Do, 11.12.25

Übung Lina

$\boxed{7.5}$

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_4\\x_3\\x_2\\x_5\end{pmatrix}$$

⇒ Beispiel einer Elementaroperation des Gaußschen Algorithmus

5×5-Matrix

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=A_1 \quad \Rightarrow A_1=A_1^{-1}$$

⇒ vertauschte Version der Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_1 \circ T_1 = id_{\mathbb{R}^5}$$

$$A_1\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\\x_4&y_4\\x_5&y_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_4&y_4\\x_3&y_3\\x_2&y_2\\x_5&y_5\end{pmatrix}$$

⇒ Ergebnis von ~~Matr~~ Matrixmultiplikation wird spaltenweise berechnet

---

Elementaroperation 2. Typ:

$$T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2+ax_4\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$$

$$A_2 \in M_{5\times5} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&a&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

⇒ Umkehrfunktion

$$T_2^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2-ax_4\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_2 \circ T_2^{-1} = id_{\mathbb{R}^5}$$

Gauß-Algorithmus:

wiederholtes multiplizieren mit invertierbarer Matrix

7.6

U, V, W Vektorraum

~~Sl~~

7.9

⇒ Kann kein Erzeugendensystem sein, das weniger Vektoren als Basis

⇒ In dem Erzeugendensystem könnte keine Basis enthalten sein

7.12

1.) $\dim(Mat_{m \times n}(\mathbb{K})) = m \cdot n$

2.)

4.) $W = \{f: S \to \mathbb{K}\}$ $|S| = n$ $S_0 \subseteq S$

$U = \{f \in W \mid f(x) = 0, \forall x \in S_0\} \Rightarrow U \subseteq W$ (Untervektorraum)

$x \in S$	$f(x)$
x_1	a_1
⋮	⋮
	a_l
S_0 ⋮	0
	0
x_k	0

~~$f + g = \{(a_1, 1)(a_1, 2), (a_7, 0), \ldots\}$~~

~~$(f \cdot g)^2$~~ $(f + 2g)$

⇒ definiere Funktionen: $I_y: S \to \mathbb{K}$

$x \mapsto \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nur definiert für endliche Summe, daher muss S endlich sein

Erzeugendensystem: $f \in U$ es gilt: $f = \sum_{y \in S/S_0} f(y) I_y$

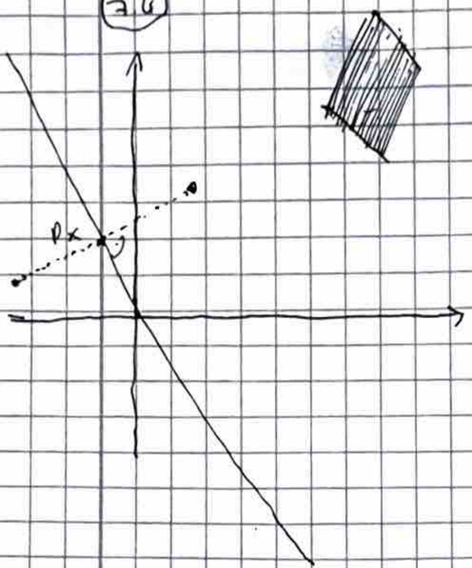
⇒ Sei $x \in S_0$ $f(x) = 0$ $\sum_{y \in S/S_0} f(y) I_y(x) = 0$

$x \notin S_0$ $f(x)$

lin. unabh.

$(a_y)_{y \in S \setminus S_0}$ s.d. $\sum_{y \in S \setminus S_0} a_y \cdot I_y$

7.6



Bedingung: $\underbrace{\langle Px \mid x - Px \rangle}_{\text{Skalarprodukt}} = 0$

⇒ $I_y : S \to K$ ⇒ Definiere $|S|-|S_0|$ Funktionen $I_y \in U_1$ die eine Basis darstellen sollen

$$I_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Erzeugendensystem

⇒ zeige, dass beliebiger $f \in U$ eine Lin. Komb. von I_y

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x) \cdot I_x(x)}_{\text{einziger Summand der nicht } 0}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{y \in S \setminus S_0} f(y) \cdot I_y(x)}_{} = f(x)$$

$I_y(x)$ nimmt nur für $x = y$ den Wert 1 an.

$f(x) \cdot I_x(x) = f(x)$

⇒ wenn $x \in S^0$, dann gilt $y \neq x$ $\forall y$ und die Summe ist 0.

⇒ Da f und x beliebig, kann jedes $f \in U$ erzeugt werden

2. Linear unabhängig

Sei eine Linearkombination der Funktionen I_y, $y \in S \setminus S_0$

⇒ $\sum_{y \in S \setminus S_0} a_y \cdot I_y = 0$

$0 \in U$

⇒ 0 ist die 0 Funktion, jedem $x \in S$ die 0 zuordnet

⇒ Sei $a_{y_0} \neq 0$

$g(x) = \sum_{y \in S \setminus S_0} a_y \cdot I_y(x)$ ist an der Stelle $x(y_0)$ ungleich 0, da I_{y_0} hier eine 1, jede andere Funktion aber eine 0 zuordnet.