Aufgaben für Analysis I

Blatt NUMMER

IHRE NAME

Aufgabe 3.1

8)

$h_n = n^k \cdot x^n$, wobei $|x| < 1$

Es soll durch Induktion gezeigt werden, dass $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : x^n < \frac{1}{n^k}, \forall n < N$.

Induktionsanfang

Sei $n > k$, Sei n so gewählt, dass $(\frac{n}{n+1})^k > x$.
Sei $x^n > \frac{1}{n^k}$.
Es gilt demnach: $x^n = \frac{1}{n^k} + \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{N}$. Für größere n, kann ε beliebig klein gewählt werden, da sowohl x^n, als auch $\frac{1}{n^k}$ gegen 0 konvergieren.

$$\begin{aligned}
x^{kn} &= (\frac{1}{n^k} + \varepsilon)^k && (1)\\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{1}{n^{2k-i}} \cdot \varepsilon^i && (2)\\
&< \frac{1}{n^{2k}} && (3)\\
&< \frac{1}{n^k \cdot k^k} && (4)\\
&= \frac{1}{(kn)^k} && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}$$

Somit gilt $x^{nk} < \frac{1}{nk}$.

Induktionsschritt

Die Folge $(\frac{n}{n+1})$ konvergiert gegen 1.
Somit konvergiert auch die folge $\frac{n}{n+1})^k)$
Sei also n so gewählt, dass $(\frac{n}{n+1})^k > x$. Dies ist moeglich, da $x < 1$.
Induktionshypothese: Sei $x^n < \frac{1}{n^k}$.

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x \cdot x^n && (7)\\
&< (\frac{n}{n+1})^k \cdot x^n && (8)\\
&\overset{IH}{<} (\frac{n}{n+1})^k \cdot \frac{1}{n^k} && (9)\\
&= \frac{1}{(n+1)^k} && (10)
\end{aligned}$$

Da gilt $x^n < \frac{1}{n^k}$, gilt auch: $x^n \cdot n^{k-1} < \frac{1}{n}, \forall n < N$.
Nach Beispielaufgabe $e7$ konvergiert $\frac{1}{n}$ gegen 0. Da $h(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge nach Satz 4.8 gegen 0.

Aufgabe 3.2

Sei ein $\varepsilon < 0$.
Sei ein n_0 gewählt, sodass $|a - a_{n_0}| < \varepsilon$

Sei ein k gewählt, sodass $\frac{\max\{a_1,\ldots,a_{n_0},n_0\cdot a+n_0\cdot\varepsilon\cdot b\}}{kn_0} < \frac{\varepsilon-|a-a_{n_0}|}{2}$
Sei $N > n_0 \cdot k$

$$|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}| = |\frac{a_1 + \cdots + a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_{2n_0}}{n}| \tag{11}$$

Nr 3.4

sei $k_0 = k^2$
Zu zeigen:

$$k_0(1+1)^n > (1+q)^{n-1} + 2(1+q)^{n-2} \cdots + n$$
$$\iff k > d_n = \frac{1}{k(1+q)} + \frac{2}{k(1+q)^2} + \cdots + \frac{n}{k(1+q)^2}$$

Sei n_0 so gewählt, dass $\frac{n_0}{k(q+1)^{n_0}} < \varepsilon$
Dies ist möglich, da $\frac{n_0}{(q+1)^{n_0}}$ gegen 0 konvergiert.
Es gibt somit eine Konstante M, sodass

$$d_n = M + \sum_{i=0}^{\infty} e_n$$

, wobei

$$e_1 < \varepsilon$$

und

$$e_{n+1} = \frac{e_n}{(q+1)k} + \frac{e_n}{(q+1)k \cdot n_0}$$

Sei k nun so gewählt, dass $k(q+1) > 4$. Es gilt: $e_n < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$
Beweis fehlt
Es gilt somit:

$$\sum_{i=0}^{\infty} e_n < \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = m$$

Somit gilt:

$$d_n < M + m$$

k kann beliebig größer gewählt werden, sodass gilt $k > d_n$.
Die einzige Bedingung für k, dass $k(q+1) > 4$ ist, bleibt dadurch bestehen.
Somit kann k so gewählt werden, dass

$$k > d_n \iff k^2 = k_0 > d_n \cdot k =$$

1 Lemma 1

Beweis

Es soll gezeigt werden, dass $a_n < (\frac{c}{c+\delta})^n$,für ein $\delta > 0$. Da geizeigt wurde, dass $(\frac{c}{c+\delta})^n$ gegen 0 konvergiert, konvergiert aufgrund des Sandwich Satzes auch a_n gegen 0.
Es gilt:

$\mathrm{a}_n < c^{\sum_{i=1}^{n-1} i(q+1)^{(n-i)}} \cdot A^{(q+1)^n}$

Sei $A = \frac{1}{(c+\delta)^k}$.

Nach Lemma 1 kann für k ein Wert gewählt werden, sodass

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(q+1)^{(n-i)} < k(q+1)^n$$

Somit gilt

$$a_n < c^{\sum_{i=1}^{n-1} i(q+1)^{(n-i)}} \cdot \frac{1}{k(1+q)^n} = \frac{c^f}{c+}$$