Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

December 1, 2025

3.1

2)

Es gilt:

$$e = \lim_{k \to \infty} (1 + \frac{1}{k})^k$$

wobei die Folge $((1 + \frac{1}{k})^k)_k$ monoton steigend ist.
Es gilt $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e > (1 + \frac{1}{n})^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
0 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e = \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e && (1)\\
< \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n && (2)\\
= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} && (3)\\
< e \cdot \frac{1}{n} && (4)
\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2 \leq e^2 \cdot \frac{1}{n^2} \tag{5}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2}$ ist somit eine Majorante der Reihe $\sum\limits_{n}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2$.
Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2} = e^2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit auch die Reihe

$$\sum_{n}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2$$

3.4

Es gilt:

$$\{1, 2, \ldots, m-(d+1)\} \subseteq \{\tau(1), \ldots, \tau(m)\} \subseteq \{1, \ldots, m+d\}, \forall m \in \mathbb{N}$$

Da $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, kann ein N gewählt werden, sodass für alle $n > N$ gilt:

$$a_n < \frac{\varepsilon}{4 \cdot d}$$

Nach dem Cauchy-Kriterium kann ein $M \in \mathbb{N}$ gewählt werden, sodass

$$\forall m > n > M : \sum_{k=n}^{m} a_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

.

Sei $m > \max\{N, M\} + d$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{m} a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^{m} a_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{m-d-1} a_n \ + \sum_{n=m-d}^{m} a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^{m} a_n \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=m-d}^{m} a_n \ \right| + \sum_{n=m-d}^{m} |a_{\tau(n)}| \\
&\leq \left| \sum_{n=m-d}^{m} a_n \right| + \sum_{n=m-d}^{m+d} |a_n| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2d \cdot \frac{\varepsilon}{4d} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Da die Folgen einen beliebig kleinen Abstand haben, konvergieren sie zu dem selben Grenzwert.

3.5

Sei $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,\ A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Lemma 1

$$\sum_{n=0}^{m} C_n = \sum_{n=0}^{m} A_{m-n} B_n$$

Beweis Lemma 1

$$\begin{aligned} C_m &= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{m} b_n A_{m-n} \end{aligned}$$

Beweis durch Induktion, dass

$$\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_k A_{n-k} = \sum_{n=0}^{m} A_{m-n} B_n$$

Induktionsanfang
Sei $m = 0$.

$$\sum_{n=0}^{0} \sum_{k=0}^{n} b_n A_{0-n} = b_0 A_0 = B_0 A_0 = \sum_{n=0}^{0} A_{0-n} B_n$$

Induktionsschritt
Induktionshypothese: Sei

$$\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_k A_{n-k} = \sum_{n=0}^{m} A_{m-n} B_n$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m+1}\sum_{k=0}^{n} b_k A_{n-k} &= \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} b_k A_{n-k} + \sum_{n=0}^{m+1} b_n A_{m+1-n} \\
&\overset{IH}{=} \sum_{n=0}^{m} A_{m-n}B_n + b_0 A_{m+1} + \sum_{n=1}^{m+1} b_n A_{m+1-n} \\
&= \sum_{n=0}^{m} A_{m-n}B_n + \sum_{n=0}^{m} b_{n+1} A_{m-n} + b_0 A_{m+1} \\
&= \sum_{n=0}^{m} A_{m-n}B_n + b_{n+1} A_{m-n} + b_0 A_{m+1} \\
&= \sum_{n=0}^{m} A_{m-n}(B_{n+1}) + (-A_0 B_{m+1} + A_0 B_{m+1}) + b_0 A_{m+1} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} A_{m-n}B_{n+1} + A_0 B_{m+1} + b_0 A_{m+1} \\
&= \sum_{n=1}^{m} A_{m+1-n}B_n + A_0 B_{m+1} + b_0 A_{m+1} \\
&= \sum_{n=0}^{m+1} A_{m+1-n}B_n
\end{aligned}
$$

Da $C_m = \sum_{n=0}^{m} b_n A_{m-n}$, gilt

$$
\sum_{n=0}^{m} C_m = \sum_{n=0}^{m} b_n A_{m-n} \quad \square
$$

Lemma 2

Aus $d_n \to e, e_n \to e$ folgt:

$$
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} d_{n-k} e_k \to de
$$

- leider kein Beweis

Hilfssatz1

Sei ein $\varepsilon > 0$ Nach Lemma 2 kann ein M_0 gefunden werden, sodass $\forall m > M_0$:

$$|\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} A_{m-n}B_n - AB| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{6}$$

$$(m+1)\cdot|\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} A_{m-n}B_n - AB| < (m+1)\frac{\varepsilon}{4} \tag{7}$$

$$|\sum_{n=0}^{m} A_{m-n}B_n - (m+1)AB| < (m+1)\frac{\varepsilon}{4} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Nach Lemma 1 gilt:

$$|\sum_{n=0}^{m} C_n - (m+1)AB| < (m+1)\varepsilon$$

Speziell gilt außerdem:

$$|\sum_{n=0}^{2m} C_n - (2m+1)AB| < (2m+1)\varepsilon$$

Hilfssatz2

C_n konvergiert gegen einen Grenzwert C.
Es kann also für jedes $\varepsilon > 0$ ein M_1 gefunden werden, sodass für alle $m_1 > M_1$ gilt $|C - C_{m_1}| < \varepsilon$

Also gilt für alle $m_2 > m_1 > M_1$:

$$|(m_2 - m_1)C_{m_2} - \sum_{n=m_1}^{m_2} C_n| < \varepsilon$$

Hilfssatz3

Da die Folge $\frac{m+1}{m}$ gegen 1 konvergiert, kann ein M_2 gewählt werden, sodass $\forall m > M_2 : |1 - \frac{m+1}{m}| < \frac{\varepsilon}{4\cdot AB}$

$$|AB - \frac{m+1}{m}AB| = |AB(1 - \frac{m+1}{m})| \leq |AB(\frac{\varepsilon}{4AB})| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Hilfssatz4

Wenn $|F + G| < k$ und $|F' - F| < k'$, dann $|F' + G| < k + k'$

$$k + k' > |F + G| + |F' - F| \geq |F + G + F' - F| = |F' + G|$$

Sei $M = \max\{M_0, M_1, M_2, 3\}$. Für alle $m > M$ gilt dann:

Nach Hilfssatz1:

$$|\sum_{n=0}^{2m} C_n - (2m+1)AB|$$

$$= |\sum_{n=0}^{m-1} C_n + \sum_{n=m}^{2m} C_n - (2m+1)AB| < (2m+1)\frac{\varepsilon}{4}$$

Nach Hilfssatz 1, 2 und 4:

$$|m \cdot AB + mC_m - (2m+1)AB| < (2m+3)\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\implies |mC_m - (m+1)AB| < (2m+3)\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\implies |C_m - \frac{m+1}{m}AB| < (2 + \frac{3}{m})\frac{\varepsilon}{4}$$

Nach Hilfssatz 3 und 4:

$$|C_m - AB| < (3 + \frac{3}{m})\frac{\varepsilon}{4} \leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon$$

Somit konvergiert C_m gegen AB, was zu zeigen war.