Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

November 14, 2025

Lemma1

Beweise, dass die Folge a_n konvergiert.

Beweis

Nach Lemma 1 konvergiert a gegen einen Wert b. Sei zum Zwecke des Widerspruches $a \neq b$.

Sei ein $\varepsilon < \frac{b-a}{4}$.
Es gibt demnach ein $M \in \mathbb{N}$, sodass $|b_{2n} - a| < \varepsilon, \forall n > M$.
Da b_n gegen a konvergiert und a_n gegen b konvergiert, kann ein $N > M$ gewählt werden, sodass

$$|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

.
und

$$|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > N$$

Somit gilt:

$$b_n > a - \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$a_n > b - \frac{\varepsilon}{2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |b_{2n} - a| = & \quad | \frac{\sum_{i=0}^{2n} a_i}{2n} - a \, | && (1) \\ & \geq | \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{2n} + \frac{\sum_{i=0}^{n} a_{n+i}}{2n} | - |a| && (2) \\ & > |\frac{a}{2}| + \frac{n \cdot b}{2n}| - |\frac{\varepsilon}{4}| - |\frac{\varepsilon}{4}| - |a| && (3) \\ & && (4) \end{aligned}$$

Lemma1

Zu zeigen ist, dass a_n beschränkt ist.
Da b_n konvergiert, ist b_n nach Satz 4.5 beschränkt.
Es gilt:

$$\exists A : -A < b_n < A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

$$n \cdot (-A) < \sum_{i=1}^{n} a_i < n \cdot A \tag{6}$$

$$(n+1) \cdot (-A) < \sum_{i=1}^{n+1} a_i < (n+1) \cdot A \tag{7}$$

$$-A = (n+1)(-A) - n(-A) < \sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+1} \tag{8}$$

$$A = (n+1)(A) - n(A) > \sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+1} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Somit gilt $-A < a_{n+1} < A, \forall n \in \mathbb{N}$ und $|a_n|$ ist beschränkt von A, bzw von $|a_1|$.

Beweis

Da a_n beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge d_n von a_n, die konvergiert.

Es soll gezeigt werden, dass a_n nur einen Häufungspunkt hat.
Seien $(a_{d_k})_k$ und $(a_{e_k})_k$ Teilfolgen von $(a_n)_n$, wobei$(a_{d_k})_k$ gegen d und $(a_{e_k})_k$ gegen e konvergiert.

Es seien alle Elemente d_i der Folge $(a_{d_k})_k$ ausgewählt, für die gilt:

$$\exists m, a_{e_k} : a_m \leq d_i \leq a_{2m}, a_m \leq a_{e_k} \leq a_{2m}$$

Die Punkte d_i bilden dabei eine Teilfolge von a_n, da m beliebig groß gewählt werden kann.

Die Menge aller Häufungspunkte von a_n beträgt also 1.
Somit konvergiert a_n. Speziell muss a_n gegen a konvergieren. Würde a_n gegen einen Wert $b \neq a$ konvergieren, würde nach nr 3.2 auf Blatt 04 auch die Folge b_n gegen diesen Wert konvergieren. Dies ist nicht der Fall.