Blatt 09

tags:

Nr 3.4

1

Injektiv: Sei $x, y \in [0, +\infty[, f(x) = f(y)$

$x^2 = y^2$
$x = y$

Surjektiv:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $c^2 = x, c \in \mathbb{R}$
$[0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$

2

Nicht injektiv:

$-1 \neq 1$
$f_2(-1) = (-1)^4 = 1 = 1^4 = f_2(1)$

Nicht surjektiv:
Sei $-1 = f_2(x) = x^4$
$-1 = (x^2)^2 = y^2$. Dies ist ein Widerspruch, da die Gleichung $y^2 + 1 = 0$ keine Lösung in den reellen Zahlen hat.-1 ist also kein Funktionswert eines $x \in \mathbb{R}$

3

Injektiv:

Sei $f(x), f(y) \in \mathbb{N} \cap]3, \infty[$

$$\begin{aligned} x + 3 &= y + 3 \\ x &= y \end{aligned}$$

Surjektiv:

Sei $x \in \mathbb{N} \cap]3, \infty[$

$$\begin{aligned} x - 3 &> 1 \\ x - 3 &\in \mathbb{N} \\ f(x - 3) &= x - 3 + 3 = x \end{aligned}$$

4)

Nicht injektiv:

$$(2, 3) \neq (3, 2)$$
$$2 + 3 = 3 + 2$$

Surjektiv:

Sei $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$$x = f_4(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$$

Sei $x = 0$

$$x = f_4(1, -1) = 1 - 1$$

5)

Nicht surjektiv:

$$\begin{aligned} 1 &\in]0, \infty[\\ f_5(x) = \exp(x) + 1 &= 1 \\ \iff \exp(x) &= 0 \end{aligned}$$

Widerspruch zu (i), demnach kann es kein $x \in \mathbb{R}$ geben, sodass $f_5 = 1$.

Bijektiv:

Sei $x \neq y, x, y \in \mathbb{R}$, oBdA: $x < y$.

$$x^n < y^n, \forall n < 1 \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \tag{2}$$

$$\exp(x) < \exp(y) \tag{3}$$

$$\exp(x) \neq \exp(y) \tag{4}$$

3.5

Sei b_n folgende Folge:

$$b_n = \lim_{M \to \infty} \sum_{k=0}^{M} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k \tag{5}$$

Lemma 1

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall z \in B_z(r) : \sum_{n=0}^{N} a_n (z + z_0)^n = \sum_{n=0}^{N} z_n \sum_{k=0}^{N-n} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k \tag{6}$$

Lemma 2

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{N} z_n \sum_{k=0}^{N-n} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k = \sum_{n=0}^{N} z^n \sum_{n=0}^{N} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k, \forall N \in \mathbb{N}, \forall z \in B_r(z_0)$$

Beweis

Es gilt Nach Lemma 1 und Lemma 2 für alle $z \in B_r(z_0)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} a_n (z + z_0)^n &= \sum_{n=0}^{N} z^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{N} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k \\ \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z + z_0)^n &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} z^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{N} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k \\ P(z + z_0) &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} z^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{M \to \infty} \sum_{n=0}^{M} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k \\ P(z + z_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot b_n = Q(z) \end{aligned}$$

3.5

$$P(z+z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z_0^k = \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \sum_{k=0}^{n} z^{n-k} a_n \binom{n}{k} z_0^k$$

Es seien alle Summanden der Summe betrachtet, die den speziellen Faktor $z^i, i = n-k$ haben.

$$z^{n-k} \cdot a_n \cdot z_0^k \binom{n}{k}$$

$$\text{Sei } i = n-k$$

$$z^i a_{i+k} \cdot z_0^k \binom{i+k}{k}$$

Die Summe alle Summanden der Summe $P(z+z_0)$, die den Faktor z^i haben kann wie folgt geschrieben werden:

$$S_i = z^i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{i+k} \binom{i+k}{k} \cdot z_0^k$$

Da jeder Summand von $P(z+z_0)$ den Faktor z^i für ein $i \in \mathbb{N}$ enthält, kann $P(z+z_0)^n$ auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} P(z+z_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot b_n = Q(z) \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, sodass $(z+z_0) \in B_R(0)$.
Die Aussage gilt demnach für alle z,sodass $z \in B_{R-|z_0|}(0) = B_r(0)$ $\square$