Prof. Jonas Hirsch, Prof. Benjamin Delarue, Dr. Sandra Kliem, Marius Neubert WS 2025/26

Übungen zu Analysis 1

Blatt 08

1. Übung

Aufgabe 1.1. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt konvergiert und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) .$$

2. Tutorium

Wir nutzen das Tutorium diese Woche, um die Probeklausur zu besprechen. Hier sind noch einmal die Aufgaben:

Aufgabe 2.1. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Aufgabe 2.2. Überprüfen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz, falls dies nicht der Fall ist, entscheiden Sie, ob die Folge bestimmt divergiert oder zumindest eine konvergente Teilfolge enthält.

(1) $a_n = n^2 - (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(n^2 - \frac{1}{n^2})$;
(2) $b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{7}}$;
(3) $c_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n^3}}$;

Aufgabe 2.3. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf ihre Konvergenz

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+4}{n^2(n+2)^2}$, bestimmen Sie hier den Wert der Reihe falls möglich.

Aufgabe 2.4. Bestimmen Sie, den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n, .$$

Aufgabe 2.5. Sei $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen [1]. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Teilfolge $(n_k)_k$ der naürlichen Zahlen, so dass

(1) $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$;
(2) $\lim_{k\to\infty} \phi(n_k) = x$.

3. Aufgaben

Aufgabe 3.1 (20 Punkte)**.** Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen, und H die Menge ihrer Häufungspunkte.

(1) Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H$ falls $\limsup_{n\to\infty} a_n < \infty$
(2) Sei $(b_k)_k$ eine Folge von Häufungspunkten, die konvergiert d.h. $b_k \in H$ für alle k und $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Zeigen Sie, dass $b \in H$.

Aufgabe 3.2 (25 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)(k+1)}$
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)(k+1)^2}$
(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)^2(k+1)^2}$

[1] Eine Abzählung einer Menge M ist eine Bijektion zwischen einer Teilmenge der natürlichen Zahlen und der Menge M. Die Existenz einer solchen Abzählung für $\mathbb{Q}$ hatten wir noch nicht bewiesen, Sie können ihre Existenz hier jedoch annehmen.

Aufgabe 3.3 (40 Punkte)**.** Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!}\right) x^n$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$ für ein $k \in \mathbb{N}$;
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} n^3 x^{2n}$;
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$;
(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;
(7) $\sum_{n=2}^{\infty} \theta^{n^2} x^n$ für ein $0 < \theta < 1$.

Aufgabe 3.4 (15 Punkte)**.** Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe, mit $a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$ für unendlich viele n. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius kleiner gleich 1 ist.

Aufgabe 3.5 (Zusatz, +10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Gehen Sie dazu z.B. wie folgt vor.

(1) Sei $\phi\colon \mathbb{N} \to A$ eeine surjektive Abbildung. Zeigen Sie, dass dann eine Bijektion $\varphi\colon M \to A$ existiert, wobei M entweder $\{1, \ldots, N\}, \quad N \in \mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}$ ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q} \cap \{x\colon x > 0\}$$
$$\psi(i,j) = \begin{cases} \frac{k}{j+1} & \text{falls } i = 2k, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ -\frac{k}{j+1} & \text{falls } i = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

surjektiv ist.
(3) Wählen Sie eine Abzählung $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und betrachten Sie $\psi \circ \phi$.

Abgabe: Die Aufgaben aus Teil 3 sind zu lösen und als Lösung am Dienstag, dem 09. Dezember 2025 nach der Vorlesung abzugeben bzw. online einzureichen. Sie können gerne in Gruppen von bis zu vier Studierenden abgeben. Beschriften Sie das Deckblatt bitte leserlich mit Ihren Namen und Matrikelnummern. Eine Abgabe pro Gruppe ist ausreichend.

Begründen Sie Ihre Beweisschritte ausführlich!