$\Rightarrow I_y : S \to K$ $\Rightarrow$ Definiere $|S|-|S_0|$ Funktionen $I_y \in U_1$ die eine Basis darstellen sollen

$$I_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Erzeugendensystem

$\Rightarrow$ zeige, dass beliebiger $f \in U$ eine Lin. Komb. von I_y

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x) \cdot I_x(x)}_{\text{einziger Summand der nicht } 0}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{y \in S \setminus S_0} f(y) \cdot I_y(x)}_{} = f(x)$$

$I_y(x)$ nimmt nur für $x = y$ den Wert 1 an.

$f(x) \cdot I_x(x) = f(x)$

$\Rightarrow$ wenn $x \in S^0$, dann gilt $y \neq x$ $\forall y$ und die Summe ist 0.

$\Rightarrow$ Da f und x beliebig, kann jeder $f \in U$ erzeugt werden

2. Linear unabhängig

Sei eine Linearkombination der Funktionen I_y, $y \in S \setminus S_0$

$$\Rightarrow \sum_{y \in S \setminus S_0} a_y \cdot I_y = 0$$

$0 \in U$

$\Rightarrow 0$ ist die 0 Funktion, jedem $x \in S$ die 0 zuordnet

$\Rightarrow$ Sei $a_{y_0} \neq 0$

$g(x) = \sum_{y \in S \setminus S_0} a_y \cdot I_y(x)$ ist an der Stelle $g(y_0)$ ungleich 0, da I_{y_0} hier eine 1, jede andere Funktion aber eine 0 zuordnet.