Prof. Jonas Hirsch, Prof. Benjamin Delarue, Dr. Sandra Kliem, Marius Neubert WS 2025/26

Übungen zu Analysis 1

Blatt 09

1. Übung

Überzeugen Sie sich, dass Lemma 4.33 auch in $\mathbb{C}$ gilt d.h.

Lemma 1. *Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C} \quad \forall n, z \in \mathbb{C}$ konvergent in z_0, dann ist $P(z)$ absolut konvegent auf $B_{|z_0|}(0) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < |z_0|\}$.*

Damit macht die Definition des Konvergenzradius auch für komplexwertige Potenzreihen Sinn.

Aufgabe 1.1. Sei $\sum_{n=0} a_n z^n$ eine Potenzreihe. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n=1} n a_n z^{n-1}$ den selben Konvergenzradius hat.

2. Tutorium

Aufgabe 2.1. Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

(1) $A_1 := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) > 2\}$;
(2) $A_2 := \{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| = |z+1|\}$;
(3) $A_3 := \{z \in \mathbb{C} \colon \frac{1}{z} = \bar{z}\}$.

Aufgabe 2.2. (1) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z = 1 - i$ und $w = 2 + i3$. Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$z + w, z - w, zw, \bar{z}\bar{w}, \frac{z}{w}, \frac{w}{z}$$

(2) Finden Sie die komplexen Zahlen w, so dass $w^2 = 3 - i4$ und nutzen Sie diese um $z^2 + (2 + i4)z - (6 + i4) = 0$ zu lösen.

Aufgabe 2.3. Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit $|z_i| = 1$ für $i = 1, 2, 3$ und $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Zeigen Sie, dass z_1, z_2, z_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Aufgabe 2.4. Zeigen Sie, dass für $|z| < 1$

$$(1 + z + z^2 + \cdots z^9)(1 + z^{10} + z^{20} + \cdots z^{90})(1 + z^{100} + z^{200} + \cdots z^{900}) \cdots = \frac{1}{1-z}\,.$$

3. Aufgaben

Aufgabe 3.1 (25 Punkte)**.** Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(1) $z_1 = \frac{3+2i}{2-i}$;
(2) $z_2 = \frac{(1+2i)^3}{|3-3i|}$;
(3) $z_3 = (\frac{1+2i}{1-i}) + (1 + 3i)$;
(4) $z_4 = \frac{(4-i)\overline{(4+i)}}{2-i}$;
(5) $z_5 = (\frac{1}{i} + \frac{1}{i^3})^2$.

Aufgabe 3.2 (20 Punkte)**.** Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

(1) $A_1 := \{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| \geq \operatorname{Im}(z)\}$;
(2) $A_2 := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(\bar{z})\}$.

Aufgabe 3.3 (25 Punkte)**.** Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Zahlen

$$M = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| + |z + i| < 8\}\,,$$

und geben Sie eine geometrische Beschreibung im Sinne der Schulgeometrie. Begründen Sie dann Ihre Behauptung durch eine Berechnung.

Aufgabe 3.4 (30 Punkte)**.** Beweisen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to [0, +\infty[, x \mapsto x^2$;

(2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4$;
(3) $f_3 : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \cap]3, \infty[, x \mapsto x + 3$;
(4) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$;
(5) $f_5 : \mathbb{R} \mapsto]0, \infty[, x \mapsto \exp(x) + 1$

Hier noch einmal die Begriffe in Kürze:
Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- *injektiv* falls $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- *surjektiv* falls $\forall b \in B \exists a \in A$ mit $f(a) = b$;
- *bijektiv* falls f injektiv und surjektiv.

Aufgabe 3.5 (Zusatz – schwer, +20P)**.** Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \in \mathbb{C} \quad \forall n$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < R$ eine Potenzreihe $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit Konvergenzradius $r = R - |z_0|$ existiert, so dass

$$Q(z) = P(z_0 + z) \quad \forall z \in B_r(0)\,.$$

Sie können versuchen, die Aussage wie folgt zu beweisen

(1) Finden Sie einen formalen Ausdruck für die Koeffizienten b_n.
(2) Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck für jedes n absolut konvergiert. Hierzu kann es hilfreich sein, die Partialsummen der Potenzreihe $P(z)$ im "Punkt" $|z_0| + s$ mit $s < r$ zu betrachten.
(3) Zeigen Sie nun, dass die Potenzreihe $Q(z)$ absolut of B_r konvergiert und die behauptete Gleichheit gilt.

Abgabe: Die Aufgaben aus Teil 3 sind zu lösen und als Lösung am Dienstag, dem 16. Dezember 2025 nach der Vorlesung abzugeben bzw. online einzureichen. Sie können gerne in Gruppen von bis zu vier Studierenden abgeben. Beschriften Sie das Deckblatt bitte leserlich mit Ihren Namen und Matrikelnummern. Eine Abgabe pro Gruppe ist ausreichend.

Begründen Sie Ihre Beweisschritte ausführlich!