

Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

November 28, 2025

3

2)

Es gilt:

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

wobei die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)_k$ monoton steigend ist.

Es gilt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e = \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e \quad (1)$$

$$< \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad (2)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) \quad (3)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$= e \cdot \frac{1}{n} \quad (5)$$

Somit gilt:

$$\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e \right)^2 \quad (6)$$

$$< (e \cdot \frac{1}{n})^2 \quad (7)$$

$$\leq e^2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad (8)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2}$ ist somit eine Majorante der Reihe $\sum_n \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e \right)^2$.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2} = e^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit auch die Reihe

$$\sum_n^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} - e \right)^2$$