Konsequenz: (I) Wir können Folgen $(a_n)_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}^n$ bzw. $a_n \in \mathbb{C}^n$ anschauen.

Alle Resultate bisher gelten die nicht die Monotonie der reellen Zahlen benutzen.

(II) Wir können Reihen $\sum_n a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}^n$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) anschauen: Majoranten-/Wurzel-/Quotientenkriterium.

Wichtig: Es gilt wirklich das Quotienten kriterium-Wurzelkriterium (nicht Leibnitz)

(III) Wir können Potenzreihenreihen

$\sum_n a_n z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ oder $z \in \mathbb{R}$

und $a_n \in \mathbb{C}^n$ oder $z \in \mathbb{R}^n$

anschauen und die Sätze über Konvergenzradien ... gelten.

Wir haben nur das Majorantenkriterium benutzt.

6. Funktionen

Definition 6.1: Seien A & B zwei Mengen.

Eine <u>Funktion</u> (oder Abbildung) $f: A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

Bsp.: (1) $A \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $B = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

reellwertig, complex wertig.

$f(x) = x^2$

$f: x \longmapsto x^2$

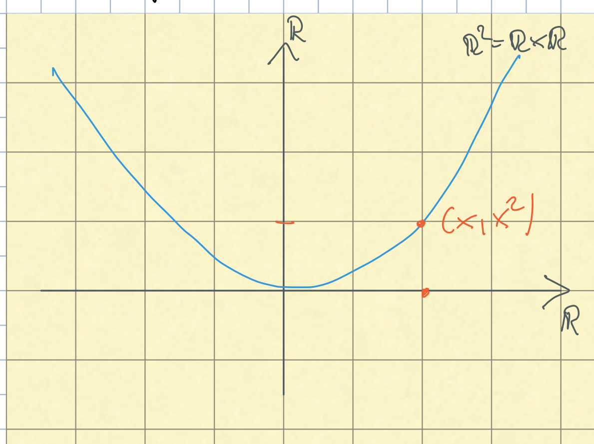
(2) $f(x) = \begin{pmatrix} a x \\ b x^2 \\ c x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektorwertig

Definition 6.2:

- A heißt Definitionsbereich von f.
- $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ heißt Wertebereich von f
- falls $C \subseteq A$ so heißt $f(C) = \{ f(x) : x \in C \} \subseteq f(A)$ das Bild von C unter f.

im Falle (1) mit $A = \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{ x : x \geq 0 \}$

Definition 6.3: Sei $f: A \to B$ eine Funktion so heißt die Menge $G(f) = \{ (a, f(a)) : a \in A \} \subseteq A \times B$ der Graph von f



6.1. Algebraische Operationen:

Seien $f, g: A \longrightarrow \mathbb{C}$, dann definieren wir

(i) $f+g: A \longrightarrow \mathbb{C}$ die Funktion die gegeben ist durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

(ii) $f \cdot g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ "

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$

Wertebereich

(iii) falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A$ (d.h. $0 \notin g(A)$)

$$\left(\frac{f}{g}\right): A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iv) genauso $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\overline{f}$, $|f|$

Definition 6.1.1 (Komposition)

Seien $f: A \longrightarrow B$ & $g: B \longrightarrow C$, ihre Komposition / Verkettung

$(g \circ f): A \longrightarrow C$ ist definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkung: Jede Algebraische Operation kann als Verkettung realisiert werden:

z.B. $f+g$

Sei $F: A \longrightarrow \mathbb{C}^2$: $F(a) = (f(a), g(a))$

und $p: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ $p(a,b) = a+b$

$\Rightarrow$ $f+g = p \circ F$

Definition 6.1.2 $f: A \longrightarrow B$

(i) heißt surjektiv falls $f(A) = B$

d.h. $\forall b \in B \ \exists a \in A$ mit $f(a) = b$

(ii) injektiv falls $f(x) \neq f(y) \ \forall x \neq y \in A$

$\Leftrightarrow$ $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(iii) bijektiv falls f injektiv & surjektiv.

Bemerkung: Bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion

nach (i)&(ii) $\forall b \; \exists! \; a \in A$ mit $f(a)=b$

d.h. wir können eine Abbildung $g: B \longrightarrow A$ definieren.

mit $g(b)=a$ für $a \in A$ mit $f(a)=b$.

(überprüfe, dass g die Definition 6.1 erfüllt.)

Definition 6.1.3. Die Funktion $g: B \longrightarrow A$ heißt Umkehrfunktion von f falls $(g \circ f)(a) = a \;\; \forall a \in A$ & $(f \circ g)(b) = b \;\; \forall b \in B$.

(Übung: zeige dass g eindeutig.)

$g(b) = g \circ (f \circ k) \overset{(b)}{=} (g \circ f)(k(b)) = k(b)$

Definition 6.1.4.: (neutrale Element der Komposition.)

Die "dumme" Abbildung $id: A \longrightarrow A$ $\quad id(a)=a$ heißt die Identitätsabbildung.

(Sie ist das neutrale Element der Komposition.)

Beispiele: (a) Wurzelfunktion:

Sei $a \in \mathbb{R}, a>0 \quad m \in \mathbb{N}$

$a \longmapsto \sqrt[m]{a}$ ist eine Funktion. (mit inverser Funktion $g(x)=x^m$)

(b) Polynome. seien $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$

für $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt Polynom

(werden in der LA noch näher behandelt.)

(c) Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich

$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $(a_k)_k$ reell oder complexwertig

$x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$(C)^*$ $\quad x \longmapsto \exp(x)$

7. Stetige Funktionen und Grenzwerte

In diesem Kapitel ist D eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$)

Definition 7.1:

Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) und $x_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt f stetig in x_0

falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in D \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig an D falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Bemerkung: x_0 ist eine Unstetigkeitsstelle von f falls

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x_\delta \in D : |x - x_0| < \delta \;\&\; |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Beispiele:

(1) $f \equiv a$ die konstante Funktion, denn $|f(x) - f(y)| = 0 \;\forall x, y$

(2) $f(x) = x$ die Identitätsfunktion, da $|f(x) - f(y)| = |x - y|$

(3) die Abstandsfunktion: $f(x) = |x - p|$ für $p \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = \big|\, |x-p| - |y-p| \,\big| \leq |x - y|$$

Definition 7.2: $f: D \to \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ heißt Lipschitz stetig (kurz Lipschitz)

falls $\exists L > 0 : \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D$

Jede Lipschitz stetige Funktion ist stetig (wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$)

Satz 7.3: (Folgenkriterium für die Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) und $x_0 \in D$. Dann ist äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0

(ii) $\forall (x_n)_n \subset D$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Beweis: (i) => (ii) Sei $(x_n)_n \subset D$ gegeben und $\varepsilon > 0$.

$\exists\ \delta > 0 : |x - x_0| < \delta,\ x \in D \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\exists\ N \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \delta\ \forall\ n > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

(ii) => (i) (durch Widerspruch.)

Annahme f ist nicht stetig in x_0 für $n \in \mathbb{N}$

$\exists\ x_n \in D : |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

damit haben wir $(x_n)_n \subset D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}\ \forall n$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\liminf\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, Also ist ein Widerspruch zu (ii). □

7.1 Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 7.1.1: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) stetig in x_0, so gilt:

(i) $f + g$ stetig in x_0

(ii) $f \cdot g$ "

(iii) $\frac{f}{g} : D \cap \{g \neq 0\} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig in x_0, falls $g(x_0) \neq 0$

Beweis: Idee: Nutze das Folgenkriterium um es auf den Satz für Folgen zurückzuführen Satz 4.6.

Sei $(x_n)_n \subset D$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_n x_n = x_0$

so folgt aus Satz 8.3 $\lim\limits_n f(x_n) = f(x_0)$, $\lim\limits_n g(x_n) = g(x_0)$

Nun folgt aus Satz 4.6:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = f(x_0) + g(x_0)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot g(x_n) = f(x_0)\,g(x_0)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ [da $g(x_0)\neq 0$]

$\square$

Konsequenzen:

1) $f(x) = x^m$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) [(ii) + Bsp (1)]

2) Polynome sind stetig d.h.

$$p(x) = a_0 + a_1\cdot x + a_2 x + \dots + a_d x^d$$

Satz 7.1.2 Sei $f: A \to B$, $g: B \to C$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^n)$, $B \subseteq \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $C \subseteq \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

und f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0)$. dann ist $g\circ f$ s. ig in x_0.

Beweis: (Wir wenden das Folgenkriterium an)

Sei $(x_n)_n \subseteq D$ mit $\lim_n x_n = x_0$ z.z. $\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) = (g\circ f)(x_0)$

da f stetig in x_0 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Sei nun $(y_n = f(x_n))_n \subset A$. d.h. y_n ist eine Folge in A

mit $\lim_n y_n = y_0$ mit $y_0 = f(x_0)$

Da g stetig in x_0 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0) = g(f(x_0))$

$\square$

Satz 7.1.3: Sei $f: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ bijektiv und stetig

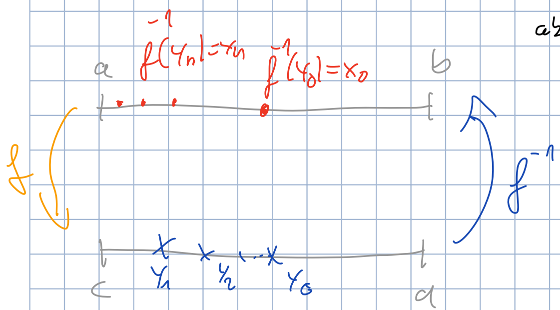
$\Rightarrow \quad f^{-1}: [c,d] \longrightarrow [a,b]$ stetig.

Beweis: Annahme f^{-1} sei nicht stetig in $c \leq y_0 \leq d$

$\exists \, (y_n)_n \subseteq [c,d]$ & $\varepsilon > 0$: $\quad \lim_n y_n = y_0$ aber $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| > \varepsilon \; \forall n.$

Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$. Da $a \leq x_n \leq b \; \forall n$ ist $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists \, (x_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \overline{x}$

da $|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon \; \forall k \Rightarrow |\overline{x} - x_0| = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon$



aber $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\overline{x})$

& $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(y_0) = \overline{x} = x_0 \quad ↯$

□

Bemerkung: Satz 8.1.3 gilt im allgemeinen nicht, wenn f nicht stetig auf ganz $[a,b]$. (Beispiel.)

Konsequenz: (a) die Funktion $x \longmapsto x^{\frac{1}{m}}$ ist stetig auf $[0,\infty[$ für $m \in \mathbb{N}$ als Umkehrfunktion von $x \longmapsto x^m$

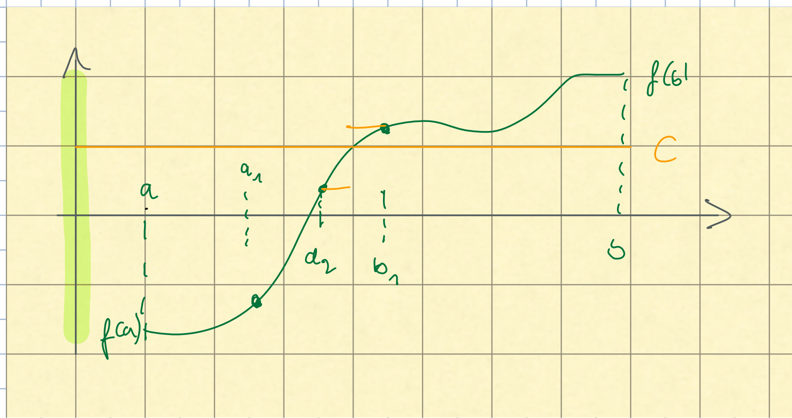
(b) die Funktion $x \longmapsto x^q$ ist stetig auf $[0,\infty[$ für $q = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, $q \geq 0$ als Komposition von $f(y) = y^k$, $g(z) = z^{\frac{1}{l}}$

(c) die Funktion $x \longmapsto x^q$ ist stetig auf $]0,\infty[$ für $q \in \mathbb{Q}$, $q < 0$ da $x^q = \frac{1}{x^{|q|}}$

7.2 Sätze über stetige Funktionen

Satz 7.2.1 (Zwischenwertsatz)

Eine stetige Abbildung $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Beweis: Idee: Intervallschachtelung (Vollständigkeitsaxiom), so dass

$f(a_k) \le c \le f(b_k)$ & $|b_k - a_k| = 2^{-k}(b-a)$

$a_k \le b_k$

Wir können annehmen, dass $f(a) < f(b)$ sonst betrachte $-f$

(der Fall $f(a) = f(b) = c$ ist trivial).

Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $(I_k = [a_k, b_k])_k$ mit

(i) $f(a_k) \le c \le f(b_k)$

(ii) $(b_k - a_k) \le 2^{-k}(b-a)$

$(k=0)$ $\quad I_0 = [a, b]$

$(k \to k+1)$: $\quad I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] & \text{falls } f(\frac{a_k+b_k}{2}) \ge c \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k] & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow |I_{k+1}| = \frac{1}{2}(b_k - a_k) = 2^{-(k+1)}(b-a)$

$\Rightarrow \exists!\, x_0 \in I_k \ \forall k$ d.h. $\lim_k a_k = x_0 = \lim_k b_k$.

Da f stetig folgt $c \ge \lim_k f(a_k) = f(x_0)$, $c \le \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) = c$ $\quad \square$