Prof. Jonas Hirsch, Prof. Benjamin Delarue, Dr. Sandra Kliem, Marius Neubert WS 2025/26

Übungen zu Analysis 1

Blatt 03

1. Übung

Aufgabe 1.1. Verifzieren Sie:

$$\{1, \dots, n\} = \{x \in \mathbb{N}\colon 1 \leq x \leq n\}\,.$$

2. Tutorium

Aufgabe 2.1. Zeigen Sie die allgemeine Binomische Formel: Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i\,.$$

Definition 1. Für $0 \leq k \leq n$ und $k, n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir den Binominalkoeffizienten, als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}\,.$$

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie das Additionstheorem für den Binominalkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

für $n \geq k+1$ und $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 2.3. Für positive $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$ gilt

$$\sum_{i=1} x_i \geq n\,;$$

mit Gleichheit genau dann wenn $x_i = 1$ für alle i.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für $0 < a \leq 1 \leq b < 1$ gilt $a + b \geq 1 + ab$ und ordnen Sie die x_i geschickt.

3. Aufgaben

Aufgabe 3.1 (15 Punkte)**.** Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine nicht leere, beschränkte Menge. Zeigen Sie, dass M ein kleinstes und größtes Element besitzt. Zeigen Sie außerdem, dass M nur endlich viele Elemente enthält.

Aufgabe 3.2 (30 Punkte)**.** Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$;
(2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2 - 1)$;
(3) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n)$.
(4) Sei $a_0 = 1$ und $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Finden Sie eine explizite Formel für a_n und beweisen Sie sie.

Aufgabe 3.3 (20 Punkte)**.** Durch Induktion beweise man die *Schwarzsche Ungleichung*: Für beliebige reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ gilt

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)\,.$$

Aufgabe 3.4 (15 Punkte)**.** Für die $p$ten *Potenzsummen*, $p \in \mathbb{N}$

$$S_p(n) := \sum_{i=1}^{n} i^p$$

beweise man

$$\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} S_{p+1-i}(n) = (n+1)^{p+1} - 1\,.$$

Aufgabe 3.5 (20 Punkte, etwas schwerer)**.** Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion auf $\mathbb{Z}$. Wir definieren $\Delta f(x) := f(x+1) - f(x)$. Für $n \geq 2$ sei $\Delta^n f$ rekursiv gegeben durch $\Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f)$. Zeigen Sie, dass $\Delta^n f = 0$ genau dann, wenn f ein Polynom der Ordnung $\leq n-1$ ist, d.h.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Die Aufgaben aus Teil 3 sind zu lösen und als Lösung am Dienstag, dem 04. November 2025 nach der Vorlesung abzugeben. Sie können gerne in Gruppen von bis zu vier Studierenden abgeben. Beschriften Sie das Deckblatt bitte leserlich mit Ihren Namen und Matrikelnummern. Eine Abgabe pro Gruppe ist ausreichend.

Begründen Sie Ihre Beweisschritte ausführlich!