

Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

December 1, 2025

### 3.1

2)

Es gilt:

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

wobei die Folge  $((1 + \frac{1}{k})^k)_k$  monoton steigend ist.

Es gilt  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e > (1 + \frac{1}{n})^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e = \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e \quad (1)$$

$$< \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad (2)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \quad (3)$$

$$< e \cdot \frac{1}{n} \quad (4)$$

Somit gilt:

$$\left( \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e \right)^2 \leq e^2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad (5)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2}$  ist somit eine Majorante der Reihe  $\sum_n \left( \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e \right)^2$ .

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert, konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2} = e^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit auch die Reihe

$$\sum_n \left( \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e \right)^2$$

### 3.4

Es gilt:

$$\{1, 2, \dots, m - (d + 1)\} \subseteq \{\tau(1), \dots, \tau(m)\} \subseteq \{1, \dots, m + d\}, \forall m \in \mathbb{N}$$

Da  $(a_n)_n$  eine Nullfolge ist, kann ein  $N$  gewählt werden, sodass für alle  $n > N$  gilt:

$$a_n < \frac{\varepsilon}{4 \cdot d}$$

Nach dem Cauchy-Kriterium kann ein  $M \in \mathbb{N}$  gewählt werden, sodass

$$\forall m > n > M : \sum_{k=n}^m a_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei  $m > \max\{N, M\} + d$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^m a_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{m-d-1} a_n + \sum_{n=m-d}^m a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^m a_n \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=m-d}^m a_n \right| + \sum_{n=m-d}^m |a_{\tau(n)}| \\ &\leq \left| \sum_{n=m-d}^m a_n \right| + \sum_{n=m-d}^{m+d} |a_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2d \cdot \frac{\varepsilon}{4d} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Da die Folgen einen beliebig kleinen Abstand haben, konvergieren sie zu dem selben Grenzwert.

### 3.5

Sei  $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$ ,  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ ,  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$

#### Lemma 1

$$\sum_{n=0}^m C_n = \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n$$

#### Beweis Lemma 1

$$\begin{aligned} C_m &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^m b_n \sum_{k=n}^m a_{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^m b_n \sum_{k=0}^{m-n} a_n \\ &= \sum_{n=0}^m b_n A_{m-n} \end{aligned}$$

Beweis durch Induktion, dass

$$\sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n b_n A_{m-n} = \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n$$

#### Induktionsanfang

Sei  $m = 0$ .

$$\sum_{n=0}^0 \sum_{k=0}^n b_n A_{0-n} = b_0 A_0 = B_0 A_0 = \sum_{n=0}^0 A_{0-n} B_n$$

#### Induktionsschritt

Induktionshypothese: Sei

$$\sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n b_n A_{m-n} = \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m+1} \sum_{k=0}^n b_k A_{n-k} &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n b_k A_{n-k} + \sum_{n=0}^{m+1} b_n A_{m-n} \\
&\stackrel{IH}{=} \sum_{n=0}^m A_{m-n} \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n + b_0 A_{m+1} + \sum_{n=1}^{m+1} b_n A_{m+1-n} \\
&= \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n + \sum_{n=0}^m b_{n+1} A_{m-n} + b_0 A_{m+1} \\
&= \sum_{n=0}^m A_{m-n} (B_{n+1}) - A_0 B_{m+1} + A_0 B_{m+1} + b_0 A_{m+1} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} A_{m-n} B_{n+1} + A_0 B_{m+1} + b_0 A_{m+1} \\
&= \sum_{n=1}^m A_{m+1-n} B_n + A_0 B_{m+1} + b_0 A_{m+1} \\
&= \sum_{n=0}^{m+1} A_{m+1-n} B_n
\end{aligned}$$

Da  $C_m = \sum_{n=0}^m b_n A_{m-n}$ , gilt

$$\sum_{n=0}^m C_m = \sum_{n=0}^m b_n A_{m-n} \quad \square$$

## Lemma 2

Aus  $d_n \rightarrow e, e_n \rightarrow e$  folgt:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n d_{n-k} e_k \rightarrow de$$

- leider kein Beweis

### Hilfssatz1

Sei ein  $\varepsilon > 0$  Nach Lemma 2 kann ein  $M_0$  gefunden werden, sodass  $\forall m > M_0 :$

$$\left| \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n - AB \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (6)$$

$$(m+1) \cdot \left| \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n - AB \right| < (m+1) \frac{\varepsilon}{4} \quad (7)$$

$$\left| \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n - (m+1)AB \right| < (m+1) \frac{\varepsilon}{4} \quad (8)$$

(9)

Nach Lemma 1 gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^m C_n - (m+1)AB \right| < (m+1)\varepsilon$$

Speziell gilt außerdem:

$$\left| \sum_{n=0}^{2m} C_n - (2m+1)AB \right| < (2m+1)\varepsilon$$

### Hilfssatz2

$C_n$  konvergiert gegen einen Grenzwert  $C$ .

Es kann also für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $M_1$  gefunden werden, sodass für alle  $m_1 > M_1$  gilt  $|C - C_{m_1}| < \varepsilon$

Also gilt für alle  $m_2 > m_1 > M_1$ :

$$\left| (m_2 - m_1)C_{m_2} - \sum_{n=m_1}^{m_1} C_n \right| < \varepsilon$$

### Hilfssatz3

Da die Folge  $\frac{m+1}{m}$  gegen 1 konvergiert, kann ein  $M_2$  gewählt werden, sodass  $\forall m > M_2 : \left| 1 - \frac{m+1}{m} \right| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot AB}$

$$\left| AB - \frac{m+1}{m} AB \right| = \left| AB \left( \frac{\varepsilon}{4AB} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

### Hilfssatz4

Wenn  $|F - G| < k$  und  $|F' - F| < k$ , dann  $|F' - G| < 2k$

$$2k > |F - G| + |F' - F| \geq |F - G + F' - F| = |F' - G|$$

Sei  $M = \max\{M_0, M_1, M_2, 3\}$ . Für alle  $m > M$  gilt dann:

Nach Hilfssatz1:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{2m} C_n - (2m+1)AB \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} C_n + \sum_{n=m}^{2m} C_n - (2m+1)AB \right| < (2m+1)\frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1 und 2:

$$\begin{aligned} & |m \cdot AB + mC_m - (2m+1)AB| < (2m+3)\frac{\varepsilon}{4} \\ & \implies |mC_m - (m+1)AB| < (2m+3)\frac{\varepsilon}{4} \\ & \implies |C_m - \frac{m+1}{m}AB| < (2 + \frac{3}{m})\frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 3:

$$|C_m - AB| < (3 + \frac{3}{m})\frac{\varepsilon}{4} \leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon$$

Somit konvergiert  $C_m$  gegen  $AB$ , was zu zeigen war.