UNIVERSITÄT LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

Lemma. Sei $T \colon V \to W$ ein Isomorphismus und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann U und $T(U)$ sind isomorph. Insbesondere $\dim(U) = \dim(T(U))$.

- $\operatorname{rank}(A) := \dim(\operatorname{im}(A))$.

- Sei $A \in M_{m\times n}$ und sei $S \in M_{m\times n}$ in der Zeilenstufenform, die aus A durch das Gaußsche Eliminationsverfahren entsteht. Dann $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(S)$.

- Sei $S \in M_{m\times n}$ in der Zeilenstufenform. Dann die Spalten, die Pivots enthalten, sind eine Basis von $\operatorname{im}(S)$.

$\Rightarrow$ $\dim \operatorname{im}(S)$ ist Anzahl der Spalten, die Pivots enthalten

Satz. ("Rangsatz") Sei $A \in M_{m\times n}$. Dann $\dim\ker(A) + \dim\operatorname{im}(A) = n$

Lemma. Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann $\dim\operatorname{im}(A) \leqslant n$.

- Wenn α, β Isomorphismen sind dann $\dim\ker(\alpha\circ T\circ\beta) = \dim\ker T$ und $\dim\operatorname{im}(\alpha\circ T\circ\beta) = \dim\operatorname{im} T$.

Satz. ("Rangsatz") Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann $\dim\ker(T) + \dim\operatorname{im}(T) = n$.

- Transposition für beliebige Matrizen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^m$.

- Um eine Basis von $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, , \mathbf{v}_n)$ zu berechnen, können wir das Gaußche Eliminationsverfahren benutzen.

- Wir fangen mit der Matrix an, deren Zeilen die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind, also $A := [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]^T$.

- Sei S eine Zeilenstufenform von A. Dann die nicht-null Zeilen von S sind eine Basis von $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

1. Wiederholung

2. “Spaltenrank” und “Zeilenrank”

dim des Span der Spaltenvektoren

der Zeilenvektoren

3. Multiplikation von Matrizen

4. Elementaroperationen als Matrizen

Korollar. Sei $A \in M_{m \times n}$. Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ die Spaltenvektoren von A und seien $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ die Zeilenvektoren von A. Dann $\dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \dim \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$.

Beweis.

- Sei S ein Zeilstufenform von A. ⇒ dim span, ändert sich nicht
- $\dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ist die Anzahl von Pivots in S. (in Spalten)
- $\dim \operatorname{span}(\mathbf{w}_1 \ldots, \mathbf{w}_n)$ auch. ⇒ Anzahl von Zeilen mit Pivots □
- Man sagt aus "Spaltenrank von A und Zeilenrank von A sind gleich".
- Äquivalente Aussage: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$,

dim im A = dim im A^T

$\dim \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = \dim \operatorname{span}[w_1, \ldots, w_m]$

$A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ⇒ alle Vektoren im $\mathbb{K}^m$ müssen getroffen werden.
⇒ Demnach muss im A Basis m haben

Korollar. Sei $A \in M_{m\times n}$. A ist surjektiv gdw. A^T ist injektiv.

Beweis. A ist surjektiv gdw $\operatorname{rank} A = m$ gdw $\operatorname{rank} A^T = m$ gdw (aus dem Ranksatz) $\dim\ker A^T = 0$. $\dim \operatorname{im} A = m$ □

- Weil $(A^T)^T = A$, es folgt auch dass A ist injektiv gdw A^T ist surjektiv.

- Wenn $A\colon U \to V$ und $B\colon V \to W$ lineare Abbildungen sind, dann auch $B \circ A$ eine lineare Abbildung ist.

$A \in M_{m \times l}$

- Inbesondere wenn $A\colon \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^m$ und $B\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ Matrizen sind, dann auch $B \circ A$ soll eine Matrix sein. $B \circ A : \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^n$ $\quad B \circ A \in M_{n \times l}$

> **Lemma.** Falls $A = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l]$ dann $B \circ A$ ist die Matrix $[B\mathbf{v}_1, \ldots, B\mathbf{v}_l]$

Beweis.

A

- Wir wissen dass eine Lineare Abbildung $\mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^n$ durch die Werte auf den Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_l$ bestimmt ist. $\Rightarrow A = [A(e_1), A(e_2), \ldots A(e_l)]$
- Für die Abbildung $B \circ A$ sind diese Werte $B(A\mathbf{e}_1), \ldots, B(A\mathbf{e}_l)$.
- d.h. $B(\mathbf{v}_1), \ldots, B(\mathbf{v}_l)$.
- Aber das sind auch die Werte die die Matrix $[B\mathbf{v}_1, \ldots, B\mathbf{v}_l]$ auf Standardbasisvektoren nummt. $\square$

- Wir definiern das Produkt von $B \in M^{n\times m}_{\cancel{m\times n}}$ mit $A \in M_{\substack{\cancel{l\times m}\\ m\times l}}$ als $BA = [B\mathbf{v}_1, \ldots, B\mathbf{v}_l]$, wobei $A = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l]$.

  $BA = B \circ A$

- Mit Koeffizienten: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj}$. („$i$-te Zeile von B durch j-te Spalte von A").
  - Übung: $(BA)^T = A^T B^T$.
- Die Komposition $B \circ A$ ist durch die Matrix BA gegeben.

  $\Rightarrow$ Komposition funktioniert in beide Richtungen

- Wenn $A, B \in M_{n\times n}$ dann können wir AB und BA betrachten. Dieses Produkt ist nicht kommutativ, z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aber $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Wenn $\overset{A}{\cancel{B}} \in M_{m\times n}$ und $\overset{B}{\cancel{A}} \in M_{l\times m'}$, und $m \neq m'$ dann BA ist nicht definiert. $\Rightarrow$ Komposition nicht möglich
- $(AB)C = A(BC)$, weil die Komposition von Abbildungen assoziativ ist.

  $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$

- $A \in M_{n\times n}$ heißt diagonal wenn $A_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  - ▶ Wir bezeichnen mit $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die diagonale matrix A mit $A_{ii} = \lambda_i$.

- Sei $A \in M_{m\times n}$ und sei $B := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}_{m\times m}$. Dann $B \cdot A$ entsteht aus A dadurch dass wir die Elemente der i-ten Zeile durch λ_i multiplizieren. Z.B.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

- Insbesondere $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \cdot \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m) = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_m\mu_m)$.

- Wenn alle $\lambda_i \neq 0$ dann $A := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ ist invertierbar, und $A^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_m^{-1})$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a \\ \lambda_2 b \\ \lambda_3 c \end{pmatrix}$$

- Wenn $B := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}_{n\times n}$ dann $A \cdot B$ entsteht aus A dadurch dass wir die Elemente der i-ten Spalte durch λ_i multiplizieren. Z.B.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b & 4c \\ 2d & 3e & 4f \\ 2g & 3h & 4i \end{pmatrix}$$

$A^{-1} \circ A = \mathrm{Id}$

- Wenn $A \in M_{n,n}$ invertierbar ist, haben wir $A^{-1}A = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) =: \mathbf{I}_n$. Weiterhin wenn $BA = \mathbf{I}_n$ dann $B = A^{-1}$ da dann $B = BAA^{-1} = \mathbf{I}_n A^{-1} = A^{-1}$.
  - Dieses werden wir bald verwenden um die Matrix A^{-1} zu finden.

- Sei $M \in M_{\underline{m\times n}}$. Wenn wir die i-te und j-te Zeile von M tauschen bekommen wir die Matrix $\underbrace{E_{i,j}M}$, wobei $E_{i,j} \in M_{\underline{m,m}}$ sieht so aus:

eine Matrix ist Produkt aus $E_{i,j}$ und ursprüngliche Matrix

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Die außerdiagonale Eins sind auf Positionen (i,j) und (j,i).

- Sei wieder $M \in M_{m \times n}$. Wenn wir die Zeile Z_i mit $Z_i + mZ_j$ ersetzen, bekommen wir die Matrix $F_{i,j}(m)M$, wobei $F_{i,j}(m) \in M_{m,m}$ sieht so aus:

$$F_{i,j}(m) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & j & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & m & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a+g & 2b+h & 2c+i \end{pmatrix}$$

- Der Skalar m ist auf der Position (i, j).

⇒ Gaußsches Eliminationsverfahren kann als Produkt von Matrizen dargestellt werden

- Wir sagen dass eine Matrix S ist eine reduzierte Stufenform wenn in jeder Spalte mit einem Pivot genau ein nicht-null skalar sich befindet.

> **Lemma.** Jede Matrix M kann durch Elementaroperation in die reduzierte Stufenform gebracht werden. □

> **Lemma.** Wenn $S \in M_{n\times n}$ die reduzierte Stufenform einer invertierbaren Matrix $M \in M_{n\times n}$ ist, dann S eine diagonale Matrix ist, der form $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_i \neq 0$ für alle i.
>
> $\Rightarrow$ weil jede Spalte hat Pivot, Pivot einziger nicht 0 wert

Beweis.

- Die Elementaroperationen ändern $\ker$ nicht, also $\ker S = \{\mathbf{0}\}$. Es folgt dass S hat keine Spalten ohne Pivots. Da S eine reduzierte Stufenform ist, folgt es dass S diagonal ist.

Alle λ_i sind nicht null, da sonst $\ker S$ wäre nicht-trivial (d.h. grösser als $\{\mathbf{0}\}$). □

Sei A invertierbar.

red. Stufenform von A

- Es folgt dass wir ein Algorithmus jetzt haben um die Matrix A^{-1} zu berechnen.
  - Mit Elementaroperationen können wir schreiben $T_r T_{r-1} \dots T_1 A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
  - Dann A ist invertierbar gdw. alle λ_i sind nicht-null, und dann können wir schreiben

$$\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) T_r \cdot \dots \cdot T_1 A = \mathbf{I}_n$$

da $\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = I_n$

  - Es folgt dass $A^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1} T_r \cdot \dots \cdot T_1$.