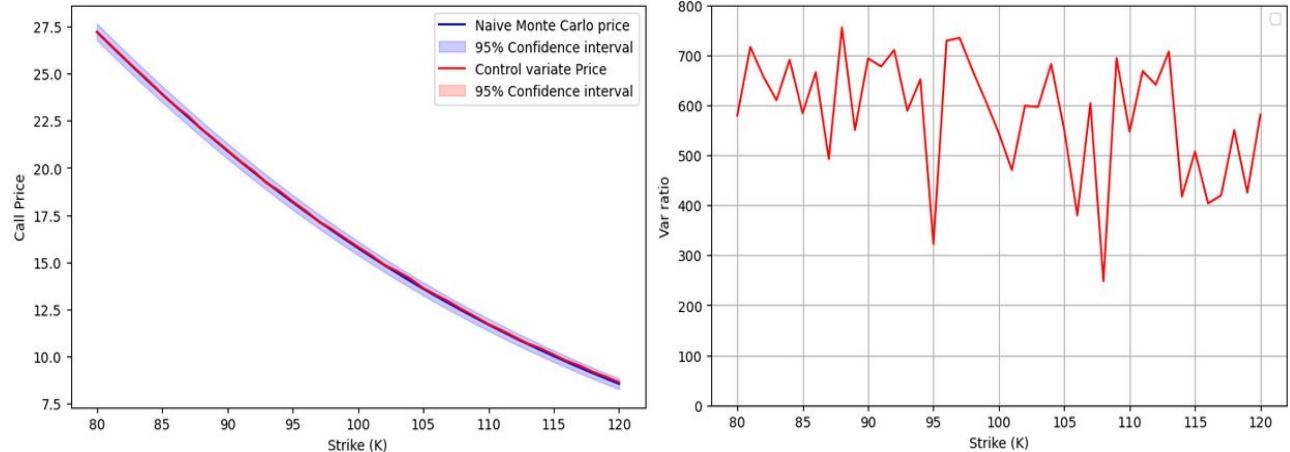


FIGURE 6 – Méthode d'intégration numérique pour le Call européen sur  $d = 10$  actifs correlés suivant la dynamique de BlackScholes pour plusieurs strike  $K$ . A gauche : la comparaison des prix obtenus par rapport à la méthode naïve de Monte Carlo. A droite : le rapport de variance pour plusieurs strike  $K$

Les résultats obtenus nous montrent également des intervalles de confiance moins large pour la méthode de variable de contrôle par intégration numérique que pour la méthode naïve ( Fig 6 gauche ). Le réseau a alors réussi à apprendre une fonction ayant une forte corrélation avec le payoff.

De plus ce gain de variance reste de même ordre indépendamment de la valeur de  $K$  ( Fig 5 droite,) (malgré quelques oscillations observées).

La méthode donne un gain de variance du même ordre pour tous les strike utilisés. Nous nous intéressons maintenant au strike  $K = 100$  pour l'ensemble des options.

Payoff	Basket	Asian	Digit	Worst Of	Payoff	Basket	Asian	Digit	Worst Of
Monte Carlo Price	15.89	9.08	45.90	27.13	Monte Carlo Price	15.95	9.75	46.00	26.48
Control Variate	14.84	9.07	45.71	27.01	Control Variate	16.19	9.86	47.50	26.55
Var ratio	394.32	478.28	41.78	12.45	Var ratio	266.93	379.32	35.98	11.44
Cost	33.8	11.05	22.95	38.49	Cost	14.32	3.34	14.97	14.23
Speed up	11.65	43.28	1.82	0.32	Speed up	18.64	113.46	2.43	0.80

TABLE 2 – Méthode d'intégration numérique pour les options de strike  $K = 100$  sur  $d = 10$  actifs correlés suivant la dynamique de BlackScholes. A gauche : les résultats obtenus.A droite : les résultats de l'article.

Les résultats de la table 2 ci-dessus nous montrent une quasi similarité entre nos valeurs de prix et ceux de l'article de référence, bien que les différences en les valeurs des prix soient plus importantes que celle analytique précédente. Celà s'explique par la procédure d'intégration de l'espérance  $\mathbb{E}[h(X)]$  qui dans ce cas n'est qu'une approximation qui est déjà entachée d'erreurs.

De plus certaines différences s'observent sur les métriques de performance. En effet il y a un compromis entre gain en réduction de variance ( Var ratio ) et complexité en temps de calcul ( Cost et speed Up). L'architecture précise du réseau de l'article ainsi que les valeurs de certains paramètres ne sont pas mentionnés, toute fois on

remarque un réseau simple entraîne plus rapidement, ceci au prix d'une plus faible proximité vis-à-vis de la fonction cible.

En outre, pour des actifs suivant une dynamique de Black-Scholes, la méthode d'intégration numérique semble surpasser en termes de réduction de la variance, en particulier également pour les options Basket et Asian.

## 4.2 MODÈLE DE VOLATILITÉ STOCHASTIQUE

Pour le modèle de volatilité stochastique, les paramètres utilisés sont les suivants :

$$d = 10 \text{ actifs}, \rho^{ij} = 0.75 \forall i \neq j \text{ et } \rho^{ii} = 1, \omega^i = \frac{1}{d}, T = 1, S_0^i = 100 \forall i \in 1, \dots, d, r = 0.05, \sigma_0^i = 0.04 \forall i \in 1, \dots, d, a^i = 0.04, \nu^i = 0.01, \gamma^i = -0.2.$$

### 4.2.1 • INTÉGRATION ANALYTIQUE

Nous avons réalisé la simulation avec  $M = 20000$  gaussiennes standards

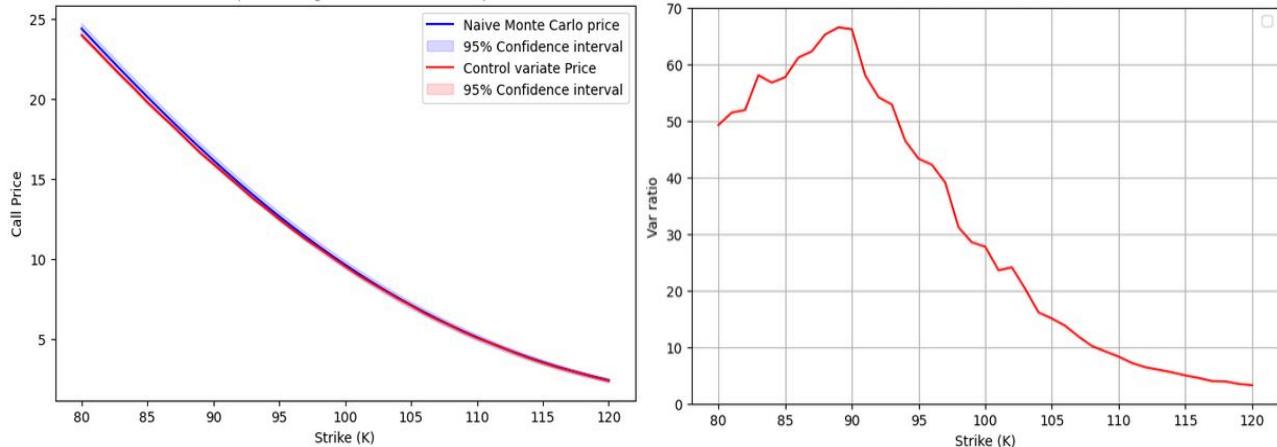


FIGURE 7 – Méthode d'intégration analytique pour le Call européen sur  $d = 10$  actifs correlés suivant la dynamique de volatilité stochastique pour plusieurs strike  $K$ . A gauche : la comparaison des prix obtenus par rapport à la méthode naïve de Monte Carlo. A droite : le rapport de variance pour plusieurs strike  $K$

Payoff	Basket	Asian	Digit	Worst Of	Payoff	Basket	Asian	Digit	Worst Of
Monte Carlo Price	9.42	5.71	55.19	12.55	Monte Carlo Price	9.48	5.96	55.78	12.48
Control Variate	9.57	5.69	54.57	12.49	Control Variate	9.57	5.71	56.24	12.53
Var ratio	26.02	21.25	2.27	9.22	Var ratio	4.02	4.40	1.73	3.98
Cost	11.21	7.42	9.63	7.30	Cost	2.37	2.27	4.20	2.73
Speed up	2.32	2.86	0.23	1.26	Speed up	1.69	1.93	0.41	1.46

TABLE 3 – Méthode d'intégration analytique pour le modèle de volatilité stochastique : les résultats obtenus (à gauche), les résultats de l'article (à droite).

Bien que quasi indistinguables à l'œil nu, on remarque comme pour le cas BlackSchole un gain de variance léger pour la méthode de contrôle. Le nombre d'échantillons  $M$  de simulations étant grand, l'évolution en  $1/\sqrt{M}$

écrase rapidement les intervalles de confiance.

En effet dans ce cas stochastique, le modèle est entraîné sur tous les pas de discrétisation, et non uniquement le dernier temps comme dans le cas BlackSchole précédent. Celà augmente considérablement la dimension du vecteur d'entrée et rend l'apprentissage moins effectif. Les ressources computationnelles deviennent alors limitées pour les réaliser et les architectures sont simplifiées. Figure 7. droite ) lorsque K devient grand, du fait du sous apprentissage continu du réseau. Toutefois les résultats obtenus sont en concordance avec ceux de l'article comme nous montre la table 3.

Comme dans le cas de la régression linéaire, le rapport de variance tend vers 1 lorsque le strike augmente : les deux méthodes produisent les mêmes variances, la variance est moindre ( plusieurs valeurs de payoff nul) et la corrélation entre le fonction de contrôle et le payoff n'est plus aussi considérable.

#### 4.2.2 • RÉDUCTION DE DIMENSION : INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Nous avons réalisé la simulation avec  $M = 20000$  gaussiennes standards et une discrétisation en  $n = 10$  pas de temps.

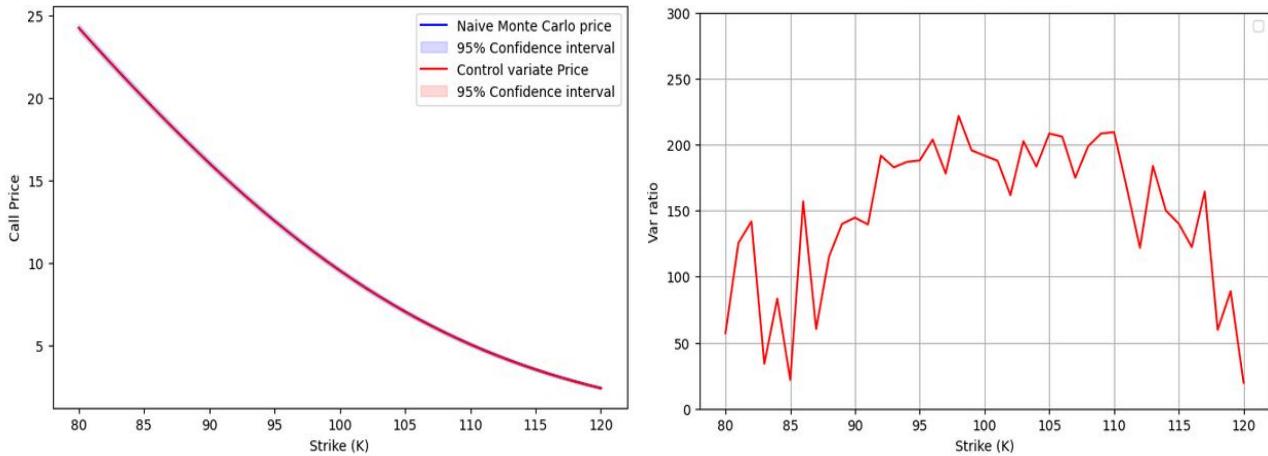


FIGURE 8 – Méthode d'intégration numérique pour le Call européen sur  $d = 10$  actifs correlés suivant la dynamique de volatilité stochastique pour plusieurs strike  $K$ . A gauche : la comparaison des prix obtenus par rapport à la méthode naïve de Monte Carlo. A droite : le rapport de variance pour plusieurs strike  $K$

Payoff	Basket	Asian	Digit	Worst Of	Payoff	Basket	Asian	Digit	Worst Of
Monte Carlo Price	9.56	5.62	55.06	12.59	Monte Carlo Price	9.69	5.76	56.92	12.40
Control Variate	9.51	5.64	54.89	12.55	Control Variate	9.57	5.92	55.19	12.58
Var ratio	129.15	105.19	2.01	10.82	Var ratio	31.03	502.49	1.63	5.44
Cost	28.50	4.01	3.91	2.32	Cost	1.28	1.27	1.36	1.35
Speed up	4.53	26.22	0.51	4.67	Speed up	24.24	395.66	1.19	4.03

TABLE 4 – Méthode d'intégration numérique pour le modèle de volatilité stochastique : les résultats obtenus (à gauche), les résultats de l'article (à droite).

Les observations sont similaires aux méthodes précédentes, une forte cohérence avec l'article et des divergences sur certaines mesures de performances qui soulignent le compromis entre le gain en réduction de variance et une faible complexité en temps de calcul.

## 4.3 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX ET PERSPECTIVES

L'introduction de variables de contrôle, que ce soit par le biais de régressions linéaires ou de réseaux de neurones, a démontré des avantages tangibles en termes de réduction de variance. Cependant, l'équilibre délicat entre la précision du modèle et la complexité du temps de calcul est un défi constant. Nos résultats suggèrent qu'une architecture de réseau plus simple peut conduire à une accélération significative du temps de calcul, au détriment d'une proximité légèrement réduite avec la fonction cible.

La comparaison entre les méthodes analytiques et numériques basées sur les réseaux de neurones revèle des points intéressants, notamment en ce qui concerne la valeur effective du prix approximé. Celle-ci est sujette à davantage d'erreurs par intégration numérique de part l'approximation initiale de l'espérance de la fonction de control par des méthodes numériques. Toutefois, la simplicité du réseau de la méthode analytique conduit à un apprentissage moins effectif, et donc une plus faible réduction de variance en général.

Un point important survient dans le modèle de volatilité stochastique. En effet, l'implémentation de ce modèle requiert la connaissance de toute la trajectoire des dynamiques de l'actif et sa volatilité variable, contrairement au cas BlackSchole qui se contente de prix à maturité. Dans ce contexte la dimension du problème est décuplée par un facteur  $n$  représentant le nombre de pas de discréétisations. Un grand nombre de pas augmente la dimension et donc nécessite un réseau plus sophistiqué pour un apprentissage effectif, ce qui conduit à une double explosion du coût computationnel qui a limité notre étude. De même, l'article de référence utilise une valeur relativement faible pour ce paramètre, soulignant le dilemme entre raffinement du modèle et contraintes computationnelles.

La Figure 9 illustre cependant la dynamique des prix avec le nombre de pas de discréétisation (uniquement par Monte Carlo naïf), montrant une évolution croissante des prix en fonction du nombre de pas de temps considéré, puis un début de convergence pour de grande valeurs.

Ces résultats ouvrent des perspectives de recherche. L'exploration de modèles plus sophistiqués, la recherche d'architectures de réseaux de neurones optimisées, et des études approfondies sur l'impact de la dimension de l'espace d'entrée sont autant de domaines à explorer.

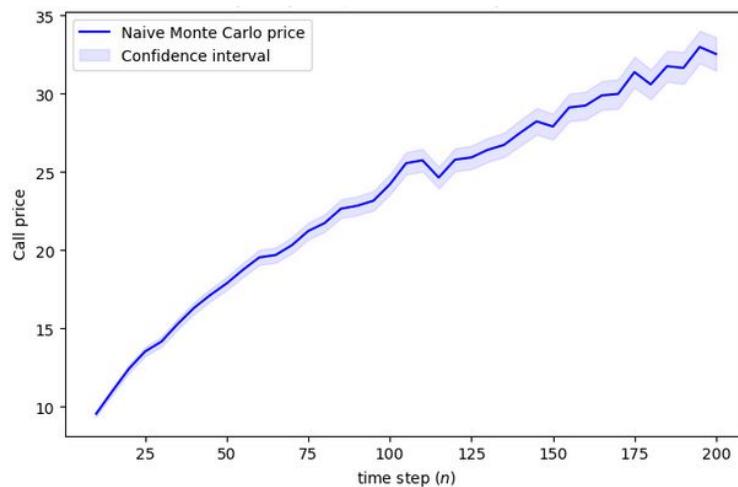


FIGURE 9 – Influence du nombre de pas de temps  $n$  : Cas du Call Européen sur un basket suivant le modèle de volatilité stochastique

## CONCLUSION

L'étude approfondie des méthodes de pricing d'options à l'aide de la technique des variables de contrôle, appliquée à des modèles financiers tels que le Black-Scholes et la volatilité stochastique, a révélé des nuances importantes dans l'efficacité et les défis inhérents à cette approche.

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, la méthode des variables de contrôle a démontré une réduction significative de la variance des estimations, indiquant un réel potentiel d'amélioration de la précision des prix d'options. Cette réduction était particulièrement prononcée pour les options "in-the-money", suggérant que la corrélation entre la fonction de contrôle et le payoff de l'option était plus efficace dans ces cas spécifiques. Cependant, il est crucial de noter que le choix de la fonction de contrôle, notamment à travers la régression linéaire et les réseaux de neurones, doit être effectué avec soin pour garantir une corrélation significative et des résultats précis.

Dans le contexte du modèle de volatilité stochastique, la complexité accrue du modèle a présenté des défis supplémentaires. L'application de la méthode des variables de contrôle a permis une réduction de variance, bien que des signes de sous-apprentissage continu aient été observés, en particulier pour des valeurs élevées de l'actif sous-jacent. Ce phénomène soulève des questions sur la capacité des modèles d'apprentissage à saisir la complexité inhérente à des dynamiques plus sophistiquées.

Une réflexion critique sur ces résultats soulève la question de l'équilibre délicat entre la réduction de la variance et la complexité du modèle. L'utilisation de modèles plus simples peut entraîner une réduction de la complexité informatique, mais au détriment de la proximité avec la fonction cible. L'absence de détails spécifiques sur l'architecture précise des réseaux utilisés dans l'article de référence souligne le besoin d'une exploration plus approfondie des paramètres et de la structure du modèle pour obtenir des résultats optimaux.

En conclusion, bien que la méthode des variables de contrôle offre une perspective prometteuse pour améliorer la précision du pricing des options, elle nécessite une approche nuancée. Le choix judicieux de la fonction de contrôle, la gestion de la complexité du modèle et une évaluation critique des résultats sont impératifs pour tirer pleinement parti de cette technique dans des contextes financiers avancés. Cette étude soulève des questions importantes pour la recherche future et offre des points de départ pour explorer davantage les limites et les opportunités de la méthode des variables de contrôle dans le domaine du pricing des options.

## RÉFÉRENCES

- [1] Pierre Alquier and Benjamin Guedj. Cross-validation for rare event probability estimation. *Statistics and Computing*, 23(6) :773–787, 2013.
- [2] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.
- [3] Paul Bratley and Bennett L Fox. *A Guide to Simulation*. Springer, 1988.
- [4] Yong Deng and Baochun Xu. Deep learning : A new frontier in financial engineering. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 12(4) :13–21, 2017.
- [5] Paul Glasserman. Monte carlo methods in financial engineering. *Springer Science & Business Media*, 2003.
- [6] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2004.
- [7] Emmanuel Gobet and Jean-Philippe Lemor. Adaptive multilevel splitting for rare event analysis. *Stochastic Analysis and Applications*, 23(2) :397–424, 2005.
- [8] Chandler Hansch, Wai-Ki Luk, and Elias Polak. Using neural networks to model complex patterns in data. *The Computer Journal*, 40(5) :280–287, 1997.
- [9] Steven L Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 7(2) :327–343, 1993.
- [10] Jerome Lelong, Zineb El Filali Ech-Chafiq, and Adil Reghai. Automatic control variates for option pricing using neural networks. 2020.
- [11] Robert C Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2) :125–144, 1976.