PARTE 1 PARTE 2 EXÁMENES INFORMACIÓN CURSO PRIMER CUATRIMESRE 2020
CONTACTANOS! REPORTÁ UN ERROR

ÚLTIMA VEZ ACTUALIZADO 24 JULIO, 2017 POR **ISABEL PUSTILNIK Y FEDERICO GÓMEZ** **9 COMENTARIOS**

Matrices

Tabla de contenidos [mostrar]

Conceptos básicos

Definición de Matriz

Una matriz A de $m \times n$ es un ordenamiento rectangular de escalares dispuestos en m filas y n columnas. Para designar a cada uno de los $m.n$ elementos de la matriz se utiliza un doble subíndice que indica el número de fila y número de columna que le corresponde en el arreglo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Así, a_{34} es el elemento ubicado en la fila tres y la columna cuatro y en general a_{ij} es el elemento de la matriz A que está en la fila i y en la columna j.

Las matrices suelen designarse con letras mayúsculas: se anota $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ para indicar que es una matriz con

Buscar en este sitio

ACTUALIZACIONES RECIENTES

Primer Parcial Resuelto de AGA [13-09-2019]

Segundo Parcial Resuelto de AGA [21-06-2019]

Segundo Parcial Resuelto de AGA [10-11-2018]

Segundo Parcial Resuelto de AGA [23-06-2018]

Primer Parcial Resuelto de AGA [05-05-2018]

COMENTARIOS RECIENTES

gustavo en Regiones del plano complejo

smz en Definición y operaciones de números complejos en forma binómica

Por ejemplo una matriz de dos filas y tres columnas se puede escribir así:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

En este caso, diremos que el tamaño u orden de A es 2×3.

Matriz columna

Podemos pensar los vectores como casos particulares de matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad matriz\ o\ vector\ columna \quad , \quad C \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

Matriz fila

O también:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad matriz\ o\ vector\ fila \quad , \quad F \in \mathbb{R}^{1\times}$$

Matriz nula

La matriz nula es aquélla cuyos elementos son todos ceros. La simbolizamos con O. (En la guía de trabajos prácticos se la designa como N)

Operaciones con matrices

Suma de matrices

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ entonces:

$$A + B = C \in \mathbb{R}^{m\times n} \;\mid\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

Ejemplo

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces la suma es:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & - \\ 1 & \end{pmatrix}$$

Producto de un escalar por una matriz

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\; k \in \mathbb{R}$, entonces:

$$kA = B \;\in \mathbb{R}^{m\times n} \;\mid\; b_{ij} = k a_{ij} \quad \forall i, j$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $3A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ Cuando $k = -1$, obtenemos la matriz opuesta de A:

$$-A = (-1)\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = C \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad | \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Ejemplo

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$2A - B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Hallar $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

$$3X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [2]$$

Resolución

Es un sistema de ecuaciones matricial. Las incógnitas son matrices. Podríamos plantear el sistema escribiendo las matrices como

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

REPORTÁ UN ERROR

Si encontrás algún error avisanos mediante este formulario

$$5X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en [1]

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Sugerimos al lector que verifique los resultados obtenidos reemplazando en [2].

Propiedades de la suma de matrices y del producto por un escalar

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Vimos que: $A + B \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\alpha A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + O = O + A = A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = O$
5. $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$
7. $\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A$
8. $1A = A$

Intuitivamente podría pensarse que el producto de matrices se obtiene multiplicando los elementos correspondientes. Sin embargo, esta definición no resulta útil para resolver problemas que involucren matrices. La experiencia matemática vinculada sobre todo a los sistemas de ecuaciones lineales, ha motivado la siguiente definición de producto de matrices. Definiremos primero el producto de una matriz fila por una matriz columna, y luego generalizaremos.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots +$$

Observemos la similitud con el producto escalar de vectores. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, o sea se cumple que la cantidad de columnas de la primera matriz es igual a la cantidad de filas de la segunda:

Deben ser iguales para que
pueda realizarse el producto de matrices

Entonces el producto es:

$$\boxed{AB = C \in \mathbb{R}^{m\times p} \quad | \quad c_{ij} = fila\ i\ (A) \cdot columa\ j\ (B)}$$

Una forma alternativa de expresar el producto es:

$$AB = C \in \mathbb{R}^{m\times p} \quad | \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Ejemplo

Sean,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}$$

Es posible calcular $A.B$ porque A tiene tres columnas y B tiene tres filas. El resultado del producto es una matriz de 2×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & -1 & 11 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1.1+2.1+3.2 & 1.1+2.(-1)+3.0 & 1.2+2 \\ 4.1+1.1+0.2 & 4.1+1.(-1)+0.0 & 4.2+1 \end{pmatrix}$$

No se puede calcular BA porque el número de columnas de B no coincide con el número de filas de A

.

Ejemplo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PQ \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad , \quad PQ = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 7 & 7 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$QP \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad , \quad QP = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

O sea que el producto de matrices no es conmutativo.

Propiedades del producto

En lo que sigue entendemos que las operaciones mencionadas pueden efectuarse.

1) $(AB)\,C = A\,(BC)$ asociatividad

4) $OA = O \quad y \quad AO = O$, siendo O la matriz nula

Ejercicio para el lector 1

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ Analizar la validez de cada una de las siguientes proposiciones:

1. $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$
2. $AB = AC \wedge A \neq 0 \Rightarrow B = C$

Ejercicio para el lector 2

Un comercio que vende productos de electrónica, paga una comisión a los vendedores y tiene un beneficio (ganancia) según cada producto. En una tabla se registra el precio de venta, el beneficio para el comercio, la comisión para el vendedor y el costo del producto. Además se tiene información sobre las unidades vendidas en diferentes sucursales. A continuación mostramos dos tablas que resumen esa información para el mes de agosto 2013:

Precio de venta, beneficio, costo, comisión por product
[AGOSTO 2013]

LED 32′ BA455	LED BX567	Smartphone	Tablet 10′	Notebook	
Costo	$	$ 4.500,00	$	$	$

venta	4.100,00	$ 5.650,00	2.730,00	5.180,00	6.520,(

Unidades vendidas de cada producto por sucursal [AGOSTO 2013]				
Sucursal 1	Sucursal 2	Sucursal 3	Sucursal 4	
LED 32′ BA455	23	67	43	4
LED BX567	56	20	32	43
Smartphone	10	65	67	65
Tablet 10′	45	3	23	76
Notebook	67	65	43	80

Si A y B son las matrices correspondientes a estas tablas: a) Calcular e interpretar el producto AB. ¿Cuál es la sucursal que obtuvo la máxima ganancia? b) ¿Se puede calcular BA? ¿Tiene interpretación práctica BA ? Nota: hacer el producto de matrices de órdenes grandes puede implicar demasiado trabajo de cálculo. En estos casos se puede utilizar la ayuda de calculadoras o de un software. En el siguiente link hay un tutorial para hacer cálculos entre matrices con wxMaxima. (Descarga de wxMaxima)

Traspuesta de una matriz

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, entonces su traspuesta es: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Propiedades de la trasposición

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(kA)^t = kA^t, \quad k \in \mathbb{R}$

3) $\left(A^t\right)^t = A$

4) $(AB)^t = B^t A^t$

Ejemplo

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos:

a) $(AB)^t$

b) $A^t B^t$

c) $B^t A^t$

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 10 & 21 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 9 & 21 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ítem b

Trasponemos y luego hacemos el producto:

$$A^t B^t = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_{3\times2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times3} \quad \textit{no se puede realizar}$$

Como no coinciden el número de columnas de A^t con el número de filas de B^t, no se puede hacer el producto.

Ítem c

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 9 & 21 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo verificamos la propiedad enunciada: $(AB)^t = B^t A^t$

Matrices cuadradas

La diagonal principal de una matriz cuadrada está formada por los elementos a_{ii}.

Matriz identidad

La matriz identidad, que simbolizamos con I, es una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en todos los demás elementos.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad: La matriz identidad es el *elemento neutro* para el producto de matrices cuadradas. Se comporta como el 1 para los números reales.

Lo mostramos para matrices 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dado un número real a distinto de cero, b es su inverso multiplicativo si y solo si $a.b = 1$.

A continuación definiremos el inverso multiplicativo para matrices cuadradas.

Se dice que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si y sólo si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que:

$$AB = BA = I$$

Ejemplo

Analizar si las siguientes matrices son inversibles:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿$\exists B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AB = I$?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 1 \\ 3b + d = 0 \\ -3a - c = 0 \\ -3b - d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = 0 \ Sistema\ incompatible$$

Como llegamos a una contradicción, la matriz A no es inversible.

¿$\exists\ Q \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid\ PQ = I$?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 1 \\ 3b + d = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Les proponemos verificar que $QP = I$.

Entonces P es inversible, y Q se denomina inversa de P.

La notación es:

$$Q = P^{-1}$$

Entonces:

$$P.P^{-1} = P^{-1}.P = I$$

Más adelante analizaremos qué condición debe cumplir una matriz para ser inversible. Observación: Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces:

$$AB = I \ \Leftrightarrow\ BA = I \qquad [1]$$

O sea: para matrices cuadradas, si encontramos B tal que $AB = I$, podemos afirmar que B es la inversa de

1) AB es inversible y su inversa es: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Esto significa que la inversa de AB es $B^{-1}A^{-1}$.

Para demostrar esta propiedad, veamos que:
$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = I$

Como el producto de matrices es asociativo, resulta:

$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\ \left(BB^{-1}\right)\ A^{-1} = A\ I\ A^{-1} = A\ A^{-1}$

El lector puede comprobar que: $\left(B^{-1}A^{-1}\right)\ (AB) = I$

Hemos demostrado que el producto de matrices inversibles es inversible.

¿Ocurre lo mismo con la suma de matrices inversibles?

2) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}\ A^{-1} \quad (k \neq 0)$

3) $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

Dejamos las demostraciones a cargo del lector.

Potencias de una matriz cuadrada

$$A^3 = A\ A\ A$$

$$A^k = \underbrace{A\ A\ \dots\ A}_{k\ veces}\ ,\ k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

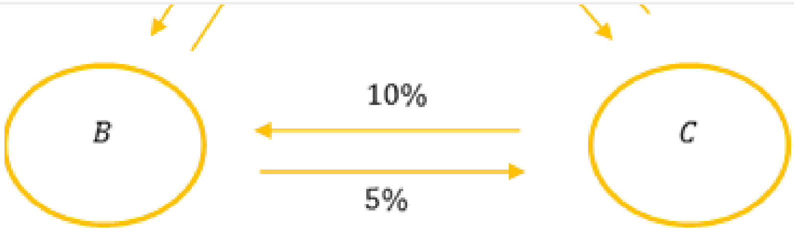
$$A^2 = A\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Ejercicio para el lector 3

En una ciudad hay tres empresas de telefonía celular (A, B y C) que controlan el mercado.

Inicialmente cada empresa tiene una fracción de la clientela que denominaremos a_0, b_0 y c_0.

Entonces resulta: $a_0\ +\ b_0\ +\ c_0 = 1$ (no hay otras empresas)



La figura resume el porcentaje de clientes que cambian de empresa durante un período de seis meses.

Este modelo matemático se basa en los siguientes supuestos:

– *El porcentaje de cambio entre las empresas se mantiene constante con el tiempo.*

– *Los clientes seguirán siendo consumidores de una de estas tres empresas.*

– *No se incorporan nuevos clientes al sistema.*

Llamemos $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ al vector de estado inicial, y $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ al vector que indica la fracción de la clientela que corresponde a cada empresa al cabo de un semestre.

Veamos cómo puede obtenerse X_1 a partir de X_0 .

empresas B y C al cabo de un semestre?

Según los datos, finalizado el 1º semestre la fracción de la clientela que tiene A puede obtenerse así:

$$0,70\ a_0\ +\ 0,10\ b_0\ +\ 0,10\ c_0\ =\ a_1$$

¿Qué ecuaciones permiten obtener b_1 y c_1?

Resulta entonces el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0,70a_0 + 0,10b_0 + 0,10c_0 = a_1 \\ 0,15a_0 + 0,85b_0 + 0,10c_0 = b_1 \\ 0,15a_0 + 0,05b_0 + 0,80c_0 = c_1 \end{cases}$$

El lector puede comprobar que este sistema puede expresarse mediante un producto de matrices como sigue:

$$\begin{pmatrix} 0,70 & 0,10 & 0,10 \\ 0,15 & 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,05 & 0,80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

O sea:

$$MX_0 = X_1 \qquad\qquad [1]$$

La matriz $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, que caracteriza la evolución del sistema, se denomina *matriz de transición*.

2) La suma de los elementos de cada columna es 1.

Las matrices cuadradas que cumplen estas dos condiciones se denominan matrices estocásticas o matrices de probabilidad.

Como la matriz de transición se mantiene para el 2° período, la fracción de clientes para el tiempo $t = 2$ puede calcularse como:

$$MX_1 = X_2 \qquad [2]$$

De [1] y [2] se deduce que: $X_2 = M^2X_0$

Si los porcentajes de cambio de clientela no cambian en los períodos siguientes, entonces M no cambia cuando se pasa del estado $(n-1)$ al estado n.

Por lo tanto:

$$X_n = MX_{n-1} = \underbrace{M\ M \ldots\ M}_{n\ veces}\ X_0 = M^nX_0$$

O sea, para obtener cómo se distribuyen los clientes luego de n períodos, podemos proceder así:

$$X_n = M^nX_0$$

1. Al cabo de 3 años.
2. Al cabo de 10 años
3. Al cabo de 15 años

Observen luego de hacer los cálculos que en la medida en que el tiempo pasa, las cuotas de mercado de las empresas tienden a estabilizarse.

4. Responder las mismas preguntas suponiendo que inicialmente las cuotas de mercado de las empresas A, B y C son respectivamente: 0,5 , 0,35 y 0,15.

5. ¿Se produce el mismo fenómeno de estabilización en este caso?

Matrices cuadradas especiales

Matriz simétrica

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es simétrica si y sólo si* $A = A^t$

O sea:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Las condiciones para que una matriz de orden tres sea simétrica son:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = A^t$$

Matrices antisimétricas

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es antisimétrica si y sólo si* $A = -A^t$

O sea:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

Veamos qué pasa con los elementos de la diagonal principal.

Si $i = j$ debería ser $a_{ii} = -a_{ii}$, pero el único número que es el opuesto de sí mismo es el cero. Por lo tanto, la diagonal principal está formada por ceros.

Las condiciones para que una matriz de orden tres sea antisimétrica son:

tres es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} =- A^t$$

Ejercicio para el lector 4

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Probar que $A + A^t$ es simétrica
2. Probar que $A - A^t$ es antisimétrica

Observemos que:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{simétrica} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{antisimétrica}$$

Entonces: toda matriz cuadrada puede expresarse como la suma de una simétrica y una antisimétrica.

¿Cómo se expresa $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular inferior cuando los elementos por encima de la diagonal principal son ceros:

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Matrices diagonales

Una matriz D es diagonal si es triangular superior e inferior:

$$D \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ diagonal} \Leftrightarrow \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

La forma de una matriz diagonal de orden tres es:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Veamos qué característica especial presentan las potencias de una matriz diagonal:

$$D^2 = D.D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & \\ 0 & b \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} \quad , \qquad k \in \mathbb{N}$$

Matrices escalares

Una matriz escalar es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Las matrices escalares de orden 3 tienen esta forma:

$$E = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

$$E \in \mathbb{R}^{n \times n} \; es \; escalar \Leftrightarrow E = kI \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

Matrices ortogonales

Una matriz cuadrada es ortogonal cuando su traspuesta coincide con su inversa:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ es ortogonal}$$
$$\Leftrightarrow A^t = A^{-1} \Leftrightarrow AA^t = I \wedge A^t A = I$$

Por ejemplo las siguientes matrices son ortogonales:

Observemos que las columnas de A y de B son vectores ortogonales y de módulo 1. Ésta es la característica que distingue a las matrices ortogonales.

Artículos relacionados:

- Segundo Parcial Resuelto de AGA [23-06-2018]
- Primer Parcial Resuelto de AGA [09-09-2017]
- Segundo Parcial resuelto de AGA [10-06-2017]
- Segundo Parcial Resuelto de AGA [10-11-2018]
- Primer Parcial Resuelto de AGA [05-05-2018]
- Segundo Parcial Resuelto de AGA [04-11-2017]

ARCHIVADA EN: **MATRICES Y DETERMINANTES**, **PARTE 1**

Comentarios

noelia dice

decir que como la condición de transpuesta coincide con la matriz… la matriz (que seria la transpuesta) por la transpuesta es igual a la identidad; ya que la matriz también es igual a la inversa.
O viceversa.

Responder

noelia dice
25 septiembre, 2017 al 11:56 pm

segun una de las propiedades de transposicion: / si hago la transpuesta de la transpuesta es igual la matriz… puedo decir que la inversa de la inversa es la matriz?

Responder

noelia dice
26 septiembre, 2017 al 12:17 am

disculpa; ya intente demostrarlo pero no es lo que dije; solo lo cumple con la transpuesta.

Responder

las matrices singulares no tienen inversas, en cambio
las regulares si tienen inversa.

Responder

noelia dice
26 septiembre, 2017 al 12:45 am

me pide demostrar que la suma de la simetrica y la antisimetrica es la matriz
A=fila 1 (3 -4) y la fila 2 (8 2)
yo hice que la simetrica es f1 (a b) y f2 (b c) mas la antisimetrica que es f1 (0 d) y f2 (-d 0) y la iguale a la matriz A. me quedaron 4 ecuaciones con 5 incognitas.
al resolverlas la simetrica me dio f1 (3 2) y la f2 (2 2) y la antisimetrica es f1(0 -6) y la f2 (6 0).
mi pregunta seria que si esta bien que en la incognita de la antisimetrica ponga » d» y no «b»?
porque lo hice con b y me dio absurdo (SI).
gracias.

Responder

Omar Gonzalez dice
12 abril, 2018 al 2:43 pm

Isabel Pustilnik y Federico Gómez dice
16 mayo, 2018 al 7:32 pm

Omar! Muchas gracias. Podés descargar gratis el PDF desde el link en el footer de la web. Saludos!!

Responder

Reynaldo dice
17 julio, 2018 al 2:12 pm

Excelente material, los concpetos y sus aplicaciones son claras y precisan la aplicación de lo conceptual.

Responder

Bettu dice
7 marzo, 2019 al 6:42 pm

Excelente material,MUY claro, gracias por compartirlo

Responder

Deja un comentario

Tu dirección de correo electrónico no será publicada.

Los campos obligatorios están marcados con *

Comentario

Nombre *

Correo electrónico *

PUBLICAR COMENTARIO

BUSCÁ EN EL SITIO

Buscar en e

COMENTARIOS RECIENTES

gustavo en **REGIONES DEL PLANO COMPLEJO**

smz en **DEFINICIÓN Y OPERACIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA**

Lucía en **MATRIZ DE CAMBIO DE**

LICENCIA CREATIVE COMMONS

LOS GIFS

LOS GIFS DEL MATERIAL TEÓRICO

ARCHIVOS

SEPTIEMBRE 2019

JUNIO 2019

NOVIEMBRE 2018

JULIO 2018

MAYO 2018

REALIZADO EN UTN FRBA

UDB Matemática – Ciencias Básicas – Secretaría Académica

DESCARGAS EN PDF

WEBS RELACIONADAS

PARTE 1 PARTE 2 EXÁMENES INFORMACIÓN CURSO PRIMER CUATRIMESRE 2020

CONTACTANOS! REPORTÁ UN ERROR

PARTE 1 PARTE 2 EXÁMENES INFORMACIÓN CURSO PRIMER CUATRIMESRE 2020
CONTACTANOS! REPORTÁ UN ERROR