Prof. Jonas Hirsch, Prof. Benjamin Delarue, Dr. Sandra Kliem, Marius Neubert WS 2025/26

Übungen zu Analysis 1

Blatt 05

1. Übung

Aufgabe 1.1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen bzgl. der bestimmten Divergenz:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} -a_n = -\infty$
(2) falls $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ mit $b \in \mathbb{R}$ oder $b = +\infty$ so gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty \text{ falls } b > 0\,.$$

(3) falls $(a_n)_n$ keine konvergente Teilfolge besitzt so gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
Hinweis: Sie dürfen den Satz von Bolzano-Weierstraßbenutzen: Jede beschränkte Folge, enthält eine konvergente Teilfolge.

2. Tutorium

Aufgabe 2.1 (Mitternachtsformel)**.** Zeigen Sie, dass die algebraische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ unter der Annahme, $p^2 \geq 4q$, genau die beiden Lösungen besitzt

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Aufgabe 2.2. Man beweise aus $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Aufgabe 2.3 (Zusatz)**.** Sei $c > 0$ und $x_1 > 0$. Wir betrachten die Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)\,.$$

Zeigen Sie, dass diese konvergiert und berrechnen Sie ihren Grenzwert x.
Zusatz: Wie "schnell" konvergiert x_n gegen x bzw. können Sie eine Abschätzung für $|x_n - x|$ angeben?

3. Aufgaben

Aufgabe 3.1 (20 Punkte)**.** Entscheiden Sie ob die folgenden Folgen konvergent sind und berechnen Sie gegebenfalls ihre Grenzwerte:

(1) $a_n = \frac{n^n}{n!^2}$;
(2) $b_n = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

Aufgabe 3.2 (20 Punkte)**.** Seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ und $0 < \lambda < 1$. Wir definieren rekursiv

$$x_{n+1} = (1-\lambda)\, x_n + \lambda\, x_{n-1}\,.$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert in Abhängigkeit von x_0, x_1 und λ.

Aufgabe 3.3 (15 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für jedes $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie, das Prinzip der Vollständigen Induktion in p und Aufgabe 3.4. von Blatt 3

Aufgabe 3.4 (20 Punkte)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Wir definieren rekursiv

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ mit } b_1 = b$$
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ mit } a_1 = a\,.$$

Zeigen Sie, dass $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Aufgabe 3.5 (25 Punkte)**.** In Blatt 4 Aufgabe 3.2 hatten Sie gezeigt, dass falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ für

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\,.$$

Zeigen Sie diesmal, dass falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n) = 0$ so gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

(Zusatz:) Zeige mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass im Allgemeinen die Konvergenz von $(b_n)_n$ nicht die Konvergenz von $(a_n)_n$ impliziert.

Abgabe: Die Aufgaben aus Teil 3 sind zu lösen und als Lösung am Dienstag, dem 18. November 2025 nach der Vorlesung abzugeben bzw. online einzureichen. Sie können gerne in Gruppen von bis zu vier Studierenden abgeben. Beschriften Sie das Deckblatt bitte leserlich mit Ihren Namen und Matrikelnummern. Eine Abgabe pro Gruppe ist ausreichend.

Begründen Sie Ihre Beweisschritte ausführlich!