UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung - Gleichungssysteme
2. Was jetzt?
3. Vektorräume
4. Linearkombinationen und Basen

- Sei K ein Körper. Ein lineares Gleichungssystem (über K) von m Gleichungen mit n Unbekannten:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1\\
&a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2\\
&\ldots\\
&a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m
\end{aligned}
$$

wobei alle $a_{ij}, b_i \in K$.

- Mit dem Gaußchen Eliminationsverfahren können wir ein äquivalentes System findet, das sich im Zeilenstufenform befindet:
  - Zeilenstufenform: die erste r Zeilen sind nicht der form $0 = b_i$, und für jede i, $1 \leqslant i \leqslant r$ sei $j(i)$ das kleinste Index mit $a_{i,j(i)} \neq 0$. Dann $j(1) < j(2) < \ldots < j(r)$.
  - Die Variablen $X_{j(1)}, \ldots, X_{j(r)}$ nennen wir die gebundeten Variablen, alle andere nennen wir die freien Variablen.

- Falls im Zeilenstufen form gibt es Gleichungen der Form $0 = b_i$, mit $b_i \neq 0$ dann das System hat keine Lösungen.
- Sonst:
  - Falls es keine freie Variablen gibt, dann das System hat genau eine Lösung.
  - Falls es freie Variablen gibt, dann für jede Belegung von freien Variablen bekommen wir genau eine Lösung.
- Insbesondere sehen wir dass wir eine “Parametrisierung von Lösungen” haben: eine injektive Abbildung $\alpha\colon K^{n-r} \to K^n$, so dass die Lösungen des Systems sind genau die Elemente des Bilds von α.

- Eine motivierende Frage für die nächsten Vorlesungen: falls wir andere Pivots im Gaußschen Eliminationsverfahren nehmen, können wir ein anderes äquivalentes Zeilenstufenform-System bekommen. Ist die Anzahl der freien Variablen immer gleich?
  - Das ist schon in diesem Moment klar falls unser Körper K endlich viele Elemente hat. Tatsätzlich: wir haben eine Bijektion zwischen K^{n-r} und der Menge der Lösungen, und die Menge der Lösungen hängt nur von dem ursprünglichen System ab, weswegen auch $|K^{n-r}| = |K|^{n-r}$ ist unabhängig von den Wahlen, die wir im Gaußschen Verfahren machen. Es folgt dass auch $n - r$ und r sind von diesen Wahlen unabhängig.
  - Dieses Argument funktioniert für unendliche Körper nicht, weil es existiert eine Bijektion z.B. $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2$, weswegen die Menge der Lösungen eines Systems kann im Prinzip durch $\mathbb{Q}$ und auch durch $\mathbb{Q}^2$ parametrisiert werden.

- Um nochmal auf das Motto „Alles ist eine Menge“ zurückzukommen: Was ist eigentlich eine „Gleichung“?
  - Die Linke Seite gibt uns eine Funktion A. Diese Funktion A nimmt als ein Argument $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, ung gibt den Wert in K^m, und zwar das Tupel

    $$\begin{aligned}&(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,\\ &\ldots\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)\end{aligned}$$

  - Wir möchten das Urbild des Elements $(b_1, \ldots, b_m) \in K^m$ verstehen.
- Lineare Algebra beschäftigt sich genau mit solchen “linearen Funktionen” und ihren Eigenschaften,.

- Ein Vektorraum ist eine Verallgemeinerung von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ - eine Menge von Vektoren die wir addieren können und die wir durch Elemente von $\mathbb{R}$ multiplizieren können.

- Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist ein Tupel $(V, +, \mu)$, wobei $+\colon V \times V \to V$, und $\mu\colon K \times V \to V$, mit folgenden Eignschaften
    - (Nebenbemerkung: wir schreiben natürlich $+(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ als $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ und $\mu(a, \mathbf{v})$ als $a\mathbf{v}$ oder $a \cdot \mathbf{v}$).
    - $+$ ist kommutativ, assoziativ, und $\exists \mathbf{0}$ so dass $\forall_{\mathbf{v}\in V} \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ und $\forall_{\mathbf{v}\in V} \exists_{\mathbf{w}\in V}$ mit $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$.
    - μ ist assoziativ, distributiv gegenüber $+$ in $\mathbb{K}$ und gegenüber $+$ in V, und $\forall_{\mathbf{v}\in V}\, 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

- Es folgt dass $\mathbf{0}$ eindeutig ist, und dass für jedes $\mathbf{v} \in V$ existriert genau ein Vektor $\mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Wir benoten es mit $-\mathbf{v}$, und schreiben auch $\mathbf{x} - \mathbf{y} := \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

- Es folgt auch dass $\forall_{\mathbf{v}\in V}\, 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ und falls $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dann $a = 0$ oder $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

- Die Elemente von $\mathbb{K}$ nennen wir auch “Skalare”.
  - Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nennen wir V ein komplexer Vektorraum, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, nenenn wir V ein reeller Vektorraum.
  - Jeder komplexer Vektorraum ist auch ein reeller Vektorraum.
- Beispiel: $\mathbb{K}^n$, deren Elemente sind die Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$.
  - Häufig schreiben wir Vektoren als Spalten, z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.
  - Manchmal möchten wir ein Vektor als eine Spalte schreiben, aber es fehlt uns Raum dazu - dann schreiben wir z.B. $(1, 2, 3)^T$ für $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Buchstabe T steht für “Transposition”.

- Beispiel: Die Menge $\mathbb{K}[X]$ aller Polynome über $\mathbb{K}$.
    - Auch die Menge $\mathbb{K}_{\leqslant n}[X]$ aller Polynome über $\mathbb{K}$ mit dem Grad von höchstens n.
    - Auch die Mengen $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_l]$ und $\mathbb{K}_{\leqslant n}[X_1, \dots, X_n]$.
- Beispiel: Die Menge $\mathcal{F}([0,1])$ aller Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$.
- Beispiel: $\{0\} \subset \mathbb{K}$ ist auch ein Vektorraum.

- Beispiel: betrachten wir ein System

$$
\begin{aligned}
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = 0 \\
&a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = 0 \\
&\ldots \\
&a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = 0
\end{aligned}
$$

das homogen ist (d.h. $b_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$). Sei $V \subset \mathbb{K}^n$ die Menge aller Lösungen. Dann V ist ein Vektorraum.

  - ▶ Z.B.: die Lösungen von $X + Y + Z = 0$ in $\mathbb{R}^3$ sind eine Ebene in $\mathbb{R}^3$.

- Sei V ein Vektorraum und seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$ Vektoren. Eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ ist eine Summe der Form

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_p\mathbf{v}_p = \sum_{k=1}^{p} a_k\mathbf{v}_k,$$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$.

- Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n \in V$ sind eine Basis von V, wenn jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination hat

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{v}_k.$$

  - ▶ Die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ werden als Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$ in der Basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ bezeichnet.

- Eine Nebenbemerkung: Wir können auch sagen dass eine endliche Teilmenge $B \subset V$ eine Basis ist: das bedeutet dass jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination hat

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{w} \in B} a_{\mathbf{w}} \mathbf{w},$$

wobei alle $a_{\mathbf{w}} \in \mathbb{K}$.

  - Es ist jedoch häufig bequem, sagen zu können dass z.B. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ ist eine Basis. Das bedeutet das gleiche als: $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ ist eine Basis, und $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j$ wenn $i \neq j$.

- Das Gleichungssystem

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m$$

können wir auch so schreiben: $X_1\mathbf{a}_1 + \ldots + X_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$, wobei $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$.

- Also die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sind eine Basis von $\mathbb{K}^m$ wenn für jeden $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ das Gleichungssystem $X_1\mathbf{a}_1 + \ldots + X_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ genau eine Lösung hat.

- Beispiel: Sei $V = \mathbb{K}^n$. Die Vektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad , e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Wir nennen sie auch die Standardbasis.

- ▶ Tatsätzlich, wenn $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ dann haben wir eine Linearkombination $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$.
- ▶ Diese Linearkombination ist eindeutig: falls wir haben $\mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n$, dann durch das Vergleichen von den ersten Koordinaten auf der linken und der rechten Seite deduzieren wir $x_1 = y_1$. Ähnich, das Vergleichen der weiteren Koordinaten gibt us auch $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

- Beispiel: $V = \mathbb{K}_{\leqslant n}[X]$. Als eine Basis können wir nehmen: $\mathbf{e}_0 := 1, \mathbf{e}_1 := X, \ldots, \mathbf{e}_n := X^n$.
Wenn $P = a_0 + a_1 + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{K}_{\leqslant n}[X]$ dann haben wir die eindeutige Linearkombination $P = \sum a_i \mathbf{e}_i$.

- Beispiel: $V = \{\mathbf{0}\}$. Dann definieren wir dass die leere Folge von Vektoren, oder die leere Menge, ist eine Basis.

- Bemerunkg: Wenn $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ eine Basis von V ist, dann haben wir eine Bijektion $f \colon \mathbb{K}^n \to V$, so definiert:

$$f(x_1, \ldots, x_n) := x_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + x_n \mathbf{v}_n.$$

  - ▶ Surjektivität folgt aus: jeder Vektor von V ist eine Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$
  - ▶ Injektivität folgt aus: jeder Vektor ist eine eindeutige Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$
  - ▶ Sehr häufig wenn wir eine Eigenschaft von $\mathbb{K}^n$ haben, deduzieren wir dank dieser Bijektion eine entsprechende Eigenschaft von V.

- Eine Basis hat zwei Eigenschaften (Existenz und Eindeutigkeit einer Linearkobinatoin für jeden Vektor). Wir möchten jetzt diese zwei Eigeschaften separat betrachten.

- Wir sagen dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind ein Erzeugendensystem falls jeder $\mathbf{v} \in V$ lässt sich als eine Linearkombinationen schreiben $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.
  - Wir sagen auch dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ spannen V auf.
  - Jede Basis ist ein Erzeugendensystem.

- Wir sagen dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear unabhängig falls die einzige Linearkombination $x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$ die gleich $\mathbf{0}$ ist, ist die Linearkombination $0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_n$.
  - Die Linearkombination $0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_n$ nennen wir auch die triviale Linearkombination.
  - Andersgesagt: $\mathbf{0}$ ist eine eindeutie Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.