Korollar 3.9: Für $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gilt $a_n < a_{n+1}$

$b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ gilt $b_{n+1} > b_n$

$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$

Beweis:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \frac{n}{(n-1)}$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1}$$

$$> \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n-1} = 1$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1$$

□

Definition 3.10: Wir definieren $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

die ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{-a : a\in\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}_0$

die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p,q\in\mathbb{Z} \text{ mit } q\neq 0\right\}$

die irrationalen Zahlen $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Satz 3.11: (1) Seien $a,b\in\mathbb{Z}$ dann gilt: (i) $-a\in\mathbb{Z}$

(ii) $a+b\in\mathbb{Z}$

(iii) $a\cdot b\in\mathbb{Z}$

(2) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ist ein Körper.

Beweis: Übung. (man nutzt Satz 3.4 und $-(-a)=a$ sowie $a>0 \Leftrightarrow -a<0$)

□

Man könnte hoffen, dass wir mit $\mathbb{Q}$ und ohne das Vollständigkeitsaxiom auskommen, aber:

Definition: $p\in\mathbb{R}$ heißt Primzahl falls $p\in\mathbb{N}$, $p>1$ und $p=n\cdot m$ mit $n,m\in\mathbb{N}$ impliziert $n=1$ oder $m=1$.

Behauptung: Jede natürliche Zahl lässt sich als eindeutiges Produkt von Primzahlen schreiben $\Rightarrow$ siehe LA

Proposition 3.12: Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$ dann gilt entweder $n = 2k$ ("n ist gerade") oder $n = 2k+1$ ("n ist ungerade") für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: $M := \{ k \in \mathbb{N} : 2k \geq n \}$. $M \neq \emptyset$ da $2n \in M$

Nach Satz 3.6. existiert ein kleinstes $k_0 \in M$. d.h. $2k_0 \geq n$.

Falls $2k_0 = n$ sind wir fertig also gilt $2k_0 > n$. Setze. $\bar{k} := k_0 - 1$

dann folgt also $2\bar{k} < n < 2\bar{k} + 2 = 2k_0$ wir subtrahieren. $2\bar{k}$

und erhalten $0 < n - 2\bar{k} < 2$ bzw $1 \leq n - 2\bar{k} < 2 \overset{\text{Korollar 3.5}}{\Rightarrow} n = 2\bar{k} + 1$ □

Folgerung 3.13: Jede $n \in \mathbb{N}$ lässt sich eindeutig zerlegen in
$n = 2^m u$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, u ungerade.

Nun $A(n)$ ist richtig für $n_0 = 1$. mit $m = 0, k = 0$

Nun sei $A(n)$ richtig für $n \leq n_0$ nun. folgt für $n_0 + 1$

nach Prop. 3.12 $n_0 + 1 = 2k$ oder $n_0 + 1 = 2k + 1$

Im zweiten Fall sind wir fertig. Falls $n_0 + 1 = 2k$.

Dann gilt. $k < n_0 \Rightarrow k$ hat eine eindeutige Zerlegung

$k = 2^m u \Rightarrow n_0 + 1 = 2^m u$

Die Zerlegung ist eindeutig da. $2^m u = 2^{\tilde{m}} \tilde{u}$

wir nehmen an $m \geq \tilde{m} \Rightarrow 2^{m - \tilde{m}} u = \tilde{u}$

aber da $\tilde{u}$ ungerade folgt $u = \tilde{u}$.

Satz 3.14: $\nexists\, q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$

Beweis: Annahme $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. da $(-q)^2 = q^2 = 2$
können wir ohne einschränkung annehmen, dass $q > 0$

d.h. $q = \frac{a}{b}$ [Nach Folgerung 3.13 können wir annehmen, dass entweder a oder b ungerade]

$\frac{a^2}{b^2} = 2 \iff a^2 = 2b^2$

da eine ungerade Zahl im Quadrat ungerade.

$\Rightarrow a$ ist gerade $\Rightarrow a = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 4m^2 = 2b^2 \Rightarrow 2m^2 = b^2 \Rightarrow b$ ist gerade $\lightning$

Damit können in $\mathbb{Q}$ nicht alle algebraischen Gleichungen gelöst werden!

Nun werden wir zum ersten Mal das Vollständigkeitsaxiom nutzen.

erstmal nur in $\mathbb{N}$.

Satz 3.15: (Satz von Archimedes)

Zu $a \in \mathbb{R}$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

Beweis: Annahme $\nexists$ $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$ d.h. a ist eine obere Schranke von $\mathbb{N}$

$\overset{(V)}{\Rightarrow} \exists \sup \mathbb{N} = S < \infty$

Da $S - 1 < S$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ mit $S - 1 < n$

$\Rightarrow S < n+1$ aber $n+1 \in \mathbb{N}$ und damit wär S keine obere Schranke $\square$

3.16 Bemerkung: Satz 3.8 ist äquivalent zu $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis: „$\Rightarrow$" Aus Satz 3.8 $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \varepsilon^{-1} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

„$\Leftarrow$" sei $a > 0$ gegeben $\Rightarrow \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{a} > \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow n > a$ $\square$

Korollar 3.17: $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$. d.h. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ $\exists q \in \mathbb{Q}$,

so dass $a < q < b$.

Beweis: Wir können $b > 0$ annehmen sonst betrachte $\tilde{b} = -a$, $\tilde{a} = -b$.

Falls $a < 0$ wähle $q = 0$. Nach der Bemerkung $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ mit

$0 < \frac{1}{n} < b - a$. Die Menge $\{k \in \mathbb{N} : k \cdot \frac{1}{n} > a\}$ ist nach Satz 3.8

nicht leer und damit existiert ein kleinstes Element m.

mit $\frac{m}{n} > a$ aber $\frac{m-1}{n} \leq a$ d.h. $\frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < \underbrace{a + (b-a)}_{= b}$ $\square$

[Damit ist eine "Vervollständigung" von $\mathbb{Q}$ und eine Möglichkeit.] Wir werden später in einer Hörsaalübung zeigen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist im Gegensatz zu $\mathbb{R}$.

Satz 3.18: $\forall c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, so daß $x^n = c$. Wir bezeichnen x mit der $n$ten Wurzel von c und schreiben $x = \sqrt[n]{c}$.

Beweis: für $n=2$ die Umformulierung ist Übungsaufgabe siehe Aufgabe 3.1 (3)

sei $c \neq 0$ für $c=0$ ist $x=0$ eine Lösung. falls $x \neq 0 \Rightarrow$ $x^n \neq 0$ d.h. x ist keine Lösung.

Eindeutigkeit: Sei $x_1^2 = c$ & $x_2^2 = c$ $\Rightarrow$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)\underbrace{(x_1 + x_2)}_{>0} = 0$$

da $x_1, x_2 > 0$ $\Rightarrow$ $x_1 - x_2 = 0$ □

Existenz: Sei $M := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq c\}$

$M \neq \emptyset$ da $0 \in M$

M ist nach oben beschränkt, da für $x > c+1$

folgt $x^2 \geq (c+1)^2 \geq c+1 > c$ und damit $x \notin M$.

Behauptung: $x_0 := \sup M$ löst $x^2 = 1$

Beweis: Annahme $x_0^2 < c$. Sei $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{c^2 - x_0^2}{2(2x_0+1)}, 1\right\}$

dann wähle
$$(x_0 + \varepsilon)^2 = x_0^2 + 2x_0\varepsilon + \varepsilon^2$$
$$= x_0^2 - c^2 + \varepsilon \cdot (2x_0 + \varepsilon) + c^2$$
$$\leq -\frac{c^2 - x_0^2}{2} + c^2 < c^2 \Rightarrow x_0 + \varepsilon \quad ↯$$

Annahme $x_0^2 > c$, da $x_0 = \sup M$ $\exists$ $x > x_0 - \varepsilon$ für $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{x_0^2 - c^2}{2(2x_0+1)}, 1\right\}$

$$\Rightarrow x^2 \geq (x_0 - \varepsilon)^2 = x_0^2 - c^2 - 2\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 + c^2$$
$$\geq (x_0^2 - c^2) - 2\varepsilon x_0 + c^2 \geq \frac{x_0^2 - c^2}{2} + c^2$$
$$> c^2 \quad ↯$$
□

Wir kommen später nochmal wieder zurück um die Berechnung von $\sqrt{x}$ bzw. $\sqrt[n]{x}$ zu studieren.

Bemerkung: Sei $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ dann gilt: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Wir definieren:

$$a^{-m} := (a^m)^{-1} = \frac{1}{a^m} \quad (\text{damit ist } a^{m-m} = a^0 = 1 \text{ wahr})$$

$\Rightarrow$ $$a^{k+\ell} = a^k \cdot a^\ell \quad \forall\, k, \ell \in \mathbb{Z}$$

und $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Dies motiviert: $a^{\frac{1}{k}}$ für $\sqrt[k]{a}$

Definition 3.20: $\forall\, q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $a \geq 0$ setzen wir $a^q = (\sqrt[n]{a})^m$

Bemerkung: Man überprüft schnell, dass

$$a^{q+r} = a^q \cdot a^r$$
$$a^{qr} = (a^q)^r \quad \forall\, q, r \in \mathbb{Q}$$
$$a \geq 0.$$

4. Folgen, Reihen und Grenzwerte

Definition 4.1: Eine Folge von reellen Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

d.h. wir ordnen jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zu.

Wir schreiben $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(e2) $a_n = (-1)^n$ oder $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(1, -1, 1, -1, \ldots)$

Beispiel: (e1) $a_n = n$ oder $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(1, 2, 3, 4, \ldots)$

Harmonische Folge (e3) $a_n = \frac{1}{n}$ oder $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$

oder

$a_n = \frac{1}{n^s}$ für $s \in \mathbb{Q}$

Geometrische Folge (e4) $a_n = a^n$ für $a \in \mathbb{R}$ oder (a^n) oder $(a, a^2, a^3, \ldots)$

(e5) $a_n = A + 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_n$ für $a \in \mathbb{R}$

und a_n ist die Dezimalentwicklung von a bis zur

(e6) $a_n = \sqrt[n]{a}$ für $a > 0$ oder $(\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \ldots$

(e7) $a_n = \sqrt[n]{n}$; $(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}}$

$\sqrt[n]{n^4}$ Übung. (e)

Mit Hilfe der Vollständigen Induktion können wir Folgen auch rekursiv definieren:

d.h. (i) $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ wird explizit angegeben

(ii) a_n lässt sich mittels einer Vorschrift $V(n\ )$ aus $\{a_\ell : \ell \leq n-1\}$ berechnen für $n > n_0$.

Beispiel: (e8) Fibonacci-Zahlen

$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

d.h. $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$

Definition 4.2: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst konvergent gegen $a\in\mathbb{R}$, so dass

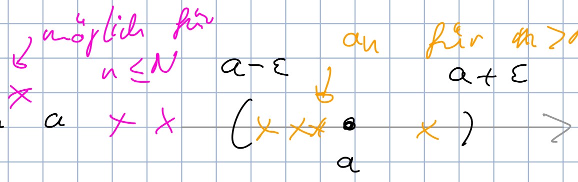
$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N}: \quad |a_n-a|<\varepsilon \quad \forall n>N.$$

Die Zahl a heißt Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; $a_n \to a \ (n\to\infty)$

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

Bemerkung 4.3: der ε-Ball um a



$$B_\varepsilon(a) := \{x\in\mathbb{R}: |x-a|<\varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

wird auch ε-Umgebung von a genannt.

Definition 4.2 besagt geometrisch:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \text{ so dass } \quad a_n\in B_\varepsilon(a) \quad \forall n>N$$

Beispiel: (e3) konvergiert gegen 0

$0<\frac{1}{N}<\varepsilon^{\frac{1}{s}}$

Bew: Nach Bemerkung 3.16 $\exists N\in\mathbb{N}$ mit $0<\frac{1}{N}<\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad |a_n-0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \forall n>N.$$

$$|a_n| = \frac{1}{n^s} < \frac{1}{N^s} < \varepsilon$$

(e2) konvergiert nicht

Bew: Annahme $a_n \to a$. Wähle $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ und $N>0$, so dass

$$|a_n-a|<\varepsilon \quad \forall n>N$$

$$\Rightarrow \quad 2 = |a_n - a_{n+1}| \le |a_n-a| + |a_{n+1}-a| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon < 1 \quad ↯.$$

Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig.

Satz 4.4: Falls eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a und b konvergiert, so gilt $a=b$.

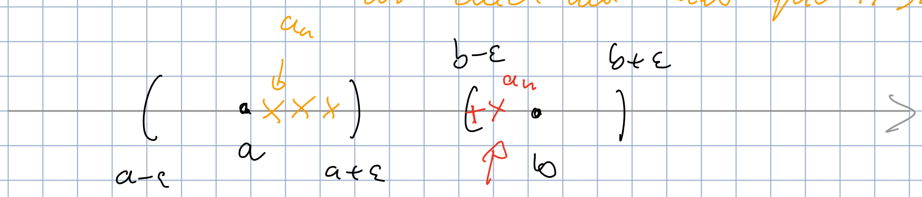
Beweis: Annahme $a \neq b$ d.h. $|a-b| > 0$

Wähle $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}|a-b|$ und $N > 0$ so dass

- $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > N$
- $|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall\, n > N$

aber $|a-b| < |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b| \Rightarrow \lightning$

aber auch nur hier für $n > N$ $\square$



Beispiele: (e4)

Behauptung:

mit $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 < a < 1 \quad (1) \\ 1 & \text{für } a = 1 \quad (2) \\ \text{nicht existent} & \text{sonst.} \quad (3) \end{cases}$$

Bew: (2) ist klar da $1^n = 1\ \forall n$. genauso $a = 0$

(1) Sei nun $0 < |a| < 1 \Rightarrow |a|^{-1} > 1$ d.h. Setze $d = |a|^{-1} - 1 > 0$

dann folgt aus Bernoulli: $|a|^{-n} = (1+d)^n \geq (1+nd) \geq nd$

$\Rightarrow |a|^n \leq \frac{1}{(1+nd)} \leq \frac{1}{n\,d} < \varepsilon$ falls $n > N > \varepsilon d$. $\square$

Satz 4.5: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Wähle $\varepsilon = 1$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1 \; \forall n \geq N$.

Dann folgt für $n > N$ $\quad |a_n| \leq |a| + |a - a_n| \leq |a| + 1$.

Damit haben wir gezeigt, dass falls $A := \max\{|a_i| : i \leq N\}$

$$|a_n| \leq \max\{A, |a|+1\}$$

□

(e4) (3) $a = -1$ entspricht der Folge aus (e2). Für $|a| = 1 + x > 1$

d.h. $x > 0$ folgt.

$$|a^n| = |a|^n = (1+x)^n \underset{\text{Bernoulli}}{>} 1 + nx > C$$ für n genügend groß,

d.h. $|a^n|$ ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ a_n nicht konvergent.

(e5) Sei $1 \leq a \Rightarrow 1 \leq a^{\frac{1}{n}} < a$ und

$$a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \Big(1 + \underbrace{(a^{\frac{1}{n}} - 1)}_{\geq 0}\Big)^n \geq 1 + n\,(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$\Rightarrow \quad |a^{\frac{1}{n}} - 1| \leq \frac{a}{n} \longrightarrow 0$$

□

Den Fall $a < 1$ bzw $a^{-1} > 1$ werden wir mittels des Nächsten Satzes auf diesen zurückführen. da

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(a^{-1})^{\frac{1}{n}}}$$

(e6) $n = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1 + x_n)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x_n^\ell \geq \binom{n}{2} x_n^2$

& $\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2} \Rightarrow x_n^2 \leq \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1} \longrightarrow 0$ $\square$

(e7) nicht konvergent z.B. $f_n \geq \frac{n}{2} \quad \forall \quad n \geq 2$.

$f_1 = 1 > \frac{1}{2}$; $f_2 = 1 > \frac{n}{2}$; $f_n \underset{n>3}{=} f_{n-1} + f_{n-2} \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$

$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}(n-3)$ $\square$

Übung

- $n^k q^n$
- $C^n a_n^{1+\delta} \geq a_{n+1}$

4.1. Rechenregeln für konvergente Folgen

Wir hatten schon gesehen dass

a_n konvergent $\Rightarrow$ a beschränkt

Satz 4.6:

Seien (a_n), (b_n) zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

dann gelten:

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = a \cdot b$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

(iv) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

Beweis: (i) Sei $1 > \varepsilon > 0$ gegeben $\exists N_a, N_b > 0$ s.d.

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N_a$

$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N_b$

$\Rightarrow$ für $n \geq \max\{N_a, N_b\}$

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii) Sei $1 > \varepsilon > 0$ gegeben $\exists N_a, N_b > 0$ s.d.

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ $\forall n > N_a$

$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$ $\forall n > N_b$

$\Rightarrow$ $|a_n| < |a| + 1$ & $|b_n| < |b| + 1$ $\forall n > \max\{N_a, N_b\}$

und $|a_n b_n - ab| \leq |a_n| \, |b_n - b| + |b| \, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(iii) Sei $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{|b|}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ und wie zuvor $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\min\{\frac{1}{|b|}, 1\}$
$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\min\{\frac{|a|+1}{|b|^2}, 1\}$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq |a_n| \cdot \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| + \frac{1}{|b|}|a_n - a|$$

$$\leq \frac{|a_n|}{|b_n||b|}|b - b_n| + \frac{1}{|b|}|a_n - a|$$

da $|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ $$< 2\frac{(|a|+1)}{|b|^2}|b - b_n| + \frac{1}{|b|}|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \max\{N_a, N_b\}$$

(iv) Dies folgt direkt, aus $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ (siehe Satz 2.7 (5)) $\square$

Bemerkung (i) & (ii) impliziert dass

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n + \mu b_n = \lambda a + \mu b \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

da (ii) ergibt $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a \quad (b_n \equiv \lambda)$

$\lim_{n\to\infty} \mu b_n = \mu b \quad (a_n \equiv \mu)$

(iv) impliziert, dass

$(a_n)_n$ ist eine Nullfolge $\iff$ $(|a_n|)_n$ ist eine Nullfolge.

[Die Menge der konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum d.h. Wenn wir mit $X := \{(a_n)_n : (a_n) \text{ konvergent}\}$ die Menge aller konvergenten Folgen betrachten, so folgt das

$$(a_n)_n, (b_n)_n \in X \Rightarrow (\lambda a_n + \mu b_n)_n \in X \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Theoretisch können wir sogar Satz 4.6 (ii) hinzunehmen und erhalten, dass X zusätzlich ein Ring ist.]

Satz 4.7: (Monotonie der Grenzwerte)

Seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$ und $a_n \leq b_n$. dann folgt $a \leq b$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, dann existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > N_a$$

$$|b_n - b| < \varepsilon \quad \forall\, n > N_b$$

$$\Rightarrow \quad (b-a) \geq (b_n - a_n) - |b_n - b| - |a_n - a| \geq -2\varepsilon \quad \forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig folgt $b - a \geq 0$ $\square$

Bemerkung: $b_n > a_n \ \forall\, n$ impliziert NICHT $b > a$

Bsp: $b_n = \frac{1}{n}$ und $a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Folgerung: Falls $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit $A \leq a_n \leq B \ \forall n$, dann folgt $A \leq \lim_n a_n \leq B$

Beispiel: $2 \leq \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 \leq 3$

Satz 4.8:

Seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_n a_n = a = \lim_n b_n \quad \text{und} \quad (c_n)_n \quad \text{mit} \quad a_n \leq c_n \leq b_n,$$

dann folgt $\quad \lim_n c_n = a.$

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ beliebig wähle N_a, N_b wie zum d.h.

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_a$$

$$|b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_b$$

und damit $\forall n > \max\{N_a, N_b\}$

$$a - \varepsilon \leq a_n + \underbrace{|a_n - a| - \varepsilon}_{\geq 0} \leq c_n \leq b_n \leq a + |b_n - a| \leq a + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \max\{N_a, N_b\} \qquad \square$$

Beispiel: (1) Sei $s \in \mathbb{Q}$ mit $k \leq s \leq k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n^k} \leq \sqrt[n]{n^s} \leq \sqrt[n]{n^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^s} = 1$$

(2) Sei $s \in \mathbb{Q}$ mit $s \leq k$, $k \in \mathbb{N}$

und $-1 < x < 1$ dann folgt aus

$$0 \leq n^s |x^n| \leq n^k |x^n|$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} n^s x^n = 0$$

4.2. Unendliche Reihen.

Definition 4.9: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ein Folge reeller Zahlen.

Durch

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

wird $(a_k)_k$ eine neue Folge $(s_n)_n$ zugeordnet.

Wir nennen (s_n) eine unendliche Reihe (kurz Reihe).

wir schreiben

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots .$$

(a_n werden Glieder, s_n Partialsummen genannt.)

Falls $(s_n)_n$ konvergiert heißt die Reihe konvergent. und

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ heißt Wert der Reihe.}$$

Bemerkung: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ steht sowohl für die Reihe $(s_n)_n$ als auch für den Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Beispiel (geometrische Reihe): $a_k = a^k$ für $a \in \mathbb{R}$.

(mit der Konvention $0^0 = 1$ d.h. für $a = 0 \Rightarrow s_n = 1 \ \forall n$)

Sei $|a| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$

Beweis: $(1-a)\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = 1 - a^{n+1}$

d.h. $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Nach Satz 4.6 folgt $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-a}$.

Bemerkung 4.10: Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich als Reihe (s_n) darstellen. :

Definiere $b_k = a_k - a_{k-1}$ für $k \geq k$ & $b_0 = a_0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n.$$

Eine solche Summe nennt man Teleskopsumme.

Beispiel: $a_k = \frac{k}{k+1} \Rightarrow b_0 = 0$

$$b_k = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \frac{k^2-(k^2-1)}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$\Rightarrow$ $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 0$

bzw. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

4.3 Monotone Folgen und bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$

Definition 4.11: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ $(-\infty)$ (wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $(= -\infty)$) falls
$\forall k \in \mathbb{R} \; \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $a_n \geq k$ $(\leq)$ $\forall n > N$.

Bemerkung:
- Wir haben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} -a_n = -\infty$
- Eine Folge kann nicht konvergent und bestimmt divergent sein.

Proposition 4.12: Wir haben die folgende Äquivalenz

$(a_n)_n$ ist eine Nullfolge $\iff$ $|a_n|^{-1}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n^{-1}| = +\infty$

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ $\exists N$ mit $|a_n| < \frac{1}{k}$ $\forall n > N$

$\Rightarrow |a_n|^{-1} > k \quad \forall n > N$.

„$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N$ mit $|a_n|^{-1} > \frac{1}{\varepsilon}$ $\forall n > N$

$\Rightarrow |a_n| < \varepsilon \quad \forall n > N$ $\square$

Definition 4.13: Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt monoton fallend (monoton wachsend) falls $a_n \leq a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Satz 4.14: Jede monotone Folge konvergiert oder divergiert bestimmt.

Beweis:

Behauptung: Wir können annehmen, dass $(a_n)_n$ monoton wachsend.

Falls (a_n) monoton fallend, so ist $(-a_n)_n$ ist monoton wachsend..

Falls wir den Satz für monoton wachsende Folgen gezeigt haben

$\Rightarrow$ entweder $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty \overset{\text{Bemerkung}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

oder $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = a \overset{\text{Satz 4.6.}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = -a$

Sei (a_n) nun eine monoton wachsende Folge.

Behauptung: Falls $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

„$\Leftarrow$" ist offensichtlich; „$\Rightarrow$" Sei $k > 0$. Da $\{a_n\}$ nicht beschränkt $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > k$ $\Rightarrow$ $\forall n > n_0$ gilt $a_n \geq a_{n_0} > k$

Behauptung: Falls $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ existiert.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow$ $a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke $\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_N$

$\Rightarrow$ $a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a$ $\forall n > N$

$\Leftrightarrow$ $0 \leq a_n - a \leq \varepsilon$ $\forall n > N$ $\square$

Bemerkung: Wir haben gesehen, dass für $(a_n)_n$ monoton wachsend (fallend) $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup_n a_n$

$(\inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = \inf a_n)$

Beispiel

Eulersche Zahl:

Wir erinnern uns, dass die Folge $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ monoton wachsend ist.
und $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ monoton fallend.

d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert.

$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ existiert.

Behauptung: $a = b = e$

Beweis: Wir haben $a_n \le b_n$ und $0 \le b_n - a_n = (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}-1)$

$$= a_n \cdot \frac{1}{n} = b_n \left(\frac{a_n}{b_n}\right)\cdot\frac{1}{n} = b_n \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\le \frac{e}{n} \le \frac{3}{n} \quad \text{für } n > 7$$

Nach Satz 4.7 gilt

$$0 \le b - a \le \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \le 0$$

$\square$

Definition 4.15: (Limes superior, Limes inferior)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_m : m \ge n\} \quad (1)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_m : m \ge n\}. \quad (2)$$

Bemerkung: Die Grenzwerte (1) & (2) sind wohldefiniert:

Wir definieren

$$b_n = \inf\{a_m : m \ge n\} \le a_n \le c_n = \sup\{a_m : m \ge n\}.$$

$(b_n)_n$ ist monoton wachsend, (c_n) monoton fallend und damit existieren ihre Grenzwerte.:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \sup_{m\geq n} a_m$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_n \inf_{m\geq n} a_m.$$

Beweis: wähle $\varepsilon > 0$
$\exists N$: $c_n < a + \varepsilon$
$b_n > a - \varepsilon \quad \forall n > N$
$\Rightarrow a - \varepsilon < b_n < a_n < c_n < a + \varepsilon$

- eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann wenn ist $c_\infty = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = b_\infty$

4.4. Cauchy-Folgen / Cauchy-Kriterium.

Bem: Wie können wir überprüfen ob eine Folge konvergiert. ohne den Grenzwert zu kennen?

Definition 4.16: Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn sie das Cauchy-Kriterium erfüllt:

(C) $\quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \; \forall n,m > N.$

Satz 4.17: Ein Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau, dann wie sie eine Cauchyfolge ist.

Bemerkung: Das Cauchy-Kriterium gibt uns die Möglichkeit zu bestimmen, ob eine Folge konvergiert ohne den Grenzwert zu kennen.

Bemerkung: Ein "metrischer Raum", bei uns $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Beweis: "$\Rightarrow$" d.h. wir nehmen an, dass $(a_n)_n$ konvergent ist d.h.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert.

Sei $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon \quad \forall n,m > N.$

"$\Leftarrow$" 1. Schritt: Jede Cauchyfolge ist beschränkt. und damit $\limsup_n a_n < \infty$

Der limsup existiert auf jeden Fall, aufgrund der Supremumsvollständigkeit

2. Schritt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a = \limsup_n a_n$

zu Schritt 1: Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m > N.$$

$$\boxed{\text{d.h.} \quad |a_n| \leq |a_{N+1}| + 1 \qquad \forall\, n > N}$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| < \underbrace{\max\{\, |a_i| + 1 : i = 1, \dots, N+1 \}}_{=:A} < \infty.$$

Insbesondere gilt. $a_n < A \;\; \forall n.$ und damit

$$a = \limsup_{n\to\infty} a_n \leq A.$$

die Folge der sup konvergiert gegen lim sup

zu Schritt 2: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $c_n = \sup\{a_m : m \geq n\}$

Da $\limsup_n a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$. existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit.

$$|c_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, n > N_1.$$

$\Rightarrow |c_{N_3} - a| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow c_{N_3} < \frac{\varepsilon}{3} + a$

$\Rightarrow c_{N_3} - \frac{\varepsilon}{3} < a$

$c_{N_3} \geq a$

Wähle $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, n,m \geq N_2$.

Sei $N_3 = \max\{N_1, N_2\} + 1$.

Da $c_{N_3} = \sup\{a_m : m \geq N_3\} < \infty$ existiert $N_4 \geq N_3$

mit $c_{N_3} \geq a_{N_4} > c_{N_3} - \frac{\varepsilon}{3}$.

Sei $n > N_4$

$$\Rightarrow \quad |a_n - a| \leq |a - c_{N_3}| + |c_{N_3} - a_{N_4}| + |a_{N_4} - a_n|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$

Beispiel / Übung: $\exists\, 0 < \theta < 1$:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $|a_{n+1} - a_n| < \theta\, |a_n - a_{n-1}|$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ ist eine Cauchyfolge $\Rightarrow a_n$ ist konvergent.

4.5. Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Definition 4.16: (Teilfolge) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_k$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, d.h. $n_k < n_{k+1}$ $\forall k$. dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_n$.

Bemerkung: Falls $(a_n)_n$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $(a_{n_k})_k$ eine Teilfolge so gilt.

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Die Umkehrung gilt nicht z.B. $b_n = (-1)^n$:

$(b_{2k})_k = (1)_k$ konvergiert aber b_n nicht.

Definition 4.17: Sei (a_n) eine Folge so heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt falls eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ existiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Lemma 4.18: Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Dann gilt.

a ist ein Häufungspunkt $\iff$ jeder ε-Ball um a enthält unendlich viele a_n.

Beweis: Übung.

Beispiele: $(a_n) = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Rightarrow$ Häufungspunkt $-1, 1$.

$$(a_n = n + (-1)^n n + \tfrac{1}{n} = \begin{cases} 2n + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

hat den Häufungspunkt 0.

Bemerkung: Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungswert.

Satz 4.18: (Satz von Bolzano Weierstrass)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, dann existiert eine konvergente Teilfolge:

IDEE: DIE IDEE IST ZU ZEIGEN, DASS $\limsup a_n = b$ EIN HÄUFUNGSPUNKT IST.

Beweis: Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow -\infty < \limsup a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b < \infty$

wobei $b_n = \sup\{a_m : m \geq n\}$. $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup a_n = b$

Behauptung: Wir finden eine Teilfolge mit.   Differenz von a_n und b_n geht immer weiter gegen 0

(1) $|a_{k(n+1)} - b_{k(n)+1}| < \frac{1}{n}$, $k(n+1) \geq k(n)+1$

Die Behauptung impliziert den Satz da.

jede Teilfolge von b_n konvergiert gegen b

$b_{k(n-1)} - \frac{1}{n} \leq \underbrace{a_{k(n)} \leq b_{k(n)}}_{\text{Ungleichung steht aufgrund Definition von } b_n}$ $\Rightarrow$ Sandwich-Satz

und die linke und rechte Seite konvergieren gegen b damit konvergiert $a_{k(n)}$ gegen b.

Beweis der Behauptung: (Konstruktion von $k(n)$ durch Induktion)

Wähle $k(0) = 0$ und $k(1) \in \mathbb{N}$, so dass

$b_1 - 1 < a_{k(1)} < b_1$.   IH: $b_{k(n-1)+1} \geq a_{k(n)} \geq b_{k(n-1)+1} - \frac{1}{n}$

Annahme. $k(n)$ ist gewählt. $\Rightarrow \exists\, k(n+1) \geq k(n)+1$ so dass.

$b_{k(n)+1} = \sup\{a_m : m \geq k(n)+1\} \geq a_{k(n+1)} \geq b_{k(n)+1} - \frac{1}{n}$.

$\Rightarrow (a_{k(n)})_n$ existiert.   da $k(n)+1 \leq k(n+1)$ $\square$

wir haben gezeigt, dass

Bemerkung 1) Falls $-\infty < \limsup a_n < +\infty$

so ist $\limsup a_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(genauso für $\liminf a_n$)

2) Sei H die Menge aller Häufungspunkte

So gilt $\sup H = \limsup a_n$ & $\inf H = \liminf a_n$

4.6: Konvergenzkriterien für Reihen.

W.d.h. sei $\left(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \right)_n$ eine Reihe. Wir sagen eine Reihe konvergiert g.d.w. $(s_n)_n$ konvergent.

Bemerkung 4.22 / Korollar zu 4.17:

$\sum_n a_n$ konvergiert $\iff$ (s_n) konvergiert $\iff$ (s_n) ist eine Cauchyfolge $\iff$

(1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| = |S_m - S_n|$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| = |s_m - s_n| < \varepsilon \quad \forall m \geq n > N.$$

Korollar 4.23: $\sum_n a_n$ konvergiert $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge.

(d.h. $|a_n| \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ ist ein notwendiges Kriterium aber kein hinreichendes!)

Beweis: Wähle in (1) $m = n+1$.

Vergleichstheorem für Folgen: falls $a_n \leq b_n$ $\Rightarrow$ $\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$

genauso falls $a_n \leq c_n \leq b_n$ und $\sum a_n = \sum b_n$ $\Rightarrow$ $\sum c_n = \sum a_n = \sum b_n$.

Satz 4.24 (Majorantenkriterium)

Seien $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ Reihen mit $|a_n| \leq b_n \ \forall n$ und $\sum_n b_n$ konvergent.

$\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ konvergent (mit $\left| \sum_n a_n \right| \leq \sum_n b_n$)

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\left(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \right)_n$ Cauchy.

Sei $\left(\sigma_n = \sum_{k \leq n} b_k \right)_n$ die Folge der Partialsummen zu $\sum_n b_n$.

Da $(\sigma_n)_n$ konvergent: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$.

$$\Rightarrow \quad |s_n - s_m| = \left| \sum_{\ell=n+1}^{m} a_n \right| \leq \sum_{\ell=n+1}^{m} |a_n| \leq \sum_{\ell=n+1}^{n} b_n = |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon.$$

□

⚠ Notwendige Bedingung | $|a_n| \to 0 \quad (n\to\infty)$

Majorantenkriterium $\to$ | $|a_n| \le b_n$ & b_n konvergent.

Cauchy-Verdichtungskriterium | $a_n \ge 0$; a_n monoton fallend: $\quad \sum a_n$ konvergent $\iff \sum_n 2^n a_{2^n}$ konvergent

$\to$ Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Leibnitzkriterium | $a_n \ge 0$; a_n monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

Wurzelkriterium

Quotientenkriterium

Satz 4.28 (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_n$ eine Folge, falls $(w1)$ $\exists N \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{|a_n|} \le \theta < 1 \quad \forall n > N$

$$\Rightarrow \sum_n a_n \text{ absolut konvergent}$$

$(w2)$ $\exists N \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{|a_n|} \ge \lambda > 1 \quad \forall n > N$

$$\Rightarrow \sum_n a_n \text{ nicht konvergent.}$$

Satz 4.29 (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_n$ eine Folge, falls $(q1)$ $\exists N \in \mathbb{N}: |a_n| > 0; \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le \theta < 1 \quad \forall n > N$

$$\Rightarrow \sum_n a_n \text{ absolut konvergent.}$$

$(q2)$ $\exists N \in \mathbb{N}: |a_n| > 0; \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ge \lambda > 1 \quad \forall n > N$

$$\Rightarrow \sum_n a_n \text{ nicht konvergent.}$$

Bemerkung:

$(w1) \iff (w1)^*: \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \theta^* < 1$

$(q1) \iff (q1)^*: \quad \exists N \in \mathbb{N}: |a_n| > 0 \;\forall n > N \;\&\; \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \theta^* < 1$

$(w2) \iff (w2)^*: \quad \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda^* > 1$

$(q2) \iff (q2)^*: \quad \exists N \in \mathbb{N}: |a_n| > 0 \;\forall n > N \;\&\; \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \theta^* > 1$

Beweis der Bemerkung: (Wir zeigen für $(w1)$ & $(w2)$. der Fall $(q1)$ & $(q2)$ ist analog)

$(w1) \Rightarrow (w1)^*$: ist offensichtlich

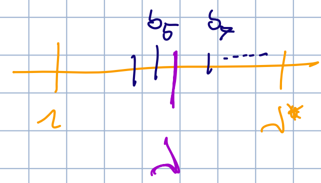
$(w1)^* \Rightarrow (w1)$: Wähle $1 > \theta = \frac{\theta^*+1}{2} > \theta^*$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_n \sup_{m>n} \sqrt[m]{|a_m|}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \quad \sup_{m>N} \sqrt[m]{|a_m|} \leq \theta \Rightarrow (w1) \text{ gilt.}$$

$(w2) \Rightarrow (w2)^*$: ist offensichtlich.

$(w2)^* \Rightarrow (w2)$: Wähle $1 < \lambda = \frac{\lambda^*+1}{2} < \lambda^*$



$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sup_n \overbrace{\inf_{m>n} \sqrt[m]{|a_m|}}^{b_n}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \quad \inf_{m>N} \sqrt[m]{|a_m|} \geq \lambda \Rightarrow (w2) \text{ gilt}$$

Beweis der Kriterien:

zu $(w1)$ & $(q1)$: Behauptung: $(w1)$ impliziert $|a_n| \leq \theta^n \quad \forall n > N$

$(q1)$ impliziert (A) $|a_{n+1}| \leq \theta^{n-N} |a_{N+1}| \quad \forall n \geq N+1$ & $|a_{N+1}| > 0$

Beweis der Behauptung: zu $(w1)$: falls $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \xRightarrow{n\text{te Potenz}} |a_n| \leq \theta^n$

zu $(q1)$: (A) folgt per Induktion aus $|a_{n+1}| \leq \theta |a_n| \quad \forall n \geq N+1$

$A(N+1)$: $|a_{N+1}| \leq \theta^0 |a_{N+1}|$

$A(n+1) \Rightarrow A(n+2)$: $|a_{n+2}| \leq \theta |a_{n+1}| \leq \theta \cdot \theta^{n-N} |a_{N+1}| \leq \theta^{(n+1)-N} |a_{N+1}|$

Beweis der absoluten Konvergenz:

Definition der Majorante: $b_n = \begin{cases} \theta^n \max\{1, \theta^{-N} |a_{N+1}|\} & \forall n \geq N+1 \\ |a_n| & \forall n \leq N \end{cases}$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n$ ist konvergent (mit Grenzwert $\frac{1}{(1-\theta)}$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Die Behauptung impliziert, dass $|a_n| \leq b_n \quad \forall n$ d.h. b_n ist eine Majorante

$\xRightarrow{\text{Majorantenkriterium}} \sum_n a_n$ absolut konvergent.

zu (w2) & (q2): Behauptung: (w2) impliziert $|a_n| \geq \lambda^n \quad \forall n \geq N$

(q2) impliziert $|a_{n+1}| \geq \lambda^{n-N} |a_{N+1}| \quad \forall n \geq N$

& $|a_{N+1}| > 0$

Beweis der Behauptung (analog zu oben):

(zu w2): $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \lambda \implies |a_n| \geq \lambda^n$

(zu q2): $|a_{n+1}| \geq \lambda |a_n|$ per Ind. $A(N+1)$: $|a_{N+1}| \geq \lambda^0 |a_{N+1}|$

$A(n+1) \to A(n+2)$: $|a_{n+2}| \geq \lambda |a_{n+1}| \geq \lambda \lambda^{n-N} |a_{N+1}| = \lambda^{(n+1)-N} |a_{N+1}|$

Beweis, dass damit die notwendige Bedingung nicht erfüllt ist:

da $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = +\infty$ da $\lambda > 1$

$\implies \liminf\limits_{n\to\infty} |a_n| \geq \lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n \min\{1, \lambda^{-N} |a_{N+1}|\} = +\infty$

$\implies |a_n|$ ist <u>keine</u> Nullfolge. $\square$

Beispiel: Exponentialreihe: $E(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ d.h. $a_n = \frac{x^n}{n!}$

Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}}$ da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \implies (w1)^*$ ist erfüllt.

Quotientenkriterium: falls $|x| > 0 \implies a_n \neq 0 \quad \forall n$

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{(n+1)} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty) \implies (q2)^*$ ist erfüllt.

$\implies \forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert $E(x)$ absolut.

Bemerkung zur Optimalität der Kriterien:

Harmonische Reihe: $\sum\limits_n \frac{1}{n}$ konvergiert nicht.

zu (w·) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

zu (q·) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

"s-Harmonische Reihe": $s > 1,\ s \in \mathbb{Q}$: $\sum_n \frac{1}{n^s}$ konvergiert. (**)

zu (w.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^s}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^s} \overset{*}{=} 1$

zu (q.) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^s \cdot n^s = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \overset{(*)}{=} 1$

zu (*): Es gilt: sei $s \in \mathbb{Q}$ dann gilt $(a_n)_n$ konvergent g.d.w. $(a_n^s)_n$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^s = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^s$

Übung!

zu (**): Anwendung des Cauchy-Verdichtungskriterium:

$0 \le \frac{1}{(n+1)^s} \le \frac{1}{n^s} \quad \forall n$ d.h. $\Big(\underbrace{\frac{1}{n^s}}_{= a_n}\Big)_n$ ist eine monoton fallende Folge.

$$2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = (2^n)^{1-s} = (2^{1-s})^n \quad \text{da } s > 1$$

$\Rightarrow \quad (2^{1-s}) < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-s})^n$ ist konvergent.

4.7: Umordnung von Reihen:

W.d.h. des Beispiels

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & & \\ \cdot & 0 & -1 & 1 & \cdots & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$\underline{\Sigma'' = 0} \leftarrow 0 \quad 0 \quad 0 \qquad\qquad \underline{\Sigma' = 1}$

Definition: (Umordnung) Eine Reihe $\sum_n b_n$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_n a_n$ falls eine Bijektion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit $b_n = a_{\tau(n)}$

Bijektion bedeutet: $\tau(i) = \tau(j) \Rightarrow i = j$ (injektiv)

$\forall i \in \mathbb{N}\ \exists j \in \mathbb{N} : \tau(j) = i$ (surjektivität)

damit $\exists\ \tau^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \tau \circ \tau^{-1}(i) = i \ \forall i$

mit $\tau^{-1}(i) = j$ falls $\tau(j) = i$ (wohldefiniert aufgrund der Injektivität (Eindeutigkeit) & Surjektivität (Existenz))

Bemerkung / Lemma: Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, dann gilt

$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists M \in \mathbb{N} : \{1, \ldots, N\} \subseteq \{\tau(1), \ldots, \tau(M)\}$

Beweis der Bemerkung: Wähle $n = \max\{\tau^{-1}(1), \dots, \tau^{-1}(N)\}$

Satz 4.27: Die folgenden Aussagen sind äquivalent

(1) $\sum_n a_n$ konvergiert absolut.

(2) $\sum_n a_{\tau(n)}$ ist konvergent für jede Bijektion τ

d.h. jede Umordnung von $\sum_n a_n$ ist konvergent.

Bemerkung / Lemma: Sei $\forall N \in \mathbb{N} \ \exists M \in \mathbb{N}$ so dass

$$\{1, \dots, N\} \subseteq \{\tau(1), \dots, \tau(M)\}$$

Beweis: wähle $M = \max\{\tau^{-1}(i) : i = 1, \dots, N\}$ ∎

das Maximum der Ergebnisse von $\tau(1) \dots \tau(N)$

Satz: 4.27: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent

(2) $\sum_n a_{\tau(n)}$ ist konvergent für jede Umordnung τ

Zudem gilt $\sum_n a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n = \sum_n a_{\tau(n)} \ \forall n$.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Es reicht zu zeigen, dass $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}$ eine Cauchy-Folge ist: hat den Grenzwert $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. und $\left| \sum_{k=1}^{m} a_k - a \right| < \varepsilon \ \forall m \geq N$

Wähle $M > 0$, so dass $\tau(\ell) \geq N \ \forall \ell \geq M$ (siehe Lemma) $\Rightarrow$ Für $n > m > M$

$$\Rightarrow |\sigma_n - \sigma_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

und
$$|\sigma_n - a| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a \right| = \left| \sum_{k=1;\ \tau(k) \leq N}^{M} a_{\tau(k)} - a + \sum_{k=1;\ \tau(k) > N}^{M} a_{\tau(k)} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{N} a_k - a \right| + \left| \sum_{k=1;\ \tau(k) > N}^{M} a_k \right| \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir definieren die nicht negativen Folgen.

$$a_n^+ := \max\{a_n, 0\} \qquad a_n^- := \max\{-a_n, 0\}$$

d.h. $a_n^+ - a_n^- = a_n$ & $a_n^+ + a_n^- = |a_n|$

$\Rightarrow$ Sei $\sum a_n$ nicht abs. konv. z.z.: Es gibt Umordnung τ, sodass $\sum a_{\tau(n)}$ nicht konvergent

Falls $\sum_n a_n^+$ oder $\sum_n a_n^-$ konvergent

$\Rightarrow \sum_n a_n^+$ und $\sum_n a_n^-$ konvergent. $\Rightarrow \sum_n \underbrace{|a_n|}_{a_n^+ + a_n^-}$ konvergent

$\Rightarrow$ Widerspruch zu Annahme dass $\sum_n a_n$ nicht abs. konv.

Denn falls $\sum_n a_n^+$ konvergent $\Rightarrow$ $a_n^- = a_n^+ - a_n$ konvergent

als Summe zweier konvergenter Folgen

Seien also $\sum_n a_n^+$ & $\sum_n a_n^-$ strikt divergent.

Sei $I^- := \{ n \in \mathbb{N} : a_n^- > 0 \}$ und $I^+ = \mathbb{N} \setminus I^-$ d.h.

$I^+ \cap I^- = \emptyset$ & $I^+ \cup I^- = \mathbb{N}$.

Es reicht nun eine Abzählung τ von $I^+ \cup I^-$ zu finden,

so dass $\sum_n a_{\tau(n)}$ strikt divergent.

Sein $\mu: \mathbb{N} \longrightarrow I^+$ & $\nu: \mathbb{N} \longrightarrow I^-$ Abzählungen von I^+ und I^-

Wir finden nun eine monoton wachsende Folge $(n_k)_k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

(i) $n_k > k$

(ii) $\sum_{l=1}^{n_k} a_{\mu(l)} + \sum_{l=1}^{k-1} a_{\nu(l)} > k$

haben wir eine solche Folge gefunden definieren wir

$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(\mu(1), \dots, \mu(n_1), \nu(1), \mu(n_1+1), \dots, \mu(n_2), \nu(2), \mu(n_2+1), \dots$

da $\sum_{l=1}^{n} a_{\mu(l)} = \sum_{l=1}^{\mu(n)} a_l^+$ ist die Folge $(a_{\mu(l)})_l$ strikt divergent.

$\Rightarrow \exists\, n_1$ mit $\sum_{l=1}^{n_1} a_{\mu(l)} > 1$.

Sei nun n_k gewählt. Da $\sum_{l=n_k+1}^{\infty} a_{\mu(l)} = +\infty$

$\Rightarrow \exists\, n_{k+1} > n_k$ mit.

$$\sum_{l=n_k+1}^{n_{k+1}} a_{\mu(l)} > (k+1) + \sum_{l=1}^{k} a_{\nu(l)} - \sum_{l=1}^{n_k} a_{\mu(l)} \qquad \square$$

Korollar / Satz 4.28: (Cauchy Produkt von Reihen)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen, dann gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m} a_{m-k}\, b_k\right)$$

Es gibt Umordnung τ, die aus einer Folge die andere macht. Da abs. konvergent sind, ist es die selbe Reihe

Beweis:

Wir werden sehen, dass $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ abzählbar ist.

Wir betrachten die Indexmenge $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und die Familie $(a_k b_\ell)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

1. Beobachtung: Falls $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$, $\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ zwei Abzählungen von $\mathbb{N}$, dann ist $\tau = \psi^{-1}\circ\phi$ eine Umordnung von $\mathbb{N}$.

2. Beobachtung: Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)}$ absolut konvergent für eine Abzählung ϕ $\overset{\text{Satz 4.27}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi_1(n)} b_{\psi_2(n)}$ absolut konvergent (mit selbem Grenzwert) für jede andere Abzählung $\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ und:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi_1(n)} b_{\psi_2(n)}$$

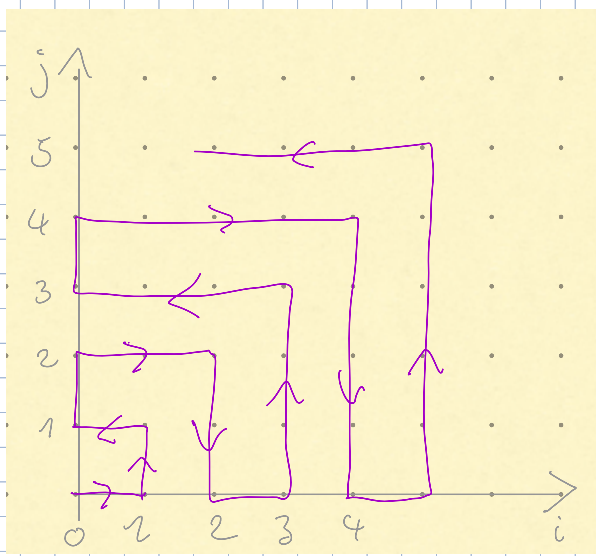
$\Rightarrow$ Beweisstrategie: I. Finde $\phi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$, so dass

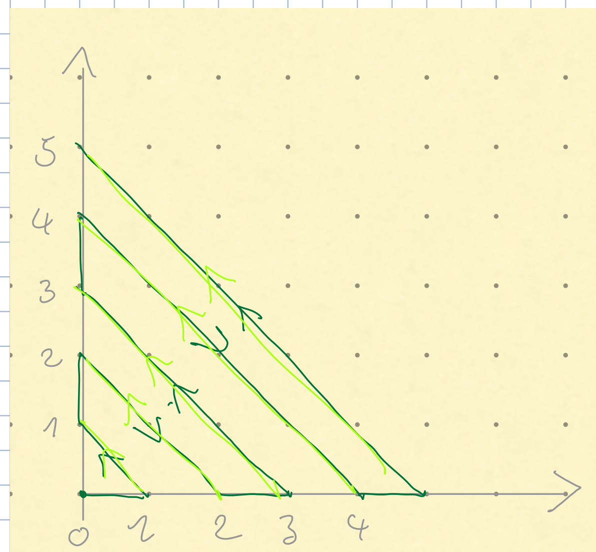
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\phi_1(n)}||b_{\phi_2(n)}| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

II. Finde $\psi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$, so dass

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi_1(n)} b_{\psi_2(n)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$





Abzählung ϕ: ↗ 　　　　　　　 Abzählung ψ:

Zu I

Wir stellen fest, dass

(a) $\phi(\{1, \dots, (N+1)^2\}) = \{(i,j) : \max\{i,j\} \leq N\}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{(N+1)^2} |a_{\phi_1(n)}||b_{\phi_2(n)}| = \left(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{(N+1)^2} \underbrace{|a_{\phi_1(n)}||b_{\phi_2(n)}|}_{\text{konvergent, da Produkt konvergenter Folgen}} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|\right)$$

nach Satz 4.27

(b) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)}$ ist absolut konvergent und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{(N+1)^2} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{N} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

Zu II:

Wir stellen fest, dass

Danach: Summe dieser beiden Mengen ist gleich

$$\psi\left(\left\{1, \dots, \frac{(N+1)(N+2)}{2}\right\}\right) = \{(j, i-j) : 0 \leq i \leq N,\ 0 \leq j \leq i\}$$

$$0 \leq i+j \leq N$$

und damit $\displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{(N+1)(N+2)}{2}} a_{\varphi_1(i)} b_{\varphi_2(i)} = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j$.

$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$\varphi(k) = (k_1, k_2)$

$\square$

Potenzreihen

4.8 Potenzreihen

(Dies ist eine der wichtigsten Klassen von Reihen in der Analysis)

Definition 4.29: (Potenzreihen)

Eine Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots$$

heißt Potenzreihe wobei $x \in \mathbb{R}$ (bzw. x einem $\mathbb{R}$-Modul) und $(a_n)_n$ eine Folge.

Lemma 4.30: Sei $P(x)$ konvergent in einem Punkt x_0, dann ist $P(x)$ absolut konvergent $\forall x$ mit $|x| < |x_0|$

Beweis: da $P(x_0)$ konvergent ist $|a_n x_0^n|$ eine Nullfolge.

d.h. $\exists A > 0$ mit $|a_n x_0^n| < A \quad \forall n$

$\Rightarrow$ für x mit $|x| < |x_0| \Rightarrow$

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n \leq A \, \theta^n \quad \text{mit} \quad \theta = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$$

da $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A \theta^n = \frac{A}{1-\theta} < \infty$ folgt die Konvergenz von

$\displaystyle\sum_n |a_n x^n|$ durch das Majoranten Kriterium. $\square$

Definition 4.31: (Konvergenzbereich und Konvergenzradius):

Die Menge $K = \{ x : P(x) \text{ konvergent} \}$ heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

$R = \sup\{ |x| : x \in K \}$ heißt Konvergenzradius.

Lemma 4.30 impliziert, dass $B_R(0) = \{x : |x| < R\} \subseteq K$

$\overset{\shortparallel}{\,]-R, R[\text{ in } \mathbb{R}}$

Beispiele:

(1) $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad K = \mathbb{R}$ & $R = +\infty$

(2) $P_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ $\quad$ da $n!\, x^n$ keine Nullfolge $K = 0$ & $R = 0$

(3) $P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \implies K =]-1, 1[$ & $R = 1$

(4) $P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \implies K = [-1, 1]$ & $R = 1$

(5) $P_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \implies K = [-1, 1]$ & $R = 1$.

⚠ Die Ränder müssen separat analysiert werden.

Satz: 4.32: Seien $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihen, so gilt:

(1) falls $P(x), Q(x)$ konvergen: $\quad P(x) + Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$

(2) falls $P(x), Q(x)$ absolut konvergent: $\quad P(x) \cdot Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

mit $c_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m$

Definition 4.34: (Konvergenzbereich und Konvergenzradius):

Die Menge $K = \{ x : P(x) \text{ konvergent} \}$ heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

$R = \sup \{ |x| : x \in K \}$ heißt Konvergenzradius.

Lemma 4.30 impliziert, dass $B_R(0) = \{ x : |x| < R \} \subseteq K$

"$]-R, R[$" in $\mathbb{R}$

Beispiele:

(1) $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad K = \mathbb{R}$ & $R = +\infty$

(2) $P_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, x^n$ $\quad$ da $n! \, x^n$ keine Nullfolge
$K = 0$ & $R = 0$

(3) $P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\Rightarrow$ $K =]-1, 1[$ & $R = 1$

(4) $P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ $\Rightarrow$ $K = [-1, 1[$ & $R = 1$

(5) $P_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ $\Rightarrow$ $K = [-1, 1]$ & $R = 1$.

⚠ Die Ränder müssen separat analysiert werden.

Satz 4.35: Sein $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihen, so gilt:

(1) falls $P(x), Q(x)$ konvergen: $\quad P(x) + Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$

(2) falls $P(x), Q(x)$ absolut konvergent: $\quad P(x) \cdot Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

mit $c_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m$

Insbesondere gelten (1) & (2) $x \in B_R$ mit $R = \min\{R_1, R_2\}$ wobei R_1, R_2 die Konvergenzradien von P & Q sind.

Beweis: (1) folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen Satz 4.6.

(2) folgt aus dem Cauchy produkt, da

$$\sum_{m=0}^{n} (a_{n-m} x^{n-m})(b_m x^m) = c_n \cdot x^n \qquad \square$$

Der Konvergenzradius einer Reihe ist damit von großem Interesse. Das Wurzelkriterium gibt die Möglichkeit ihn zu berechnen:

Satz 4.36: (Cauchy-Hadamard) Cauchy-Hadamard

Sei $P(x) = \sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe so gilt.

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{da}$$

(i) $P(x)$ absolut konvergiert für $|x| < R$

(ii) $P(x)$ divergiert für $|x| > R$

(iii) keine Aussage für $|x| = R$.

Beweis: $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = \frac{1}{R} \cdot |x|$ $\square$

4.9. Die Exponentialreihe. I

Die Exponentialreihe

Satz 4.37: (Die Exponentialreihe)

Die Exponentialreihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ (d.h. der Konvergenzradius $R = +\infty$)

Sie hat die Eigenschaft: (AT) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(WT) $\lim_{x_n \to 0} \frac{\exp(x_n)-1}{x_n} = 1$

(i) $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\exp(k) = \exp(1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

zudem gilt die Abschätzung.

$$\left|\exp(x) - S_n(x)\right| \leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für} \quad |x| < 1 + \frac{n}{2}$$

Beweis: $\exp(x)$ ist eine Potenzreihe mit $a_n = \frac{1}{n!}$ Satz 4.33.

$a_n = \frac{1}{n!}$ und da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \Rightarrow R = +\infty$

Indexshift

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+n+1}}{(n+1+k)!}$$

und. $\exp(x) - S_n(x) = \sum_{l=(n+1)}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+1+k}}{(n+1+k)!}$ $= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(n+1+k)!}(n+1)! \ldots \frac{x^k}{\left(\frac{(n+1+k)!}{(n+1)!}\right)}$

$C_{n,k}$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{C_{n,k}} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n+2}\right)^k$$

$$\leq \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \frac{1}{1-\frac{x}{n+2}}$$

with $C_{n,k} = \frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} = \prod_{l=0}^{k} (n+1+l)$

$\frac{x}{n+2} \leq \frac{1}{2}$

we show by induction on k that $C_{n,k} \geq (n+2)^k$

$\Leftrightarrow x \leq 1 + \frac{n}{2}$

$C_{n,0} = 1$; $(k \to k+1)$ $C_{n,k+1} = (n+1+k+1)\, C_{n,k}$

$\geq (n+2)\, C_{n,k} \geq (n+2)^{n+1}$

Vorlesung: l statt k

(A7) Wir wenden das Cauchyprodukt für Reihen an auf

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{=a_n} \qquad \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

Satz 4.27
$$\Rightarrow \exp(x)\cdot\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m}_{=c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

$$c_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \frac{y^m}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

(iv) $$\left| \frac{\exp(x)-1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = |x| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} \right|$$

$$\leq |x| \frac{1}{1-\frac{|x|}{4}} \quad \text{oder} \quad \leq |x| \frac{1}{1-|x|} \qquad \forall |x| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \left| \frac{\exp(x)-1}{x} - 1 \right| = 0$$

(i) $$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 \qquad \forall x \geq 0$$

und. $$1 = \exp(0) = \underbrace{\overset{\text{falls } x\geq 0}{\exp(x)}}_{\geq 1} \cdot \exp(-x) \Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \overset{\text{für } x>0}{>} 0$$

$\Rightarrow \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ &

(ii) $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (ii)

(iii) folgt per Induktion in $n \in \mathbb{N}_0$

$(n=0)$: $\exp(0) = 1 = \exp(1)^0$ $\quad (n \to n+1)$: $\exp(n+1) = \exp(1)\cdot\exp(n)$

$$= \exp(1)\exp(1)^n = \exp(1)^{n+1}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k<0$

$$\Rightarrow \exp(-k) = \frac{1}{\exp(|k|)} = \frac{1}{\exp(1)^{|k|}} = \exp(1)^{-k}$$

$\square$

5. $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ & $\mathbb{C}^n$

Bemerkung: Wir hatten gesehen $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 \geq 0$ d.h.
die Gleichung $x^2 = -1$ hat <u>keine</u> Lösung in $\mathbb{R}$.
Die imaginäre Einheit i (die imaginäre Zahl mit $i^2 = -1$)
hat interessante Konsequenzen.

5.1: Definition von $\mathbb{C}$. Definition von $\mathbb{C}$

Definition 5.1 (a): (1. Definition der komplexen Zahlen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $a + bi \in \mathbb{C}$ und wir definieren

die Summe: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

das Produkt: $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Definition 5.2:

Seien A, B zwei Mengen. Die Menge

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

heißt das kartesische Produkt / Kreutzprodukt von A, B
d.h. die Menge aller Paare / Tuple (a, b) mit $a \in A, b \in B$.

Definition 5.1 (b): (2. Definition der komplexen Zahlen)

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen "+" & "·" definiert durch

"+" : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

"·" : $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Bemerkung: Es gilt $\mathbb{R} \simeq \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$

d.h. (in der Sprache der abstrakten Algebra), dass $\mathbb{R}$ isomorph zu $R := \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ ist. :

Summe & Produkt sind „gleich":

$$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (a \cdot b, 0)$$

Deshalb schreiben wir a anstelle von $(a,0)$, insbesondere ist

$$a \cdot (c,d) = (a,0) \cdot (c,d) = (ac, ad)$$

Bemerkung: (1) da $(0,a) \cdot (0,b) = (-ab, 0) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

und damit sind $(0,1)$ & $(0,-1)$ Wurzeln von -1

(2) Wir setzen $i = (0,1)$ und schreiben.

$$\Rightarrow (a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$$

$$= a + bi$$

damit sind die beiden Definitionen äquivalent.

Satz 5.1 Die Körperaxiome (K1)–(K5) gelten auch für $\mathbb{C}$

Beweis: Siehe Blatt 1 Aufgabe 3.2.

Das neutrale Element der Addition ist $0 = 0 + 0i$

" der Multiplikation ist $1 = 1 + 0i$

Das inverse Element " zu z ist $-z = (-x_1) + (-y_1)i$

" " zu $z \neq 0$ ist $\frac{1}{z} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right) - i\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}$

⚠ $\mathbb{C}$ ist ein Körper aber nicht angeordnet, da wir gesehen hatten: angeordneter Körper gilt: $a^2 > 0 \Rightarrow \nexists$ zu $i^2 = -1$.

Definition 5.2: Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$, dann heißt

a) x der Realteil von z (Notation $Re(z) = x$)

b) y der Imaginärteil von z (Notation $Im(z) = y$)

c) $x - yi$ die konjugierte Zahl (Notation $\bar{z} = (x - yi)$)

d) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z

Satz 5.3: $\forall \; a, b \in \mathbb{C}$

(0) $\bar{\bar{a}} = a$ $\Longrightarrow$ $a = x + yi$, $\bar{a} = x - yi$, $\bar{\bar{a}} = x - (-yi) = x + yi = a$

(i) $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$

(ii) $\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

(iii) $Re(a) = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$

(iv) $Im(a) i = \frac{1}{2} \cdot (a - \bar{a})$

(v) $a = \bar{a} \iff a \in \mathbb{R}$

(vi) $a \bar{a} = |a|^2 = Re(a)^2 + Im(a)^2 \geq 0$ & $|a|^2 = 0 \iff a = 0$

(vii) $|a| \geq |Re(a)|$, $|a| \geq |Im(a)|$ & $|a| = |\bar{a}|$

$$\max\{|Re(a)|, |Im(a)|\} \leq |a| \leq \sqrt{2} \max\{|Re(a)|, |Im(a)|\}$$

Beweis: Übung. zu (vii)

Insbesondere können wir die Inverse der Multiplikation schreiben als: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Bemerkung: Die Notation waren algebraische Gleichungen deshalb wollen wir kurz überprüfen ob wir unserem Ziel näher kommen:

Proposition 5.4.

Für jedes $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat die Gleichung $z^2 = c$

genau die beiden Lösungen $\{z, -z\}$ mit

$$z = \sqrt{\frac{|c| + Re(c)}{2}} + i \, \text{sign}(Im(c)) \sqrt{\frac{|c| - Re(c)}{2}}$$

(wobei $\operatorname{sign}(y) = \begin{cases} +1 & \text{falls } y > 0 \\ -1 & \text{falls } y < 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases}$)

Beweis: Sei $c = a + ib$ (d.h. $Re(c) = a$, $Im(c) = b$ & $|c|^2 = a^2 + b^2$)

und $z = x + iy$ sei eine Lösung von $z^2 = c$.

Wir können annehmen, dass $x \geq 0$ sonst betrachte $-z$.

$$(x^2 - y^2) + i2xy = a + ib$$

d.h. $x^2 - y^2 = a$ (1)

$2xy = b$ (2)

$$\Rightarrow |c|^2 = a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2$$
$$= (x^2 + y^2)^2 = |z|^4$$

d.h. da $|c|, |z| \geq 0 \Rightarrow |c| = |z|^2$.

$\Rightarrow |z| = \sqrt{|c|}$

(1) gibt nun: $x^2 - y^2 = 2x^2 - (x^2 + y^2)$
$$= 2x^2 - |z|^2$$
$$= 2x^2 - |c|$$

$\Rightarrow 2x^2 = a + |c|$ oder. $x^2 = \frac{a + |c|}{2} \geq 0$

da $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a + |c|}{2}}$ (eindeutig!)

(1) gibt: $y^2 = x^2 - a = \frac{|c| - a}{2} \geq 0$.

d.h. $y \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{|c| - a}{2}} \right\}$

da $\operatorname{sign}(y) = \operatorname{sign}(b)$ nach (2)

$\Rightarrow \quad y = \operatorname{sign}(b)\sqrt{\frac{|d|-a}{2}}$ $\square$

Korollar: Für jedes $u, v \in \mathbb{C}$ hat die Gleichung

$$z^2 + uz + v = 0$$

genau zwei Lösungen für $v \neq \frac{u^2}{4}$, die Lösung $z = -\frac{u}{2}$ für $v = \frac{u^2}{4}$.

Beweis. $z^2 + uz + \frac{u^2}{4} + \left(v - \frac{u^2}{4}\right) = 0$

nach Proposition 5.2 $\exists\, w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = \frac{u^2}{4} - v$

d.h. $0 = \left(z + \frac{u}{2}\right)^2 - w^2 = \left(z + \frac{u}{2} + w\right)\left(z + \frac{u}{2} - w\right)$

$\Leftrightarrow \quad z = -\frac{u}{2} \pm w$ $\square$

Da wir Folgen mit Werten in $\mathbb{C}$ betrachten wollen, brauchen wir einen "Abstand". Die wichtigste Eigenschaft, die wir bisher für $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ genutzt hatten waren: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Proposition 5.5: $\forall\, a, b \in \mathbb{C}$

(i) $|ab| = |a||b|$

(ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$

Beweis: (i) $|ab|^2 = (ab)\cdot\overline{(a\cdot b)} = a\cdot\bar{a}\;\; b\cdot\bar{b} = |a|^2|b|^2$

(ii) $|a+b|^2 = (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = a\bar{a} + b\bar{b} + a\cdot\bar{b} + b\bar{a}$

$= |a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + \overline{a\bar{b}}$

$= |a|^2 + |b|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re}(a\bar{b})}_{\leq |a\bar{b}| = |a|\cdot|\bar{b}| = |a||b|} \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$

$= (|a| + |b|)^2$ $\square$

Definition 4.34: (Konvergenzbereich und Konvergenzradius):

Die Menge $K = \{ x : P(x) \text{ konvergent} \}$ heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

$R = \sup\{ |x| : x \in K \}$ heißt Konvergenzradius.

Lemma 4.30 impliziert, dass $B_R(0) = \{ x : |x| < R \} \subseteq K$
"$]-R, R[$ in $\mathbb{R}$"

Beispiele:

(1) $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $K = \mathbb{R}$ & $R = +\infty$

(2) $P_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ da $n!\,x^n$ keine Nullfolge
$K = 0$ & $R = 0$

(3) $P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow K =]-1, 1[$ & $R = 1$

(4) $P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \Rightarrow K = [-1, 1[$ & $R = 1$

(5) $P_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \Rightarrow K = [-1, 1]$ & $R = 1$.

⚠ Die Ränder müssen separat analysiert werden.

Satz 4.35: Sein $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihen, so gilt.

(1) falls $P(x), Q(x)$ konvergen: $P(x) + Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n$

(2) falls $P(x), Q(x)$ absolut konvergent: $P(x) \cdot Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

mit $c_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\, b_m$

Insbesondere gelten (1) & (2) $x \in B_R$ mit $R = \min\{R_1, R_2\}$ wobei R_1, R_2 die Konvergenzradien von P & Q sind.

Beweis: (1) folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen Satz 4.6.

(2) folgt aus dem Cauchyprodukt, da

$$\sum_{m=0}^{n} (a_{n-m} x^{n-m})(b_m x^m) = c_n \cdot x^n \qquad \square$$

Der Konvergenzradius einer Reihe ist damit von großem Interesse. Das Wurzelkriterium gibt die Möglichkeit ihn zu berechnen:

Satz 4.36: (Cauchy-Hadamard)

Sei $P(x) = \sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe so gilt:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{da}$$

(i) $P(x)$ absolut konvergent für $|x| < R$

(ii) $P(x)$ divergent für $|x| > R$

(iii) keine Aussage für $|x| = R$.

Beweis: $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}\, |x| = \frac{1}{R} \cdot |x|$ $\square$

4.9. Die Exponentialreihe. I

Satz 4.37: (Die Exponentialreihe)

Die Exponentialreihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ (d.h. der Konvergenzradius $R = +\infty$)

Sie hat die Eigenschaft: (AT) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(WT) $\lim\limits_{x_n \to 0} \frac{\exp(x_n)-1}{x_n} = 1$

(i) $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\exp(k) = \exp(1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

zudem gilt die Abschätzung.

$$\left|\exp(x) - S_n(x)\right| \leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für} \quad |x| < 1 + \frac{n}{2}$$

Beweis: $\exp(x)$ ist eine Potenzreihe mit $a_n = \frac{1}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}$ und da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ Satz 4.33. $\Rightarrow R = +\infty$

und. $\exp(x) - S_n(x) = \sum\limits_{l=(n+1)}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+1+k}}{(n+1+k)!}$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{c_{n,k}} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n+2}\right)^k$$

$$\leq \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \frac{1}{1-\frac{x}{n+2}}$$

with $c_{n,k} = \frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} = \prod\limits_{l=0}^{k} (n+1+l)$

$\frac{x}{n+2} \leq \frac{1}{2}$

we show by induction on k that $c_{n,k} \geq (n+2)^k$

$\Rightarrow x \leq 1 + \frac{n}{2}$

$c_{n,0} = 1$; $(k \to k+1)$ $c_{n,k+1} = (n+1+k+1)\, c_{n,k}$

$\geq (n+2)\, c_{n,k} \geq (n+2)^{k+1}$

(AT) Wir wenden das Cauchyprodukt für Reihen an auf

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{=a_n} \qquad \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

Satz 4.2P

$$\Rightarrow \quad \exp(x)\cdot\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m}_{=c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

$$c_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \frac{y^m}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

(wT)

$$\left| \frac{\exp(x)-1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = |x| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} \right|$$

$$\leq |x| \frac{1}{1-\frac{|x|}{4}} \quad \text{oder} \quad \leq |x| \frac{1}{1-|x|} \qquad \forall\, |x|<1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \left| \frac{\exp(x)-1}{x} - 1 \right| = 0$$

(i)

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 \qquad \forall\, x \geq 0$$

und.

$$1 = \exp(0) = \underbrace{\overset{\text{falls } x\geq 0}{\exp(x)}}_{\geq 1} \cdot \exp(-x) \Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \overset{\text{für } x>0}{>} 0$$

$\Rightarrow \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ &

(ii) $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (ii)

(iii) folgt per Induktion in $n \in \mathbb{N}_0$

$(n=0)$: $\exp(0) = 1 = \exp(1)^0$ $\quad (n \to n+1)$: $\exp(n+1) = \exp(1)\cdot\exp(n)$

$$= \exp(1)\exp(1)^n = \exp(1)^{n+1}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k<0$

$$\Rightarrow \quad \exp(-k) = \frac{1}{\exp(|k|)} = \frac{1}{\exp(1)^{|k|}} = \exp(1)^{-k} \qquad \square$$

5. $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ & $\mathbb{C}^n$

Bemerkung: Wir hatten gesehen $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 \geq 0$ d.h.
die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.
Die imaginäre Einheit i (die imaginäre Zahl mit $i^2 = -1$)
hat interessante Konsequenzen.

5.1: Definition von $\mathbb{C}$.

Definition 5.1 (a): (1. Definition der komplexen Zahlen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $a + bi \in \mathbb{C}$ und wir definieren

die Summe: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

das Produkt: $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Definition 5.2:

Seien A, B zwei Mengen. Die Menge

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

heißt das kartesische Produkt / Kreuzprodukt von A, B
d.h. die Menge aller Paare / Tuple (a, b) mit $a \in A, b \in B$.

Definition 5.1 (b): (2. Definition der komplexen Zahlen)

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen "+" & "." definiert durch

"+" : $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$

"." : $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Bemerkung: Es gilt $\mathbb{R} \simeq \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$

d.h. (in der Sprache der abstrakten Algebra), dass $\mathbb{R}$ isomorph zu

$R := \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ ist. :

Summe & Produkt sind "gleich":

$$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (a \cdot b, 0)$$

Deshalb schreiben wir a anstelle von $(a,0)$, insbesondere zu

$$a \cdot (c,d) = (a,0) \cdot (c,d) = (ac, ad)$$

Bemerkung: (1) da $(0,a) \cdot (0,b) = (-ab, 0) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

und damit sind $(0,1)$ & $(0,-1)$ Wurzeln von -1

(2) Wir setzen $i = (0,1)$ und schreiben.

$$\Rightarrow \quad (a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$$

$$= a + bi$$

damit sind die beiden Definitionen äquivalent.

Satz 5.1 Die Körperaxiome (K1)–(K5) gelten auch für $\mathbb{C}$

Beweis: Siehe Blatt 1 Aufgabe 3.2.

Das neutrale Element der Addition ist $0 = 0 + 0i$

" der Multiplikation ist $1 = 1 + 0i$

Das inverse Element " zu z ist $-z = (-x_1) + (-y_1)i$

" " zu $z \neq 0$ ist $\frac{1}{z} = \left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\right) - i\,\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}$

⚠ $\mathbb{C}$ ist ein Körper aber nicht angeordnet, da wir gesehen hatten: angeordneter Körper gilt: $a^2 > 0 \Rightarrow \nexists$ zu $i^2 = -1$.

Definition 5.2: Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$, dann heißt

a) x der Realteil von z (Notation $Re(z) = x$)

b) y der Imaginärteil von z (Notation $Im(z) = y$)

c) $x - yi$ die konjugierte Zahl (Notation $\bar{z} = (x - yi)$)

d) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z

Satz 5.3: $\forall \; a, b \in \mathbb{C}$

(0) $\bar{\bar{a}} = a$

(i) $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$

(ii) $\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

(iii) $Re(a) = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$

(iv) $Im(a)i = \frac{1}{2} \cdot (a - \bar{a})$

(v) $a = \bar{a} \iff a \in \mathbb{R}$

(vi) $a\bar{a} = |a|^2 = Re(a)^2 + Im(a)^2 \geq 0$ & $|a|^2 = 0 \iff a = 0$

(vii) $|a| \geq |Re(a)|$, $|a| \geq |Im(a)|$ & $|a| = |\bar{a}|$

$$\max\{|Re(a)|, |Im(a)|\} \leq |a| \leq \sqrt{2} \max\{|Re(a)|, |Im(a)|\}$$

Beweis: Übung. zu (vii)

Insbesondere können wir die Inverse der Multiplikation schreiben als: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Bemerkung: Die Notation waren algebraische Gleichungen deshalb wollen wir kurz überprüfen ob wir unseren Ziel näher kommen:

Proposition 5.4:

Für jedes $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat die Gleichung $z^2 = c$

genau die beiden Lösungen $\{z, -z\}$ mit

$$z = \sqrt{\frac{|c| + Re(c)}{2}} + i \, \mathrm{sign}(Im(c)) \sqrt{\frac{|c| - Re(c)}{2}}$$

$$\left(\text{wobei} \quad \operatorname{sign}(y) = \begin{cases} +1 & \text{falls } y > 0 \\ -1 & \text{falls } y < 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases} \right)$$

Beweis: Sei $c = a + ib$ (d.h. $\operatorname{Re}(c) = a$, $\operatorname{Im}(c) = b$ &

$|c|^2 = a^2 + b^2$)

und $z = x + iy$ sei eine Lösung von $z^2 = c$.

Wir können annehmen, dass $x \geq 0$ sonst betrachte $-z$.

$$(x^2 - y^2) + i2xy = a + ib$$

d.h. $x^2 - y^2 = a$ (1)

$2xy = b$ (2)

$$\Rightarrow |c|^2 = a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2$$

$$= (x^2 + y^2)^2 = |z|^4$$

d.h. da $|c|, |z| \geq 0 \Rightarrow |c| = |z|^2$.

$\Rightarrow |z| = \sqrt{|c|}$

(1) gibt nun: $x^2 - y^2 = 2x^2 - (x^2 + y^2)$

$$= 2x^2 - |z|^2$$

$$= 2x^2 - |c|$$

$\Rightarrow 2x^2 = a + |c|$ oder $x^2 = \frac{a + |c|}{2} \geq 0$

da $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a + |c|}{2}}$ (eindeutig!)

(1) gibt: $y^2 = x^2 - a = \frac{|c| - a}{2} \geq 0$.

d.h. $y \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{|c| - a}{2}} \right\}$

da $\operatorname{sign}(y) = \operatorname{sign}(b)$ nach (2)

$\Rightarrow \quad y = \operatorname{sign}(b)\sqrt{\frac{|c|-a}{2}}$ $\square$

Korollar: Für jedes $u,v \in \mathbb{C}$ hat die Gleichung

$$z^2 + uz + v = 0$$

genau zwei Lösungen für $v \neq \frac{u^2}{4}$, die Lösung $z = -\frac{u}{2}$ für $v = \frac{u^2}{4}$.

Beweis. $$z^2 + uz + \frac{u^2}{4} + \left(v - \frac{u^2}{4}\right) = 0$$

nach Proposition 5.2 $\exists\, w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = \frac{u^2}{4} - v$

d.h. $0 = \left(z + \frac{u}{2}\right)^2 - w^2 = \left(z + \frac{u}{2} + w\right)\left(z + \frac{u}{2} - w\right)$

$\Leftrightarrow \quad z = -\frac{u}{2} \pm w$ $\square$

Da wir Folgen mit werten in $\mathbb{C}$ betrachten wollen, brauchen wir einen "Abstand". Die wichtigste Eigenschaft, die wir bisher für $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ genutzt hatten waren:

$|x| = 0 \iff x = 0$

$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Proposition 5.5: $\forall a,b \in \mathbb{C}$

(i) $|ab| = |a||b|$

(ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$

Beweis: (i) $|ab|^2 = (ab)\cdot\overline{(a\cdot b)} = a\cdot\bar{a}\; b\cdot\bar{b} = |a|^2|b|^2$

(ii) $|a+b|^2 = (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = a\bar{a} + b\bar{b} + a\cdot\bar{b} + b\bar{a}$

$= |a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + \overline{a\bar{b}}$

$= |a|^2 + |b|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re}(a\bar{b})}_{\leq |a\bar{b}| = |a|\cdot|\bar{b}| = |a||b|} \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$

$= (|a| + |b|)^2$ $\square$

Bevor wir uns mit der angesprochenen Konvergenz beschäftigen definieren wir $\mathbb{R}^n$ & $\mathbb{C}^n$

5.2 Definition von $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

Definition 5.2* (n-faches kartesisches Produkt)

Seien $\{A_i\}_{i=1}^n$ eine Familie von Mengen so definieren wir ihr kartesisches Produkt rekursiv:

$$\bigotimes_{i=1}^n A_i = \left(\bigotimes_{i=1}^{n-1} A_i\right) \otimes A_n \quad \text{wobei} \quad \bigotimes_{i=1}^{1} A_i = A_i$$

d.h. $$\bigotimes_{i=1}^n A_i = \{ \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n-\text{tuple}} : a_i \in A_i \}$$

Insbesondere definieren wir

$$\mathbb{R}^n = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^n = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}$$

mit der Betragsfunktion (Abstand zur 0)

$$|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \quad + |z_n|^2} \quad \text{für } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

$\mathbb{R}^n$ nennt man den n-dimensionalen Euklidischen Raum.

Bemerkung 5.6: $\mathbb{R}^n$ ist ein reeller Vektorraum

d.h. für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

setzen wir $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$

$\mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektorraum mit

$$\alpha z + \beta w = (\alpha z_1 + \beta w_1, \dots, \alpha z_n + \beta z_n)$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ & $z, w \in \mathbb{C}^n$

Lemma 5.7 Die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$

Die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

Sei $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C}$ bzw $v, w \in \mathbb{R}^n$ & $\alpha \in \mathbb{R}$

$\sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2}$

(i) $$\max_{i=1,\dots,n} |v_i| \leq |v| \leq \sqrt{n} \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$$

(ii) $$|v| \geq 0 \quad \& \quad |v| = 0 \iff v = 0$$

(iii) $$|\alpha v| = |\alpha|\,|v| \qquad \text{(positiv 1-homogen)}$$

(iv) $$|v + w| \leq |v| + |w| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

mit Beträgen von $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ kann genauso gerechnet werden, wie mit Beträgen von $p \in \mathbb{R}$

Beweis:

(i) $$\max_i |v_i|^2 \leq |v|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq n \max_i |v_i|^2$$

(ii) folgt aus (i) da $|\cdot| \geq 0$ auf $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$.

und falls $|v| = 0 \implies \max_i |v_i| = 0 \implies v_i = 0 \ \forall i$

$\implies v = 0$

(iii) $$|\alpha v|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha v_i|^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|\alpha|^2 |v_i|^2}_{\text{auf } \mathbb{C} \text{ bzw } \mathbb{R} \text{ schon bewiesen}} = |\alpha|^2 |v|^2$$

(iv) $$|v+w|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i + w_i|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 + 2\operatorname{Re}(v_i \overline{w_i}) + |w_i|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |v_i|^2 + 2|v_i||w_i| + |w_i|^2$$

$$\leq |v|^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^n |v_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + |w|^2$$

Blatt 1

$$= |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2 \qquad \square$$

Satz 5.8 $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}^n, |\cdot|)$ sind vollständig.

Satz 5.8: $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind vollständig

d.h. falls $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ ist eine Cauchyfolge

so ist $(a_n)_n$ konvergent: $\exists a \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ so dass

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$$

Satz 5.9 Der Satz von Bolzano-Weierstrass gilt in $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$

Satz 5.9 Der Satz von Bolzano-Weierstrass gilt in $\mathbb{R}^n$ & $\mathbb{C}^n$.

0. Schritt: Reduktion von $\mathbb{C}^n$ auf $\mathbb{R}^n$

Beweis: Wir zeigen beide Sätze zusammen für $\mathbb{R}^n$. Denn $I: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$

gegeben durch $I(z_1, \dots, z_n) = (\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Im}(z_1), \mathrm{Re}(z_2), \mathrm{Im}(z_2), \dots, \mathrm{Re}(z_n), \mathrm{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{2n}$

erfüllt $I(z) - I(w) = I(z-w)$ & $|I(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$

1. Schritt: Satz 5.8 folgt aus Satz 5.9

Es gelte Satz 5.9. Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ Cauchy $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ beschränkt $\Rightarrow \exists (a_{n_k})_k$ eine Teilfolge und $a \in \mathbb{R}^n$ mit

mit $\lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - a| = 0$ und $\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: |a_m - a_n| < \varepsilon \ \forall m > n > N}_{\text{weil } (a_n)_n \text{ Cauchy}}$.

$\Rightarrow \quad |a_m - a| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a|$

$\Rightarrow \quad |a_m - a| \leq \limsup_{n\to\infty} |a_m - a_{n_k}| + \limsup_{k\to\infty} |a_{n_k} - a| \leq \varepsilon$

2. Schritt: Beweis von 5.8

Sei $(a(n))_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$. d.h. $\exists A > 0: |a(n)| < A \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$|a(n)| = \sqrt{|a_1(n)|^2 + \dots}$

Wir haben $a(n) = (a_1(n), a_2(n), \dots, a_n(n))$ mit $a_j(n) \in \mathbb{R}$ $j = 1, \dots, n$

und $|a_j(n)| \leq |a(n)| \leq A \ \forall n$. $\Rightarrow$ Nach 5.7 :)

d.h. $(a_j(n))_n$ sind beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.

Wir finden nun Teilfolgen. $(m_{j+1}(k))_k \subset (m_j(k))_k \subseteq \mathbb{N}$

so dass $\lim_{k\to\infty} \alpha_\ell(m_j(k)) = \alpha_\ell \quad \forall\, j \le \ell$

das heißt nach endlich vielen Schritten erreichen wir $j = n$.

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow \exists\, N_\ell \in \mathbb{N}$ so dass

$$|\alpha_\ell(m_n(k)) - \alpha_\ell| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \forall\, k > N_\ell.$$

$\Rightarrow$ sei $N_\varepsilon = \max\{ N_\ell : \ell = 1, \dots, n\}$

$$|a(m_n(k)) - a| < \sqrt{n} \max\{ |a_\ell(k) - a_\ell| : \ell = 1, \dots, n\}$$
$$< \varepsilon \quad \forall\, k > N_\varepsilon$$

wir wählen $m_0(k) = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

sei nun $(m_j(k))_k$ gewählt $\Rightarrow$ $(a_{j+1}(m_j(\ell)))_\ell$ ist eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$\overset{\text{Satz von Bolzano-Weierstraß}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, (\ell_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ & $a_{j+1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{j+1}(m_j(\ell_k)) = a_{j+1}.$$

Wir setzen $m_{j+1}(k) = m_j(\ell_k)$. $\square$

Konsequenz: (I) Wir können Folgen $(a_n)_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}^n$ bzw. $a_n \in \mathbb{C}^n$ anschauen.

Alle Resultate bisher gelten die nicht die Monotonie der reellen Zahlen benutzen.

(II) Wir können Reihen $\sum_n a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}^n$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) anschauen.:

Wichtig: Es gilt wirklich das Majoranten-/Wurzel-/Quotientenkriterium. Quotientenkriterium-Wurzelkriterium (nicht Leibnitz)

(III) Wir können Potenzreihenreihen $\sum_n a_n z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ oder $z \in \mathbb{R}$

und $a_n \in \mathbb{C}^n$ oder $z \in \mathbb{R}^n$

anschauen und die Sätze über Konvergenzradien ... gelten.

Wir haben nur das Majorantenkriterium benutzt.

6. Funktionen

6. Funktionen

Definition 6.1: Seien A & B zwei Mengen.

keine Menge

Eine Funktion (oder Abbildung) $f: A \to B$ ist eine Vorschrift,

die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

reellwertig — complex wertig.

Bsp.: (1) $A \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $B = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$f(x) = x^2$

$f: x \longmapsto x^2$

vektorwertig

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} a x \\ b x^2 \\ c x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Definition 6.2: • A heißt Definitionsbereich von f. Definitionsbereich

• $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ heißt Wertebereich von f

• falls $C \subseteq A$ so heißt $f(C) = \{ f(x) : x \in C \} \subseteq f(A)$

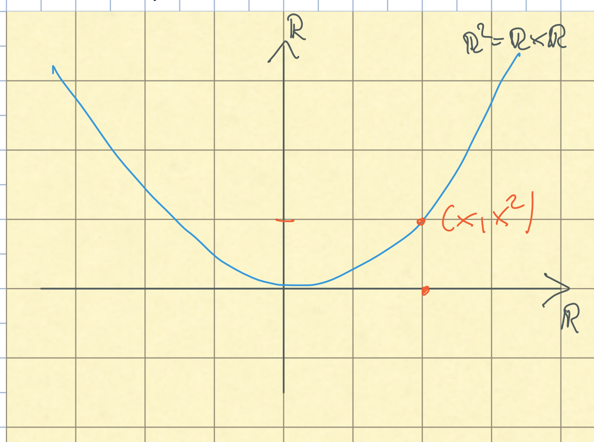
das Bild von C unter f.

im Falle (1) mit $A = \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{ x : x \geq 0 \}$

Definition 6.3: Sei $f: A \to B$ eine Funktion so heißt

die Menge $G(f) = \{ (a, f(a)) : a \in A \} \subseteq A \times B$

der Graph von f



6.1 Algebraische Operationen

6.1. Algebraische Operationen:

Seien $f, g: A \longrightarrow \mathbb{C}$, dann definieren wir

(i) $f+g: A \longrightarrow \mathbb{C}$ die Funktion die gegeben ist durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

(ii) $f \cdot g: A \longrightarrow \mathbb{C}$ "

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$

Wertebereich

(iii) falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A$ (d.h. $0 \notin g(A)$)

$$\left(\frac{f}{g}\right): A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iv) genauso $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\overline{f}$, $|f|$

Def. 6.1.1 Komposition

Definition 6.1.1 (Komposition)

Seien $f: A \longrightarrow B$ & $g: B \longrightarrow C$, ihre Komposition / Verkettung

$(g \circ f): A \longrightarrow C$ ist definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkung: Jede Algebraische Operation kann als Verkettung realisiert werden:

z.B. $f+g$

Sei $F: A \longrightarrow \mathbb{C}^2$: $F(a) = (f(a), g(a))$

und $p: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ $p(a,b) = a+b$

$\Rightarrow$ $f+g = p \circ F: A \to \mathbb{C}$

Definition 6.1.2 $f: A \longrightarrow B$

(i) heißt surjektiv falls $f(A) = B$

d.h. $\forall b \in B \ \exists a \in A$ mit $f(a) = b$

(ii) injektiv falls $f(x) \neq f(y) \ \forall x \neq y \in A$

$\Longleftrightarrow$ $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(iii) bijektiv falls f injektiv & surjektiv.

Umkehrfunktion

Bemerkung: Bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion

nach (i)&(ii) $\forall b \; \exists! \; a \in A$ mit $f(a) = b$

d.h. wir können eine Abbildung $g: B \longrightarrow A$ definieren.

mit $g(b) = a$ für $a \in A$ mit $f(a) = b$.

(überprüfe, dass g die Definition 6.1 erfüllt.)

Definition 6.1.3. Die Funktion $g: B \longrightarrow A$ heißt Umkehrfunktion von f

falls $(g \circ f)(a) = a \quad \forall a \in A$ & $(f \circ g)(b) = b \quad \forall b \in B$.

(Übung: zeige dass g eindeutig)

$g(b) = g \circ (f \circ k)(b) = (g \circ f)(k(b)) = k(b)$

Definition 6.1.4.: (neutrale Element der Komposition)

Die "dumme" Abbildung $id: A \longrightarrow A$ $\quad id(a) = a$ heißt die Identitätsabbildung.

(Sie ist das neutrale Element der Komposition.)

Beispiele: (a) Wurzelfunktion:

Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0 \quad m \in \mathbb{N}$

$a \longmapsto \sqrt[m]{a}$ ist eine Funktion. (mit inverser Funktion $g(x) = x^m$)

(b) Polynome. seien $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d$

für $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt Polynom

(werden in der LA noch näher behandelt.)

(c) Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich

$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $(a_k)_k$ reell oder complexwertig

Konsequenz: (I) Wir können Folgen $(a_n)_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}^n$ bzw. $a_n \in \mathbb{C}^n$ anschauen.

Alle Resultate bisher gelten die nicht die Monotonie der reellen Zahlen benutzen.

(II) Wir können Reihen $\sum_n a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}^n$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) anschauen.:

Majoranten- / Wurzel- / Quotientenkriterium.

Wichtig: Es gilt wirklich das Quotientenkriterium-

Wurzelkriterium (nicht Leibnitz)

(III) Wir können Potenzreihenreihen

$\sum_n a_n z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ oder $z \in \mathbb{R}$

und $a_n \in \mathbb{C}^n$ oder $z \in \mathbb{R}^n$

anschauen und die Sätze über Konvergenzradien ... gelten.

Wir haben nur das Majorantenkriterium benutzt.

6. Funktionen

Definition 6.1: Seien A & B zwei Mengen.

Eine <u>Funktion</u> (oder Abbildung) $f: A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

reellwertig complex wertig. vektorwertig

Bsp.: (1) $A \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $B = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$f(x) = x^2$ (2) $f(x) = \begin{pmatrix} a x \\ b x^2 \\ c x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$f: x \longmapsto x^2$

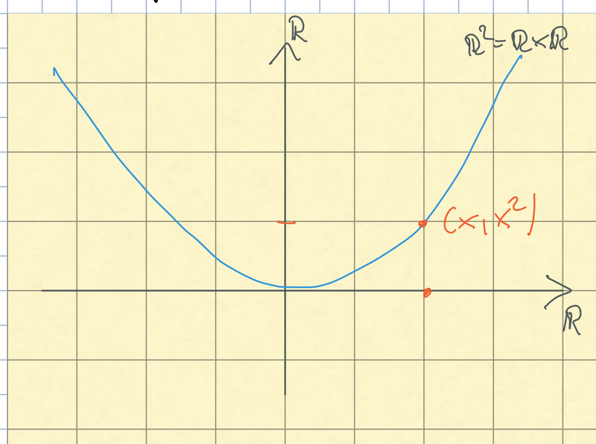
Definition 6.2: • A heißt Definitionsbereich von f.

• $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ heißt Wertebereich von f

• falls $C \subseteq A$ so heißt $f(C) = \{ f(x) : x \in C \} \subseteq f(A)$ das Bild von C unter f.

im Falle (1) mit $A = \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{ x : x \geq 0 \}$

Definition 6.3: Sei $f: A \to B$ eine Funktion so heißt die Menge $G(f) = \{ (a, f(a)) : a \in A \} \subseteq A \times B$ der Graph von f



6.1. Algebraische Operationen:

Seien $f, g : A \longrightarrow \mathbb{C}$, dann definieren wir

(i) $f+g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ die Funktion die gegeben ist durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$$

(ii) $f \cdot g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ "

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$

Wertebereich

(iii) falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A$ (d.h. $0 \notin g(A)$)

$\left(\frac{f}{g}\right) : A \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

(iv) genauso $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\overline{f}$, $|f|$

Definition 6.1.1 (Komposition)

Seien $f : A \longrightarrow B$ & $g : B \longrightarrow C$, ihre Komposition / Verkettung $(g \circ f) : A \longrightarrow C$ ist definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkung: Jede Algebraische Operation kann als Verkettung realisiert werden:

z.B. $f+g$

Sei $F : A \longrightarrow \mathbb{C}^2 : F(a) = (f(a), g(a))$

und $p : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ $p(a,b) = a+b$

$\Rightarrow f+g = p \circ F$

Definition 6.1.2 $f : A \longrightarrow B$

(i) heißt surjektiv falls $f(A) = B$

d.h. $\forall b \in B \ \exists a \in A$ mit $f(a) = b$

(ii) injektiv falls $f(x) \neq f(y) \ \forall x \neq y \in A$

$\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(iii) bijektiv falls f injektiv & surjektiv.

Bemerkung: Bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion

nach (i)&(ii) $\forall b \ \exists! \ a \in A$ mit $f(a) = b$

d.h. wir können eine Abbildung $g: B \longrightarrow A$ definieren.

mit $g(b) = a$ für $a \in A$ mit $f(a) = b$.

(überprüfe, dass g die Definition 6.1 erfüllt.)

Definition 6.1.3. Die Funktion $g: B \longrightarrow A$ heißt Umkehrfunktion von f

falls $(g \circ f)(a) = a \ \forall a \in A$ & $(f \circ g)(b) = b \ \forall b \in B$.

(Übung: zeige dass g eindeutig)

$g(b) = g \circ (f \circ k)(b) = (g \circ f)(k(b)) = k(b)$

Definition 6.1.4.: (neutrale Element der Komposition.)

Die "dumme" Abbildung $id: A \longrightarrow A$ $\quad id(a) = a$ heißt die Identitätsabbildung.

(Sie ist das neutrale Element der Komposition.)

Beispiele: (a) Wurzelfunktion:

Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0 \quad m \in \mathbb{N}$

$a \longmapsto \sqrt[m]{a}$ ist eine Funktion. (mit inverser Funktion $g(x) = x^m$)

(b) Polynome. seien $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$

für $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt Polynom

(werden in der LA noch näher behandelt.)

(c) Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich

$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $(a_k)_k$ reell oder komplexwertig

$x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$C(\mathbb{C})^*$ $\quad x \longmapsto \exp(x)$

Stetige Funktionen und Grenzwerte

7. Stetige Funktionen und Grenzwerte

In diesem Kapitel ist D eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$)

Definitionsbereich

Definition 7.1:

Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) und $x_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt f stetig in x_0 falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig an D falls f stetig in jedem Punkt in $x_0 \in D$.

Unstetigkeitsstelle

Bemerkung: x_0 ist eine Unstetigkeitsstelle von f falls

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in D : |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Beispiele:

(1) $f \equiv a$ die konstante Funktion, denn $|f(x) - f(y)| = 0 \ \forall x, y$

(2) $f(x) = x$ die Identitätsfunktion, da $|f(x) - f(y)| = |x - y|$

(3) die Abstandsfunktion: $f(x) = |x - p|$ für $p \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = \big|\, |x-p| - |y-p| \,\big| \leq |x - y|$$

Lipschitz stetig

Definition 7.2: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ heißt Lipschitz stetig (kurz Lipschitz) $\quad D \subset \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{C}^m$

falls $\exists L > 0 : \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D$

Jede Lipschitz stetige Funktion ist stetig (wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$)

$L|x-y| <$

$|x - y| < \delta$, $x, y \in D \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} \leq \varepsilon$

Implikation der Stetigkeit LEM

Folgenkriterium

Satz 7.3: (Folgenkriterium für die Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) und $x_0 \in D$. Dann ist äquivalent:

(i) f ist stetig $\boxed{\text{in } x_0}$

(ii) $\forall (x_n)_n \subset D$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ $\quad (x_n)_n \subseteq D$

sei f stetig in x_0, sei $\lim x_n = x_0$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $(x_n)_n \subset D$ gegeben und $\varepsilon > 0$. $\quad$ Z: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

$\exists\, \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta$, $x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\quad \Rightarrow$ Da f stetig

$\exists\, N \in \mathbb{N}$: $\underbrace{|x_n - x_0| < \delta \quad \forall\, n > N}_{\text{weil } x_n \text{ konvergiert}} \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (i) (durch Widerspruch.) $\quad \Rightarrow \neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$

Annahme $\underbrace{f \text{ ist nicht stetig}}$ in x_0 für $n \in \mathbb{N}$ $\quad \Rightarrow$ Z: Es gibt Folge, die im Def.bereich konv. aber nicht im Wertbereich

x_0 Unstetigkeitsstelle

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \frac{1}{n} : \exists\, x_n \in D$: $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \delta = \frac{1}{n}$, da δ beliebig

damit haben wir $(x_n)_n \subset D$ mit $\underbrace{|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \;\forall_n}_{\Rightarrow x_n \text{ konv. gegen } x_0}$ aber $\underbrace{|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon}_{f(x_n) \text{ konv. nicht gegen } f(x_0)}$

$\Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Also ist ein Widerspruch zu (ii). $\square$

7.1 Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 7.1.1: Seien ~~$f, g : D \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)~~ stetig in x_0, so gilt:

$f: D \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), $g: D \to \mathbb{R}$

(i) $f + g$ stetig in x_0

(ii) $f g$ "

(iii) ~~$\frac{f}{g} : D \cap \{g \neq 0\} \to \mathbb{R}$~~ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig in x_0. falls $g(x_0) \neq 0$

$\frac{1}{f} \cdot g$ " falls $f(x_0) \neq 0$ (und $\pm$

Beweis: Idee: Nutze das Folgenkriterium um es auf den Satz für Folgen zurückzuführen Satz 4.6.

Sei $(x_n)_n \subset D$ eine $\underline{\text{beliebige}}$ Folge mit $\lim\limits_{n} x_n = x_0$

so folgt aus Satz ~~8~~ 7.3 $\lim\limits_{n} f(x_n) = f(x_0)$, $\lim\limits_{n} g(x_n) = g(x_0)$

Nun folgt aus Satz 4.6:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = f(x_0) + g(x_0)$

$\Rightarrow \quad x_n \to x_0 \Rightarrow f+g(x_n) \to f+g(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$

(ii) $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \cdot g(x_n) = f(x_0) g(x_0)$

(iii) $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ [da $g(x_0) \neq 0$] $\square$

Konsequenzen:

1) $f(x) = x^m$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) [(ii) + Bsp (1)]

2) Polynome sind stetig d.h.

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d$$

Bemerkung: Da $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ stetig

$\Rightarrow$ der Raum aller Funktionen von D nach $\mathbb{R}^n$ bildet Vektorraum

Kompositionen stetig, wenn Funktionen stetig

Satz 7.1.2 Sei $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^m (\mathbb{C}^n)$, $B \subseteq \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$, $C \subseteq \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$

und f stetig in $x_0 \in A$, g stetig in $f(x_0)$. dann ist $g \circ f$ s. g. in x_0.

$g \circ f : A \to C$

Beweis: (Wir wenden das Folgenkriterium an)

Sei $(x_n)_n \subseteq D$ mit $\lim_n x_n = x_0$ z.z $\lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x_0)$

da f stetig in $x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Sei nun $(y_n = f(x_n))_n \subset A$. d.h. y_n ist eine Folge in A

mit $\lim_n y_n = y_0$ mit $y_0 = f(x_0)$

Da g stetig in $y_0 = f(x_0) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(y_n) = g(y_0) = g(f(x_0))$ $\square$

Satz 7.1.3: Sei $f: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ bijektiv und stetig

$\Rightarrow \quad f^{-1}: [c,d] \longrightarrow [a,b]$ stetig.

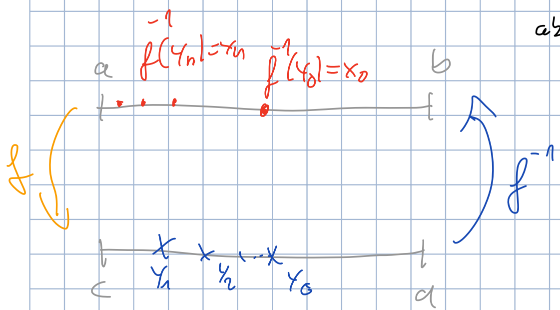
Beweis: Annahme f^{-1} sei nicht stetig in $c \leq y_0 \leq d$

$\exists\, (y_n)_n \subseteq [c,d]$ & $\varepsilon > 0$: $\lim_n y_n = y_0$ aber $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| > \varepsilon \ \forall n.$

Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$. Da $a \leq x_n \leq b$ / $\in [a,b]$ $\forall n$ ist $(x_n)_n$ eine beschränkte

Folge in $\mathbb{R} \overset{B.}{\Longrightarrow} \exists\ (x_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \overline{x}$

da $|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon\ \forall k \Rightarrow |\overline{x} - x_0| = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon$



aber $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\overline{x})$

& $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(y_0) = \overline{x} = x_0 \quad ⚡$

$\square$

Bemerkung: Satz 7.1.3 gilt im allgemeinen nicht, wenn f nicht stetig auf ganz $[a,b]$. (Beispiel.)

Konsequenz: (a) die Funktion $x \longmapsto x^{\frac{1}{m}}$ ist stetig auf $[0,\infty[$ für $m \in \mathbb{N}$ als Umkehrfunktion von $x \longmapsto x^m$

(b) die Funktion $x \longmapsto x^q$ ist stetig auf $[0,\infty[$ für $q = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, $q \geq 0$ als Komposition von $f(y) = y^k$, $g(z) = z^{\frac{1}{l}}$

(c) die Funktion $x \longmapsto x^q$ ist stetig auf $]0,\infty[$ für $q \in \mathbb{Q}$, $q < 0$ da $x^q = \frac{1}{x^{|q|}}$

6. Funktionen

Definition 6.1: Seien A & B zwei Mengen.

Eine <u>Funktion</u> (oder Abbildung) $f: A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

reellwertig   complex wertig.

Bsp.: (1) $A \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $B = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$$f(x) = x^2$$

$$f: x \longmapsto x^2$$

vektorwertig

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} ax \\ bx^2 \\ cx^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

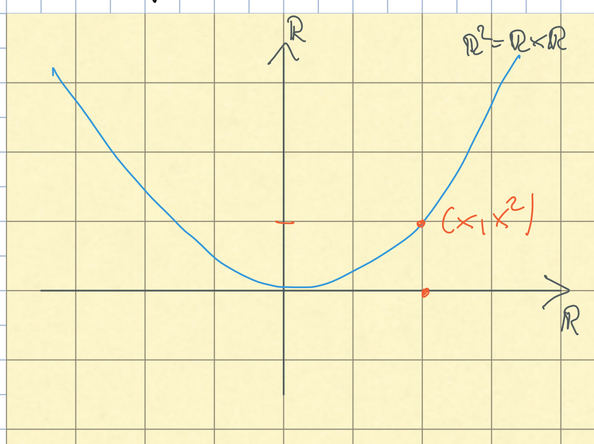
Definition 6.2: • A heißt Definitionsbereich von f.

• $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ heißt Wertebereich von f

• falls $C \subseteq A$ so heißt $f(C) = \{ f(x) : x \in C \} \subseteq f(A)$ das Bild von C unter f.

im Falle (1) mit $A = \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{ x : x \geq 0 \}$

Definition 6.3: Sei $f: A \to B$ eine Funktion so heißt die Menge $G(f) = \{ (a, f(a)) : a \in A \} \subseteq A \times B$ der Graph von f



6.1. Algebraische Operationen:

Seien $f, g : A \longrightarrow \mathbb{C}$, dann definieren wir

(i) $f+g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ die Funktion die gegeben ist durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

(ii) $f \cdot g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ "

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$

Wertebereich

(iii) falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$ (d.h. $0 \notin g(A)$)

$$\left(\frac{f}{g}\right) : A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iv) genauso $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\overline{f}$, $|f|$

Definition 6.1.1 (Komposition)

Seien $f : A \longrightarrow B$ & $g : B \longrightarrow C$, ihre Komposition / Verkettung

$(g \circ f) : A \longrightarrow C$ ist definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkung: Jede Algebraische Operation kann als Verkettung realisiert werden:

z.B. $f+g$

Sei $F : A \longrightarrow \mathbb{C}^2 : \quad F(a) = (f(a), g(a))$

und $p : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \quad p(a,b) = a+b$

$\Rightarrow \quad f+g = p \circ F$

Definition 6.1.2 $f : A \longrightarrow B$

(i) heißt surjektiv falls $f(A) = B$

d.h. $\forall b \in B \ \exists a \in A$ mit $f(a) = b$

(ii) injektiv falls $f(x) \neq f(y) \quad \forall x \neq y \in A$

$\Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(iii) bijektiv falls f injektiv & surjektiv.

Bemerkung: Bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion

nach (i)&(ii) $\forall b \; \exists! \, a \in A$ mit $f(a)=b$

d.h. wir können eine Abbildung $g: B \longrightarrow A$ definieren.

mit $g(b)=a$ für $a \in A$ mit $f(a)=b$.

(überprüfe, dass g die Definition 6.1 erfüllt.)

Definition 6.1.3. Die Funktion $g: B \longrightarrow A$ heißt Umkehrfunktion von f

falls $(g \circ f)(a) = a \;\; \forall a \in A$ & $(f \circ g)(b) = b \;\; \forall b \in B$.

(Übung: zeige dass g eindeutig.)

$g(b) = g \circ (f \circ k)(b) = (g \circ f)(k(b)) = k(b)$

Definition 6.1.4.: (neutrale Element der Komposition.)

Die "dumme" Abbildung $id: A \longrightarrow A$ $\quad id(a)=a$ heißt die Identitätsabbildung.

(Sie ist das neutrale Element der Komposition.)

Beispiele: (a) Wurzelfunktion:

Sei $a \in \mathbb{R}, a>0 \quad m \in \mathbb{N}$

$a \longmapsto \sqrt[m]{a}$ ist eine Funktion. (mit inverser Funktion $g(x)=x^m$)

(b) Polynome. seien $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$

für $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt Polynom

(werden in der LA noch näher behandelt.)

(c) Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich

$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $(a_k)_k$ reell oder komplexwertig

$x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$C(\mathbb{C})^* \quad x \longmapsto \exp(x)$

7. Stetige Funktionen und Grenzwerte

In diesem Kapitel ist D eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$)

Definition 7.1:

Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) und $x_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt f stetig in x_0

falls:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

f heißt stetig an D falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Bemerkung: x_0 ist eine Unstetigkeitsstelle von f falls

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in D : |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Beispiele:

(1) $f \equiv a$ die Konstante Funktion, denn $|f(x) - f(y)| = 0 \ \forall x, y$

(2) $f(x) = x$ die Identitätsfunktion, da $|f(x) - f(y)| = |x - y|$

(3) die Abstandsfunktion: $f(x) = |x - p|$ für $p \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = \big|\, |x-p| - |y-p| \,\big| \leq |x - y|$

Definition 7.2: $f: D \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ heißt Lipschitz stetig (kurz Lipschitz)

falls $\exists L > 0 : \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D$

Jede Lipschitz stetige Funktion ist stetig (wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$)

Satz 7.3: (Folgenkriterium für die Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}^n \,(\mathbb{C}^n)$ und $x_0 \in D$. Dann ist äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0

(ii) $\forall (x_n)_n \subset D : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $(x_n)_n \subset D$ gegeben und $\varepsilon > 0$.

$\exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta,\ x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\exists\, N \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \delta \ \forall\, n > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (i) (durch Widerspruch.)

Annahme f ist nicht stetig in x_0 für $n \in \mathbb{N}$

$\exists\, x_n \in D : |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

damit haben wir $(x_n)_n \subset D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}\ \forall_n$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, Also ist ein Widerspruch zu (ii). $\square$

7.1 Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 7.1.1: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ stetig in x_0, so gilt:

(i) $f + g$ stetig in x_0

(ii) $f \cdot g$ 〃

(iii) $\frac{f}{g} : D \cap \{g \neq 0\} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig in x_0, falls $g(x_0) \neq 0$

Beweis: Idee: Nutze das Folgenkriterium um es auf den Satz für Folgen zurückzuführen Satz 4.6.

Sei $(x_n)_n \subset D$ eine <u>beliebige</u> Folge mit $\lim_n x_n = x_0$

so folgt aus Satz 8.3 $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$, $\lim_n g(x_n) = g(x_0)$

Nun folgt aus Satz 4.6:

(i) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = f(x_0) + g(x_0)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot g(x_n) = f(x_0)\, g(x_0)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ [da $g(x_0) \neq 0$] $\square$

Konsequenzen:

1) $f(x) = x^m$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) [(ii) + Bsp (1)]

2) Polynome sind stetig d.h.

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x + \dots + a_d x^d$$

Satz 7.1.2 Sei $f: A \to B$, $g: B \to C$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^m (\mathbb{C}^n)$, $B \subseteq \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$, $C \subseteq \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ und f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0)$. dann ist $g \circ f$ s ig in x_0.

Beweis: (Wir wenden das Folgenkriterium an)

Sei $(x_n)_n \subseteq D$ mit $\lim_n x_n = x_0$ z.z $\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) = (g\circ f)(x_0)$

da f stetig in x_0 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Sei nun $(y_n = f(x_n))_n \subset A$. d.h. y_n ist eine Folge in A

mit $\lim y_n = y_0$ mit $y_0 = f(x_0)$

Da g stetig in x_0 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(x_0) = g(f(x_0))$ $\square$

Satz 7.1.3: Sei $f: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ bijektiv und stetig

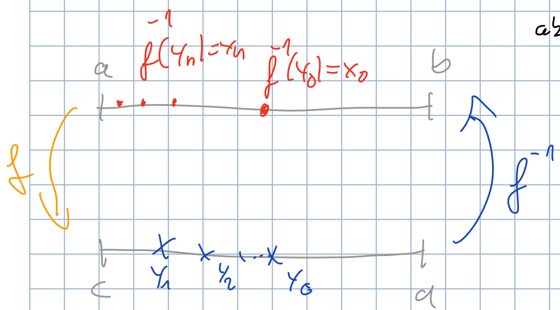
$\Rightarrow$ $f^{-1}: [c,d] \longrightarrow [a,b]$ stetig.

Beweis: Annahme f^{-1} sei nicht stetig in $c \leq y_0 \leq d$

$\exists\ (y_n)_n \subseteq [c,d]$ & $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_n y_n = y_0$ aber $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| > \varepsilon\ \forall n$.

Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$. Da $a \leq x_n \leq b\ \forall n$ ist $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists\ (x_{n_k})_k$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x}$

da $|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon\ \forall k$ $\Rightarrow$ $|\bar{x} - x_0| = \lim\limits_{k\to\infty} |x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon$



aber $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$

& $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(y_0) = \bar{x} = x_0$ ↯

□

Bemerkung: Satz 8.1.3 gilt im allgemeinen nicht, wenn f nicht stetig auf ganz $[a,b]$. (Beispiel.)

Konsequenz: (a) die Funktion $x \longmapsto x^{\frac{1}{m}}$ ist stetig auf $[0,\infty[$ für $m \in \mathbb{N}$ als Umkehrfunktion von $x \longmapsto x^m$ $\Rightarrow$ $f[0,a] \to [0,a^m]$ stetig invertierbar

(b) die Funktion $x \longmapsto x^q$ ist stetig auf $[0,\infty[$ für $q = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, $q \geq 0$ als Komposition von $f(y) = y^k$, $g(z) = z^{\frac{1}{l}}$ $\Rightarrow$ $g(x) = x^q = \underbrace{\left(x^{\frac{1}{m}} \circ x^k\right)}_{\text{Verknüpfung zweier stetiger Funktionen}}$

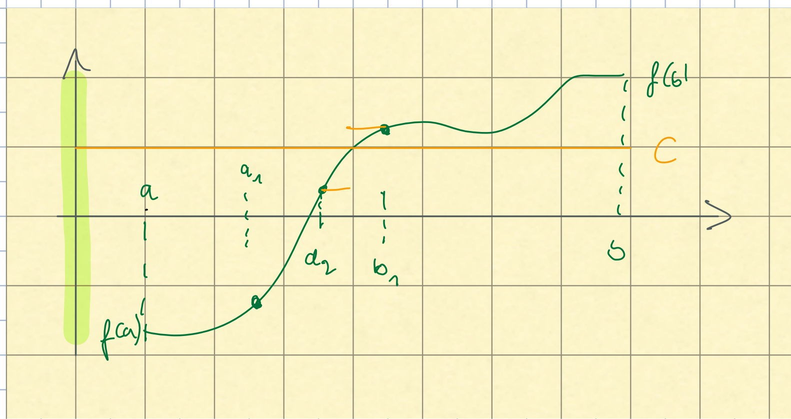
(c) die Funktion $x \longmapsto x^q$ ist stetig auf $]0,\infty[$ für $q \in \mathbb{Q}$, $q < 0$ da $x^q = \frac{1}{x^{|q|}}\Big\}$ stetig

7.2 Sätze über stetige Funktionen

Satz 7.2.1 (Zwischenwertsatz) Zwischenwertsatz

nicht komplexe Zahlen, da $\mathbb{C}$ nicht geordnet

Eine stetige Abbildung $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



konstruiere eine

äquivalent

Beweis: Idee: Intervallschachtelung (Vollständigkeitsaxiom), so dass

$$f(a_k) \leq c \leq f(b_k) \quad \& \quad |b_k - a_k| = 2^{-k}(b-a)$$

$a_k \leq b_k$ durch UA: $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x_0\} \Rightarrow \exists! x_0 \in \mathbb{R}$, s.d. $x_0 \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$I_n = [a_n, b_n] \supset I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$

$\Rightarrow f(a_n) \leq c \leq f(b_n) \ \forall n$

$|I_n| = b_n - a_n \to 0 \ (n \to \infty)$

Wir können annehmen, dass $f(a) < f(b)$ sonst betrachte $-f$ (der Fall $f(a) = f(b) = c$ ist trivial).

Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $(I_k = [a_k, b_k])_k$ mit

(i) $f(a_k) \leq c \leq f(b_k)$

(ii) $(b_k - a_k) \leq 2^{-k}(b-a) = \frac{b-a}{2^k} \to 0$

$(k=0)$ $\quad I_0 = [a, b]$

$(k \to k+1)$: $\quad I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right] & \text{falls } f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geq c \\ \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right] & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\Rightarrow |I_{k+1}| = \tfrac{1}{2}(b_k - a_k) = 2^{-(k+1)}(b-a)$$

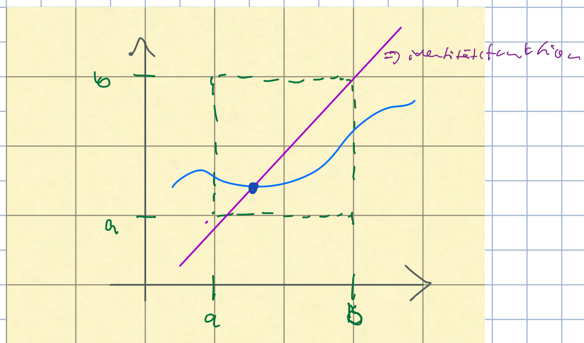
$\Rightarrow \exists! \ x_0 \in I_k \ \forall k$ d.h. $\lim_k a_k = x_0 = \lim_k b_k$.

Da f stetig folgt $c \geq \lim_k f(a_k) = f(x_0)$, $c \leq \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(x_0)$

$\Longrightarrow f(x_0) = c$ $\square$

Korollar 7.2.2 (Fixpunkt)

Sei $f: [a,b] \longrightarrow [a,b]$ stetig ✓ dann existiert $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$.



Beweis: Wir möchten zeigen, dass $G(f)$ schneidet $G(x)$ ⇒ Graphe der Identitätsfunktion

Wir betrachten $g(x) := f(x) - x$. g ist stetig und

⇒ $x(a)$ auch stetig ⇒ da $f(a) \geq a$, $f(a) \in [a,b]$

$g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$ ⇒ $f(b) \in [a,b]$, $f(b) \leq b$

$\Rightarrow \exists\, x \in [a,b]$ mit $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ $\square$

Maxima und Minima stetiger Funktionen

7.3 Maxima und Minima stetiger Funktionen

Satz 7.3.1 (I) (Existenz von Maximum & Minimum)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ mit $\qquad x_M \in [a,b]$

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a,b]$$

d.h. f nimmt sein Maximum und sein Minimum an.

Beweis: Wir zeigen die Existenz von x_M. ⇒ x_m kann durch Finden ist x_M von $-f(x)$

Wir betrachten $S := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

Falls $S < \infty$ wähle $S_n = S - \frac{1}{n}$, falls $S = +\infty$ wähle $S_n = n$.

⇒ wenn $S_n = S$, dann $S = f(x)$ und fertig

Da $S_n < S$ $\exists\, x_n \in [a,b]$ mit $S \geq f(x_n) > S_n$.

⇒ beschränkte Folge

Da $a \leq x_n \leq b$ können wir den Satz von Bolzano-Weierstraß anwenden,

d.h. wir finden eine Teilfolge x_{n_k} mit $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_\infty$

da $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt $a \leq x_\infty \leq b$ d.h. $x_\infty \in [a,b]$.

Da f stetig folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_\infty) < \infty$

d.h. $f(x_{n_k}) > n_k = S_{n_k}$ ist nicht möglich. $\Rightarrow S < \infty \to f(x_{n_k}) \leq S$

$\Downarrow$ $f(x_{n_k})$ kann keine Majorante einer divergenten Folge sein, da $f(x_{n_k})$ konvergent

und damit.

$= S_{n_k} + \frac{1}{n_k} - f(x_\infty) \leq f(x_{n_k}) - f(x_\infty) + \frac{1}{n_k}$

$$0 \leq f(x_{n_k}) - f(x_\infty) \leq S - f(x_\infty) \leq f(x_{n_k}) - f(x_\infty) + \frac{1}{n_k} = 0$$

($f(x_{n_k}) \to$ ... $\downarrow 0$; $\frac{1}{n_k} \downarrow 0$; $\Downarrow$)

$\Rightarrow S = f(x_\infty) \Leftarrow S - f(x_\infty) = 0$ □

Bemerkung: Hauptbestandteil des Beweises war:

$(x_n) \subseteq [a,b] \Rightarrow (x_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_\infty$ & $x_\infty \in [a,b]$

vergleiche (a,d): nicht kompakt

folgt aus Bolzano-Weierstraß

$\boxed{x_n \subseteq [a,b] \Rightarrow \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}}: x_0 \in [a,b],\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0}$

Definition 7.3.2:

Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ mit der Eigenschaft.

Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$

alle Teilfolgen

(K) $\forall (x_n)_n \subset E$ $\exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k$, $x \in E$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

alle Teilfolgen, die konvergieren, konvergieren in dem Bereich

heißt Kompakt.

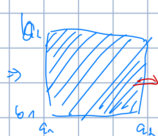
$\Downarrow$ gibt Teilfolge der Folge, deren Grenzwert in E liegt

Bsp: (a) $[a,b]$ siehe Beweis

(b) $\bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$ mit $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots$

Ebenfalls mittels Bolzano Weierstraß.

(c) $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$



kompakt durch Bolzano-Weierstraß

ebenfalls mittels Bolzano Weierstraß.

(d) $\overline{B_R} = \{ x \in \mathbb{R}^n\ (\mathbb{C}^n) : |x| \leq R \}$

Ebenfalls mittels Bolzano Weierstraß + Stetigkeit von $|\cdot|$.

Lemma 7.3.2*: Sein $\{K_i\}_{i=1}^{N}$ eine (endliche) Familie von kompakten Mengen. dann ist $\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ kompakt.

Beweis: Idee: Schubkastenprinzip:

sei $(x_n)_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ gegeben. $\Rightarrow \exists\, i_0 : K_{i_0}$ enthält unendlich viele Elemente $\Rightarrow$ $\exists\, (n_k)_k$ eine Teilfolge so dass $(x_{n_k})_k \subset K_{i_0}$

da K_{i_0} kompakt $\Rightarrow \exists\, (n_{k_l})_l$ Teilfolge und $x_\infty \in K_{i_0}$ so dass $\lim_{l} x_{n_{k_l}} = x_\infty$

$\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ ist kompakt $\square$

Existenz von Maximum, Minimum

Satz 7.3.1 (II) (Existenz von Maximum & Minimum)

Sei $f : E \to \mathbb{R}$ stetig und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) kompakt.

So $\exists\, x_m, x_M \in E$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in E.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 8.3.1. (I)

Gleichmäßige Stetigkeit

7.4. Gleichmäßige Stetigkeit.

Wdh. f ist stetig in x_0 falls:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{x_0} > 0 : |x - x_0| < \delta_{x_0}, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

f heißt stetig an D falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Normalerweise hängt δ von x_0 ab.

Definition 7.4.1 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) heißt gleichmäßig stetig (auf D) falls:

$\Rightarrow$ δ hängt nicht von x_0 ab.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta, \ x, y \in D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz 7.4.2: Sei $f : E \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) stetig und E kompakt

so ist f gleichmäßig stetig.

$\Downarrow$ jeder Grenzwert existiert in der Menge

Beweis: (durch Widerspruch)

Falls f nicht gleichmäßig stetig, $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in E \ |x_\delta - y_\delta| < \delta$

~~oder~~ und $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

Insbesondere $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n, y_n$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ & $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

$\Rightarrow$ sei $\delta = \frac{1}{n}$

$(x_n)_n \subseteq E \overset{E \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} (x_{n_k})_k$ mit $\lim_k x_{n_k} = x$

$\Rightarrow$ Da $|x_n - y_n| \to 0$

gilt $y_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$

Satz 7.3.1 (II) (Existenz von Maximum & Minimum)

Sei $f: E \to \mathbb{R}$ stetig und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) kompakt.

So $\exists\, x_m, x_M \in E$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in E.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 8.3.1. (I)

7.4. Gleichmäßige Stetigkeit

W.d.h. f ist stetig in x_0 falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 : \; |x - x_0| < \delta, \, x \in D \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig an D falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Normalerweise hängt δ von x_0 ab.

Definition 7.4.1 Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) heißt gleichmäßig stetig (auf D) falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 : \; |x - y| < \delta, \; x, y \in D \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz 7.4.2: Sei $f: E \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) stetig und E kompakt so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: (durch Widerspruch)

Falls f nicht gleichmäßig stetig, $\exists\, \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists\, x_\delta, y_\delta \in E$ $|x_\delta - y_\delta| < \delta$

aber $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

Insbesondere $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists\, x_n, y_n$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ & $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

$(x_n)_n \subseteq E \overset{E \text{ kompakt}}{\implies} (x_{n_k})_k$ mit $\lim_k x_{n_k} = x$

$$\Rightarrow \quad |y_{n_k} - x_\infty| \leq |x_{n_k} - x| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x_{n_k} - x| + \frac{1}{n_k} \longrightarrow 0.$$

d.h. $\quad x_{n_k} \longrightarrow x \,, \quad y_{n_k} \longrightarrow x \quad (k \to \infty)$

Da f stetig $\quad \Rightarrow f$ stetig in x_∞ $\Rightarrow \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|}_{=\,0} \leq \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(x)| + \underbrace{|f(y_{n_k}) - f(x)|}_{\varepsilon}$$

$\square$

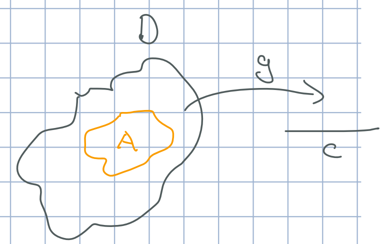
7.5 Stetige Fortsetzung und Grenzwerte

Definition 7.5.1: (Einschränkung)

Sei $g: D \longrightarrow C$ eine Funktion, für $A \subset D$ ist

$g|_A : A \longrightarrow C$ mit $g|_A(a) = g(a) \quad \forall a \in A$

die Einschränkung von g auf A.



Definition 7.5.2: (Fortsetzung)

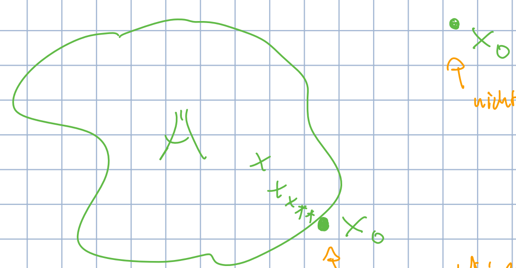
Sei $f: A \longrightarrow C$ eine Funktion, eine Funktion $g: D \longrightarrow C$ heißt

Fortsetzung von f falls $\overset{A \subset D}{\vee}$ $g|_A = f$ d.h. $g(a) = f(a) \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow g$ beschränkt auf A

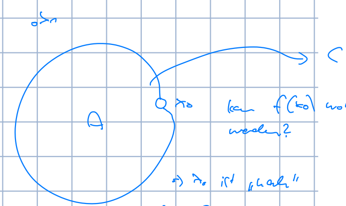
Fragen: Sei $f: A \to \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$ stetig gegeben und $x_0 \notin A$

- $\exists \; g: A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$ stetig ?
- ist g eindeutig. ?



nicht interessant

interessant; da dieser Punkt von A aus erreicht werden kann.



kann $f(x_0)$ wohldefiniert werden?

$\Rightarrow x_0$ ist „nah" an A, x_1 nicht.

$\Rightarrow$ Was heißt es für einen Punkt nah an einer Menge zu sein?

Definition 7.5.3: Häufungspunkt

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) heißt Häufungspunkt von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; x \in A \; : \quad |x - x_0| < \varepsilon$$

äquivalent zu

$$\iff \quad \exists \; (x_n)_n \subseteq A \quad \text{mit} \quad \lim_n x_n = x_0$$

x_0 ist ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ g.d.w. x_0 Häufungspunkt der Menge $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Antworten: • Falls x_0 kein Häufungspunkt: • f hat unendlich viele Fortsetzungen

• sie sind nicht eindeutig

z.B. $g(x_0) = a$

• Falls x_0 Häufungspunkt ist $g(x_0)$ eindeutig

(Eindeutigkeit des Grenzwertes).

Definition 7.5.4: Grenzwert von Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) und x_0 ein Häufungspunkt von D.

$a \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) heißt Grenzwert von f in a falls.

$$\forall \; (x_n)_n \in D \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

man schreibt $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, bzw $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = a$ → wenn $f(x_0)$ definiert wäre, hätte er den Wert a

Satz. 7.5.5: Folgende Aussagen sind äquivalent:

Möglichkeit Funktionen fortzusetzen in Menge mit Löchern

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

Folgenkrit. der Stetigkeit angewendet auf F

(ii) die Funktion $F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ a & x = x_0 \end{cases}$ ist stetig in x_0

ε-δ-Def. ⇔ Folgenkrit. auf F

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; \delta > 0 \; : \quad |x - x_0| < \delta, \; x \in D \setminus \{x_0\} \implies |f(x) - a| < \varepsilon$

Beweis: Dies ist eine direkte Konsequenz aus den Folgenkriterium der Stetigkeit. ☐

(i) $\implies$ (ii) $\overset{\varepsilon\text{-}\delta \text{ Definition der Stetigkeit von } F}{\implies}$ (iii) $\implies$ (i)

(Folgenkriterien für die Stetigkeit von F & "Äquivalenz" des Folgenkriteriums $\iff$ ε-δ Kriterium.)

Satz 7.5.6: (Rechenregeln für Grenzwerte) $\Rightarrow$ Gelten genauso wie Rechenregeln für stetige Funktionen bzw. Rechenregeln für konv. Folgen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ und x_0 ein Häufungspunkt von D.

Falls die Grenzwerte existieren, so gilt.

(a) $$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) + \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$$

(b) $$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$$

(c) falls $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Beweis: Folgt direkt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen.

Satz 7.5.7 (Verträglichkeit mit Komposition).

Sei $f : A \to B$, $g : B \to C$, falls

(i) x_0 ein Häufungspunkt von A

(ii) $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ Häufungspunkt von B, $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert

(iii) $\lim_{y \to y_0} g(y)$ existiert

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (g \circ f) = \lim_{y \to y_0} g(y)$$

Beweis: Sei $(x_n)_n \subseteq A$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ $\quad \lim_{n \to \infty} \underbrace{f(x_n)}_{y_n} = y_0$ existiert

$$\Rightarrow \left(f(x_n) = y_n\right)_n \subseteq B \text{ mit } \lim_{n \to \infty} y_n = y_0$$

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = \lim_{n \to \infty} g(y_n) = \lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x_n) \qquad \square$$

$$= \lim_{n \to \infty} g(f(x_n))$$

Spezielle Notation / Definition 7.5.8:

1. Fall: Falls $f: A \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von A

lassen wir auch $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ zu

(entsprechend der Konvergenz von Folgen).

In diesem Fall hat f eine $\boxed{\text{Asymptote}}$ in x_0

$\Downarrow$ $(f(x_n))_n$ divergiert bestimmt $\forall (x_n)_n \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

2. Fall: Falls $f: A \subseteq \mathbb{R} \to B$

- $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$ zulässig d.h. wir definieren

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in A}} f(x) \quad / \quad \lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \in A}} f(x)$$

- falls $|x_0| < \infty$ definieren wir die einseitigen Grenzwerte.

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A \cap \{x > x_0\}}} f(x)$$

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A \cap \{x < x_0\}}} f(x)$$

Einschub: 7.6.1 Monotone Funktionen.

Definition 7.6.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

f heißt

monoton wachsend	falls $\forall x, y \in D$ $x<y$	$f(x) \leq f(y)$	mon. wachsend
streng "		$f(x) < f(y)$	streng mon. wachsend
monoton fallend		$f(x) \geq f(y)$	mon. fallend
streng "		$f(x) > f(y)$	streng mon. fallend

Satz 7.6.2: Sei $f: [a,b] \to f([a,b])$ stetig.

So ist äquivalent f ist bijektiv $\Longleftrightarrow$ f ist streng monoton.

Zudem gilt $f([a,b])$ ist das Intervall zwischen $f(a)$ & $f(b)$ und f^{-1} ist ebenfalls streng monoton.

$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

Beweis: Wir können annehmen, dass $f(a) \leq f(b)$ sonst betrachte $-f(x)$.

$\Rightarrow$ Funktion streng mon. wachsend

bijektiv $\Rightarrow$ str. mon.

"$\Rightarrow$" Sei nicht streng monoton

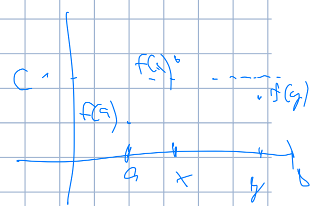
Annahme: $\exists\ x < y$ mit $f(x) \geq f(y)$

"$=$" ist nicht möglich da sonst f nicht injektiv.

d.h. wir nehmen an: $f(x) > f(y)$.

$\Rightarrow \quad f(a) < f(x) \quad ; \quad f(x) > f(y)$

sei $\max\{f(a), f(y)\} < c < f(x)$.



Nach ZWS $\exists\ x_0 \in [a, x]$ mit $f(x_0) = c$

$\Rightarrow$ Zwischenwertsatz

$\exists\ x_1 \in [x, y]$ mit $f(x_1) = c$ $\lightning$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Injektivität

Falls $x = a$, dann gilt: $x = a < y < b$

$f(y) < f(a) < f(b)$

$\Rightarrow$ Dann wähle $f(y) < c < f(a)$

$\Rightarrow \exists\, x_1 \in (a, y)$ mit $f(x_1) = c$

$\exists\, x_2 \in (y, b)$ mit $f(x_2) = c$

Falls $y = b$ analog

"$\Leftarrow$" da f streng monoton folgt aus dem ZWS.

$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ $\Rightarrow$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ müssen nach ZWS angenommen werden

f ist injektiv nach Annahme. (strenge Monotonie)

& surjektiv als Konsequenz des ZWS.

Die Monotonie von f^{-1} ist als Übungsaufgabe. $\square$

$\Rightarrow$ Sei $\exists\, f(a) < y < z \leq f(b)$

Sei $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(z)$

$\lightning$

$y = f \circ f^{-1}(y) \geq f \circ f^{-1}(z) = z$

Corollar 7.6.3: Sei $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig & streng monoton

$\Rightarrow f^{-1}$ existiert und ist stetig.

Beweis: Kombiniere Satz 7.6.1 mit Satz 7.1.3:

Satz 7.1.3: Sei $f: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ bijektiv und stetig

$\Rightarrow f^{-1}: [c,d] \longrightarrow [a,b]$ stetig. (und existiert)

$\square$

8. Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

8.1. Die Exponentialfunktion II (auf $\mathbb{C}$)

Wir hatten bisher gezeigt.

4.9. Die Exponentialreihe. I

Satz 4.34: (Die Exponentialreihe)

Die Exponentialreihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ (d.h. der Konvergenzradius $R = +\infty$)

Sie hat die Eigenschaft:

(AT) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(WT) $\lim_{x_n \to 0} \frac{\exp(x_n) - 1}{x_n} = 1$

(i) $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\exp(k) = \exp(1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

zudem gilt die Abschätzung.

$$\left| \exp(x) - S_n(x) \right| \leq 2 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für} \quad |x| < 1 + \frac{n}{2}$$

Nun möchten wir eine zweite Charakterisierung finden:

Satz 8.1.1: $\exists! \ \exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ so, dass

(A) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ "Additionseigenschaft"

(W) $\lim_{z \to 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1$ "Wachstum"

Für diese Funktion gilt:

(i) $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(ii) $\exp(z) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(iii) $\exp(z)$ ist stetig & $e^q = \exp(q) \quad \forall q \in \mathbb{Q}$ wobei

$e = \exp(1)$ ist die "Eulersche Zahl".