UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

- Sei $A\colon V \to V$ wobie $\dim V < \infty$. Dann A ist injektiv gdw A ist surjektiv.
- Ein Untervektorraum von V ist eine Teilmenge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass wenn $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ und $a \in \mathbb{K}$ dann $a\mathbf{x} \in W$ und $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$.
- Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{V}$. Der lineare Spann dieser Vektoren ist die Menge $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ aller Linearkombinationen der Form $a_1\mathbf{v}_1 + a_1\mathbf{v}_2 + \ldots + a_r\mathbf{v}_r$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$.
- Falls $\dim(V) = n$ und $W \subset V$ ein Untervektorraum ist dann $\dim(W) \leqslant n$ (insbesondere W hat eine Basis).

- Sei $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem. Sei $L \subset \mathbb{K}^n$ die Menge aller Lösungen.
  - Dann L ist ein Untervektorraum.
  - Sei $S \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$ eine Zeilnstufenform dieses Systems.
  - Die Anzahl der freien Variablem ist gleich $\dim(L)$.

Proposition. Sei $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Sei $L \subset \mathbb{K}^n$ die Menge der Lösungen des Systems $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$, und sei M die Menge der Lösungen des Systems $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$. Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Lösung von $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$. Dann $M = L + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

- Sei $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.
- Kern von A definieren wir als $\ker(A) := \{\mathbf{v} \in V \colon A(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$
  - Wenn A eine Matrix ist, $\ker(A)$ ist die Menge der Lösungen des Systems $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$.
- Bild von A bezeichnen wir mit $\operatorname{im}(A)$. Also $\operatorname{im}(A) := \{A(\mathbf{v}) \colon \mathbf{v} \in V\}$.

Lemma. Sei $A \in M_{m\times n}$, und nehmen wir an dass $A = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ für irgenwelche $\mathbf{v}_i \in \mathbb{K}^n$. Dann $\operatorname{im}(A) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

- Wir definieren $\operatorname{rank}(A) := \dim(\operatorname{im}(A)) = \dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, wenn $A = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$.
- Sei A eine Matrix. Wir wissen schon dass das Gausche Eliminationsverfahren ändert $\ker(A)$ nicht, insbesondere $\dim \ker(A)$ bleibt unverändert.
- Andererseits $\operatorname{im}(A)$ kann sich ändern. Seien Z.B.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann B entsteht aus A durch eine Elementaroperation, aber $\mathbf{e}_1 \in \operatorname{im}(B)$ und $\mathbf{e}_1 \notin \operatorname{im}(A)$.

- Wir möchten jetzt zeigen dass $\operatorname{rank}(A)$ bleibt durch die Elementaroperationen unverändert.

- Übung: Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum von V. Dann $T(U)$ ist ein Untervektorraum von W.

Lemma. Sei $T\colon V \to W$ ein Isomorphismus und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann U und $T(U)$ sind isomorph. Insbesondere $\dim(U) = \dim(T(U))$.

Beweis. Wir beschränken den Definitionsbereich von T zu U, und bekommen dadurch die lineare Abbildung $T_{|U}\colon U \to T(U)$. Sie ist injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus.

$\square$

Lemma. Seien $A, B \in M_{m\times n}$, und nehmer wir an, dass B aus A durch eine Elementaroperation entsteht. Dann $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Beweis.

- Erst betrachten wir eine Elementaroperation des Typs 1, also Tausch von zwei Zeilen mit indexen α und β.
  - Wir definieren ein Isomorphismus $T\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ mit der Formel $T(\mathbf{e}_i) := \mathbf{e}_i$ wenn $i \neq \alpha, \beta$, $T(\mathbf{e}_\alpha) := T(\mathbf{e}_\beta)$, $T(\mathbf{e}_\beta) = T(\mathbf{e}_\alpha)$.
  - Dann $T(\operatorname{im}(A)) = \operatorname{im}(B)$.

- Als nächstes betrachten wir eine Elementaroperation des Typs 2, also es gibt Indexe α, β so dass $Z'_\alpha = Z_\alpha + aZ_\beta$, und für $i \neq \alpha$ gilt $Z'_i = Z_i$.
  - ▶ Wir definieren ein Isomorphismus $T\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ mit der Formel $T(\mathbf{e}_i) := \mathbf{e}_i$ wenn $i \neq \alpha$ und $T(\mathbf{e}_\alpha) := \mathbf{e}_\alpha a + \mathbf{e}_b e$.
    - ▷ Die Vektoren $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_m)$ sind eine Basis, da sie ein Erzeugendensystem sind, mit m Elementen.
  - ▶ Dann $T(\mathrm{im}(A)) = \mathrm{im}(B)$. $\square$

Korollar. Sei $A \in M_{m \times n}$ und sei $S \in M_{m \times n}$ in der Zeilenstufenform, die aus A durch das Gaußsche Eliminationsverfahren aus A entsteht. Dann $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(S)$. $\square$

Proposition. Sei $S \in M_{m \times n}$ in der Zeilenstufenform. Dann die Spalten, die Pivots enthalten, sind eine Basis von $\operatorname{im}(S)$.

Insbesondere ist $\dim(\operatorname{im}(S))$ gleich zur Anzahl von Pivots in S.

Beweis. • Wir benutzen die Induktion über r, die Anzahl von Pivots in S. OBdA die Anzahl von Pivots ist gleich der Anzahl der Zeilen. Falls $r = 1$ dann $S = (0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_m)$ wobei $a_1 \neq 0$. Dann a_1 aufspannt $\operatorname{im}(S) = \mathbb{K}$.

• Sei jetzt $r \geqslant 1$ beliebig. Wir nehmen an dass die folgende IH gilt: für alle Matrizen S in der Zeilenstufenform mit r Zeilen und r Pivots, die Spalten, die die Pivots enthalten, sind eine Basis von $\operatorname{im}(S)$,

- Wir möchten die folgende IB beweisen: für alle Matrizen S in der Zeilenstufenform mit $r+1$ Zeilen und $r+1$ Pivots, die Spalten, die die Pivots enthalten, sind eine Basis von $\mathrm{im}(S)$,
- Beweis der IB: S sieht also so aus: $\begin{pmatrix} S' \\ 0\dots 0 a_1 \dots a_n \end{pmatrix}$ wobei $a_1 \neq 0$, und S' ist eine Matrix in der Zeilnstufenform, mit r Pivots, die sich links von a_1 befinden.
- Aus der IH S' hat als Basis die Spalten $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ die Pivots enthalten. Sei $\mathbf{v}_{r+1} \in \mathbb{K}^r$ der Vektor der sich über a_i befindet. Wir sollen Zeigen dass die Vekotren

$$\mathbf{w}_1 := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{w}_r := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_r \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_{r+1} := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{r+1} \\ a_1 \end{pmatrix}$$

eine Basis sind.

  - ▶ Lineare Unabhängigkeit: falls $\sum_{i=1}^{r+1} a_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ dann $a_{r+1} = 0$, da nur $\mathbf{w}_{r+1}$ die letzte Koordinate beeinflusst. Jetzt aus der Tatsache, dass $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ eine Basis sind, folgt $a_i = 0$ für alle i.

- Erzegendensystem: Sei $\mathbf{v}$ irgenwelche Linearkombination der Spalten von S, und sei a die eltzte Koordiante von $\mathbf{v}$. Dann $\mathbf{v} - \frac{a}{a_1}\mathbf{w}_{r+1}$ hat die letzte Koordinate gleich 0, weswegen können wir es als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ schreiben. $\square$

Satz. ("Rangsatz") Sei $A \in M_{m\times n}$. Dann $\dim\ker(A) + \dim\operatorname{im}(A) = n$

Beweis. • Sei S eine Zeilenstufenform die aus A durch das Eliminationsverfahren entsteht.

• Wir wissen $\dim\ker S = \dim\ker A$ und $\dim\operatorname{im} S = \dim\operatorname{im} A$. Also es reicht zu beweisen dass $\dim\ker(S) + \dim\operatorname{im}(S) = n$.

• Aber $\dim\operatorname{im}(S)$ ist die Anzahl von Pivots, und $\dim\ker(S)$ ist die Anzahl von Spalten ohne Pivots. $\square$

Lemma. Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann $\dim \operatorname{im}(A) \leqslant n$.

Beweis. Sei $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ eine Basis von V. Dann $A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)$ sind ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im}(A)$. $\square$

- Übung: Sei $T\colon V \to W$ wo $\dim V, \dim W < \infty$, seien $\alpha\colon V' \to V$ und $\beta\colon W \to W'$ Isomoprhismen. Dann $\dim \ker(T) = \dim \ker(\beta \circ T) = \dim \ker(T \circ \alpha)$ und $\dim \operatorname{im}(T) = \dim \operatorname{im}(\beta \circ T) = \dim \operatorname{im}(T \circ \alpha)$.

Satz. ("Rangsatz") Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann $\dim\ker(T) + \dim\operatorname{im}(T) = n$.

Beweis.

- oBdA können wir Annehmen das $W = \operatorname{im}(\overset{T}{\cancel{A}})$, also $\dim(W) = m < \infty$.
- Seien $\alpha\colon \mathbb{K}^n \to V$ und $\beta\colon W \to \mathbb{K}^m$ Isomorphismen. Dann $T' := \beta \circ T \circ \alpha$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, also $\dim\ker T' + \dim\operatorname{im} T' = n$.
- Also die Aussgage folgt aus der vorherigen Übung. $\square$

1. Wiederholung

2. Der Ranksatz

3. Dimension von $\operatorname{span} \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$

⇒ Z: Basis von span Berechnen

- Die Transposition haben wir bis jetzt nur für Vektore verwended, z.B. $(4,5)^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- Jetz definieren wir Transposition für beliebige Matrizen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Also wenn $A \in M_{m\times n}$ dann $A^T \in M_{n\times m}$
- Die i-te Spalte von A ist die i-te Zeile von A^T.
- Mit Formel: Falls A hat Koeffizienten A_{ij} dann A^T hat Koeffizienten $(A^T)_{ij} := A_{ji}$.

- Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^m$.

- Um $\dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, , \mathbf{v}_n)$ zu berechnen (und eine Basis zu finden), können wir das Gaußche Eliminationsverfahren benutzen.

- Wir fangen mit der Matrix an deren Zeilen die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind, also $A := [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]^T$.

- Sei S eine Zeilenstufenform von A. Dann die nicht-null Zeilen von S sind eine Basis von $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

- Jetzt beweisen wir diese Aussage mit den folgenden Lemmas

anders als Span von Spaltenvekt.

> **Lemma.** Falls eine Matrix B aus A durch eine Elementaroperation entsteht, dann die Spanne der Zeilenvektoren von A und B sind gleich.

$\Rightarrow$ Es reicht den Span von S zu betrachten

> **Lemma.** Falls S eine Matrix in Zeilenstufenform ist dann die nicht-null Zeilenvektoren von S linear unabhängig sind.

Lemma. Falls eine Matrix B aus A durch eine Elementaroperation entsteht, dann die Spanne der Zeilenvektoren von A und B sind gleich.

Beweis. • Eine Elementaroperation des Typs 1 tauscht zwei Zeilen, also die entsprechenden Spanne sind gleich.

- Eine Elementaroperation des Typs 2 fängt mit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ an und gibt z.B. $\mathbf{w}_1 := \mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 := \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{w}_n := \mathbf{v}_n$.

$$\left.\begin{matrix} v_1, v_2, \dots, v_n \\ v_1 + a_2 v_2, v_2, \dots, v_n \end{matrix}\right\} \text{selber Span, wie vorhin gezeigt}$$

- Jeder Vektor $\mathbf{v}_i$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{w}_i$. Deswegen $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \subset \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$.

- Jeder Vektor $\mathbf{w}_i$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_i$. Deswegen $\operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) \subset \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. □

Lemma. Falls S eine Matrix in Zeilenstufenform ist dann die nicht-null Zeilenvektoren von S linear unabhängig sind.

Beweis. • Induktion über der Anzahl r von nicht-null Zeilenvektoren in S.

- Fast $r = 1$ dann wir haben ein nicht-null Zeilenvektor v_1. So ein Vektor ist linear unabhängig.
- Sei r jetzt beliebig. Wir nehmen an dass die folgende IH gilt: Falls S genau r nicht-null Zeilen hat dann sind die Zeilenvektoren linear unabhängig.
- Wir möchten die folgende IB zeigen: Falls S genau $r + 1$ nicht-null Zeilen at dann sind die Zeilenvektoren linear unabhängig.
- Beweis der IB: Seien die Zeilenvektoren $\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_{r+1}$. Sei $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}$. Da die erste Koordinate des Vektors $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}$ nur durch $\mathbf{v}_1$ beeinflusst wird, es folgt dass $a_1 = 0$.
- Aber dann $a_2\mathbf{v}_2 + \ldots, +a_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}$. Aus IH folgt jetzt $a_2 = \ldots = a_{r+1} = 0$. $\square$

Korollar. Sei $A \in M_{m\times n}$. Seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die Spaltenvektoren von A und seien $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ die Zeilenvektoren von A. Dann $\dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \dim \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$.

Beweis.

- Sei S ein Zeilstufenform von A.
- $\dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ist die Anzahl von Pivots in S.
- $\dim \operatorname{span}(\mathbf{w}_1 \dots, \mathbf{w}_n)$ auch. $\square$
- Man sagt aus “Spaltenrank von A und Zeilenrank von A sind gleich”.
- Äquivalente Aussage: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$,

Korollar. Sei $A \in M_{m \times n}$. A ist surjektiv gdw. A^T ist injektiv.

Beweis. A ist surjektiv gdw $\operatorname{rank} A = m$ gdw $\operatorname{rank} A^T = m$ gdw (aus dem Ranksatz) $\dim \ker A^T = 0$. $\square$

- Weil $(A^T)^T = A$, es folgt auch dass A ist injektiv gdw A^T ist surjektiv.