Nr7

$$g_n = \frac{n+1}{n^{n+\frac{1}{n}}} = \frac{n+1}{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}} < \frac{n+1}{n^n} < \frac{2n}{n^n} = \frac{2}{n^{n-1}} \leq \frac{2}{n} \tag{1}$$

Außerdem gilt $g_n > 0$. Da $\frac{2}{n}$ ebenfalls gegen 0 konvergiert, folgt aus dem Sandwichsatz:

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0$$

Nr 3

Es soll gezeigt werden, dass die Folge $\frac{n}{n+1}$ gegen 0 konvergiert.
Da die Folge $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert, gilt für alle $\varepsilon > 0$,dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N$.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \tag{2}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{n}{n} < \varepsilon + 1 \tag{3}$$

$$\frac{1+n}{n} < 1 + \varepsilon, \forall n > N \tag{4}$$

$$|\frac{1+n}{n} - 1| < \varepsilon, \forall n < N \tag{5}$$

Somit konvergiert die Folge gegen 1.

$$c_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2}} \leq 1 \tag{6}$$

$$c_n > \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+1}} > \frac{n}{\sqrt{(n+1)^2}} \geq \frac{n}{n+1} \tag{7}$$

Da wie gezeigt $\frac{n}{n+1}$ ebenfalls gegen 1 konvergiert, folgt nach dem Sandwichsatz $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$