# Aufgaben für Analysis I

## Blatt NUMMER

**IHRE NAME**

---

## Aufgabe 3.1

### 8)

$h_n = n^k \cdot x^n$, wobei $|x| < 1$

Es soll durch Induktion gezeigt werden, dass $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : x^n < \frac{1}{n^k}, \forall n < N$.

**Induktionsanfang**

Sei $n > k$, Sei $n$ so gewählt, dass $(\frac{n}{n+1})^k > x$.
Sei $x^n > \frac{1}{n^k}$.
Es gilt demnach: $x^n = \frac{1}{n^k} + \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{N}$. Für größere n, kann $\varepsilon$ beliebig klein gewählt werden, da sowohl $x^n$, als auch $\frac{1}{n^k}$ gegen 0 konvergieren.

$$
\begin{aligned}
x^{kn} =& (\frac{1}{n^k} + \varepsilon)^k && (1)\\
=& \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{1}{n^{2k-i}} \cdot \varepsilon^i && (2)\\
<& \frac{1}{n^{2k}} && (3)\\
<& \frac{1}{n^k \cdot k^k} && (4)\\
=& \frac{1}{(kn)^k} && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

Somit gilt $x^{nk} < \frac{1}{nk}$.

**Induktionsschritt**

Die Folge $(\frac{n}{n+1})$ konvergiert gegen 1.
Somit konvergiert auch die folge $\frac{n}{n+1})^k)$
Sei also $n$ so gewählt, dass $(\frac{n}{n+1})^k > x$. Dies ist moeglich, da $x < 1$.
**Induktionshypothese:** Sei $x^n < \frac{1}{n^k}$.

$$
\begin{aligned}
x^{n+1} &= x \cdot x^n && (7)\\
&< (\frac{n}{n+1})^k \cdot x^n && (8)\\
&\overset{IH}{<} (\frac{n}{n+1})^k \cdot \frac{1}{n^k} && (9)\\
&= \frac{1}{(n+1)^k} && (10)
\end{aligned}
$$

Da gilt $x^n < \frac{1}{n^k}$, gilt auch: $x^n \cdot n^{k-1} < \frac{1}{n}, \forall n < N$.
Nach Beispielaufgabe $e7$ konvergiert $\frac{1}{n}$ gegen 0. Da $h(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge nach Satz 4.8 gegen 0.

## Aufgabe 3.2

Sei ein $\varepsilon < 0$.
Sei ein $n_0$ gewählt, sodass $|a - a_{n_0}| < \varepsilon$

Sei ein k gewählt, sodass $\frac{\max\{a_1,\dots,a_{n_0},n_0 \cdot a + n_0 \cdot \varepsilon \cdot b\}}{kn_0} < \frac{\varepsilon - |a - a_{n_0}|}{2}$
Sei $N > n_0 \cdot k$

$$|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}| = |\frac{a_1 + \cdots + a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_{2n_0}}{n}| \tag{11}$$