

Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

December 1, 2025

### 3.1

2)

Es gilt:

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

wobei die Folge  $\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)_k$  monoton steigend ist.

Es gilt  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e = \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e \quad (1)$$

$$< \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad (2)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \quad (3)$$

$$= e \cdot \frac{1}{n} \quad (4)$$

Somit gilt:

$$\left( \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e \right)^2 \quad (5)$$

$$\leq e^2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad (6)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2}$  ist somit eine Majorante der Reihe  $\sum_n \left( \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e \right)^2$ .

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert, konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2} = e^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit auch die Reihe

$$\sum_n \left( \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e \right)^2$$

### 3.4

Es gilt:

$$\{1, 2, \dots, m - (d + 1)\} \subseteq \{\tau(1), \dots, \tau(m)\} \subseteq \{1, \dots, m + d\}, \forall m \in \mathbb{N}$$

Da  $(a_n)_n$  eine Nullfolge ist, kann ein  $N$  gewählt werden, sodass für alle  $n > N$  gilt:

$$a_n < \frac{\varepsilon}{4 \cdot d}$$

Nach dem Cauchy-Kriterium kann ein  $M \in \mathbb{N}$  gewählt werden, sodass

$$\forall n > m > M : \sum_{k=n}^m a_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei  $m > \max\{N, M\}$

$$\left| \sum_{n=1}^m a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^m a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{m-d-1} a_n + \sum_{n=m-d}^m a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^m a_n \right| \quad (7)$$

$$\leq \left| \sum_{n=m-d}^m a_n \right| + \sum_{n=m-d}^m |a_{\tau(n)}| \quad (8)$$

$$\leq \left| \sum_{n=m-d}^m a_n \right| + \sum_{n=m-d}^{m+d} |a_n| \quad (9)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2d \cdot \frac{\varepsilon}{4d} \leq \varepsilon \quad (10)$$

Da die Folgen einen beliebig kleinen Abstand haben, konvergieren sie zu dem selben Grenzwert.

### **3.5**

#### **Lemma1**

Es gilt  $C_m = \sum_{n=1}$