$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \sup_{m\geq n} a_m$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_n \inf_{m\geq n} a_m .$$

Beweis: wähle $\varepsilon > 0$

$\exists N$: $c_n < a + \varepsilon$

$b_n > a - \varepsilon \quad \forall n > N$

$\Rightarrow a - \varepsilon < b_n < a_n < c_n < a + \varepsilon$

- eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann wenn ist $c_\infty = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = b_\infty$

4.4. Cauchy-Folgen / Cauchy-Kriterium.

Bem: Wie können wir überprüfen ob eine Folge konvergiert, ohne den Grenzwert zu kennen?

Definition 4.16: Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn sie das Cauchy-Kriterium erfüllt:

(C) $\quad \forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \;\; \forall n,m > N.$

Satz 4.17: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Bemerkung: Das Cauchy-Kriterium gibt uns die Möglichkeit zu bestimmen, ob eine Folge konvergiert ohne den Grenzwert zu kennen.

Bemerkung: Ein "metrischer Raum", bei uns $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Beweis: "$\Rightarrow$" d.h. wir nehmen an, dass $(a_n)_n$ konvergent ist d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existiert.

Sei $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall n > N$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon \;\; \forall n,m > N.$

"$\Leftarrow$" 1. Schritt: Jede Cauchyfolge ist beschränkt. und damit $\limsup\limits_n a_n < \infty$

2. Schritt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

zu Schritt 1: Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m > N.$$

d.h. $|a_n| \leq |a_{N+1}| + 1 \quad \forall\, n > N$

$$\Rightarrow \quad |a_n| < \overbrace{\max\{ |a_i| + 1 : i = 1, \dots, N+1 \}}^{=:A} < \infty.$$

Insbesondere gilt. $a_n < A \quad \forall n.$ und damit

$$a = \limsup_{n \to \infty} a_n \leq A.$$

zu Schritt 2: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $c_n = \sup\{ a_m : m \geq n\}$

Da $\limsup\limits_n a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = a$. existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit.

$$|c_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, n > N_1.$$

Wähle $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, n > N_2$.

Sei $N_3 = \max\{ N_1, N_2 \} + 1$.

Da $c_{N_3} = \sup\{ a_m : m \geq N_3 \} < \infty$ existiert $N_4 \geq N_3$

mit $c_{N_3} > a_{N_4} > c_{N_3} - \frac{\varepsilon}{3}$.

Sei $n > N_4$

$$\Rightarrow \quad |a_n - a| \leq |a - c_{N_3}| + |c_{N_3} - a_{N_4}| + |a_{N_4} - a_n|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$

Beispiel / Übung: $\exists\, 0 \leq \theta < 1:$

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $|a_{n+1} - a_n| < \theta\, |a_n - a_{n-1}|$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ ist eine Cauchyfolge $\Rightarrow a_n$ ist konvergent.

4.5. Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Definition 4.16: (Teilfolge) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_k$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, d.h. $n_k < n_{k+1}$ $\forall k$. dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_n$.

Bemerkung: Falls $(a_n)_n$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $(a_{n_k})_k$ eine Teilfolge so gilt.

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Die Umkehrung gilt nicht z.B. $b_n = (-1)^n$:
$(b_{2k})_k = (1)_k$ konvergiert aber b_n nicht.

Definition 4.17: Sei (a_n) eine Folge so heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt falls eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ existiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Lemma 4.18: Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Dann gilt.

a ist ein Häufungspunkt $\iff$ jeder ε-Ball um a enthält unendlich viele a_n.

Beweis: Übung.

Beispiele: $(a_n) = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \implies$ Häufungspunkt $-1, 1$.

$$(a_n = n + (-1)^n n + \tfrac{1}{n} = \begin{cases} 2n + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

hat den Häufungspunkt 0.

Bemerkung: Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungswert.

Satz. 4.18: (Satz von Bolzano Weierstrass)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, dann existiert eine konvergente Teilfolge:

IDEE: DIE IDEE IST ZU ZEIGEN, DASS $\limsup a_n = b$ EIN HÄUFUNGSPUNKT IST.

Beweis: Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow -\infty < \limsup a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b < \infty$

wobei $b_n = \sup\{a_m : m \geq n\}$.

Behauptung: Wir finden eine Teilfolge mit.

(1) $|a_{k(n+1)} - b_{k(n)+1}| < \frac{1}{n}$, $k(n+1) \geq k(n)+1$

Die Behauptung impliziert den Satz da.

$$b_{k(n-1)} - \frac{1}{n} \leq a_{k(n)} \leq b_{k(n)}$$

und die linke und rechte Seite konvergieren gegen b damit konvergiert $a_{k(n)}$ gegen b.

Beweis der Behauptung:

Wähle $k(0) = 0$ und $k(1) \in \mathbb{N}$, so dass

$$b_1 - 1 < a_{k(1)} < b_1.$$

Annahme. $k(n)$ ist gewählt. $\Rightarrow \exists\, k(n+1) \geq k(n)+1$ so dass.

$$b_{k(n)+1} = \sup\{a_m : m \geq k(n)+1\} \geq a_{k(n+1)} \geq b_{k(n)+1} - \frac{1}{n}.$$

$\Rightarrow (a_{k(n)})_n$ existiert. $\square$

Bemerkung 1) wir haben gezeigt, dass Falls $-\infty < \limsup a_n < +\infty$

so ist $\limsup a_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(genauso für $\liminf a_n$)

2) Sei H die Menge aller Häufungspunkte

So gilt $\sup H = \limsup a_n$ & $\inf H = \liminf a_n$

4.6: Konvergenzkriterien für Reihen.

Wdh. sei $\left(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)_n$ eine Reihe. Wir sagen eine Reihe konvergiert g.d.w $(s_n)_n$ konvergent.

Bemerkung 4.22 / Korollar zu 4.17:

$\sum_n a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$ (s_n) konvergiert $\Leftrightarrow$ (s_n) ist eine Cauchyfolge $\Leftrightarrow$

(1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| = |S_m - S_n|$

$= \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |s_m - s_n| < \varepsilon \quad \forall m \geq n > N.$

Korollar 4.23: $\sum_n a_n$ konvergiert $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge.

(d.h. $|a_n| \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$ ist ein notwendiges Kriterium aber kein hinreichendes!)

Vergleichstheorem für Folgen: falls $a_n \leq b_n$ $\Rightarrow \sum_n a_n \leq \sum_n b_n$ genauso falls $a_n \leq c_n \leq b_n$ und $\sum a_n = \sum b_n$ $\Rightarrow \sum c_n = \sum a_n = \sum b_n$.

Beweis: Wähle in (1) $m = n+1$.

Satz 4.24 (Majorantenkriterium)

Seien $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ Reihen mit $|a_n| \leq b_n \ \forall n$ und $\sum_n b_n$ konvergent.

$\Rightarrow \quad \sum_n a_n$ konvergent (mit $\left|\sum_n a_n\right| \leq \sum_n b_n$)

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\left(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)_n$ Cauchy.

Sei $\left(\sigma_n = \sum_{k \leq n} b_k\right)_n$ die Folge der Partialsummen zu $\sum_n b_n$.

Da $(\sigma_n)_n$ konvergent: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \ \forall n, m > N.$

$\Rightarrow \quad |s_n - s_m| = \left|\sum_{\ell=n+1}^{m} a_n\right| \leq \sum_{\ell=n+1}^{m} |a_n| \leq \sum_{\ell=n+1}^{n} b_n = |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon.$

$\square$