Analysis 08

Nr 3.1

1

Sei ein Wert $c > \limsup a_n$, sei ein $\varepsilon > 0$, gewählt sodass $c - \varepsilon > \limsup a_n$
Nach der Definition des Limes superior gilt:

$$\exists N : \forall m > N : a_m < c - \varepsilon$$
$$\implies |a_m - c| > \varepsilon, \forall m > N$$

Somit kann es keinen Häufungspunkt $c > \limsup a_n$ geben.

$\limsup a_n$ ist also eine obere Schranke von H.
Die Folge $(\sup\{a_m : m \geq n\})_n$ konvergiert per Definition gegen den Wert $\limsup_{a_n}$. Somit gilt $\limsup a_n \in H$.
$\limsup_{a_n}$ ist somit das Maximum von H und somit auch das Supremum.

2

Nach Lemma 4.20 ist b genau dann ein Häufungspunkt, wenn sich in $B_\varepsilon(b)$ unendlich viele Elemente von $(a_n)_n$ befinden.
Sei ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Im $\frac{\varepsilon}{2}$−Ball um b befinden sich unendlich viele Häufungspunkte b_n.
Sei der Häufungspunkt b_{n_0} mit dem kleinsten Abstand zu b ausgewählt. Im $\frac{\varepsilon}{2}$- Ball um b_{n_0} befinden sich unendlich viele Elemente.
Da $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b_{n_0}) \subseteq B_\varepsilon(b)$ befinden sich auch in $B_\varepsilon(b)$ unendlich viele Elemente a_k der Folge $(a_n)_n$ und b ist ein Häufungspunkt.

3.3

1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
Somit konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$.

2)

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2$$

Die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2$ konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gegen 1, da $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergiert.
Somit gilt:

$$\limsup \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$
$$\limsup \sqrt[n]{\frac{2n}{n^2}} = 2$$

Nach Cauchy-Hardamard gilt:

$$R = \frac{1}{2}$$

3)

$$\sqrt[n]{n^k} = n^{\frac{k}{n}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^k$$

Da k ein konkretes Element der natürlichen Zahlen gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
$$\limsup \sqrt[n]{n^k} = 1$$
$$\text{Nach Cauchy-Hadamard: } R = 1$$