Prof. Jonas Hirsch, Prof. Benjamin Delarue, Dr. Sandra Kliem, Marius Neubert WS 2025/26

Übungen zu Analysis 1

Blatt 07

1. Übung

Aufgabe 1.1. Wir betrachten die konvergente alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. Finden Sie eine expliziete Bijektion $\tau\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, so dass die Umorientierung $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\tau(n)}\frac{1}{\tau(n)}$ bestimmt divergiert.

2. Tutorium

Aufgabe 2.1. Welche der folgenden Reihen ist konvergent?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{2^n}$
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$
(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^s+8n+1}$ für ein $s\in\mathbb{Q}, s>2$

Aufgabe 2.2. Entscheiden Sie ob die folgenden Reihen konvergieren und ob sie absolut konvergieren.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2025}}$
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^3+4}$
(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^2}{n^3-1}+(-1)^n\frac{n^3}{n^4+1}\right)$

Aufgabe 2.3. Sei $M=\{1,2,4,5,8,10,16,20,25,\dots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch keine Primzahl $\neq 2,5$ teilbar sind. Man betrachte die zu M gehörige Reihe und beweise

$$\sum_{n\in M}\frac{1}{n}=\frac{5}{2}\,.$$

Hinweis: Man bilde das Produkt der geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}5^{-n}$.

3. Aufgaben

Aufgabe 3.1 (35 Punkte)**.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right)$
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^2$
(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left(e-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$ wobei $\lfloor x\rfloor=\max\{k\in\mathbb{Z}\colon k\le x\}$ die Abrundungsfunktion darstellt, d.h. $\lfloor x\rfloor$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 3.2 (20 Punkte)**.** Seien $(a_n)_n,(b_n)_n$ zwei Folgen, sodass $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2<\infty$.

(1) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ absolut konvergent ist.
(2) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}\frac{a_n}{n}$?

Aufgabe 3.3 (25 Punkte)**.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0},(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen oder widerlegen Sie sie mit einem Gegenbeispiel.

(1) Falls $a_n,b_n\ge 0\quad\forall n\in\mathbb{N}_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k\right)$ konvergiert, so sind $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ konvergent und
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}b_m\right).$$
(2) Wie sieht es aus, wenn a_n,b_n nicht notwendigerweise nicht negativ sind?

Aufgabe 3.4 (20 Punkte)**.** Sei $\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine "beschränkte" Umordnung, d.h. es gebe ein $d\in\mathbb{N}$, so dass

$$|\tau(n)-n|\le d \text{ für alle } n\in\mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie, dass für jede Folge a_n gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \iff \sum_n a_{\tau(n)} \text{ konvergent}\,.$$

Zudem gilt bei Konvergenz $\sum_n a_n = \sum_n a_{\tau(n)}$.

Aufgabe 3.5 (Zusatz, 20 Punkte)**.** Seien $\sum_{n=0}^\infty a_n, \sum_{n=0}^\infty b_n$ zwei konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass falls ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^\infty c_n$, mit $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$ konvergiert, so gilt

$$\sum_{n=0}^\infty c_n = \left(\sum_{n=0}^\infty a_n\right)\left(\sum_{n=0}^\infty b_n\right) .$$

Hinweis: Gehen Sie dazu wie folgt vor: Die Partialsummen der Reihen seien:

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k,\ B_n = \sum_{k=0}^n B_k,\ C_n = \sum_{k=0}^n c_k .$$

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^m C_n = \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n ,$$

und aus $d_n \to d$, $e_n \to e$ folgt

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n d_{n-k} e_k \to de .$$

Abgabe: Die Aufgaben aus Teil 3 sind zu lösen und als Lösung am Dienstag, dem 02. Dezember 2025 nach der Vorlesung abzugeben bzw. online einzureichen. Sie können gerne in Gruppen von bis zu vier Studierenden abgeben. Beschriften Sie das Deckblatt bitte leserlich mit Ihren Namen und Matrikelnummern. Eine Abgabe pro Gruppe ist ausreichend.

Begründen Sie Ihre Beweisschritte ausführlich!