



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. "Spaltenrank" und "Zeilenrank"

3. Multiplikation von Matrizen

4. Elementaroperationen als Matrizen

Lemma. Sei $T: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann U und $T(U)$ sind isomorph. Insbesondere $\dim(U) = \dim(T(U))$.

- $\text{rank}(A) := \dim(\text{im}(A))$.
- Sei $A \in M_{m \times n}$ und sei $S \in M_{m \times n}$ in der Zeilenstufenform, die aus A durch das Gaußsche Eliminationsverfahren entsteht. Dann $\text{rank}(A) = \text{rank}(S)$.
- Sei $S \in M_{m \times n}$ in der Zeilenstufenform. Dann die Spalten, die Pivots enthalten, sind eine Basis von $\text{im}(S)$.

\Rightarrow die $\text{im}(S)$ ist Anzahl der Spalten,
die Pivots enthalten

Satz. (“Rangsatz”) Sei $A \in M_{m \times n}$. Dann $\dim \ker(A) + \dim \operatorname{im}(A) = n$

Lemma. Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $A: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann $\dim \operatorname{im}(A) \leq n$.

- Wenn α, β Isomorphismen sind dann $\dim \ker(\alpha \circ T \circ \beta) = \dim \ker T$ und $\dim \operatorname{im}(\alpha \circ T \circ \beta) = \dim \operatorname{im} T$.

Satz. (“Rangsatz”) Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $T: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann $\dim \ker(T) + \dim \operatorname{im}(T) = n$.

- Transposition für beliebige Matrizen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^m$.
- Um eine Basis von $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ zu berechnen, können wir das Gaußsche Eliminationsverfahren benutzen.
- Wir fangen mit der Matrix an, deren Zeilen die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sind, also $A := [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]^T$.
- Sei S eine Zeilenstufenform von A . Dann die nicht-null Zeilen von S sind eine Basis von $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

1. Wiederholung

2. “Spaltenrank” und “Zeilenrank”

die aus Spalten
Spaltenvektoren

der Zeilenvektoren

3. Multiplikation von Matrizen

4. Elementaroperationen als Matrizen

Korollar. Sei $A \in M_{m \times n}$. Seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die Spaltenvektoren von A und seien $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ die Zeilenvektoren von A . Dann $\dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \dim \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$.

Beweis.

- Sei S ein Zeilstufenform von A . \Rightarrow der span , ändert sich nicht
- $\dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ist die Anzahl von Pivots in S . (an Spalten)
- $\dim \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ auch. \Rightarrow Anzahl von Zeilen mit Pivots □
- Man sagt aus "Spaltenrank von A und Zeilenrank von A sind gleich".
- Äquivalente Aussage: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$,

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{im} A &= \dim \operatorname{im} A^T \\ \dim \operatorname{span}[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] &= \dim \operatorname{span}[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m] \end{aligned}$$

$A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \Rightarrow$ alle Vektoren in \mathbb{K}^m müssen getroffen werden.
 \Rightarrow Deshalb muss in A Basis m haben

Korollar. Sei $A \in M_{m \times n}$. A ist surjektiv gdw. A^T ist injektiv.

Beweis. A ist surjektiv gdw $\text{rank } A = m$ gdw $\text{rank } A^T = m$ gdw (aus dem Ranksatz) $\dim \ker A^T = 0$. $\dim \text{im } A = m$ □

• Weil $(A^T)^T = A$, es folgt auch dass A ist injektiv gdw A^T ist surjektiv.

1. Wiederholung

2. “Spaltenrank” und “Zeilenrank”

3. Multiplikation von Matrizen

4. Elementaroperationen als Matrizen

- Wenn $A: U \rightarrow V$ und $B: V \rightarrow W$ lineare Abbildungen sind, dann auch $B \circ A$ eine lineare Abbildung ist.

$$A \in M_{m \times l}$$

- Insbesondere wenn $A: \mathbb{K}^l \rightarrow \mathbb{K}^m$ und $B: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ Matrizen sind, dann auch $B \circ A$ soll eine Matrix sein.

$$B \circ A: \mathbb{K}^l \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$B \circ A \in M_{n \times l}$$

Lemma. Falls $A = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l]$ dann $B \circ A$ ist die Matrix $[B\mathbf{v}_1, \dots, B\mathbf{v}_l]$

Beweis.

A

- Wir wissen dass eine Lineare Abbildung $\mathbb{K}^l \rightarrow \mathbb{K}^n$ durch die Werte auf den Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_l$ bestimmt ist. $\Rightarrow A = [A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), \dots, A(\mathbf{e}_l)]$

- Für die Abbildung $B \circ A$ sind diese Werte $B(A\mathbf{e}_1), \dots, B(A\mathbf{e}_l)$.

- d.h. $B(\mathbf{v}_1), \dots, B(\mathbf{v}_l)$.

- Aber das sind auch die Werte die die Matrix $[B\mathbf{v}_1, \dots, B\mathbf{v}_l]$ auf Standardbasisvektoren nummt. □

- Wir definieren das Produkt von $B \in M_{m \times n}^{n \times m}$ mit $A \in M_{l \times m}^{l \times m}$ als $BA = [B\mathbf{v}_1, \dots, B\mathbf{v}_l]$, wobei $A = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l]$.
 $B(A) = B \circ A$

- Mit Koeffizienten: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^m B_{ik} A_{kj}$. ("i-te Zeile von B durch j-te Spalte von A").

► Übung: $(BA)^T = A^T B^T$.

- Die Komposition $B \circ A$ ist durch die Matrix BA gegeben.

- Wenn $A, B \in M_{n \times n}$ dann können wir AB und BA betrachten. *Komposition funktioniert in beide Richtungen*
 Dieses Produkt ist nicht kommutativ, z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aber $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Wenn $\overset{A}{B} \in M_{m \times n}$ und $\overset{B}{A} \in M_{l \times m'}$, und $m \neq m'$ dann BA ist nicht definiert. *⇒ Komposition nicht möglich*

- $(AB)C = A(BC)$, weil die Komposition von Abbildungen assoziativ ist.

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

- $A \in M_{n \times n}$ heißt diagonal wenn $A_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

► Wir bezeichnen mit $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die diagonale matrix A mit $A_{ii} = \lambda_i$.

- Sei $A \in M_{m \times n}$ und sei $B := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}_{m \times m}$. Dann $B \cdot A$ entsteht aus A dadurch dass wir die Elemente der i -ten Zeile durch λ_i multiplizieren. Z.B.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

- Insbesondere $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \cdot \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m) = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_m \mu_m)$.

- Wenn alle $\lambda_i \neq 0$ dann $A := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ist invertierbar, und $A^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_m^{-1})$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \frac{1}{\lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

- Wenn $B := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}_{n \times n}$ dann $A \cdot B$ entsteht aus A dadurch dass wir die Elemente der i -ten Spalte durch λ_i multiplizieren. Z.B.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b & 4c \\ 2d & 3e & 4f \\ 2g & 3h & 4i \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \circ A = \text{Id}$$

- Wenn $A \in M_{n,n}$ invertierbar ist, haben wir $A^{-1}A = \text{diag}(1, \dots, 1) =: \mathbf{I}_n$. Weiterhin wenn $BA = \mathbf{I}_n$ dann $B = A^{-1}$ da dann $B = BAA^{-1} = \mathbf{I}_n A^{-1} = A^{-1}$.

► Dieses werden wir bald verwenden um die Matrix A^{-1} zu finden.

1. Wiederholung
2. “Spaltenrank” und “Zeilenrank”
3. Multiplikation von Matrizen
4. Elementaroperationen als Matrizen

- Sei $M \in M_{\underline{m} \times n}$. Wenn wir die i -te und j -te Zeile von M tauschen bekommen wir die Matrix $E_{i,j}M$, wobei $E_{i,j} \in M_{\underline{m}, \underline{m}}$ sieht so aus:

*diese Matrix ist
Produkt aus E_{ij} und
ursprünglicher Matrix*

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Die außerdiagonale Eins sind auf Positionen (i, j) und (j, i) .

- Sei wieder $M \in M_{m \times n}$. Wenn wir die Zeile Z_i mit $Z_i + mZ_j$ ersetzen, bekommen wir die Matrix $F_{i,j}(m)M$, wobei $F_{i,j}(m) \in M_{m,m}$ sieht so aus:

$$F_{i,j}(m) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ i & & m & \dots & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Handwritten example:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 2 & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a + g & 2b + h & 2c + i \end{pmatrix}$$

- Der Skalar m ist auf der Position (i, j) .

→ Gaußsche Eliminationsverfahren
 kann als Produkt von Matrizen dargestellt werden

- Wir sagen dass eine Matrix S ist eine reduzierte Stufenform wenn in jeder Spalte mit einem Pivot genau ein nicht-null skalar sich befindet.

Lemma. Jede Matrix M kann durch Elementaroperation in die reduzierte Stufenform gebracht werden. □

Lemma. Wenn $S \in M_{n \times n}$ die reduzierte Stufenform einer invertierbaren Matrix $M \in M_{n \times n}$ ist, dann S eine diagonale Matrix ist, der form $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_i \neq 0$ für alle i .

⇒ weil jede Spalte hat Pivot, Pivot einziger nicht 0 wert

Beweis.

- Die Elementaroperationen ändern \ker nicht, also $\ker S = \{0\}$. Es folgt dass S hat keine Spalten ohne Pivots. Da S eine reduzierte Stufenform ist, folgt es dass S diagonal ist.

Alle λ_i sind nicht null, da sonst $\ker S$ wäre nicht-trivial (d.h. grösser als $\{0\}$). □

red. Stufenform
von A

- Es folgt dass wir ein Algorithmus jetzt haben um die Matrix A^{-1} zu berechnen.
 - ▶ Mit Elementaroperationen können wir schreiben $T_r T_{r-1} \dots T_1 A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
 - ▶ Dann A ist invertierbar gdw. alle λ_i sind nicht-null, und dann können wir schreiben

$$\text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) T_r \cdot \dots \cdot T_1 A = \mathbf{I}_n$$

- ▶ Es folgt dass $A^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) T_r \cdot \dots \cdot T_1$.