UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung - Vektorräume, Basen usw.

2. Wiederholung - lineare Abbildungen

3. Matrix-Beispiele

4. Die Menge der linearen Abbildungen

5. Zusammenhang zwischen beliebigen linearen Abbildungen und Matrizen

6. Invertierbare lineare Abbildungen (Isomorphismen)

- Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n \in V$ sind eine Basis von V, wenn jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ hat:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{v}_k.$$

- Wir sagen dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind ein Erzeugendensystem falls jeder $\mathbf{v} \in V$ lässt sich als eine Linearkombinationen schreiben $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

- Wir sagen dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear unabhängig falls die einzige Linearkombination $x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$ die gleich $\mathbf{0}$ ist, ist die Linearkombination $0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_n$.
  - die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear unabhängig gdw. die folgende Eigenschaft gilt: jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ lässt sich als höchstens eine Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ darstellen.

- Insbesondere $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind eine Basis gdw $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ein Erzeugendensystem sind und linear unabhängig sind.
- $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear abhängig gdw. $\exists_i$ sodass $\mathbf{v}_i$ ist eine Linearkombination der anderen Vektoren $\{\mathbf{v}_j : j \neq i\}$.
- Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis.
- Übung: Falls $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ linear unabhängigs sind, aber kein Erzeugendensystem, dann können wir $\mathbf{v}_{n+1} \in V$ so wählen dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ linear unabhängig sind.

- Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine lineare Abbildung von V nach W ist eine Funktion $T\colon V \to W$ mit den folgenden zwei Eigenschaften.
  - $\forall_{a\in\mathbb{K},\mathbf{v}\in V}\ T(a\mathbf{v}) = aT(\mathbf{v})$
  - $\forall_{\mathbf{v},\mathbf{w}\in V} T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$.
- Eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist durch die Werte auf der Standardbasis bestimmt, d.h. $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \ldots x_nT(\mathbf{e}_n)$$

- Umgekehrt, wenn wir irgenwelche Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{K}^m$ haben, dann können wir eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definieren, durch die Formel

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$$

- Eine $m \times n$-Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein Tableau mit m Zeilen und n Spalten von Elementen von $\mathbb{K}$. Z.B. eine 4×3-Matrix sieht so aus: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

- Wenn A eine $m \times n$-Matrix ist, und $\mathbf{x}$ ein Vector in $\mathbb{K}^n$, dann definieren wir $A \cdot \mathbf{x}$ als ein Vector in $\mathbb{K}^m$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A\mathbf{x} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

- $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist äquivalent zu sagen dass $x_1, \ldots, x_n$ erfüllen das entsprechende Gleichungssystem mit n Variablem und m Gleichungen.

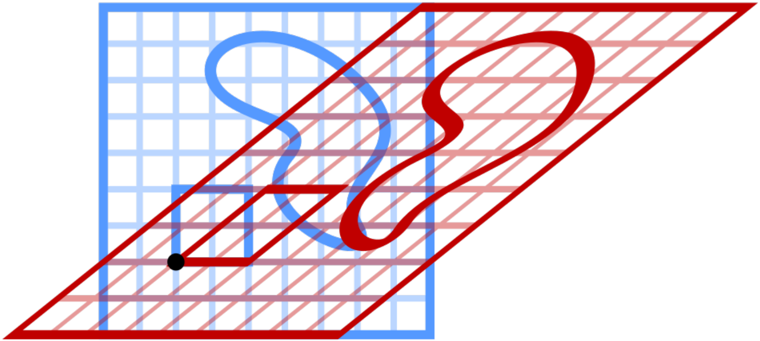
Lemma. Sei A eine $m \times n$-Matrix. Die Abbildung $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, die durch $\mathbf{v} \mapsto A \cdot \mathbf{v}$ gegeben ist, ist eine lineare Abbildung.

- Umgekehrt, wenn wir eine Lineare Abbildung $F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ haben dann können wir eine Matrix A finden so dass $F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ für all $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$. Tatsätzlich wir definieren $\mathbf{a}_i := F(\mathbf{e}_i)$ und bilden wir die Matrix A, deren Spalten die Vektoren $\mathbf{a}_i$ sind.

Satz. Jede $m \times n$-Matrix A gibt uns eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, und jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist von dieser Form. $\square$

- Beispiel: Rotation in $\mathbb{R}^2$ durch den Winkel φ ist eine lineare Abbildung mit der Matrix $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.
- Beispiel: Spiegelung in $\mathbb{R}^3$ an der Ebene XZ ist eine lineare Abbildung mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Beispiel: Die Identität Abbildung $\mathrm{Id}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ hat Matrix mit 1's auf dem Hauptdiagonal und Null-elemente sonst: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

- Beispiel: Scherung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



- Beispiel: Hamming Code Matrix über $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2$ ist durch die folgende Matrix definiert:

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Diese Matrix gibt uns eine Abbildung $\mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^7$.

- Wir denken darüber so: wir haben ein binäres Wort der Länge 4, also ein Vector $\mathbf{v}$ in $\mathbb{F}_2^4$. Dann $G\mathbf{v}$ is eine *Kodierung* dieses Worts.

- Diese Kodierung ist Fehlerdetektierend: wenn wir $G\mathbf{v}$ jemandem schicken , dann bis zu 2 Fehler können gemacht werden und trotzdem der Empfänger weiß ob die Nachricht korrekt ist oder nicht.

- Seien V und W Vektorräume. Sei $\mathcal{L}(V, W)$ die Menge aller linearen Abbildungen $T\colon V \to W$.
- Wir können lineare Abbildungen addieren: falls $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ dann $(S+T)(v) := S(v) + T(v)$.
  - Tatsätzlich $S+T$ ist eine lineare Abbildung: $(S+T)(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) = S(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) + T(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) = aS(\mathbf{v}) + bS(\mathbf{w}) + aT(\mathbf{v}) + bT(\mathbf{w}) = a(S+T)(\mathbf{v}) + b(S+T)(\mathbf{w})$.
- Wir können auch lineare Abbildungn durch Skalare multiplizieiren: $(aT)(v) := a \cdot T(v)$.
  - aT ist eine lineare Abbildung: Übung.
- Mit diesen Operationen wird $\mathcal{L}(V, W)$ zu einem Vektorraum.

- Wir haben die lineare Abbildungnen zwischen $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ mit $m \times n$-Matrizen identifiziert.
- Sei $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ oder $M_{m\times n}$ die Menge aller Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$.
- $M_{m\times n}$ ist ein Vektorraum:
  - falls wir Matrizen $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$ haben, dann definieren wir $A + B$ als die Matrix mit coeffizienten $(c_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$, wobei $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$.
  - Die Matrix $a \cdot A$ definieren wir als die Matrix mit Koeffizienten $a \cdot a_{ij}$.
- Wenn wir zwei Abbildungen haben, $S, T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, mit Matrizen jeweils A und B dann die Abbildung $S + T$ hat Matrix $A + B$.
  - Wir überprüfen es auf der Standardbasis. Seien $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}^m$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^m$
  - $(S + T)(\mathbf{e}_k) = S(\mathbf{e}_k) + T(\mathbf{e}_k) = \sum_i a_{ik}\mathbf{f}_i + \sum_i b_{ik}\mathbf{f}_i = \sum_i (a_{ik} + b_{ik})\mathbf{f}_i$. Dies zeigt, dass $S + T$ hat Matrix $A + B$.

- Wir haben schon gesehen dass jede lineare Abbildung $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist durch eine Matrix $A \in M_{m\times n}$ dargestellt.
- Jeztzt beshäftigen wir uns mit der Situation wenn $T\colon V \to W$, wobei V und W sind beliebige Vektorräume.
- Seien $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ eine Basis von V, und seien $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ eine Basis von W.
- Jede lineare Abbildung $T\colon V \to W$ ist durch die Werte $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ bestimmt.
    - Tatsätzlich, wenn $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i$ dann $T(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n aT(\mathbf{e}_i)$.
- Umgekehrt, falls wir irgendwelche Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in W$ haben, können wir eine lineare Abbildung S definieren, mit der Eigenschaft $S(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$ für alle i.
    - Tatsätzlich, definieren wir $S(\sum_i x_i\mathbf{e}_i) := \sum_i x_i\mathbf{a}_i$. Der Beweis dass S linear ist erfolgt wie für den Fall $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

- Wenn $T\colon V \to W$, und in V und W haben wir irgendwie Basen gewählt, dann können wir T als eine Matrix darstellen, im folgenden Sinn.
  - Wir definieren die Koeffizienten a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ mit $T(\mathbf{e}_i) =: a_{1i}\mathbf{f}_1 + a_{2i}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{mi}\mathbf{f}_m$.
  - Wir betrachten die Matrix A mit Koeffizienten a_{ij}.
  - Jetzt falls $\mathbf{v} \in V$ hat Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$ in der Basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, dann die Koeffizienten von $T(\mathbf{v})$ in der Basis $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ sind die Koeffizienten des Vektors $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
  - Tatsätzlich, aus der Linearität folgt:

$$T(\mathbf{v}) = T(\sum_i x_i\mathbf{e}_i) = \sum_i x_i T(\mathbf{e}_i) = \sum_i x_i \sum_j a_{ji}\mathbf{f}_j = \sum_j \left(\sum_i x_i a_{ji}\right) \mathbf{f}_j$$

aber $\sum_i a_{ji}x_i$ ist genau der j-te Koeffizient von $A \cdot (x_1, \cdots, x_n)^T$.

- Also wenn wir in V und W Basen gewählt haben, dann können wir lineare Abbildungen $V \to W$ mit Matrizen identifizieren.

- Falls eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ bijektiv ist dann können wir die inverse Abbildung $T^{-1}\colon W \to V$ betrachten.

Lemma. Falls T ist eine bijektive lineare Abbildung dann T^{-1} ist eine lineare Abbildung.

Beweis.

- Seien $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$. Wir können schreiben $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_2)$. Es folgt aus der Linearität von T dass $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.
- Es folgt jetzt $T^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = T^{-1}(\mathbf{w}_1) + T^{-1}(\mathbf{w}_2)$.
- Ähnlich zeigen wir dass $T^{-1}(a\mathbf{v}) = aT^{-1}(\mathbf{v})$ $\square$

- Eine bijektive lineare Abbildung nennen wir auch ein Isomorphismus (oder ein linearer Isomorphismus). Insbesondere die Komposition von Isomorphismen ist ein Isomorphismus. Falls T ein Isomorphismus ist, so ist auch T^{-1}.

- Wenn V, W sind so dass es ein Isomorphismus $T\colon V \to W$ existiert dann sagen wir dass V und W isomorph sind.

- Beispiel: $\mathbb{K}_{\leqslant n}[X]$ und $\mathbb{K}^{n+1}$ sind isomorph. Ein Isomorphismus $T\colon \mathbb{K}_{\leqslant n}[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ können wir so definieren:

$$T(a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

- Sind $\mathbb{K}^2$ und $\mathbb{K}^3$ isomorph? Nein (wir werden dies bald beweisen).

- Eine surjektive lineare Abbildung nennen wir auch ein (linearer) Epimorphismus, und eine injektive lineare Abbildung nennen wir auch ein (linearer) Monomorphismus.