

Übungen zu Analysis 1

Blatt 10

1. ÜBUNG

Überzeugen Sie sich, dass das Kriterium für die Kompaktheit einer Menge auch wie folgt formuliert werden kann:

Jede Folge $(x_n)_n \subset K$ hat mindestens einen Häufungspunkt x_* mit $x_* \in K$.

Aufgabe 1.1. Überprüfen Sie, die folgenden Mengen auf Kompaktheit.

- (1) $A = [-1, 1] \setminus \{0\}$;
- (2) $\mathbb{N} \cap [0, 2025)$;
- (3) $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

Aufgabe 1.2. Sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Zeigen Sie, dass $f(K)$ ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 1.3. Sei $f: K \rightarrow W$ stetig und bijektiv. Zeigen Sie, dass falls $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt so ist f^{-1} stetig.

2. TUTORIUM

Aufgabe 2.1. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in $x_0 \in D$ falls $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 für alle $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 2.2. Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie, dass $P(z)$ stetig auf $B_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ist.

Aufgabe 2.3. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ oder } 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f unstetig in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\}$.

Aufgabe 2.4. Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Aufgabe 2.5. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass keine Funktion existiert, so dass f jeden Wert in $f(\mathbb{R})$ genau zweimal annimmt.

3. AUFGABEN

Aufgabe 3.1 (20 Punkte). Die Funktion $\text{zack}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $\text{zack}(x) := |\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor - x|$, wobei $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

- (1) zeichnen Sie den Graphen von zack ;
- (2) zeigen Sie, dass $\text{zack}(x) = |x|$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$;
- (3) zeigen Sie, dass $\text{zack}(x + n) = \text{zack}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$;
- (4) zeigen Sie, dass zack stetig ist.

Aufgabe 3.2 (20 Punkte). Für $p, q \in \mathbb{Z}$ definieren wir $f_{p,q}(x) = |x|^p \text{zack}(x^q)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für welche p, q kann man $f_{p,q}(0)$ so definieren, dass man eine stetige Funktion auf ganz \mathbb{R} erhält.

Aufgabe 3.3 (30 Punkte). Entscheiden Sie für die folgenden Funktionen, die Bereiche/Punkte des Definitionsbereich in denen die Funktion stetig ist bzw. unstetig ist.

- (1) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2} & \text{für } x \notin \{-2, -1\} \\ 2 & \text{für } x = -1 \\ 0 & \text{für } x = -2 \end{cases}$;
- (2) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \frac{3x^2+x+2}{4x^2-12x+11}$;
- (3) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \sqrt{|x^2 - 4|}$;

$$(4) f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f_4(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x \leq 0 \\ 1+x & \text{für } 0 < x \leq 1; \\ 3-x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$(5) f_5 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}};$$

$$(6) f_6 : \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f_6(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x^2+4x+3};$$

Aufgabe 3.4 (30 Punkte). Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen mindestens eine Lösung in \mathbb{R} besitzen. (Sie müssen diese nicht explizit angeben.)

$$(1) \sum_{n=1}^{1234} \frac{x^n}{n^3} = \sqrt{2};$$

$$(2) x^5 5 + x^3 - \sqrt{|x+5|} - \sqrt{|x^2+6|} = -6;$$

$$(3) f(x) = g(x^2+3) \text{ wobei } f, g \text{ stetig auf } \mathbb{R} \text{ mit } f(-1) < 0, f(1) = 3, g(4) = 2;$$

$$(4) h(x) = -h(x)^{11} + c \text{ für jedes } c \in \mathbb{R} \text{ und } h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ surjektiv.}$$

Aufgabe 3.5 (Zusatz 1, +10 Punkte). Finden Sie ein Beispiel einer Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit Umkehrfunktion $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, so dass f stetig in 0 aber g nicht stetig in $f(0)$ ist.

Aufgabe 3.6 (Zusatz 2, +15 Punkte). Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften:

- (i) falls $[a, b] \subset [0, 1]$ so nimmt f auf $[a, b]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. (f hat die “Zwischenwertssatz-Eigenschaft”).
- (ii) Für jedes $b \in f([0, 1])$ ist die Menge $f^{-1}(b) = \{x \in [0, 1] : f(x) = b\}$ kompakt.

Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Abgabe: Die Aufgaben aus Teil 3 sind zu lösen und als Lösung am Dienstag, dem 6. Januar 2026 nach der Vorlesung abzugeben bzw. online einzureichen. Sie können gerne in Gruppen von bis zu vier Studierenden abgeben. Beschriften Sie das Deckblatt bitte leserlich mit Ihren Namen und Matrikelnummern. Eine Abgabe pro Gruppe ist ausreichend.

Begründen Sie Ihre Beweisschritte ausführlich!

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!