UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

1. Wiederholung

2. Lineare Unabhängigkeit und lineare Abbildungen

3. Unabhängigkeit- und Erzeugendensystem-kriterium aus dem Gausßchen Eliminationsverfahren

4. Folgerungen aus den obigen Kriterien

Satz. Jede $m \times n$-Matrix A gibt uns eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, und jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist von dieser Form.

- Seien V und W Vektorräume, und sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.
- Seien $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ eine Basis von V, und seien $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ eine Basis von W.
- Die Matrix von T im Bezug auf die Basen $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ und $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ hat Koeffizeinten (a_{ij}), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, so definiert:

$$T(\mathbf{e}_i) =: a_{1i}\mathbf{f}_1 + a_{2i}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{mi}\mathbf{f}_m$$

- Wenn $\mathbf{x}$ hat Koeffizeinten $(x_1, \ldots, x_n)$ in der Basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ dann $T(\mathbf{x})$ hat Koeffizienten $A\mathbf{x}$ in der Basis $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$.
- Also wenn wir in V und W Basen gewählt haben, dann können wir lineare Abbildungen $V \to W$ mit Matrizen identifizieren.

- Beispiel: $T\colon \mathbb{R}_{\leqslant n}[X] \to \mathbb{R}_{\leqslant n}[X]$, durch $T(f) := f'$ gegeben. Wir fixieren die Basis $1, X, X^2, \ldots, X^n$ in $\mathbb{R}_{\leqslant n}[X]$.

Wir haben $T(X^k) = kX^{k-1}$ wenn $k \geqslant 1$, und $T(1) = 0$. Es folgt dass die Matrix von T ist, z.B. wenn $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Falls eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ bijektiv ist dann können wir die inverse Abbildung $T^{-1}\colon W \to V$ betrachten.
- T^{-1} ist auch eine lineare Abbildung.
- Eine bijektive lineare Abbildung nennen wir auch ein Isomorphismus

Lemma. Sei $T \colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

- Falls $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear abhängig sind, dann sind auch $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ linear abhängig.

- Sei T injektiv. Falls $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind, dann sind auch $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ linear unabhängig.

- Sei T surjektiv. Falls $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ein Erzeugendensystem sind, dann sind auch $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T($ ein Erzeugendensystem.

Beweis. • Sei $\sum_i a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ eine nicht-triviale Darstellung des Vektors $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$. Dann $\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) = T(\sum_i a_i \mathbf{v}_i) = \sum_i a_i T(\mathbf{v}_i)$ ist eine nicht-triviale Darstellung des Vektors $\mathbf{0} \in \mathbb{W}$.

- Seien $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ linear abhängig. Dann gibt es eine nicht-triviale Darstellung $\mathbf{0} = \sum_i a_i T(\mathbf{v}_i)$. Es folgt dass $T(\sum_i a_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$. Aber $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, was widerspricht der Injektivität von T.

- Sei $\mathbf{w} \in W$. Dann $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ für irgenwelchen $\mathbf{v} \in V$. Wir können schreiben $\mathbf{v} = \sum_i a_i \mathbf{v}_i$, da $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ein Erzeugendensystem sind. Es folgt dass $\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) = T(\sum_i a_i \mathbf{v}_i) = \sum_i a_i T(\mathbf{v}_i)$. $\square$

- Es folgt jetzt dass falls $T \colon V \to W$ ein Isomorphismus ist dann $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist gdw $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ eine Basis von W ist.

- Falls $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^m$ dann bezeichnen wir mit $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ die Matrix deren Spalten-vektoren genau die Vektoren $\mathbf{v}_i$ sind. Es ist eine $(m \times n)$-Matrix.

- Das Gaußche Eliminationsverfahren können wir auf einer Matrix durchführen, um eine Matrix in der Zeilenstufenform zu bekommen.

  - Eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ befindet sich in der Zeilenstufenform falls das folgende gilt: für $i = 1, \ldots, m$ sei $j(i)$ das kleinste Index

Satz. Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^m$, sei $A := [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ und sei B eine Matrix im Zeilenstufenform, die aus A durch das Gaußche Eliminationsverfahren entsteht. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind linear abhängig gdw. es ein Pivot in jeder Spalte von B gibt.

Beweis. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind linear unabhängig gdw. das Gleichungssystem $X_1\mathbf{v}_1 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat. Das bedeutet aber genau dass das Zeilenstufenform dieses Systems keine freie Variablen hat, und das bedeutet genu dass es ein Pivot in jeder Spalte von B gibt. □

Satz. Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^m$, sei $A := [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ und sei B eine Matrix im Zeilenstufenform, die aus A durch das Gaußche Verfahren entsteht. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind ein Erzeugendensystem gdw, es ein Pivot in jeder Zeile von B gibt.

Beweis. • $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind ein Erzeugendensystem gdw. für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ das Gleichungssystem $X_1\mathbf{v}_1 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n = \mathbf{b}$ eine Lösung hat.

• Falls es ein Pivot in jeder Zeile von B gibt, dann im Zeilenstufenform dieses Systems gibt's keine Zeilen der Form $0 = b_i'$, also dises System hat mindestens eine Lösung.

• Falls es eine Null-Zeile in B gibt, dann möchten wir argumentieren dass es $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ existiert so dass das Gleichungssystem $X_1\mathbf{v}_1 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

- ▶ Seien $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ die Spaltenvektoren von B. Das System $X_1\mathbf{w}_1 + \ldots + X_n\mathbf{w}_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$ hat keine Lösung.
- ▶ Aber mit Elementaroperationen können wir dieses System zum System $X_1\mathbf{v}_1 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n = \mathbf{b}$, für irgenwelches $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ umwandeln. □

Satz. Falls $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind, dann $m \leqslant n$

Beweis. Falls $m > n$ dann die Zeilenstufenform der Matrix $[v_1, \ldots, v_m]$ kann nicht in jeder Spalte ein Pivot haben, weil diese Matrix nur n Zeilen hat und in jeder Zeile gibt's höchstens ein Pivot. □

Satz. Falls $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ ein Erzeugendensystem sind dann $m \geqslant n$

Beweis. Falls $m < n$ dann die Zeilenstufenform der Matrix $[v_1, \ldots, v_m]$ kann nicht in jeder Zeile ein Pivot haben, weil diese Matrix nur m Spalten hat, und in jeder Spalte gibt's höchstens ein Pivot. □

Satz. Falls $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ eine Basis sind dann $m = n$

Beweis. Folgt aus den zwei vorherigen Sätze, weil $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ eine Basis gdw. sie ein Erzeugendensystem sind und linear unabhängig sind. □

Satz. Sei V ein Vektorraum, und sei $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in V$ eine Basis. Dann

- falls $v_1, \dots, v_m \in V$ linear unabhängig sind, dann $m \leqslant n$
- falls $v_1, \dots, v_m \in V$ ein Erzeugendensystem sind dann $m \geqslant n$
- falls $v_1, \dots, v_m \in V$ eine Basis ist dann $m = n$

Beweis. Sei $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ die Standard Basis. Wir haben ein Isomoprhismus $T\colon V \to \mathbb{K}^n$ der durch $T(\mathbf{b}_i) := \mathbf{e}_i$ bestimmt ist.

- Falls $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig sind, dann auch $T(v_1), \dots, T(v_m) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind, wewegen $m \leqslant n$.
- Falls $v_1, \dots, v_m$ linear ein Erzeugendensystem sind, dann auch $T(v_1), \dots, T(v_m) \in \mathbb{K}^n$ ein Erzeugendensystem sind, weswegen $m \geqslant n$.
- Folgt aus den ersten zwei Eigenschaften. $\square$

- Insbesondere falls ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V hat eine Basis $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ dann definieren wir die Dimension von V als $\dim V := n$. Dies hängt von der Wahl der Basis nicht.
  - ▶ Wir schreiben auch $\dim_{\mathbb{K}} V$.
  - ▶ Wir haben $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$
  - ▶ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, aber $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
  - ▶ Wenn V keine endliche Basis hat dan schreiben wir $\dim V = \infty$.
  - ▶ Wir definieren $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.
- Wenn V und W isomorph sind dann $\dim(V) = \dim(W)$. Also $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ sind isomorph gdw. $n = m$.
  - ▶ Tatsätzlich, falls $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{\dim(V)}$ eine Basis sind, und $T\colon V \to W$ ein Isomorphismus ist dann $T(\mathbf{b}_1), \dots, T(\mathbf{b}_{\dim(V)})$ eine Basis von W ist.

- Falls $\dim V = n$ dann jedes Erzeugendensystem hat mindestens n Elemente.
    - Tatsätzlich, $\dim V = n$ bedeutet dass es eine Basis mit n Elementen exsitiert, und die Aussage folgt.
- Falls $\dim V = n$ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ linear unabhängig sind, dann $m \leqslant n$.
    - Tatsätzlich, $\dim V = n$ bedeutet dass es eine Basis mit n Elementen exsitiert, und die Aussage folgt.
- Falls $\dim V = n$ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind dann sind sie eine Basis.
    - Tatsätzlich, sonst aus der Übungen könnten wir $\mathbf{v}_{n+1}$ finden sodass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ linear unabhängig sind, was unmöglich ist.

- Falls $\dim V = n$ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ linear unabhängig sind, aber keine Basis, dann können wir $\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ finden sodass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ eine Basis sind.
  - Tatsätzlich, aus Übungen folgt dass falls $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ keine Basis sind, dann können wir $\mathbf{v}_{m+1}$ finden sodass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m+1}$ unabhängig sind.
  - Wir wiederholen dies $m - n$ Mal um linear unabhängige Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ zu bekommen. Dies dann sind eine Basis.