UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

- Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. sie bijektiv ist.
  - falls die inverse Funktion existiert dann ist sie auch eindeutig, und wir bezeichnet sie mit f^{-1}.
- Für jede injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_M$.
- Für jede surjektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_N$.
  - Im algemeinen der Beweis benutzt das Auswahlaxiom.
- Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- $(M, \preceq)$ heißt eine geordnete Menge oder eine teilweise geordnete Menge.
- Ist $\preceq$ auch vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge.
- Beispiele: $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$.

- Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f: M \to N$ existiert.
- Sei $\mathcal{U}$ ein Universum von Mengen. Dann die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}$.
- Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten.
- Beispiel: die Kardinalität von $\{6, 9, 11\}$ heißt "drei".
    - Kardinalitäten veralgemeinen also die natürlichen Zahlen.
- Sind alle unendliche Mengen gleichmächtig? Andersgesagt: gibt es nur eine unendliche Kardinalität?

Satz. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Beweis. Um einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir an dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen

$$
\begin{array}{rcccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle eine Ziffer $d_i \in \{1, \dots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \dots$.

Was können wir über die n-te Stelle von $b(n)$ sagen? Es gilt $d_n = d_{nn} \neq d_{nn}$. Dieser Widerspruch zeigt, dass b kann nicht existieren. □

- Das war ein “diagonales Argument”.
- Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ heißt “aleph-0”: $\aleph_0$.
- Die Kardinalität von $\mathbb{R}$ heißt “Kontinuum”: $\mathfrak{c}$.
- Nebenbemerkung: mit einem sehr ähnlichen Arguement können wir auch so genannter “Russels Paradoxon” beweisen: die Klasse $\mathcal{U}$ aller Mengen ist selbst keine Menge
    - Nehmen wir an, dass $\mathcal{U}$ eine Menge ist. Dann definieren wir $V := \{M \in \mathcal{U} \colon M \notin M\}$. Nun haben wir zwei Möglichkeiten: $V \in V$ oder $V \notin V$.
    - Wenn $V \in V$, dann schliessen wir, durch die Definition von V, dass $V \notin V$. Wenn wir $V \notin V$ annehmen, dann folgt, dass $V \in V$. Das ist ein Widerspruch.
    - Nebenbemerkung: in Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre die Relation $V \in V$ ist nicht möglich.

- Wir definieren $|M| \leqslant |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Wir möchten erst argumentieren, dass diese Relation wohldefiniert ist.
- Warum könnte diese Relation überhaupt nicht wohldefiniert sein? Betrachten wir ein Beispiel.
  - ▶ Versuchen wir eine Relation auf den Äquivalenzklassen der Kongruenz modulo 10 zu definieren.
  - ▶ Wir haben also 10 Klassen $[0], [1], \ldots, [9]$, und definieren wir: $[i] \prec [j]$ gdw. $i < j$.
  - ▶ Aber das ist nicht wohldefiniert: $[9] \prec [10]$ weil $9 < 10$ aber auch $[9] \not\prec [0]$, weil $9 \not< 0$.

Lemma. Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ gdw. es existiert eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$.

Beweis.

- ($\Rightarrow$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$. existieren Bijektionen $b\colon X \to M$ und $c\colon N \to Y$.

Dann ist die Funktion $c \circ f \circ b\colon X \to Y$ injektiv.

- ($\Leftarrow$) Durch die Symmetrie der Aussage $\square$

- Wir haben definiert: $|M| \leqslant |N|$ genau dann wenn es gibt eine Injektion $f\colon M \to N$. Mit diesem Lemma sehen wir dass $\leqslant$ auf Kardinalitäten wohl-definiert ist.

- Wortschatz: Wir sagen dass eine Menge N mächtiger als eine Menge M ist, gdw. $|M| \leq |N|$, also gdw. es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$.
- Für endliche Kardinalitäten erhalten wir die normale Ordnungsrelation $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ weil wir die Injektion $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\iota(n) = n$ haben. Wir haben auch früher gesehen dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
- Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$, da wir die Injektion $\iota\colon M \to N$, mit $\iota(m) = m$, haben.
- Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann $|N| \leq |M|$. In der Tat, sei $g\colon N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$. Dann g ist injektiv: wenn x, y sind so dass $g(x) = g(y)$, dann auch $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$.

- Ist das überhaupt eine Ordnungsrelation?
  - Reflexivität: $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ ist injektiv, also $|M| \leq |M|$
  - Transitivität: $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ - Injektionen, dann $f;g \colon A \to C$ auch Injektion. Also $|A| \leqslant |B|$ und $|B| \leqslant |C|$ impliziert $|A| \leq |C|$.
  - Antisymmetrie: $f \colon A \to B$ Injektion, $g \colon B \to A$ Injektion (also $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$). Gibt es eine Bijektion $A \to B$?
- Wir brauchen also den Satz von Cantor-Schröder-Bernstein.

> **Satz.** (Cantor-Schröder-Bernstein) Seien $f \colon M \to N$ und $g \colon N \to M$ injektive Funktionen. Dann existiert eine bijektive Funktion $B \colon M \to N$.

- Es folgt dass wir tatsätzlich eine Ordnugsrelation auf Kardinalitäten haben.
- Diese Ordnungsrelation ist total. D.h. wenn wir zwei Mengen M und N haben, dann es existiert eine Injektion $M \to N$ oder eine injektion $N \to M$ (Der Beweis dieser Aussage braucht das Auswahlaxiom)

- Wir sagen dass eine Menge M abzählbar ist gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$, d.h. wenn sie höchstens die Kardinalität von $\mathbb{N}$ hat. Jede endliche Menge, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind also abzählbar, aber $\mathbb{R}$ hingegen nicht.
- Echt mächtigere Mengen nennen wir auch überabzählbar.

Satz. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ist die kleinste unendliche Kardinalität. Anders gesagt: falls M unendlich ist, existiert eine Injektion $\mathbb{N} \to M$.

Beweis.

- Sei X eine unendliche Menge. Um zu zeigen dass $|\mathbb{N}| \leqslant |X|$, müssen wir eine Injektion $f : \mathbb{N} \to X$ definieren. Wir definieren f rekursiv wie folgt.
- Da X ist nicht leer, es gibt $x_0 \in X$, und wir setzen $f(0) := x_0$.
- Jetzt nehmen wir an, dass $f(0), f(1), \ldots f(k)$ schon definiert sind. Da X unendlich ist, es gibt $y \in X \setminus \{f(0), f(1), \ldots, f(k)\}$. Wir setzen $f(k+1) := y$. □

Satz [Cantor 1874] Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Nach CSB brauchen wir zwei Injektionen zu konstruieren.

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich eindeutig als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots]_{10}$ mit den Ziffern $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen. Sei $f(x) := \{[1\, d_1]_{10},\ [1\, d_1 d_2]_{10},\ [1\, d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$. Diese Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist injektiv, da wir können x aus der Menge $f(x)$ rekonstruieren.

- Sei $X \subseteq \mathbb{N}$. Wir konstruieren die reelle Zahl $g(X) := [0, 1 b_0 b_1 b_2 \ldots]_{10}$ mit $b_i \in \{0, 5\}$, so dass $b_i = 5$ gdw. $i \in X$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Offenbar ist auch diese Funktion g injektiv. $\square$

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?

Satz. (Cantor) Für jede Menge M gilt $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Sei

$$X := \{x \in M \mid x \notin g(x)\} \ .$$

Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$. Ist $m \in g(m) = X$? Wenn ja dann durch Definition von X folgt $m \notin g(m)$. Ähnlich wenn $m \notin g(m) = X$ dann folgt $m \in g(m)$. Widerspruch. □

Es gibt also unendlich viele unendliche Kardinalitäten:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$$

- Es scheint schwer, eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < M < |\mathbb{R}|$ zu finden.
  - ”Kontinuumshypothese” (Georg Cantor 1878): ist es wahr, dass wenn $A \subset \mathbb{R}$ ist unednlich dann entweder $|A| = |\mathbb{N}|$ oder $|A| = |\mathbb{R}|$?
- Diese Frage ist in ZFC unmöglich zu beantworten (Kurt Gödel 1940er, Paul Cohen 1960er Jahren).
  - Wir sagen dass CH “unabhängig von dem ZFC-Axiomensystem” ist.
- Der Grund dafür ist, ganz informell gesagt, dass es verschiedene Modelle der reellen Linie und ihrer Teilmengen gibt.
  - Alle diese Modelle erfüllen die ZFC-axiome.
  - In manchen Kontinuumshypothese gilt, und in manchen nicht.
- ”Dream Solution” - ein Axiom das wir zu ZFC hinfügen könnten, mit dem alle oder eine Mehrheit von Mathematiker einverstanden sind, das eine definitive Antwort gibt. In der Zwischenzeit fragen sich Mathematiker manchmal, halb spaßhaft, ob sie ”an die Kontinuumshypothese glauben”.

- In mathematischen Anwendungen wird Auswahlaxiom entweder direkt verwendendet, oder als die folgende äquivalente Aussage.

- Wenn $(M, \leqslant)$ eine teilweise geordnete Menge ist, und $m \in M$, dann sagen wir dass m maximal ist falls es gibt kein $n \in M$ mit $m < n$.

Lemma. (Lemma von Zorn, Lemma von Kuratowski-Zorn, Maximalitätsprinzip von Hausdorff) Sei $(M, \leqslant)$ mit der folgenden Eigenschaft: falls $K \subset M$ eine Kette ist, dann existiert $x \in M$ so dass $\forall_{k \in K} k \leqslant x$. Dann es existiert $m \in M$ dass maximal ist. $\square$

- Als Beispiel beweisen wir die Aussage dass falls M und N Mengen sind, dann es existiert eine Injektion $M \to N$ oder es existiert eine Injektion $N \to N$ (anders gesagt: die Ornungsrelation auf Kardinalitäten ist total).

Beweis.
- Eine eindeutige Relation $R \subset M \times N$ definieren wir als injektiv gdw $\forall_{n \in N}$ existiert nicht mehr als ein Element $m \in M$ mit $(m, n) \in R$. Wir sagen dass R surjektiv ist wenn $\forall_{n \in N} \exists_{m \in M} (m, n) \in R$.
- Wir betratchten die Menge $\mathcal{I}$ von allen Relationen von M nach N die eindeutig und injektiv sind (also $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(M \times N)$). Als die Ornungsrelation nehmen wir $\subseteq$. Wir möchten erst zeigen dass $\mathcal{I}$ ein maximales Element hat.
- Wenn $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ eine Kette von injektiven Relationen ist, dann können wir $f := \bigcup \mathcal{K}$ nehmen. Dann f ist eine eindeutige injektive Relation:
  - Eindeutigkeit: falls $(m, n), (m, n') \in f$ dann existieren $R, R' \in \mathcal{K}$ mit $(m, n) \in R, (m, n') \in R'$. Da $\mathcal{K}$ eine Kette ist, oBdA $R \subseteq R'$, und deswegen $(m, n), (m, n') \in R'$. Da R' injektiv ist, es folg $n = n'$.
  - Injektivität: Übung.

- Es folgt aus dem Zornschen Lemma dass es eine eindeutige injektive Relation $g \in \mathcal{I}$ gibt, die ein maximales Element von $\mathcal{I}$ ist.
- Es folgt dass g ist total oder g ist surjektiv. Sonst würde g nicht maximal in I sein (Übung).
- Falls g ist total dann g ist eine injektive Funktion $M \to N$. Falls g ist surjektiv dann g^{-1} ist eine injektive Funktion $N \to M$. $\square$