Analysis 08

Nr 3.1

1

Sei ein Wert $c > \limsup a_n$, sei ein $\varepsilon > 0$, gewählt sodass $c - \varepsilon > \limsup a_n$
Nach der Definition des Limes superior gilt:

$$\begin{aligned} &\exists N : \forall m > N : a_m < c - \varepsilon \\ \implies &|a_m - c| > \varepsilon, \forall m > N \end{aligned}$$

Keine Teilfolge von (a_n) kann somit gegen ein $c > \limsup a_n$ konvergieren und es kann keinen Häufungspunkt $c > \limsup a_n$ geben.

$\limsup a_n$ ist also eine obere Schranke von H.
Wie im Beweis zum Satz von Bolzano-Weierstrass gezeigt, gilt für beschränkte Folgen, dass es eine Teilfolge $k(n)$ von $(a_n)_n$ gibt, sodass:

$$\begin{aligned} |a_{k(n+1)} - b_{k_n+1}| < \frac{1}{n} \\ b_{k(n-1)} - \frac{1}{n} \leq a_{k(n)} \leq b_{k(n)} \end{aligned}$$

Wobei $b_n = \sup\{a_m : m \geq n\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \limsup a_n$
Nach dem Sandwichsatz konvergiert $a_{k(n)}$ gegen $\limsup a_n$.
$\limsup a_n$ ist somit ein Häufungspunkt und das Supremum von H.

2

Nach Lemma 4.20 ist b genau dann ein Häufungspunkt, wenn sich für alle $\varepsilon > 0$ in $B_\varepsilon(b)$ unendlich viele Elemente von $(a_n)_n$ befinden.
Sei ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Im $\frac{\varepsilon}{2}$−Ball um b befinden sich unendlich viele Häufungspunkte b_n.
Sei der Häufungspunkt $b_{n_0} \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$ mit dem kleinsten Abstand zu b ausgewählt. Im $\frac{\varepsilon}{2}$- Ball um b_{n_0} befinden sich unendlich viele Elemente der Folge $(a_n)_n$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} &b_{n_0} \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) \\ &b - \frac{\varepsilon}{2} < b_{n_0} < b + \frac{\varepsilon}{2} \\ &b - \varepsilon < b_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < b_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < b + \varepsilon \\ &x \in (b_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2}, b_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}) \implies x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ &B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b_{n_0}) \subseteq B_\varepsilon(b) \end{aligned}$$

Da $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b_{n_0}) \subseteq B_\varepsilon(b)$ befinden sich auch in $B_\varepsilon(b)$ unendlich viele Elemente a_k der Folge $(a_n)_n$ und b ist ein Häufungspunkt.

3.3

1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
Somit konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n!}\right) x^n$.

2)

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2$$

Die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2$ konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gegen 1, da $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergiert.
Somit gilt:

$$\limsup \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$
$$\limsup \sqrt[n]{\frac{2n}{n^2}} = 2$$

Nach Cauchy-Hardamard gilt:

$$R = \frac{1}{2}$$

3)

$$\sqrt[n]{n^k} = n^{\frac{k}{n}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^k$$

Da k ein konkretes Element der natürlichen Zahlen gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
$$\limsup \sqrt[n]{n^k} = 1$$
$$\text{Nach Cauchy-Hadamard: } R = 1$$

4

Sei $x \geq \theta > \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
&\limsup \sqrt[n]{3^{-n} \cdot n^3 \cdot x^{2n}} \\
&= \limsup 3^{-1} \cdot n^{\frac{1}{n}3} \cdot x^2 \\
&= \frac{1}{3}x^2 \\
&> \frac{1}{3}\theta^2 > 1
\end{aligned}$$

Sei $x \leq \theta < \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
&\limsup \sqrt[n]{3^{-n} \cdot n^3 \cdot x^{2n}} \\
&= \limsup 3^{-1} \cdot n^{\frac{1}{n}3} \cdot x^2 \\
&= \frac{1}{3}x^2 \\
&> \frac{1}{3}\theta^2 > 1
\end{aligned}$$

3.4

Sei $(b_n)_n$ eine Teilfolge von a_n, sodass $b_n \neq 0$.
Es gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

$$\begin{aligned}
&|b_n| \geq 1 \\
&b_n \cdot x^n \geq x^n
\end{aligned}$$

Sei $x > 1$.
x^n ist keine Nullfolge, daher divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

3.5

Lemma 1

Zu zeigen: Sei $\phi : \mathbb{N} \to A$ eine surjektive Abbildung. Es existiert dann eine Bijektion $\varphi : M \to A$, wobei $M = \{1, \ldots, N\}, N \in \mathbb{N}$ oder $M = \mathbb{N}$

Behauptung 1:
Zu zeigen ist, dass es eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{N}$, sodass es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.
Sei $f(a) = \min\{x \in \mathbb{N} : \phi(x) = a\}$

Behauptung 2:
Zu zeigen ist, dass es für jedes $B \subseteq \mathbb{N}$ entweder die Funktion $g : \{1, \ldots, N\} \to B$ eine Bijektion für ein $N \in \mathbb{N}$ ist, oder die Funktion $g : \mathbb{N} \to B$ eine Bijektion ist.
Sei

$$g(1) = \min\{B\}$$
$$g(n+1) = \min\{B \backslash \{g(\{1, \ldots, n\})\}\}$$

Wenn B endlich, dann ist $\max\{B\}$ definiert und es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$g(N) = \min\{B \backslash g(\{1, \ldots, N-1\})\} = \max\{B\}$$

$g : \{1, \ldots, N\} \to B$ ist dann dann bijektiv.

Sei B hat nicht endlich viele Elemente. Zeige, dass $g : \mathbb{N} \to B$ injektiv und surjektiv.

Injektiv:

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } n \neq m, \text{O.b.d.A } m > n \\
&g(m) \in B \backslash \{g(\{1, \ldots, m-1\})\} \subseteq B \backslash \{g(n)\} \\
&\implies g(m) \neq g(n)
\end{aligned}$$

Surjektiv:

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } b \in B.\ b \text{ ist größer als } n < b \text{ Elemente aus } B. \\
&b = g(n)
\end{aligned}$$

Es gibt somit entweder eine Bijektion $\varphi = f \circ g : \{1, \ldots, N\} \to A$, oder eine Bijektion $\varphi = f \circ g : \mathbb{N} \to A$.

Lemma 2

Die Abbildung $\psi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}$ mit

$$\psi(i,j) = \begin{cases} \frac{k}{j+1}, \text{falls } i = 2k, k \in \mathbb{N}_0 \\ -\frac{k}{j+1} \text{falls } i = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

ist surjektiv.
Sei $q \in \mathbb{Q}$.
Sei $q \geq 0$

$$q = \frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$
$$\text{Sei } i = 2n \tag{2}$$
$$\text{Sei } j = m - 1 \tag{3}$$

Sei $q < 0$ Beweis analog.

Lemma 3

Wie im Beweis zum Cauchy-Produkt gezeigt, gibt es eine Abzählung $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Beweis 3.5

Nach Lemma 2 ist ψ surjektiv, jedes $q \in \mathbb{Q}$ wird von einem $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ getroffen. Jedes $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird von einem $n \in \mathbb{N}$ getroffen.
Demnach wird jedes $q \in \mathbb{Q}$ von der Komposition $\psi \circ \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ getroffen, somit ist $\psi \circ \phi$ surjektiv.

Nach Lemma 1 gibt es somit eine Bijektion $\varphi : M \to \mathbb{Q}$, wobei $M = \{1, \ldots, N\}$, oder $M = \mathbb{N}$.

Da es keine Bijektion zwischen einer endlichen und einer unendlichen Menge geben kann, muss gelten $M = \mathbb{N}$. Somit gibt es eine Bijektion zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$. $\square$