Nr 8.5

Beweis durch Widerspruch. Sei T ist entweder injektiv, aber nicht surjektiv, oder surjektiv, aber nicht injektiv.
Sei $\dim V = n$.

V hat n Basisvektoren $f_1, \dots, f_n$.
Demnach existiert ein Isomorphismus $A : V \to \mathbb{K}^n$ zwischen V und $\mathbb{K}n$, wobei $A(f_i) = e_i, i \leq n$

Sei T ist injektiv, aber nicht surjektiv.
Dann $A \circ T \circ A^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Beweis:
Injektivität:

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } x, y \in \mathbb{K}^n, x \neq y.\\
&A^{-1}(x) \neq A^{-1}(y) (\text{ Da } A^{-1} \text{ injektiv})\\
&T(A^{-1}(x)) \neq T(A^{-1}(y)) \text{ (da T injektiv)}\\
&A(T(A^{-1}(x))) \neq A(T(A^{-1}(y))) \text{ (da A injektiv)}
\end{aligned}$$

nicht surjektiv:

$$\begin{aligned}
&\exists a \in V : \nexists b \in V : T(b) = a \text{ (Da T nicht surjektiv)}\\
&\exists x \in \mathbb{K}^n : a = A^{-1}(x) \text{ (Da } A^{-1} \text{ surjektiv)}\\
&\exists x \in \mathbb{K}^n : \nexists b \in V : A(T(b)) = A(A^{-1}(x)) = x \text{ (Da A injektiv)}\\
&\exists x \in \mathbb{K}^n : \nexists y \in \mathbb{K}^n : A(T(A^{-1}(y))) = x \text{ (Da } A^{-1}(y) = b \in V, \forall y \in \mathbb{K}^n)
\end{aligned}$$

Sei T ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Dann $A \circ T \circ A^{-1}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Beweis:
nicht Injektiv:

$$\begin{aligned}
&\text{Da T nicht injektiv gibt es ein } a, b \in V : a \neq b, T(a) = T(b)\\
&\exists x, y, x \neq y : T(A^{-1}(x)) = T(A^{-1}(y)), \text{ da } A^{-1} \text{ injektiv.}\\
&A(T(A^{-1}(x))) = A(T(A^{-1}(y))), x \neq y, \text{da A injektiv}
\end{aligned}$$

Surjektiv:

$$\begin{aligned}
&a = T(b), \forall a \in V \text{ (da T surjektiv)}\\
&A^{-1}(x) = T(A^{-1}(y)), \forall x \in \mathbb{K}^n \text{ (da } A^{-1} \text{ surjektiv)}\\
&x = A(A^{-1}(x)) = A(T(A^{-1}(y))), \forall x \in \mathbb{K}^n
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspuch zu dem Satz, dass jede lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ surektiv ist g.d.w. sie injektiv ist.
Somit muss der Satz auch für eine Beliebige lineare Abbildung $T : V \to V$ gelten.