

Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

November 23, 2025

Nr 3.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1})$$

Es gilt, dass

$$\sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n a_k - n \cdot a_{n+1}$$

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang

$$\sum_{k=1}^1 k(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2$$

Induktionsschritt

Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n a_k - n \cdot a_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(a_k - a_{k+1}) \quad (1)$$

$$= \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) + (n+1)(a_{n+1} - a_{n+2}) \quad (2)$$

$$\stackrel{IB}{=} \sum_{k=1}^n a_k - n \cdot a_{n+1} + n \cdot a_{n+1} + a_{n+1} - (n+1)a_{n+2} \quad (3)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1) \cdot a_{n+2} \quad (4)$$

Zu zeigen ist, dass die Folge $n \cdot a_{n+1}$ konvergiert. Sei sie konvergiert nicht. Nach dem Cauchy-Kriterium, können gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $N_0 \in \mathbb{N}$ ein $m_0 > n_0 > N_0$ gefunden werden kann, sodass:

$$m_0 \cdot a_{m_0+1} - n_0 \cdot a_{n_0+1} > \varepsilon$$

$$m \cdot a_{m_0+1} > \varepsilon + n \cdot a_{n_0+1} \quad (5)$$

$$a_{m+1} > \frac{\varepsilon}{m_0} + \frac{n_0}{m_0} a_{n_0+1} \quad (6)$$

$$a_{m+1} > \varepsilon \frac{a_{n_0+1} n_0}{m_0} \quad (7)$$

Es gilt:

$$\sum_n^{\infty} a_{n+1} > \varepsilon \left(\frac{a_{n_0+1} n_0}{m_0} + \frac{a_{n_1+1} n_1}{m_1} + \frac{a_{n_2+1} n_2}{m_2} + \dots \right) \quad (8)$$

Die Reihe $\sum_i \frac{a_{n_i+1} n_i}{m_i}$ konvergiert entweder, oder nicht.

Da diese Reihe divergiert, divergiert die gesamte Reihe $\sum_n a_n$, was ein Widerspruch ist.

Nach dem Cauchy Verdichtungskriterium konvergiert die Reihe $\sum^n 2^n \cdot a_{2^n}$.
Die Folge $(2^n \cdot a_{2^n})_n$ ist also eine Nullfolge.

$$0 < (2^{n+1} - 1)a_{2^{n+1}} < 2^{n+1}a_{2^{n+1}}$$

Zu zeigen ist, dass die Folge $n \cdot a_{n+1}$ konvergiert.
Das Cauchy-Kriterium gilt für die konvergente Teilfolge $((2^n - 1) \cdot a_{2^n})_n$ von $(n \cdot a_{n+1})_n$.

Nach dem Sandwich-Satz konvergiert die Folge $((2^{n+1} - 1)a_{2^{n+1}})_n$ gegen 0.
Da diese Folge eine Teilfolge der konvergenten Folge $(n \cdot a_{n+1})_n$ ist, muss die gesamte Folge gegen 0 konvergieren, da nach Bemerkung 4.16 alle Teilfolgen einer konvergenten Folge gegen den Grenzwert der Folge konvergieren.

Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) \quad (9)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k - \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_{n+1} \quad (10)$$

Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k + 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \square$$