Analysis 08

Nr 3.1

1

Sei ein Wert $c > \limsup a_n$, sei ein $\varepsilon > 0$, gewählt sodass $c - \varepsilon > \limsup a_n$
Nach der Definition des Limes superior gilt:

$$\begin{aligned} &\exists N : \forall m > N : a_m < c - \varepsilon \\ \implies &|a_m - c| > \varepsilon, \forall m > N \end{aligned}$$

Somit kann es keinen Häufungspunkt $c > \limsup a_n$ geben.

$\limsup a_n$ ist also eine obere Schranke von H.
Die Folge $(\sup\{a_m : m \geq n\})_n$ konvergiert per Definition gegen den Wert $\limsup_{a_n}$. Somit gilt $\limsup a_n \in H$.
$\limsup_{a_n}$ ist somit das Maximum von H und somit auch das Supremum.

2

Nach Lemma 4.20 ist b genau dann ein Häufungspunkt, wenn sich in $B_\varepsilon(b)$ unendlich viele Elemente von $(a_n)_n$ befinden.
Sei ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Im $\frac{\varepsilon}{2}$−Ball um b befinden sich unendlich viele Häufungspunkte b_n.
Sei der Häufungspunkt b_{n_0} mit dem kleinsten Abstand zu b ausgewählt. Im $\frac{\varepsilon}{2}$- Ball um b_{n_0} befinden sich unendlich viele Elemente.
Da $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b_{n_0}) \subseteq B_\varepsilon(b)$ befinden sich auch in $B_\varepsilon(b)$ unendlich viele Elemente a_k der Folge $(a_n)_n$ und b ist ein Häufungspunkt.