UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

- Ein Körper ist eine Veralgemeinerung von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Es ist eine Menge, in denen wir addieren, subtrahieren, multiplizieren und durch Nicht-Null-Elemente dividieren können.
- $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, wobei i ("die imaginäre Einheit") hat die Eigenschaft $i^2 = -1$.
  - Addition: $(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$
  - Multiplikation $(a + bi)(c + di) := ac - bd + (bc - ad)i$
- Schlüsseleigenschaft von $\mathbb{C}$ - "Fundamentalsatz der Algebra": wenn $P(x) \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom ist, dann existiert $z \in \mathbb{C}$ sodass $P(z) = 0$.
  - Es folgt daraus dass wenn $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ ein monisches Polynom von grad d ist dann können wir $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ finden so dass $P(X) = (X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_d)$.

- Sei $\mathbb{Z}/n$ die Menge von Kongruenzklassen modulo n.
- Wir definieren Addition und Multiplikation so: $[a] + [b] := [a + b]$ und $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$.
- Falls p eine Primzahl ist, dann ist $\mathbb{Z}/p$ ein Körper.
- Keine Körper: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[X]$ (Polynome mit einer Variable X, mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$)

- Sei K ein Körper. Ein lineares Gleichungssystem (über K) von m Gleichungen mit n Unbekannten:

$$\begin{aligned}
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\
&a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\
&\ldots \\
&a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m
\end{aligned}$$

wobei alle $a_{ij}, b_i \in K$.

- Wir interessieren uns daran, alle Lösungen $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ zu finden.

- Erst erklären wir das Gaußsche Elimationsverfahren mit paar Beispiele auf dem Tafel.
- Jetzt betrachten wir ein allgemeines System

$$
\begin{aligned}
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\
&a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\
&\ldots \\
&a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m
\end{aligned}
$$

- Um ein allgemeines Ergebnis zu formulieren, erst sagen wir dass ein Gleichungssystem im Zeilenstufenform ist, wenn die folgende zwei Bedingungen erfüllt sind.
  - Die ersten r Zeilen sind nicht der form $0 = b_m$, und die letzte $m - r$ Zeilen sind von dieser Form.
  - Für $i = 1, \ldots, r$ sei j_r das kleinste Index sodass $a_{rj_r} \neq 0$. Dann $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

- Wir nehmen jetzt an, dass wir zwei Gleichungssysteme (L) und (R) haben.

$$\begin{array}{ll} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 & a'_{11}X_1 + a'_{12}X_2 + \ldots + a'_{1n}X_n = b'_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 & a'_{21}X_1 + a'_{22}X_2 + \ldots + a'_{2n}X_n = b'_2 \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m & a'_{m1}X_1 + a'_{m2}X_2 + \ldots + a'_{mn}X_n = b'_m \end{array}$$

- Wir bezeichnen die Zeilen des Systems (L) als $Z_1, \ldots, Z_m$, und des Systems (R) als $Z'_1, \ldots, Z'_m$.
- Wir sagen dass (R) entsteht aus (L) durch eine elementare Zeilenumformung des typs 1), wenn es existieren Indexe i, j so dass $Z'_i = Z_j$, $Z'_j = Z_i$, und für alle andere Indexe $k \neq i, j$ haben wir $Z'_i = Z_i$
- Wir sagen dass (R) entsteht aus (L) durch eine elementare Zeilenumformung des typs 2), wenn es existieren $\lambda \in K$ und Indexe i, j so dass $Z'_i = Z_i + \lambda Z_j$, und für $k \neq i$ haben wir $Z'_k = Z_k$.
- Wir sagen dass (L) und (R) äquivalent sind wenn (L) entsteht aus (R) durch eine Sequenz von elementaren Zeilenumformungen.

- Wenn (L) esteht aus (R) durch eine Sequence von elementaren Zeilnumformungen dann entsteht auch (R) aus (L) durch so eine Sequenz. Das zeigt dass wir tatsätzlich eine Äquivalenzrelation auf Gleichungssytemen haben.

Lemma. Falls die Systeme (L) und (R) äquivalent sind, und $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, dann $(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Lösung von (L) gdw. $(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Lösung von (R).

Beweis. • Wir können annehmen dass (R) entsteht aus (L) durch eine elementare Zeilenumformung.

- Wir nehmen jetzt eine Lösung $(x_1, \ldots, x_n)$ des systems (L).
- Falls (R) entsteht aus (L) durch Tausch der Zeilen Z_i und Z_j dann es ist klar dass $(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Lösung auch von (R).
- Falls $Z_i' = Z_i + \lambda Z_j$ dann wir haben die Gleichung $(a_{i1} + \lambda a_{j1})X_1 + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{jn})X_n = b_i + \lambda b_j$
- Da $(x_1, \ldots, x_n)$ lösen die Gleichungen $a_{i1}X_1 + \ldots + a_{in}X_n = b_i$ und $a_{j1}X_1 + \ldots + z_{jn}X_n = b_j$, lösen sie auch die Gleichung Z_i'. □

- Jedes Gleichungssystem ist mit einem System im Zeilenstufenform äquivalent. Die Äquivalenz finden wir mit dem folgenden Gaußchen Eliminationsverfahren.
  - ▶ Falls wir irgenwelche Zeilen der Form $0 = b_i$ haben, tauschen wir die Zeilen bis diese sich am Ende befinden.
  - ▶ Wir suchen nach einem Pivot in der ersten Spalte: d.h. nach einem Element a_{i1} das nicht-null ist.
  - ▶ Wir tauschen die Zeilen Z_1 und Z_i.
  - ▶ Wir nehmen das System $Z_1, Z_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} Z_1, \ldots, Z_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}} Z_1$.
  - ▶ Falls wir irgenwelche Zeilen der Form $0 = b_i$ haben, tauschen wir die Zeilen bis diese sich am Ende befindet.
  - ▶ Wir suchen jetzt nach einem Pivot in der zweiten Spalte: d.h. nach einem Element a_{i2} mit $i \geqslant 1$ das nicht null ist.
  - ▶ Wir tauschen die Zeile Z_2 und Z_i
  - ▶ Wir nehmen das System $Z_1, Z_2, Z_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} Z_2, \ldots, Z_m - \frac{a_{m2}}{a_{22}} Z_2$.
  - ▶ ....

- Um ein lineares Gleichungssystem zu lösen haben wir jetzt das folgende Verfahren.
  - Erst finden wir mit dem Gaußschen Verfahren ein äquivalentes System im Zeilenstufenform
  - Falls in diesem System gibt es Gleichungen der Form $0 = b_i'$, wobej $b_i' \neq 0$, dann das ursprüngliche System hat keine Lösungen.
  - Sonst, entfernen wir alle Gleichungnen der Form $0 = 0$. Wir bezeichnen mit r die Anzahl von Gleichungen die wir jetzt haben.
  - Wie früher, bezeichnen wir mit j_i das kleinste Index so dass $a'_{ij_i} \neq 0$.
  - Wir nennen die Variablen $X_{1j_1}, \ldots, X_{rj_r}$ die gebundenen Variablen. Alle andere $n - r$ Variablen nennen wir die freien Variablen.
  - Falls es keine freie Variablen gibt, dann das System hat genau eine Lösung.
  - Falls es freie Variablen gibt, dann für jede Belegung von freien Variablen bekommen wir genau eine Lösung.

- Insbesondere sehen wir dass wir eine “Parametrisierung von Lösungen” haben: eine injektive Abbildung $\alpha\colon K^{n-r} \to K^n$, so dass die Lösungen des Systems sind genau die Elemente der Menge $\alpha(K^{n-r})$.

- Eine motivierende Frage für die nächsten Vorlesungen: falls wir andere Pivots im Gaußschen Eliminationsverfahren nehmen, können wir ein anderes äquivalentes Zeilenstufenform-System bekommen. Ist die Anzahl der freien Variablen immer gleich?

  ▶ Das ist schon in diesem Moment klar falls unser Körper K endlich viele Elemente hat. Tatsätzlich: wir haben eine Bijektion zwischen K^{n-r} und der Menge der Lösungen, und die Menge der Lösungen hängt nur von dem ursprünglichen System ab, weswegen auch $|K^{n-r}| = |K|^{n-r}$ ist unabhängig von den Wahlen, die wir im Gaußschen Verfahren machen. Es folgt dass auch $n - r$ und r sind von diesen Wahlen unabhängig.

  ▶ Dieses Argument funktioniert für unendliche Körper nicht, weil es existiert eine Bijektion z.B. $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2$, weswegen die Menge der Lösungen eines Systems kann im Prinzip durch $\mathbb{Q}$ und auch durch $\mathbb{Q}^2$ parametrisiert werden.