UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

- Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist ein Tupel $(V, +, \mu)$, wobei $+\colon V \times V \to V$, und $\mu\colon K \times V \to V$, mit Eignenschaften, die die Eigenschaften der Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ veralgemeinen.
  - Wir schreiben $+(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ als $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ und $\mu(a, \mathbf{v})$ als $a\mathbf{v}$ oder $a \cdot \mathbf{v}$.
  - Die Elemente von $\mathbb{K}$ nennen wir auch "Skalare".
  - Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nennen wir V ein komplexer Vektorraum, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, nenenn wir V ein reeller Vektorraum.
  - Jeder komplexer Vektorraum ist auch ein reeller Vektorraum.
- Beispiel: $\mathbb{K}^n$, deren Elemente sind die Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$.
- Beispiel: Die Menge $\mathbb{K}[X]$ aller Polynome über $\mathbb{K}$.

- Beispiel: Die Lösungen eines homogenen Systems

$$
\begin{aligned}
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = 0\\
&a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = 0\\
&\ldots\\
&a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = 0
\end{aligned}
$$

bilden einen Vektorraum $V \subset \mathbb{K}^n$.

- Eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$ ist eine Summe der Form

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_p\mathbf{v}_p = \sum_{k=1}^{p} a_k\mathbf{v}_k,$$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. (Insbesondere ist es ein Element in V)

- Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n \in V$ sind eine Basis von V, wenn jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination hat

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{v}_k.$$

  - ▶ Die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ werden als Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$ in der Basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ bezeichnet.

- Beispiel: In $V = \mathbb{K}^n$ haben wir die folgende Standardbasis:

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Beispiel: In $V = \mathbb{K}_{\leqslant n}[X]$ haben wir eine folgende Basis: $\mathbf{e}_0 := 1, \mathbf{e}_1 := X, \dots, \mathbf{e}_n := X^n$.

- Wir sagen dass $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ sind ein Erzeugendensystem falls jeder $\mathbf{v} \in V$ lässt sich als eine Linearkombinationen schreiben $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$.

- Wir sagen dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear unabhängig falls die einzige Linearkombination $x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$ die gleich $\mathbf{0}$ ist, ist die Linearkombination $0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_n$.
  - Die Linearkombination $0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_n$ nennen wir auch die triviale Linearkombination.
  - Andersgesagt: $\mathbf{0}$ ist eine eindeutige Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

- Wenn $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ nicht linear unabhängig sind, sagen wir auch dass sie linear abhängig sind. Das bedeute das wir können schreiben $\mathbf{0} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, wobei midestens ein Index i existiert mit $x_i \neq 0$.
- Alternative Definitionen anhand von Gleichungen: $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind ein Erzeugendensystem falls $\forall_{\mathbf{b} \in V}$ die Gleichung $X_1\mathbf{v}_1 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n = \mathbf{b}$ eine Lösung hat.
- $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear unabhängig falls die Gleichung $X_1\mathbf{v}_1 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ genau eine Lösung hat.

Proposition. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear unabhängig gdw. die folgende Eigenschaft gilt: jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ lässt sich als höchstens eine Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ darstellen.

Beweis. • $\Leftarrow$ ist klar dann die lineare Unbhängigkeit bedeutet genau dass $\mathbf{0}$ lässt sich als höchstens eine Linearkombination darstellen.

• $\Rightarrow$ Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ linear unabhängig. Sei $\mathbf{v} \in V$, und nehmen wir an dass wir zwei Darstellungen haben $\mathbf{v} = \sum x_i \mathbf{v}_i = \sum y_i \mathbf{v}_i$. Dann $\mathbf{0} = \sum (x_i - y_i)\mathbf{v}_i$, und aus der linearen Unabhängigkeit folgt dass $x_i - y_i = 0$. □

• Es folgt jetzt dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ eine Basis sind gdw $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ein Erzeugendensystem und linear unabhängig sind.

Proposition. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear abhängig gdw. $\exists_i$ sodass $\mathbf{v}_i$ ist eine Linearkombination der anderen Vektoren $\{\mathbf{v}_j : j \neq i\}$.

Beweis.

- $\Rightarrow$ Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ abhängig. Dann haben wir eine nicht-triviale Darstellung $\mathbf{0} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$. Dann existiert i sodass $x_i \neq 0$, und wir können schreiben $x_i = \sum_{j \neq i} \frac{-x_j}{x_i}\mathbf{v}_j$.
- $\Leftarrow$ Nehmen wir jetzt an dass $\mathbf{v}_i = \sum_{j \neq i} x_j\mathbf{v}_j$. Dann $\mathbf{0} = \mathbf{v}_i - \sum_{i \neq i} x_k\mathbf{v}_j$, was eine nicht triviale Linearkombination ist, weil der Koeffizient von $\mathbf{v}_1$ gleich 1 ist. Es folgt dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind linear abhängig. □

Proposition. Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis.

Beweis. • Sei $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ ein Erzeugendensystem. Falls $V = \{\mathbf{0}\}$ dann diese Folge enthält auch die leere Folge, also nehmen wir an dass $V \neq \{\mathbf{0}\}$.

• Falls $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind dann sind sie eine Basis.

• Falls nicht dann zeigen wir dass wir können einen Vektor entfernen und erhalten wir immer noch ein Erzugendensystem.

- ▶ Tatsätzlich, falls $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear abhängig sind, können wir ein Index i finden sodass $\mathbf{v}_i = \sum_{j \neq i} x_j \mathbf{v}_j$ für irgenwelche $x_j \in \mathbb{K}$.
- ▶ Sei $\mathbf{v} \in V$ beliebig. Dann können wir schreiben $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{v}_j = \sum_{j \neq i} y_j \mathbf{v}_j + y_i (\sum_{j \neq i} x_j \mathbf{v}_j)$. Dies zeigt, dass $\mathbf{v}_j$, $j \neq i$, sind auch ein Erzeugendensystem.

- Durch Wiederholung dieses Arguments erhalten wir irgendwann ein linear unabhängiges System, und damit eine Basis, oder am Ende haben wir ein Erzeugendensystem, das nur aus einem Vektor besteht.
  - Aber so ein System $\mathbf{w}$ ist auch linear unabhängig (weswegen auch eine Basis): $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ (da $V \neq \{\mathbf{0}\}$), also wir können nicht schreiben $\mathbf{0} = a\mathbf{w}$, mit $a \neq 0$. $\square$

- Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien V und W Wektorräume úber $\mathbb{K}$. Eine lineare Abbildung von V nach W ist eine Funktion $T\colon V \to W$ mit den folgenden zwei Eigenschaften.
  - $\forall_{a\in\mathbb{K},\mathbf{v}\in V}\ T(a\mathbf{v}) = aT(\mathbf{v})$
  - $\forall_{\mathbf{v},\mathbf{w}\in V} T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$.
- Wir nennen T auch eine lineare Transformation. Wenn wir betonen móchten für welche Skalare die erste Eigenschaft gilt, sagen wir auch eine “$\mathbb{K}$-lineare” Abbildung.
- Wir kónnten auch nur ein Axiom schreiben: $\forall_{a,b\in\mathbb{K},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V}\ T(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) = aT(\mathbf{v}) + bT(\mathbf{w})$.
- Beispiel: $T\colon \mathbb{R}_{\leqslant n}[X] \to \mathbb{R}_{\leqslant n-1}[X]$. Mit $T(f) := f'$. Das ist eine lineare Abbilidung weil $(f+g)' = f' + g'$, und $(af)' = af'$.
- Beispiel: jede lineare Abbiltung $T\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist durch die Formel $T(x) = ax$ gegeben. Tatsätzlich, falls T linear ist, dann gilt $T(x) = T(x\cdot 1) = xT(1)$, also wir können $a := T(1)$ nehmen.

- Jetzt betrachten wir eine algemeine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.
- So eine Abbildung ist durch die Werte auf der Standardbasis bestimmt, d.h. $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$.
  - Tatsätzlich, wenn wir $\mathbf{a}_i := T(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{K}^m$ setzen und nehmen wir ein Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, dann

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \ldots x_nT(\mathbf{e}_n)$$

- Umgekehrt, wenn wir irgenwelche Wektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{K}^m$ haben, dann können wir eine linear Abbildung $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definieren, durch die Formel

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$$

- T ist linear: $T(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)\mathbf{a}_i = \sum x_i\mathbf{a}_i + \sum y_i\mathbf{a}_i =$
$T(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) + T(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix})$,

$T(a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = T\begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} = \sum ax_i\mathbf{a}_i = a\sum x_i\mathbf{a}_i = aT(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$.

- Also eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist durch Auswahl der Vektoren $\mathbf{a}_i \in \mathbb{K}^m$ definiert, auf die die Vektoren $\mathbf{e}_i$ abgebildet werden sollenn.

- Eine $m \times n$-Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein Tableau mit m-Reihen und n Spalten von Elementen von $\mathbb{K}$. Z.B. eine 4×3-Matrix sieht so aus: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

- Wenn A eine $m \times n$-Matrix ist, und $\mathbf{v}$ ein Vector in $\mathbb{K}^n$, dann definieren wir $A \cdot \mathbf{v}$ als ein Vector in $\mathbb{K}^m$. Z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0x + 1y + 2z \\ 3x + 4y + 5z \\ 2x + 3y + 3z \\ 4x + 4y + 8z \end{pmatrix}$$

- Jetzt geben wir die allgemeine Formel für die Multiplikation $A \cdot \mathbf{x}$, wobei A eine $m \times n$-Matrix ist, und $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

- Betrachten wir erneut ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ &a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ &\dots \\ &a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m \end{aligned}$$

Dann $(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Lösung gdw. $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Lemma. Sei A eine $m \times n$-Matrix. Die Abbildung $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, die durch $\mathbf{v} \mapsto A \cdot \mathbb{V}$ gegeben ist, ist eine lineare Abbildung.

Beweis. Sei $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Dann $A(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ ist der Vektor $\begin{pmatrix} a_{11}(v_1+w_1) + a_{12}(v_2+w_2) + \ldots + a_{1n}(v_n+w_n \\ a_{21}(v_1+w_1) + a_{22}(v_2+w_2) + \ldots + a_{2n}(v_n+w_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(v_1+w_1) + a_{m2}(v_2+w_2) + \ldots + a_{mn}(v_n+w_n \end{pmatrix}$

Und $A\mathbf{v} + A\mathbf{w}$ ist der Vector

$$\begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{2n}w_n \\ \vdots \\ a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \ldots + a_{mn}w_n \end{pmatrix}.$$

Das zeigt dass $A(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w}$.

Ähnlich zeigen wir $A(a\mathbf{v}) = aA\mathbf{v}$. $\square$

- Also die Abbildung $\mathbf{v} \mapsto A \cdot \mathbf{v}$ ist linear.
- Wo werden die Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ durch diese Abbildung abgebildet?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix}.$$

- Also $\mathbf{e}_i$ wird auf den i-ten Spaltenvector der Matrix A.

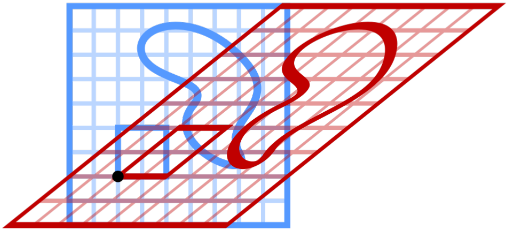
- Umgekehrt, wenn wir eine Lineare Abbildung $F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ haben, wissen wir dass sie durch die Werte auf den Standardbasiswektoren $\mathbf{e}_i$ bestimmt. Definieren wir jetzt $\mathbf{a}_i := F(\mathbf{e}_i)$, und schreiben wir $\mathbf{a}_i =: \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$. Dann köönnen wir die Matrix A betrachten, deren Spalten die Vektoren $\mathbf{a}_i$ sind, also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Dann die lineare Abbildung $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die durch $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ gegeben ist, hat die Eigenschaft dass $A\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i = F(\mathbf{e}_i)$. Es folgt dass $A = F$.

Satz. Jede $m \times n$-Matrix A gibt uns eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, und jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist von dieser Form. $\square$

- Beispiel: Rotation in $\mathbb{R}^2$ durch den Winkel φ ist eine lineare Abbildung mit der Matrix $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.
- Beispiel: Spiegulung in $\mathbb{R}^3$ an der Ebene XZ ist eine lineare Abbildung mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Beispiel: Scherung mit Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



- Beispiel: Hamming Code Matrix über $\mathbb{Z}/2$: $G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Diese Matrix gibt uns eine Abbildung $\mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^7$.

- Wir denken darüber so: wir haben ein binäres Wort der Länge 4, also ein Vector $\mathbf{v}$ in $\mathbb{K}^4$. Dann $G\mathbf{v}$ is eine *Kodierung* dieses Worts.

- Diese Kodierung ist Fehlerdetektierend: wenn wir $G\mathbf{v}$ jemandem schicken , dann bis zu 2 Fehler können gemacht werden und trotzdem der Empfänger weiß ob die Nachricht korrekt ist oder nicht.