

## Übungen zu Analysis 1

Blatt 04

### 1. ÜBUNG

**Aufgabe 1.1.** Entscheiden Sie, für welche  $s \in \mathbb{Q}$  die Folge

$$a_n = n^s$$

konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

### 2. TUTORIUM

**Aufgabe 2.1.** Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen

- (1) für  $k, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 4k^2 + 2k$  gilt

$$\binom{n}{2k} \geq n^k$$

- (2) für jedes  $K \in \mathbb{N}$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$2^n > n^K \quad \forall n \geq N$$

Hinweis: Es kann hilfreich sein, Blatt 03 Aufgabe 2.1 zu benutzen.

- (3) Gilt die selbe Aussage, wenn die Basis 2 durch eine andere reelle Zahl  $a > 1$  ersetzt wird?

**Aufgabe 2.2.** Beweisen Sie die folgenden Behauptungen

- (1) für  $x \in \mathbb{Q}$  und  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  folgt  $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$   
 (2) für alle reellen  $x < y$  existiert  $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $x < z < y$   
 (3) die Menge  $\{2^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  hat keine obere Schranke.

**Aufgabe 2.3.** Entscheiden Sie für die folgenden Folgen, ob diese konvergent sind und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

- (1)  $a_n = \frac{n^2+3n+2}{n^3};$   
 (2)  $b_n = (-1)^n n;$   
 (3)  $c_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n$  (Hinweis: Es kann hilfreich sein Blatt 03 Aufgabe 3.2. (3) zu benutzen);  
 (4)  $d_n = (-1)^{n^2};$   
 (5)  $e_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+2};$   
 (6)  $f_n = 2^n.$

Bitte benutzen Sie nur die Definition von konvergenten Folgen.

### 3. AUFGABEN

**Aufgabe 3.1** (60 Punkte). Entscheiden Sie für die folgenden Folgen, ob diese konvergent sind, und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

- (1)  $a_n = \frac{n^4 + 3n^2 + 2}{n^6 + 1};$   
 (2)  $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$   
 (3)  $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}};$   
 (4)  $d_n = \frac{n!}{n^n};$   
 (5)  $e_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}};$

$$(6) \quad f_n = \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n^{\frac{3}{2}} + 1}},$$

$$(7) \quad g_n = \frac{n+1}{n^{(n+\frac{1}{n})}};$$

(8) für ein  $-1 < x < 1, k \in \mathbb{N}$  betrachte  $h_n = n^k x^n$ .

**Aufgabe 3.2** (20 Punkte). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Zeigen Sie, dass die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen  $a$  konvergiert.

**Aufgabe 3.3** (20 Punkte). Seien  $A_1 \geq A_2 \geq \cdots \geq A_k > 0$  gegeben. Betrachten Sie die Folge

$$a_n = (A_1^n + A_2^n + \cdots + A_k^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Entscheiden Sie, ob  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

**Aufgabe 3.4** (Zusatz- 20 Punkte). Sei  $C > 1$  gegeben und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von positiven reellen Zahlen mit der Eigenschaft, dass für ein  $q \in \mathbb{Q}, q > 0$  und alle  $n$

$$a_{n+1} \leq C^n a_n^{1+q}.$$

Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl  $A > 0$  existiert, sodass  $a_1 < A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Abgabe:** Die Aufgaben aus Teil 3 sind zu lösen und als Lösung am Dienstag, dem 11. November 2025 nach der Vorlesung abzugeben. Sie können gerne in Gruppen von bis zu vier Studierenden abgeben. Beschriften Sie das Deckblatt bitte leserlich mit Ihren Namen und Matrikelnummern. Eine Abgabe pro Gruppe ist ausreichend.

**Begründen Sie Ihre Beweisschritte ausführlich!**