WK:

$L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv. abs.

$L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergiert

$$\sqrt[n]{a_n x^n} = |x| \sqrt[n]{a_n} < 1$$

$$\Rightarrow \quad |x| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

QK:

$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow$ abs. konvergent

$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow$ divergenz

$$|x| < \frac{1}{\limsup_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Rightarrow \text{abs. konv.}$$

$$|x| > \frac{1}{\liminf_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Rightarrow \text{divergent}$$

$\Rightarrow$ für $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nicht konvergent gilt: $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} < \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\Rightarrow$ weder $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ und $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ können der Konvergenzradius sein, da für R gelten muss:

$|x| < R \Rightarrow$ Konvergenz

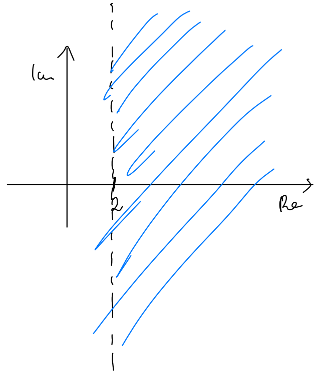
$|x| > R \Rightarrow$ Divergenz

$\Rightarrow$ Wurzelkrit. kann für Hadamard also nur verwendet werden, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergiert

Aufgabe 2.1. Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

(1) $A_1 := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) > 2\}$;
(2) $A_2 := \{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| = |z+1|\}$;
(3) $A_3 := \{z \in \mathbb{C} \colon \frac{1}{z} = \bar{z}\}$.

A_1:



$\Rightarrow$ ohne die Linie $\{\operatorname{Re} z = 2\}$

A_2:

$\Rightarrow$ Punkte, die gleichen Abstand zu Punkt $z-1$ und Punkt $z+1$ haben

$\Rightarrow$ Schnittpunkt der Kreise um $z-1$ und $z+1$

$$A_2 = \bigcup_{\substack{r>1 \\ r\in\mathbb{R}}} \Big(\underbrace{\{|z-1|=r\}}_{\text{Kreislinie}} \cap \underbrace{\{|z+1|=r\}}_{\text{Kreislinie}} \Big)$$

$z = a + ib$, $|z-1| = |z+1|$

$\Leftrightarrow |z-1|^2 = |z+1|^2$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = (a+1)^2 + b^2$

$\Leftrightarrow -2a = 2a$

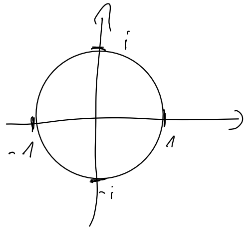
$a = 0$

$\Rightarrow$ alle Punkte mit Realteil gleich 0

A3 $\{z : \frac{1}{z} = \bar z\}$

$\frac{1}{z} = \bar z \iff z \cdot \bar z = 1$

$\iff |z|^2 = 1$



$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$ ⇒ Spiegelung von z an der x Achse und Skalierung, s.d. Betrag gleich 1.

Aufgabe 2.2. (1) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z = 1 - i$ und $w = 2 + i3$. Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$z + w, z - w, zw, \bar z \bar w, \frac{z}{w}, \frac{w}{z}$$

(2) Finden Sie die komplexen Zahlen w, so dass $w^2 = 3 - i4$ und nutzen Sie diese um $z^2 + (2 + i4)z - (6 + i4) = 0$ zu lösen.

1) $\mathbb{C}$ ist Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit zusätzlicher Multiplikation

$\bar z \bar w = \overline{zw} = \overline{5+i} = 5 - i$

$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar w}{w \cdot \bar w} = \frac{1}{|w|^2}(z \cdot \bar w)$ $\quad |w|^2 = 4+9 = 13$

$z\bar w = -1 - 5i$

erweitern, s.d. Nenner reelle Zahl

$= -\frac{1}{13} - \frac{5}{13} i$

$\boxed{0 \neq z = a + bi \quad z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i}$

2) $w^2 = 3 - 4i = c$

Prop 5.4

$\Rightarrow z^2 + (2+4i)z + (-6+8i) = 0$

$(z + (1+2i))^2 = 3 - 4i$

$(1+2i)^2 =$

Aufgabe 2.3. Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit $|z_i| = 1$ für $i = 1, 2, 3$ und $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Zeigen Sie, dass z_1, z_2, z_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

$Z: \; |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$

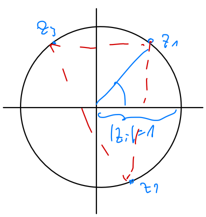
$|z_i| = 1 \Rightarrow |z_i|^2 = 1 \Rightarrow |\mathrm{Re}\, z_i|, \; |\mathrm{Im}\, z_i| \leq 1$

$\Downarrow$

da $|z_i|^2 = |\mathrm{Re}\, z_i|^2 + |\mathrm{Im}\, z_i|^2$

$z_1 + z_2 + z_3 = 0$

$\Rightarrow \; \bar{z}_1 (z_1 + z_2 + z_3) = 0$

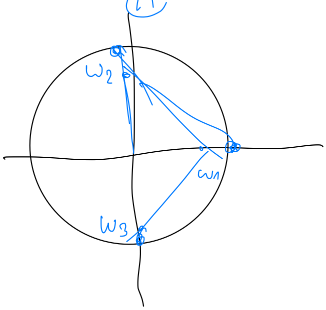


$\underbrace{\bar{z}_1 z_1}_{=1} + \underbrace{\bar{z}_1 z_2}_{w_2} + \underbrace{\bar{z}_1 z_3}_{w_3} = 0$

$\Rightarrow w_2, w_3$ liegen ebenfalls auf dem Einheitskreis

Rotation

„Problem wird rotiert"



$\Rightarrow w_1 = 1$

$1 + w_2 + w_3 = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(1 + w_2 + w_3) = 0$

$= \underbrace{\mathrm{Im}\, 1}_{0} + \mathrm{Im}\, w_2 + \mathrm{Im}\, w_3 = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, w_2 + \mathrm{Im}\, w_3 = 0$

$\mathrm{Re}(1 + w_2 + w_3) = 0$

$= 1 + \underbrace{\mathrm{Re}\, w_2 + \mathrm{Re}\, w_3} = 0$

$\mathrm{Re}\, w_2$ und $\mathrm{Re}\, w_3 < 0$

da wenn einer der beiden ≥ 0, da kann man kein nicht gleich 0

OBdA: $\mathrm{Re}\, w_2 < 0$

$$-\mathrm{Re}\,w_2 = \sqrt{1-(\mathrm{Im}\,w_2)^2} = \sqrt{1-(\mathrm{Im}\,w_3)^2} = -\mathrm{Re}\,w_3$$

$(\mathrm{Re}\,w_2)^2 + (\mathrm{Im}\,w_2)^2 = 1$ da $\mathrm{Im}\,w_2 + \mathrm{Im}\,w_3 = 0$

$\Rightarrow (\mathrm{Re}\,w_2)^2 = 1-(\mathrm{Im}\,w_2)^2$

$\Rightarrow \underbrace{-\mathrm{Re}\,w_2}_{} = \sqrt{1-(\mathrm{Im}\,w_2)^2}$

positiv, da $\mathrm{Re}\,w_2 < 0$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\,w_2 = \mathrm{Re}\,w_3 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\,w_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ oBdA: $\mathrm{Im}\,w_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathrm{Im}\,w_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow w_1 = 1$

$w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow |w_1 - w_2|^2 = |w_2 - w_3|^2 = |w_1 - w_3|^2 = 3$

$\Downarrow$

$|w_i - w_j| = \underbrace{|\overline{z}_1|}_{1} \, |z_i - z_j| = |z_i - z_j| \quad \square$

Aufgabe 2.4. Zeigen Sie, dass für $|z| < 1$

$$(1+z+z^2+\cdots z^9)(1+z^{10}+z^{20}+\cdots z^{90})(1+z^{100}+z^{200}+\cdots z^{900})\cdots = \frac{1}{1-z}.$$

$\Rightarrow$ rechnet alle möglichen natürlichen Potenzen von z

$$\underbrace{\lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{9} z^{10^n \cdot k} \right)}_{\sum_{n=0}^{10^{N+1}-1} z^n} = \frac{1}{1-z} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z^n$$

Teilfolge der Reihe

$$\sum_{(k_0,\dots,k_N)\in \mathbb{N}^{N+1}} z_0^{\,k_0+10k+\dots+10^N\cdot k_N}$$

$\Rightarrow k_i \in \{0,\dots,9\}$

$$= \sum_{n=0}^{10^{N+1}-1} z^n$$

, da jede nat. Zahl eine eind. dezimal darst. hat.

Tipp Blatt 09:

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$