

November 30, 2025

3.1

2)

Es gilt:

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

wobei die Folge $\left((1 + \frac{1}{k})^k\right)_k$ monoton steigend ist.

Es gilt $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e > (1 + \frac{1}{n})^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n} - e\right) \quad (1)$$

$$< \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad (2)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \quad (3)$$

$$= e \cdot \frac{1}{n} \quad (4)$$

Somit gilt:

$$\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2 \quad (5)$$

$$\leq e^2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad (6)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2}$ ist somit eine Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2$.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2} = e^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2$$

3.4

Es gilt:

$$\{1, 2, \dots, m - (d + 1)\} \subseteq \{\tau(1), \dots, \tau(m)\} \subseteq \{1, \dots, m + d\}, \forall m \in \mathbb{N}$$

Da $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, kann ein N gewählt werden, sodass für alle $n > N$ gilt:

$$a_n < \frac{\varepsilon}{4 \cdot d}$$

Nach dem Cauchy-Kriterium kann ein $M \in \mathbb{N}$ gewählt werden, sodass

$$\forall m > n > M : \sum_{k=n}^m a_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei $m > \max\{N, M\} + d$

$$\left| \sum_{n=1}^m a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^m a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{m-d-1} a_n + \sum_{n=m-d}^m a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^m a_n \right| \quad (7)$$

$$\leq \left| \sum_{n=m-d}^m a_n \right| + \sum_{n=m-d}^m |a_{\tau(n)}| \quad (8)$$

$$\leq \left| \sum_{n=m-d}^m a_n \right| + \sum_{n=m-d}^{m+d} |a_n| \quad (9)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2d \cdot \frac{\varepsilon}{4d} \leq \varepsilon \quad (10)$$

Da die Folgen einen beliebig kleinen Abstand haben, konvergieren sie zu dem selben Grenzwert.