1. Dos mallas

2. Dos variables dependientes: Corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

3. 1 inductor y 1 capacitor, sistema de segundo orden

Ecuaciones principales:

$$V_e(t) = Ri_1(t) + L\frac{d[i_1(t) - i_2(t)]}{dt} + R[i_1(t) - i_2(t)]$$

$$L\frac{d[i_1(t) - i_2(t)]}{dt} + R[i_1(t) - i_2(t)] = Ri_2(t) + Ri_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt$$

$$V_s(t) = Ri_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt$$

Transformada de laplace

$$V_e(s) = RI_1(s) + Ls[I_1(s) - I_2(s)] + R[I_1(s) - I_2(s)]$$

$$Ls[I_1(s) - I_2(s)] + R[I_1(s) - I_2(s)] = 2RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

$$V_s(s) = RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

Procedimiento algebraico

Se realiza la suma algebraica en el voltaje de salida:

$$V_s(s) = \frac{CRs + 1}{Cs} I_2(s)$$

Se despeja $I_1(s)$ y se agrupa $I_2(s)$ en la ecuación de la segunda malla:

$$LsI_1(s) - LsI_2(s) + RI_1(s) - RI_2(s) = 2RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

$$LsI_1(s) + RI_1(s) = 2RI(s) + \frac{I_2(s)}{Cs} + LsI_2(s) + RI_2(s)$$

$$(Ls + R)I_1(s) = \left(3R + \frac{1}{Cs} + Ls\right)I_2(s)$$

$$(Ls + R)I_1(s) = \left(\frac{CLs^2 + 3CRs + 1}{Cs}\right)I_2(s)$$

$$I_1(s) = \frac{CLs^2 + 3CRs + 1}{Cs(Ls + R)} I_2(s)$$

Se sustituye $I_1(s)$ en la ecuación de la primera maya

$$V_e(s) = RI_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) + RI_1(s) - RI_2(s)$$

$$V_e(s) = (R + Ls + R)I_1(s) - (Ls + R)I_2(s)$$

$$V_e(s) = (R + Ls + R)\frac{CLs^2 + 3CRs + 1}{Cs(Ls + R)}I_2(s) - (Ls + R)I_2(s)$$

$$V_e(s) = \left[\frac{(2R + Ls)(CLs^2 + 3CRs + 1) - Cs(Ls + R)(Ls + R)}{Cs(Ls + R)}\right]I_2(s)$$

$$V_e(s) = (2R + Ls)(CLs^2 + 3CRs + 1) = 2R(CLs^2) + 2R(3CRs) + 2R + Ls(CLs^2) + Ls(3CRs) + Ls$$ (Primer grupo)

$$= 2CLRs^2 + 6CR^2s + 2R + CL^2s^3 + 3CLRs^2 + Ls$$

$$= CL^2s^3 + 5CLRs^2 + 6CR^2s + Ls + 2R$$

$$V_e(s) = Cs(Ls + R)(Ls + R) = CL^2s^3 + 2CLRs^2 + CR^2s$$

$$V_e(s) = \frac{3CLRs^2 + 5CR^2s + Ls + 2R}{Cs(Ls + R)}I_2(s)$$

Función de transferencia

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{CRs + 1}{Cs}I_2(s)}{\frac{3CLRs^2 + (5CR^2 + L)s + 2R}{Cs(Ls + R)}I_2(s)} = \frac{(CRs + 1)(Ls + R)}{3CLRs^2 + (5CR^2 + L)s + 2R}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{CLRs^2 + (CR^2 + L)s + R}{3CLRs^2 + (5CR^2 + L)s + 2R}$$

Modelo de ecuaciones integro-diferenciales:

Cuando se realiza el análisis por mallas se deben despejar las variables dependientes, es decir, las corrientes, recordando que, solamente se pueden despejar de términos donde no se estén derivando o integrando, además, se despeja $i_1(t)$ de la ecuación de la primer malla

$$i_1(t) = \left[V_e(t) - L\frac{d[i_1(t) - i_2(t)]}{dt} + Ri_2(t)\right]\frac{1}{2R}$$

por lo tanto se despeja $i_2(t)$ de la ecuación de la segunda malla:

$$i_2(t) = \left[L\frac{d[i_1(t) - i_2(t)]}{dt} + Ri_1(t) - \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt\right]\frac{1}{3R}$$

Con la siguiente expresión como salida:

$$V_s(t) = Ri_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt$$

Error en estado estacionario

El error en estado estacionario, se calcula mediante el siguiente límite.

$$e(s) = \lim sV_e(s)\left[1 - \frac{V_s(s)}{V_e(s)}\right] = \lim s\frac{1}{s}\left[1 - \frac{CLRs^2 + (CR^2 + L)s + R}{3CLRs^2 + (5CR^2 + L)s + 2R}\right] = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

Nota: En este cálculo se debe considerar la entrada como el escalón unitario, es decir,

$V_e(t) = 1$ por lo tanto, $V_e(s) = \frac{1}{s}$

Analisis de estabilidad

Para determinar la estabilidad en lazo abierto, se calculan los polos de la función de transferencia, es decir,

$3CLRs^2 + 5CR^2 + L)s + 2R = 0;$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 3CLR$

$b = 5CR^2 + L$

$c = 2R$

$\lambda_1 = -1136363\,6.354180098$

$\lambda_2 = -0.056\,7375\,8869\,969656$

Por lo tanto, el sistema es estable dado que ambas raices son negativas y reales, entonces, el sistema presentará una respuesta sobreamortiguada a un escalon unitario de entrada