Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

November 29, 2025

3

2)

Es gilt:

$$e = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k$$

wobei die Folge $((1+\frac{1}{k})^k)_k$ monoton steigend ist.
Es gilt $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > e > (1+\frac{1}{n})^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
0 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e = && \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e && (1)\\
&& < \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n && (2)\\
&& = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}-1\right) && (3)\\
&& = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} && (4)\\
&& = e \cdot \frac{1}{n} && (5)
\end{aligned}
$$

Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2 && (6)\\
&< (e\cdot\frac{1}{n})^2 && (7)\\
&\leq e^2 \cdot \frac{1}{n^2} && (8)
\end{aligned}
$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2}$ ist somit eine Majorante der Reihe $\sum\limits_{n}^{\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2$.
Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2} = e^2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit auch die Reihe

$$\sum_{n}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} - e \right)^2$$