Analysis Übung 3

Hannah Wollenberg, Matr.Nr. : 3787664
Moritz Röttelbach, Matr.Nr. : 3772311
Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396
Sofia Valter, Matr.Nr. : 3765150

November 14, 2025

Nr 1

$$\frac{n^n}{(n!)^2} = \frac{n^{\sqrt{n}}}{((\sqrt{n})!)^2} \cdot \frac{n^{\sqrt{n}} \cdot (\sqrt{n}!)^2}{(}$$

Lemma 1.

Sei a_n die Folge definiert in 3.4, und seien $C > 1$, $q > 0$ und $A > 0$. Seien die Folgen b_n, c_n definiert mit $b_n = (1+q)^{n-1}$ und $c_1 = 0, c_n = (n-1) + c_{n-1}(1+q)$ für alle $n > 1$. Dann gilt

$$a_n < C^{c_n} A^{b_n}$$

Beweis:
Induktionsanfang $n = 1$:

$$a_1 < A = C^0 A^1 = C^{c_1} A^{b_1}$$

(IV)
Sei $a_n < C^{c_n} A^{b_n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$
(IS)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq C^n a_n^{1+q} \\ &< C^n (C^{c_n} A^{b_n})^{1+q} \\ &= C^{n+c_n(1+q)} A^{(1+q)^n} \\ &= C^{c_{n+1}} A^{b_{n+1}} \end{aligned}$$

□

Lemma 2.

Sei $q > 0$ und sei c_n wie in Lemma 1 definiert. Dann gilt die explizite Formel

$$c_n = \frac{(1+q)^n - 1 - nq}{q^2}$$

Beweis:
Induktionsanfang $n = 1$

$$\frac{1 + q - 1 - q}{q^2} = 0 = c_1$$

(IV)
Sei

$$c_n = \frac{(1+q)^n - 1 - nq}{q^2}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$
(IS)

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= n + c_n(1+q) \\
&= n + \frac{(1+q)^n - 1 - nq}{q^2}(1+q) \\
&= n + \frac{(1+q)^{n+1} - 1 - q - nq - nq^2}{q^2} \\
&= \frac{nq^2 + (1+q)^{n+1} - 1 - q - nq - nq^2}{q^2} \\
&= \frac{(1+q)^{n+1} - 1 - q - nq}{q^2} \\
&= \frac{(1+q)^{n+1} - 1 - q(n+1)}{q^2}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.

Sei $q > 0$, $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{1+q}{q^2}$, und sei b_n, c_n wie in Lemma 1 definiert. Setze $b'_n := kb_n$. Dann gilt

$$b'_n > c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
q^2 b'_n &= kq^2(1+q)^{n-1} \\
&> (1+q)(1+q)^{n-1} && (\text{da } kq^2 > 1+q) \\
&= (1+q)^n \\
&> (1+q)^n - 1 - nqk && = c_n q^2 (\text{nach Lemma 2})
\end{aligned}$$

Da $q^2 > 0$ folgt $b'_n > c_n$.

□

lemma 4.

Z $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ für jede konvergente reihe $a_n \geq 0$
sei $\varepsilon' = a\sqrt{\varepsilon}$ für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R} > 0$
$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon'}{\sqrt{a}} = \varepsilon$
für alle $n > N$ mit $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon'$ □

3.1

(1)

ZZ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\frac{n^4+3n^2+2}{n^6+1} = \frac{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}{n^2+\frac{1}{n^4}} < \frac{6}{n^2} \leq 6\frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(mit 4.1 (b3),4.6(ii) und Sandwich Theorem) $\square$

(2)

ZZ $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0$
Es gilt:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$ nach Archimedes
Sei $n > N$ dann gilt:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$$

$\square$

3)

Es soll gezeigt werden, dass die Folge $\frac{n}{n+1}$ gegen 0 konvergiert.
Da die Folge $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert, gilt für alle $\varepsilon > 0$,dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N$.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \tag{1}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{n}{n} < \varepsilon + 1 \tag{2}$$

$$\frac{1+n}{n} < 1+\varepsilon, \forall n > N \tag{3}$$

$$|\frac{1+n}{n} - 1| < \varepsilon, \forall n < N \tag{4}$$

Somit konvergiert die Folge gegen 1.

$$c_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2}} \leq 1 \tag{5}$$

$$c_n > \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+1}} > \frac{n}{\sqrt{(n+1)^2}} \geq \frac{n}{n+1} \tag{6}$$

Da wie gezeigt $\frac{n}{n+1}$ ebenfalls gegen 1 konvergiert, folgt nach dem Sandwichsatz $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$

(4)

Da für alle $i \leq n$ gilt $0 < \frac{i}{n} \leq 1$ folgt

$$0 < d_n = \frac{n!}{n^n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Somit gilt

$$0 \leq \lim d_n \leq \lim \frac{1}{n} = 0$$

$\square$

(5)

Da für alle $i \leq n$ gilt $\sqrt{n+i} \leq \sqrt{2n}$ was umgeformt $\frac{1}{\sqrt{n+i}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$ ist. Somit gilt

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$$

da $\sqrt{n}$ unbeschränkt ist ist auch $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ unbeschränkt somit folgt, dass e_n unbeschränkt ist was bedeutet, dass e_n nicht konvergiert (Kontraposition von Satz 4.5)

$\square$

(6)

ZZ $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$
$f'_n = \frac{n+3}{n^{1.5}+1} < \frac{n+3}{n^{1.5}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n}$
konvergiert gegen 0 da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$(gezeigt in 3.1 (2)) und $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$
also konvergiert nach Lemma 4 auch $f_n = \sqrt{f'_n}$ gegen 0 $\square$

(7)

$$g_n = \frac{n+1}{n^{n+\frac{1}{n}}} = \frac{n+1}{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}} < \frac{n+1}{n^n} < \frac{2n}{n^n} = \frac{2}{n^{n-1}} \leq \frac{2}{n} \tag{7}$$

Außerdem gilt $g_n > 0$. Da $\frac{2}{n}$ ebenfalls gegen 0 konvergiert, folgt aus dem Sandwichsatz:

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0$$

$\square$

(8)

Sei $y = \frac{1}{x}$ es gilt $|y| = |\frac{1}{x}| > 1$ Sei $d := |y| - 1 > 0$ es gilt

$$|y|^n = (1+d)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d^i \geq \binom{n}{2} d^2 = \frac{(n-1)n}{2} d^2$$

Daraus folgt $|y|^{-n} \leq \frac{2}{(n-1)n}(|y|-1)^2$
Induktionsanfang k = 1:
Sei $\varepsilon > 0$ und Sei $N > \frac{2}{\varepsilon(|y|-1)^2} + 1$. Sei $n > N$

$$\begin{aligned} \frac{n}{|y|^n} &\leq \frac{2n}{(n-1)n}(|y|-1)^2 \\ &= \frac{2}{(n-1)}(|y|-1)^{-2} \\ &< \frac{2}{(N-1)}(|y|-1)^{-2} \\ &< \varepsilon(|y|-1)^2(|y|-1|)^{-2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(IV)

Sei für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| > 1$ wahr, dass für alle $k < m$ $\lim \frac{n^k}{|y|^n} = 0$
(IS) Sei $|y| > 1$ dann gilt $\sqrt{|y|} > 1$ damit haben wir

$$\begin{aligned} \lim \frac{n^m}{|y|^n} &= \lim \frac{n^{m-1}}{\sqrt{|y|}^n} \lim \frac{n}{\sqrt{y}^n} \\ &= 0 && \text{Nach (IV) da } \sqrt{|y|} > 1 \end{aligned}$$

□

3.2

$\mathbb{Z}$ $\lim_{n\to\infty} b_n = a$
Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Sei $n > N$ dann gilt:

$$b_n = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{n} + \sum_{i=N+1}^{n} \frac{a_i}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{n} = 0$ (mit 4.1 (b3) und 4.6(ii))

$$\begin{aligned} \frac{(n-N-1)(a-\varepsilon)}{n} &< \sum_{i=N+1}^{n} \frac{a_i}{n} && < \frac{(n-N-1)(a+\varepsilon)}{n} \\ (a-\varepsilon) - \frac{(N+1)(a-\varepsilon)}{n} &< \sum_{i=N+1}^{n} \frac{a_i}{n} && < (a+\varepsilon) - \frac{(N+1)(a+\varepsilon)}{n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left((a-\varepsilon)-\frac{(N+1)(a-\varepsilon)}{n}\right)=a-\varepsilon(\text{mit 4.1 (b3) und 4.6(ii,iii)})(\text{andere Seite analog dazu})$$

$-\varepsilon < \lim_{n\to\infty}\sum_{i=N+1}^{n}\frac{a_i}{n}-a<\varepsilon \Rightarrow |\lim_{n\to\infty}\sum_{i=N+1}^{n}\frac{a_i}{n}-a|<\varepsilon$ für beliebig kleine $\varepsilon>0$. also gilt $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=N+1}^{n}\frac{a_i}{n}=a$.
Somit gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 + a = a$

$\square$

3.3

Seien $A_1 \geq A_2 \cdots \geq A_k > 0$ dann gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i^n\right)^{1/n} \geq (A_1^n)^{1/n} = A_1$$

und

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i^n\right)^{1/n} \leq (kA_1^n)^{1/n} = k^{1/n}A_1$$

daraus folgt

$$A_1 \leq \lim\left(\sum_{i=1}^{k} A_i^n\right)^{1/n} \leq \lim(k^{1/n}A_1) = (\lim k^{1/n})A_1 \overset{B6}{=} A_1$$

$\square$

3.4

Sei $C>1, q>0$ und sei $k>\frac{1+q}{q^2}>0$ mit $k\in\mathbb{N}$ (Archimedes). Wir definieren die Folgen b_n, c_n mit $b_n := (1+q)^{n-1}$ und $c_1 := 0, c_n := (n-1)+c_{n-1}(1+q)$. Nun sei $A := \left(\frac{1}{C+\delta}\right)^k$ mit $\delta>0$ und $b_n' := kb_n$. Dann gilt

$$a_n \overset{\text{Lemma 1}}{<} C^{c_n}\left(\frac{1}{C+\delta}\right)^{kb_n} = C^{c_n}\left(\frac{1}{C+\delta}\right)^{b_n'}$$

Nach Lemma 3 gilt $b_n' > c_n$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
a_n &< \frac{C^{c_n}}{(C+\delta)^{b_n'}} \\
&< \frac{C^{c_n}}{(C+\delta)^{c_n}} && (\text{da } C+\delta>1 \text{ und } b_n'>c_n) \\
&< \left(\frac{C}{C+\delta}\right)^{c_n} \\
&< \left(\frac{C}{C+\delta}\right)^{n-1} && \left(\text{da } c_n \geq n-1 \text{ und } \frac{C}{C+\delta}<1\right)
\end{aligned}$$

damit gilt $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{C}{C+\delta}\right)^{n-1} = 0$

$\square$