7.2 $T(f) = f' - 4f''$ **[10]**

Sei $T : \mathbb{K}_{\leqslant n}[X] \to \mathbb{K}_{\leqslant n}[X]$ definiert als $(Tf)(X) := f'(X) - 4f''(X)$. Finden Sie die Matrix von T in Bezug auf die Standardbasis $1, X, X^2, \ldots, X^n$.

$T(1) = 0 \cdot 1 + 0x + \ldots + 0x^n$ ⇒ erste Spalte der Matrix

$T(x) = 1 \cdot 1 + 0x + \ldots + 0x^n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

⇒ $-4f''(x^k) + f'(x^k)$

$k \geq 2$

$T(x^k) = 0 \cdot 1 + \ldots + (-4k(k-1))x^{k-2} + k \cdot x^{k-1} + 0x^k + \ldots + 0x^n$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -4k(k-1) \\ k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ ist gleich Matrix der erste Ableitung f' addiert mit der Matrix $-4f''$

7.3

Sei $x \in U$

7.3 **[10]**

Seien die Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ eine Basis in V. Zeigen Sie, dass $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{w}$ ebenfalls eine Basis in V ist.

$\alpha = \alpha$

$\beta = (\beta + 1) - 1$

$\gamma = \gamma - \gamma + \gamma$

⇒ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

$x = \alpha u + \beta v + \gamma w$ $\quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

$= \alpha(u + v + w) - \alpha(v + w) + \beta v + \gamma w$

$= \alpha(u + v + w) + (\beta - \alpha)v + (\gamma - \alpha)w$

$= \alpha(u + v + w) + (\beta - \alpha)(v + w) - (\beta - \alpha)w + (\gamma - \alpha)w$

$x = \alpha u + \beta v + \gamma w$

$= \alpha u + ((\beta + 1) - 1)v + (\gamma - \gamma + \gamma)w$

$= \alpha u + v(\beta + 1) - v + \gamma w - \gamma w + \gamma w$

$=$

$= \alpha u + (\beta - \alpha) v + (\gamma - \beta) w$

$\lambda = \alpha u + \beta v + \gamma w$

$= (u+v+w)\alpha - \alpha(v+w) + \beta v + \gamma w$

$= (u+v+w)\alpha + (\beta - \alpha) v + (\gamma - \alpha) w$

$= (u+v+w)\alpha + (\beta-\alpha)(v+w) - w(\beta-\alpha) + w(\gamma-\alpha)$

$+ w(-\beta + \alpha + \gamma - \alpha)$

$= (u+v+w)\alpha + (v+w)(\beta-\alpha) + w(\gamma-\beta)$

7.13 • Sei $\mathbb{K}$ ein endliches Körper. Beweisen Sie, dass es eine Primzahl p exsitiert sodass die Anzahl der Elemente in diesem Körper gleich p^n für ein $n \geq 1$ ist.

(Hinweis: Zeigen Sie dass in $\mathbb{K}$ haben wir eine Teilmenge die ein Körper mit p Elementen ist, und intepretieren Sie $\mathbb{K}$ als ein Vektorraum über diesem Körper).

- (schwerer) Zeigen Sie dass exstiert ein Körper mit 25 Elementen.

Sei K Körper

charakteristik von K ist

$$\operatorname{char} K = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}_{>0} \mid \underbrace{1+\dots+1}_{n\text{-mal}} = 0\} \\ 0, \text{ falls } \underbrace{1+\dots+1}_{n} \neq 0 \text{ für alle } n. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ jeder endliche Körper hat $\operatorname{char} K \neq 0$

$\boxed{\text{Satz:}}$ Sei K endlich, dann $\operatorname{char} K = p$ prim

Beweis

Sei $\operatorname{char} K = n \cdot m$. Dann: $\underbrace{1+\dots+1}_{n \cdot m} = 0$

$$\underbrace{(1+\dots+1)}_{n}\underbrace{(1+\dots+1)}_{m} = \underbrace{1+\dots+1}_{n \cdot m} = 0$$

$\Rightarrow$ Faktor n, oder Faktor m muss 0 sein

$n, m < n \cdot m \Rightarrow n < \operatorname{char} K$, oder $m < \operatorname{char} K$

$\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow \underbrace{n = n \cdot m}_{m=1}$, oder $\underbrace{m = n \cdot m}_{n=1}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ char K ist prim $\qquad$ Ts!

Sei K endlicher Körper. char $K = p$

$$P = \{0, 1, 1+1, \dots, \underbrace{1+1+\dots+1}_{p-1}\} \qquad p-1+1=0$$

additiv abgeschlossene Menge
$a, b \in P$: $a+b \in P$

multipl. abgeschlossen

Additives Inverse: $\underbrace{1+\dots+1}_{n} \in P$

$$\underbrace{(1+\dots+1)}_{n} + \underbrace{(1+\dots+1)}_{p-n} = 0$$

Multipl. Inverse: $\underbrace{(1+\dots+1)}_{n} \underbrace{(1+\dots+1)}_{m} = \underbrace{(1+\dots+1)}_{n \cdot m}$

m multipl. inv für n

$$\underbrace{(1+\dots+1)}_{n} \cdot \underbrace{(1+\dots+1)}_{m} = \underbrace{(1+\dots+1)}_{m \cdot n} \overset{!}{=} 1$$

$\Rightarrow P$ ist Körper

$\overset{?}{\Leftarrow}$

$?$

$m \cdot n \mod p \equiv 1$

$m \cdot n = \underbrace{k \cdot p}_{\underbrace{1+1+\dots+1}_{=0}} + 1$

$\underbrace{1}_{\text{?}}$

$\Rightarrow P$ heißt Primkörper von K

$\Rightarrow P \cong \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$, wenn char $K = p$ prim

$P \subseteq K$ Unterkörper $|P| = p$

$\Rightarrow$ K ist P-VR: $\Rightarrow$ Vektoren über P $\Rightarrow$ ähnlich wie $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-VR

Addition $\Rightarrow$ Körperaddition

- $a \in P, x \in K$ definiere $a \cdot x := ax$

Da K endlich gilt

$\dim_P K =: n < \infty$

Sei $\{b_1, \dots b_n\}$ P-Basis von K

$K \ni x = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

p Mögl.

$\Rightarrow$ K hat p^n Elemente

---

2)

$\Rightarrow$ Z: Es gibt ein Körper K mit $|K| = 25 = 5^2$

$\Rightarrow$ char $K = 5$

mod. 5 $\mathbb{F}_5[x]$

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 4$ in $\mathbb{F}_5$
$4^2 = 1$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\Rightarrow x^2 + 1 \neq 0$ in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow x^2 + 2 \neq 0$ in $\mathbb{F}_5$

$p \sim q \iff (x^2+2) \mid p - q$

i : $(i)^2 = -1$

$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$

weil $3 + 2 = 0$

$\Rightarrow K = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{F}_5\}$

K hat $5 \cdot 5$ elemente, da für jede Kombo aus $a, b \in \mathbb{F}_5(x)$ ein neues Element entsteht

$a + bx + cx^2 = a + bx + 3c$

$= (a + 3c) + bx$