Defn: of matrix norm.

Consider $\underline{\underline{\mathbb{R}^{m\times n}}}$ matrices

Let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\| \ \|: \mathbb{R}^{m\times n} \to \underline{\underline{\mathbb{R}^+}}$$

1) $\|A\| \geq 0$ and zero iff $A = [0]$

2) $\|\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B}\| \leq \|A\| + \|B\|$

3) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$ $\quad \alpha = \frac{1}{\|x\|_p}$

Based upon vector norms, we can define matrix norms which are induced by these vector norms

$$\|A\|_p = \underline{\underline{\sup_{x \neq 0}}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

$$\underset{m\times n}{A} \underset{\substack{n\times 1 \\ \mathbb{R}^n}}{x} = \underline{\underline{\underset{m\times 1}{Ax}}} \qquad \|Ax\|_p$$

$$\underline{\underline{\mathbb{R}^m}} \to \underline{\underline{\mathbb{R}^+}}$$

$$\underset{\substack{p \\ \mathbb{R}^n}}{\|x\|_p} \Rightarrow \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}$$

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Q]. Can I replace supremum by max ?

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \text{ — scalar}$$

$$= \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_p .$$

$\frac{x}{\|x\|_p}$ = unit vector in p-vector norm

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p = 1} \underline{\underline{\|Ax\|_p}}$$

Can I replace supremum by max ?

$S = \{x : \|x\|_p = 1\}$

Yes

S → compact set { → closed, → bounded }.

$f(x) = \|Ax\|_p$ is continuous function ?

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

compact. continuous

$\exists\, x^*$ s.t. $\|x^*\|_p = 1$

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

$$= \|Ax^*\|_p$$

where $\|x^*\|_p = 1$

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|$$

x^* s.t. $\|x^*\|_p = 1$

$$\|A\|_p = \|Ax^*\|_p$$

$$= \underset{\|x\|_p=1}{\sup\ \cancel{\max}} \|Ax\|_p$$

1, 2, 3.

$\|Ax^*_p\|_p > 0$ if $A \neq [0]$

$\|x^*\|_p = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\|Ae_1\| = \sqrt{9}$$
$$= 2$$
$$= 50$$

$\|\alpha A\|_p$

$= \max_{\|x\|_p=1} \|\alpha A x\|_p$

$= |\alpha| \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$

$= |\alpha| \; \|A\|_p$

How to check this triangular inequality.

2) $\|A+B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p$

$\|A+B\|_p = \|(A+B)x^*\|_p \quad \|x^*\|_p = 1$

$\| \quad \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|$

x^* is its soln.

$= \|Ax^* + Bx^*\|_p$

$\leq \|Ax^*\|_p + \|Bx^*\|_p$

$\leq \|A\|_p + \|B\|_p$

$\|Ax^*\|_p \leq \max_{\|u\|_p=1} \|Au\|_p = \|A\|_p$

$= B$

$\|Bx^*\|_p \leq \|B\|_p$

$\|A+B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p$

[Golub & Van-Loan, Matrix Computations Chap-2]