Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

November 23, 2025

Nr 3.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1})$$

Es gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - n \cdot a_{n+1}$$

Beweis durch Induktion:
Induktionsanfang

$$\sum_{k=1}^{1} k(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2$$

Induktionsschritt
Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - n \cdot a_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(a_k - a_{k+1}) \tag{1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) + (n+1)(a_{n+1} - a_{n+2}) \tag{2}$$

$$\overset{IB}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k - n \cdot a_{n+1} + n \cdot a_{n+1} + a_{n+1} - (n+1)a_{n+2} \tag{3}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1) \cdot a_{n+2} \tag{4}$$

Sei ein $\varepsilon > 0$.
Da $\sum_n a_n$ konvergiert, gilt für diese Reihe das Cauchy-Kriterium.

Es kann also ein N gefunden werden, sodass für alle $m > n > N$ gilt

$$\sum_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon$$

Da $(a_n)_n$ eine monotone Nullfolge ist, sind entweder alle Folgenglieder negativ, oder alle Folgenglieder positiv. Sei also oBdA $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) - \sum_{k=1}^{m} k(a_k - a_{k+1}) \tag{5}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k - n \cdot a_{n+1} - (\sum_{k=1}^{m} a_k - m \cdot a_{m+1}) \tag{6}$$

$$= \sum_{k=n}^{m} a_k - n \cdot a_{n+1} + m \cdot a_{n+1} \tag{7}$$

$$= \sum_{k=n}^{m} a_k - (n \cdot a_{n+1} - m \cdot a_{n+1}) \tag{8}$$

$$< \varepsilon - (n \cdot a_{n+1} - m \cdot a_{n+1}) < \varepsilon \tag{9}$$

Somit gilt das Cauchy-Kriterium für die Folge $\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1})$.

Zusatz

Da die Reihe eine Monoton steigende Folge ist, gilt außerdem:

$$0 < \sum_{k=n}^{m} k(a_k - a_{k+1}) < \varepsilon - (n \cdot a_{n+1} - m \cdot a_{n+1})$$

Somit gilt:

$$\varepsilon > (n \cdot a_{n+1} - m \cdot a_{n+1}) = |(m \cdot a_{m+1} - n \cdot a_{n+1})|$$

Die Folge $(n \cdot a_{n+1})_n$ erfüllt also ebenfalls das Cauchy-Kriterium und konvergiert. Nach dem Cauchy Verdichtungskriterium konvergiert die Reihe $\sum^{n} 2^n \cdot a_{2^n}$.

Die Folge $(2^n \cdot a_{2^n})_n$ ist also eine Nullfolge.

$$0 < (2^{n+1} - 1)a_{2^{n+1}} < 2^{n+1} a_{2^{n+1}}$$

Nach dem Sandwich-Satz konvergiert die Folge $((2^{n+1} - 1)a_{2^{n+1}})_n$ gegen 0. Da diese Folge eine Teilfolge der konvergenten Folge $(n \cdot a_{n+1})_n$ ist, muss die gesamte Folge gegen 0 konvergieren, da nach Bemerkung 4.16 alle Teilfolgen einer konvergenten Folge gegen den Grenzwert der Folge konvergieren.

Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) \tag{10}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty} n \cdot a_{n+1} \tag{11}$$

Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \square$$