

Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

December 2, 2025

3.1

2)

Es gilt:

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

wobei die Folge $\left((1 + \frac{1}{k})^k\right)_k$ monoton steigend ist.

Es gilt $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e > (1 + \frac{1}{n})^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e = \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e \quad (1)$$

$$< \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad (2)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \quad (3)$$

$$< e \cdot \frac{1}{n} \quad (4)$$

Somit gilt:

$$\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2 \leq e^2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad (5)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2}$ ist somit eine Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2$.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2} = e^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit auch die Reihe

$$\sum_n \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2$$

3.4

Es gilt:

$$\{1, 2, \dots, m - (d + 1)\} \subseteq \{\tau(1), \dots, \tau(m)\} \subseteq \{1, \dots, m + d\}, \forall m \in \mathbb{N}$$

Da $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, kann ein N gewählt werden, sodass für alle $n > N$ gilt:

$$a_n < \frac{\varepsilon}{4 \cdot d}$$

Nach dem Cauchy-Kriterium kann ein $M \in \mathbb{N}$ gewählt werden, sodass

$$\forall m > n > M : \sum_{k=n}^m a_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei $m > \max\{N, M\} + d$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^m a_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{m-d-1} a_n + \sum_{n=m-d}^m a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^m a_n \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=m-d}^m a_n \right| + \sum_{n=m-d}^m |a_{\tau(n)}| \\ &\leq \left| \sum_{n=m-d}^m a_n \right| + \sum_{n=m-d}^{m+d} |a_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2d \cdot \frac{\varepsilon}{4d} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Da die Folgen einen beliebig kleinen Abstand haben, konvergieren sie zu dem selben Grenzwert.

3.5

Sei $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$

Lemma 1

$$\sum_{n=0}^m C_n = \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n$$

Beweis Lemma 1

Hilfssatz 0

Zu zeigen:

$$C_m = \sum_{n=0}^m b_n A_{m-n}$$

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$C_0 = \sum_{n=0}^0 c_n = a_0 b_0 = \sum_{n=0}^0 b_n A_0$$

Induktionsschritt:

Sei: $C_m = \sum_{n=0}^m b_n A_{m-n}$

$$\begin{aligned} C_{m+1} &= \sum_{n=0}^{m+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} + \sum_{n=0}^{m+1} a_{m+1-n} b_n \\ &\stackrel{IH}{=} \sum_{n=0}^m b_n A_{m-n} + a_{m+1-n} b_n + a_0 b_{m+1} \\ &\quad \sum_{n=0}^m b_n A_{m+1-n} + a_0 b_{m+1} = \sum_{n=0}^{m+1} b_n A_{m+1-n} \quad \square \end{aligned}$$

Beweis Lemma1

Beweis durch Induktion, dass

$$\sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n b_k A_{n-k} = \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n$$

Induktionsanfang

Sei $m = 0$.

$$\sum_{n=0}^0 \sum_{k=0}^n b_n A_{0-n} = b_0 A_0 = B_0 A_0 = \sum_{n=0}^0 A_{0-n} B_n$$

Induktionsschritt

Induktionshypothese: Sei

$$\sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n b_k A_{n-k} = \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m+1} \sum_{k=0}^n b_k A_{n-k} &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n b_k A_{n-k} + \sum_{n=0}^{m+1} b_n A_{m+1-n} \\ &\stackrel{IH}{=} \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n + b_0 A_{m+1} + \sum_{n=1}^{m+1} b_n A_{m+1-n} \\ &= \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n + \sum_{n=0}^m b_{n+1} A_{m-n} + b_0 A_{m+1} \\ &= \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n + b_{m+1} A_{m-m} + b_0 A_{m+1} \\ &= \sum_{n=0}^m A_{m-n} (B_{n+1}) + (-A_0 B_{m+1} + A_0 B_{m+1}) + b_0 A_{m+1} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} A_{m-n} B_{n+1} + A_0 B_{m+1} + b_0 A_{m+1} \\ &= \sum_{n=1}^m A_{m+1-n} B_n + A_0 B_{m+1} + b_0 A_{m+1} \\ &= \sum_{n=0}^{m+1} A_{m+1-n} B_n \end{aligned}$$

Da nach Hilfssatz 0 $C_m = \sum_{n=0}^m b_n A_{m-n}$, gilt

$$\sum_{n=0}^m C_m = \sum_{n=0}^m b_n A_{m-n} \quad \square$$

Lemma 2

Aus $d_n \rightarrow e, e_n \rightarrow e$ folgt:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n d_{n-k} e_k \rightarrow de$$

- leider kein Beweis

Hilfssatz1

Sei ein $\varepsilon > 0$ Nach Lemma 2 kann ein M_0 gefunden werden, sodass $\forall m > M_0$:

$$\left| \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n - AB \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (6)$$

$$(m+1) \cdot \left| \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n - AB \right| < (m+1) \frac{\varepsilon}{4} \quad (7)$$

$$\left| \sum_{n=0}^m A_{m-n} B_n - (m+1)AB \right| < (m+1) \frac{\varepsilon}{4} \quad (8)$$

$$(9)$$

Nach Lemma 1 gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^m C_n - (m+1)AB \right| < (m+1)\varepsilon$$

Speziell gilt außerdem:

$$\left| \sum_{n=0}^{2m} C_n - (2m+1)AB \right| < (2m+1)\varepsilon$$

Hilfssatz2

C_n konvergiert gegen einen Grenzwert C .

Es kann also für jedes $\varepsilon > 0$ ein M_1 gefunden werden, sodass für alle $m_1 > M_1$

gilt $|C - C_{m_1}| < \varepsilon$

Also gilt für alle $m_2 > m_1 > M_1$:

$$|(m_2 - m_1)C_{m_2} - \sum_{n=m_1}^{m_2} C_n| < \varepsilon$$

Hilfssatz3

Da die Folge $\frac{m+1}{m}$ gegen 1 konvergiert, kann ein M_2 gewählt werden, sodass

$\forall m > M_2 : \left| 1 - \frac{m+1}{m} \right| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot AB}$

$$\left| AB - \frac{m+1}{m} AB \right| = \left| AB \left(1 - \frac{m+1}{m} \right) \right| \leq \left| AB \left(\frac{\varepsilon}{4AB} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Hilfssatz4

Wenn $|F + G| < k$ und $|F' - F| < k'$, dann $|F' + G| < k + k'$

$$k + k' > |F + G| + |F' - F| \geq |F + G + F' - F| = |F' + G|$$

Sei $M = \max\{M_0, M_1, M_2, 3\}$. Für alle $m > M$ gilt dann:

Nach Hilfssatz1:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{2m} C_n - (2m+1)AB \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} C_n + \sum_{n=m}^{2m} C_n - (2m+1)AB \right| < (2m+1) \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1, 2 und 4:

$$\begin{aligned} & |m \cdot AB + mC_m - (2m+1)AB| < (2m+3) \frac{\varepsilon}{4} \\ \implies & |mC_m - (m+1)AB| < (2m+3) \frac{\varepsilon}{4} \\ \implies & \left| C_m - \frac{m+1}{m} AB \right| < \left(2 + \frac{3}{m} \right) \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 3 und 4:

$$|C_m - AB| < \left(3 + \frac{3}{m} \right) \frac{\varepsilon}{4} \leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon$$

Somit konvergiert C_m gegen AB , was zu zeigen war.