

Nr 3.4

Es soll gezeigt werden, dass die Bedingung $ab > 0$ eine Notwendige Bedingung für die Aussage $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \left(\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}\right)$ ist.

Sei $ad \geq cb$.

Sei $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} > \frac{cb}{db} = \frac{c}{d}$

Daraus folgt:

$$ad \geq cb$$

Es gilt:

$$bd + d^2 \leq 0 \vee bd + b^2 \leq 0.$$

Beweis nach Fallunterscheidung:

Sei $bd + b^2 \leq 0$.

$$ad \geq cb \quad (1)$$

$$\iff \frac{ad + ab}{bd + b^2} \geq \frac{cb + ab}{bd + b^2} \quad (2)$$

$$\iff \frac{a(d+b)}{(b+d)b} \geq \frac{(c+a)b}{b(b+d)} \quad (3)$$

$$\iff \frac{a}{b} \geq \frac{c+a}{b+d} \quad (4)$$

Sei $bd + d^2 \leq 0$

$$ad \geq cb \quad (5)$$

$$\iff \frac{ad + cd}{bd + d^2} \geq \frac{cb + cd}{bd + d^2} \quad (6)$$

$$\iff \frac{d(a+c)}{(b+d)d} \geq \frac{(b+d)c}{d(b+d)} \quad (7)$$

$$\iff \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{c}{d} \quad (8)$$

□

Es soll gezeigt werden, dass die Bedingung $ab > 0$ auch eine hinreichende Bedingung fuer die Aussage $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \left(\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}\right)$ ist.

Sei $ab > 0$

Sei $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} > \frac{cb}{db} = \frac{c}{d}$

Daraus folgt: $ad < cb$

Ausserdem gilt:
 $bd + d^2 > 0 \wedge bd + b^2 > 0$
Daraus folgt:

$$ad < cb \quad (9)$$

$$\iff \frac{ad + ab}{bd + b^2} < \frac{cb + ab}{bd + b^2} \quad (10)$$

$$\iff \frac{a(d + b)}{(b + d)b} < \frac{(c + a)b}{b(b + d)} \quad (11)$$

$$\iff \frac{a}{b} < \frac{c + a}{b + d} \quad (12)$$

und

$$ad < cb \quad (13)$$

$$\iff \frac{ad + cd}{bd + d^2} < \frac{cb + cd}{bd + d^2} \quad (14)$$

$$\iff \frac{d(a + c)}{(b + d)d} < \frac{(b + d)c}{d(b + d)} \quad (15)$$

$$\iff \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d} \quad (16)$$

□