Übungen zu Analysis 1

Blatt 06

1. Übung

Aufgabe 1.1. Zeigen Sie oder widerlegen Sie, die folgenden Aussagen mit einem Gegenbeispiel:

(1) Sei $(f_n)_n$ eine Folge, die keine konvergente Teilfolge besitzt, so gilt $\lim_{n\to\infty} |f_n| = +\infty$.
(2) Sei $(a_n)_n$ eine Folge, so dass die beiden Teilfolgen $(a_{2n})_n$ und $(a_{2n-1})_n$ konvergieren, so ist auch $(a_n)_n$ konvergent.
(3) Sei $(b_n)_n$ eine Folge, so dass die drei Teilfolgen $(b_{2n})_n, (b_{2n-1})_n$ und $(b_{3n})_n$ konvergieren, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent.
(4) Sei $(c_n)_n$ eine Folge, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}, k > 1$ die Teilfolge $(c_{k\cdot n})_n$ konvergiert, so ist auch $(c_n)_n$ konvergent.

2. Tutorium

Aufgabe 2.1. Begründen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{3^n\binom{n}{3}}$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(n-5)!}{n!}$;
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ und berechnen Sie hier auch den Wert der Reihe.

Aufgabe 2.2. Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \liminf_{n\to\infty} a_n \,.$$

Aufgabe 2.3. Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ drei Reihen mit $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ebenfalls konvergent.

3. Aufgaben

Aufgabe 3.1 (40 Punkte)**.** Begründen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+3n+1}{2n^2+2} - 2\right)^n$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{a} - 1)$ für ein $a > 1$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n!)^5}{3^{n^2}}\right)$;
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+100}{2n+1}\right)^n$;
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}$;
(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;
(7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, berechnen Sie hier auch den Wert der Reihe.

Aufgabe 3.2 (15 Punkte)**.** Sei $(a_n)_n$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $q \in \mathbb{Q}, q \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^q < \infty \,.$$

Sie können versuchen die schärfere Ungleichung $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^q)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zu zeigen.

Aufgabe 3.3 (15+5 Punkte)**.** Sei $(a_n)_n$ eine monotone Folge, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ konvergiert;
(2) (Zusatz) und $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 3.4 (15 Punkte)**.** Sei $(a_n)_n$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen.

(1) Zeigen Sie, dass, falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ konvergent.
(2) Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht richtig ist.

Aufgabe 3.5 (15 Punkte)**.** Sei $M \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Zahlen, deren Dezimaldarstellung nicht die Ziffer 9 enthält. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{m \in M} \frac{1}{m}$$

konvergiert. Sie bildet damit eine konvergente Reihe einer Teilfolge der harmonischen Folge.

Abgabe: Die Aufgaben aus Teil 3 sind zu lösen und als Lösung am Dienstag, dem 25. November 2025 nach der Vorlesung abzugeben bzw. online einzureichen. Sie können gerne in Gruppen von bis zu vier Studierenden abgeben. Beschriften Sie das Deckblatt bitte leserlich mit Ihren Namen und Matrikelnummern. Eine Abgabe pro Gruppe ist ausreichend.

Begründen Sie Ihre Beweisschritte ausführlich!