# 6. Funktionen

**Definition 6.1:** Seien $A$ & $B$ zwei Mengen.

Eine <u>Funktion</u> (oder Abbildung) $f: A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

reellwertig — complex wertig — vektorwertig

Bsp.: (1) $A \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $B = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$f(x) = x^2$ (2) $f(x) = \begin{pmatrix} ax \\ bx^2 \\ cx^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$f: x \longmapsto x^2$

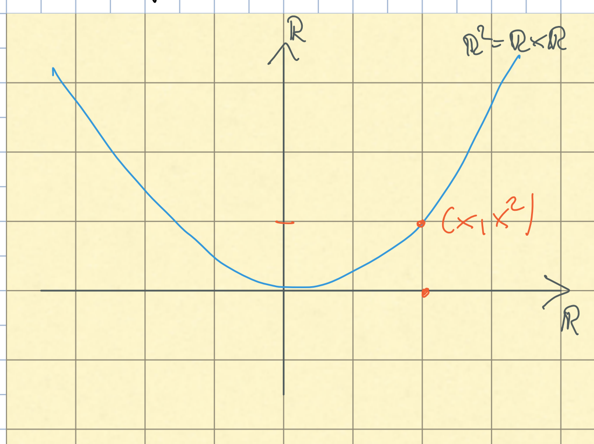
**Definition 6.2:** • $A$ heißt Definitionsbereich von $f$.

• $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ heißt Wertebereich von $f$

• falls $C \subseteq A$ so heißt $f(C) = \{ f(x) : x \in C \} \subseteq f(A)$ das Bild von $C$ unter $f$.

im Falle (1) mit $A = \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{ x : x \geq 0 \}$

**Definition 6.3:** Sei $f: A \to B$ eine Funktion so heißt die Menge $G(f) = \{ (a, f(a)) : a \in A \} \subseteq A \times B$ der Graph von $f$



## 6.1. Algebraische Operationen:

Seien $f, g : A \longrightarrow \mathbb{C}$, dann definieren wir

(i) $f+g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ die Funktion die gegeben ist durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

(ii) $f \cdot g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ "

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$

Wertebereich

(iii) falls $g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in A$ (d.h. $0 \notin g(A)$)

$$\left(\frac{f}{g}\right) : A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iv) genauso $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\overline{f}$, $|f|$

**Definition 6.1.1** (Komposition)

Seien $f : A \longrightarrow B$ & $g : B \longrightarrow C$, ihre Komposition / Verkettung

$(g \circ f) : A \longrightarrow C$ ist definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkung: Jede Algebraische Operation kann als Verkettung realisiert werden:

z.B. $f+g$

Sei $F : A \longrightarrow \mathbb{C}^2 : \quad F(a) = (f(a), g(a))$

und $p : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \quad p(a,b) = a+b$

$\Rightarrow \quad f+g = p \circ F$

**Definition 6.1.2** $f : A \longrightarrow B$

(i) heißt surjektiv falls $f(A) = B$

d.h. $\forall\, b \in B \;\; \exists\, a \in A$ mit $f(a) = b$

(ii) injektiv falls $f(x) \neq f(y) \;\; \forall x \neq y \in A$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(iii) bijektiv falls $f$ injektiv & surjektiv.

Bemerkung: Bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion

nach (i)&(ii) $\forall b \; \exists!\, a \in A$ mit $f(a) = b$

d.h. wir können eine Abbildung $g: B \to A$ definieren.

mit $g(b) = a$ für $a \in A$ mit $f(a) = b$.

(überprüfe, dass $g$ die Definition 6.1 erfüllt.)

Definition 6.1.3. Die Funktion $g: B \to A$ heißt Umkehrfunktion von $f$

falls $(g \circ f)(a) = a \;\; \forall a \in A$ & $(f \circ g)(b) = b \;\; \forall b \in B$.

(Übung: zeige dass $g$ eindeutig)

$g(b) = g \circ (f \circ k)(b) = (g \circ f)(k(b)) = k(b)$

Definition 6.1.4.: (neutrale Element der Komposition)

Die "dumme" Abbildung $id: A \to A$ $\quad id(a) = a$ heißt die Identitätsabbildung

(Sie ist das neutrale Element der Komposition.)

Beispiele: (a) Wurzelfunktion:

Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$ $\quad m \in \mathbb{N}$

$a \longmapsto \sqrt[m]{a}$ ist eine Funktion. (mit inverser Funktion $g(x) = x^m$)

(b) Polynome. Seien $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$

für $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt Polynom

(werden in der LA noch näher behandelt.)

(c) Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich

$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $(a_k)_k$ reell oder Complexwertig

$x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$(c)^*$ $x \longmapsto \exp(x)$

## 7. Stetige Funktionen und Grenzwerte

In diesem Kapitel ist $D$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$)

**Definition 7.1:**

Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) und $x_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt $f$ stetig in $x_0$

falls:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta, x \in D \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$f$ heißt stetig an $D$ falls $f$ stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Bemerkung: $x_0$ ist eine Unstetigkeitsstelle von $f$ falls

$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in D: |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Beispiele:

(1) $f \equiv a$ die Konstante Funktion, denn $|f(x) - f(y)| = 0 \ \forall x, y$

(2) $f(x) = x$ die Identitätsfunktion, da $|f(x) - f(y)| = |x - y|$

(3) die Abstandsfunktion: $f(x) = |x - p|$ für $p \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = \big| |x - p| - |y - p| \big| \leq |x - y|$

**Definition 7.2:** $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ heißt Lipschitz stetig (kurz Lipschitz)

falls $\exists L > 0: \quad |f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in D$

Jede Lipschitz stetige Funktion ist stetig (wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$)

**Satz 7.3:** (Folgenkriterium für die Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) und $x_0 \in D$. Dann ist äquivalent:

(i) $f$ ist stetig in $x_0$

(ii) $\forall (x_n)_n \subset D$ : $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $(x_n)_n \subset D$ gegeben und $\varepsilon > 0$.

$\exists\ \delta > 0$ : $|x - x_0| < \delta,\ x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\exists\ N \in \mathbb{N}$ : $|x_n - x_0| < \delta\ \forall\ n > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (i) (durch Widerspruch.)

Annahme $f$ ist nicht stetig in $x_0$ für $n \in \mathbb{N}$

$\exists\ x_n \in D$ : $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

damit haben wir $(x_n)_n \subset D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}\ \forall n$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\liminf_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, Also ist ein Widerspruch zu (ii). $\square$

## 7.1 Rechenregeln für stetige Funktionen

**Satz 7.1.1:** Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) stetig in $x_0$, so gilt:

(i) $f + g$ stetig in $x_0$

(ii) $f \cdot g$ "

(iii) $\frac{f}{g} : D \cap \{g \neq 0\} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig in $x_0$. falls $g(x_0) \neq 0$

Beweis: Idee: Nutze das Folgenkriterium um es auf den Satz für Folgen zurückzuführen Satz. 4.6.

Sei $(x_n)_n \subset D$ eine beliebige Folge mit $\lim_n x_n = x_0$

so folgt aus Satz 8.3 $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$, $\lim_n g(x_n) = g(x_0)$

Nun folgt aus Satz 4.6:

(i) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = f(x_0) + g(x_0)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot g(x_n) = f(x_0)\, g(x_0)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ [da $g(x_0) \neq 0$] $\square$

Konsequenzen:

1) $f(x) = x^m$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) [(ii) + Bsp (1)]

2) Polynome sind stetig d.h.

$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x + \dots + a_d x^d$

Satz 7.1.2 Sei $f: A \to B$, $g: B \to C$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^n)$, $B \subseteq \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $C \subseteq \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ und $f$ stetig in $x_0$, $g$ stetig in $f(x_0)$. dann ist $g \circ f$ s. g in $x_0$.

Beweis: (Wir wenden das Folgenkriterium an)

Sei $(x_n)_n \subseteq D$ mit $\lim_n x_n = x_0$ z.z $\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) = (g\circ f)(x_0)$

da $f$ stetig in $x_0$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Sei nun $(y_n = f(x_n))_n \subset A$. d.h. $y_n$ ist eine Folge in $A$

mit $\lim_n y_n = y_0$ mit $y_0 = f(x_0)$

Da $g$ stetig in $x_0$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0) = g(f(x_0))$ $\square$

**Satz 7.1.3:** Sei $f: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ bijektiv und stetig

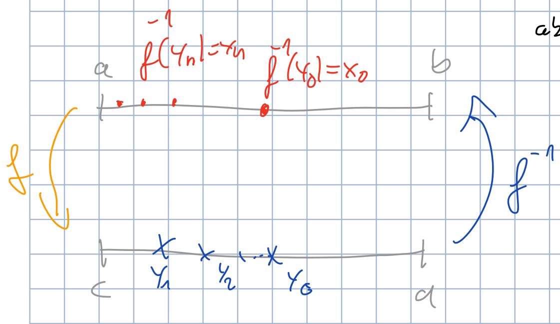
$\Rightarrow \quad f^{-1}: [c,d] \longrightarrow [a,b]$ stetig.

**Beweis:** Annahme $f^{-1}$ sei nicht stetig in $c \leq y_0 \leq d$

$\exists\ (y_n)_n \subseteq [c,d]$ & $\varepsilon > 0$: $\lim_n y_n = y_0$ aber $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| > \varepsilon\ \forall n$.

Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$. Da $a \leq x_n \leq b\ \forall n$ ist $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists\ (x_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \overline{x}$

da $|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon\ \forall k \Rightarrow |\overline{x} - x_0| = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon$




aber $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\overline{x})$

& $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(y_0) = \overline{x} = x_0 \quad \lightning$

$\square$

**Bemerkung:** Satz 8.1.3 gilt im allgemeinen nicht, wenn $f$ nicht stetig auf ganz $[a,b]$. ( Beispiel. )

**Konsequenz:** (a) die Funktion $x \longmapsto x^{\frac{1}{m}}$ ist stetig auf $[0,\infty[$ für $m \in \mathbb{N}$ als Umkehrfunktion von $x \longmapsto x^m$

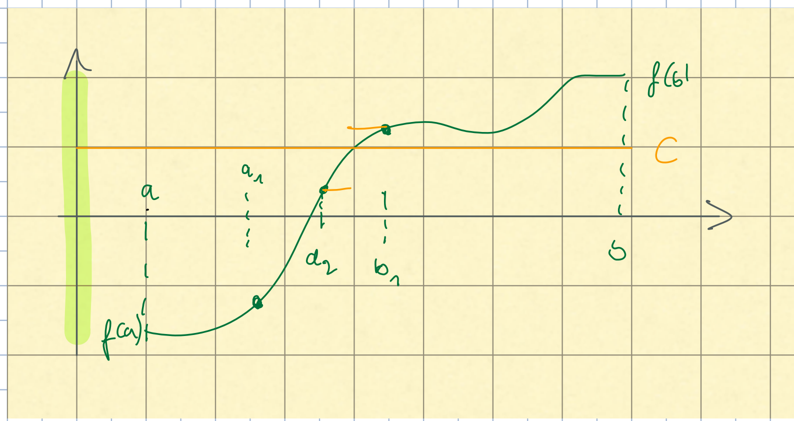
(b) die Funktion $x \longmapsto x^q$ ist stetig auf $[0,\infty[$ für $q = \frac{k}{\ell} \in \mathbb{Q}$, $q \geq 0$ als Komposition von $f(y) = y^k$, $g(z) = z^{\frac{1}{\ell}}$

(c) die Funktion $x \longmapsto x^q$ ist stetig auf $]0,\infty[$ für $q \in \mathbb{Q}$, $q < 0$ da $x^q = \frac{1}{x^{|q|}}$

## 7.2 Sätze über stetige Funktionen

**Satz 7.2.1** (Zwischenwertsatz)

Eine stetige Abbildung $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert $c$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.




Beweis: Idee: Intervallschachtelung (Vollständigkeitsaxiom), so dass

$f(a_k) \leq c \leq f(b_k)$ & $|b_k - a_k| = 2^{-k}(b-a)$

$a_k \leq b_k$

Wir können annehmen, dass $f(a) < f(b)$ sonst betrachte $-f$

(der Fall $f(a) = f(b) = c$ ist trivial).

Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $(I_k = [a_k, b_k])_k$ mit

(i) $f(a_k) \leq c \leq f(b_k)$

(ii) $(b_k - a_k) \leq 2^{-k}(b-a)$

$(k=0)$ $\quad I_0 = [a, b]$

$(k \to k+1)$: $\quad I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] & \text{falls } f(\frac{a_k+b_k}{2}) \geq c \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k] & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow |I_{k+1}| = \frac{1}{2}(b_k - a_k) = 2^{-(k+1)}(b-a)$

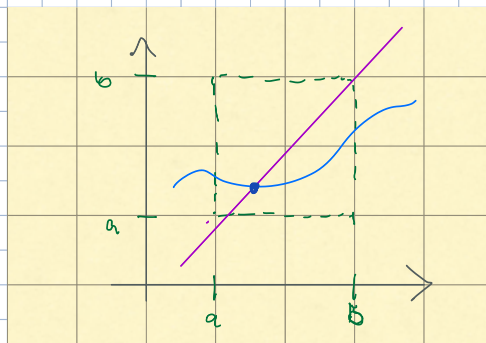
$\Rightarrow \exists!\ x_0 \in I_k\ \forall k$ d.h. $\lim_k a_k = x_0 = \lim_k b_k$.

Da $f$ stetig folgt $c \geq \lim_k f(a_k) = f(x_0)$, $c \leq \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) = c$ $\square$

**Korollar 7.2.2** (Fixpunkt)

Sei $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ dann existiert $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$.




Beweis: Wir möchten zeigen, dass $G(f)$ schneidet $G(x)$.

Wir betrachten $g(x) := f(x) - x$. $g$ ist stetig und

$g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$

$\Rightarrow \exists\, x \in [a,b]$ mit $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ $\square$

## 7.3 Maxima und Minima stetiger Funktionen.

**Satz 7.3.1 (I)** (Existenz von Maximum & Minimum)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a,b]$$

d.h. $f$ nimmt sein Maximum und sein Minimum an.

Beweis: Wir zeigen die Existenz von $x_M$.

Wir betrachten $S := \sup\{ f(x) : x \in [a,b] \}$

Falls $S < \infty$ wähle $s_n = S - \frac{1}{n}$, falls $S = +\infty$ wähle $s_n = n$.

Da $s_n < S$ $\exists\, x_n \in [a,b]$ mit $S \geq f(x_n) > s_n$.

Da $a \leq x_n \leq b$ können wir den Satz von Bolzano-Weierstraß anwenden,

d.h. wir finden eine Teilfolge $x_{n_k}$ mit $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_\infty$

da $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt $a \leq x_\infty \leq b$ d.h. $x_\infty \in [a,b]$.

Da $f$ stetig folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_\infty)$

d.h. $f(x_{n_k}) > n_k = S_{n_k}$ ist nicht möglich.

und damit.

$$f(x_{n_k}) - f(x_\infty) \leq S - f(x_\infty) \leq f(x_{n_k}) - f(x_\infty) + \frac{1}{n_k}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0 \qquad 0$$

$\Rightarrow \quad S = f(x_\infty)$ ☐

Bemerkung: Hauptbestandteil des Beweises war:

$(x_n) \subseteq [a,b] \Longrightarrow (x_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_\infty$ & $x_\infty \in [a,b]$

Definition 7.3.2:

Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ mit der Eigenschaft.

(K) $\forall (x_n)_n \subset E$ $\exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k$, $x \in E$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

heißt kompakt.

Bsp:

(a) $[a,b]$ siehe Beweis

(b) $\bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$ mit $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots$

Ebenfalls mittels Bolzano Weierstraß.

(c) $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$

ebenfalls mittels Bolzano Weierstraß.

(d) $\overline{B_R} = \{ x \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n) : |x| \leq R \}$

Ebenfalls mittels Bolzano Weierstraß + Stetigkeit von $|\cdot|$.

Lemma 7.3.2*: Sein $\{K_i\}_{i=1}^N$ eine (endliche) Familie von kompakten Mengen. dann ist $\bigcup_{i=1}^N K_i$ kompakt.

Beweis: Idee: Schubkastenprinzip:

sei $(x_n)_n \subseteq \bigcup_{i=1}^N K_i$ gegeben. $\Rightarrow \exists\, i_0 : K_{i_0}$ enthält unendlich viele Elemente $\Rightarrow$ $\exists\, (n_k)_k$ eine Teilfolge so dass $(x_{n_k})_k \subset K_{i_0}$

da $K_{i_0}$ kompakt $\Rightarrow$ $\exists\, (n_{k_l})_l$ Teilfolge und $x_\infty \in K_{i_0}$ so dass $\lim_l x_{n_{k_l}} = x_\infty$

$\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^N K_i$ ist kompakt $\square$

Satz 7.3.1 (II) (Existenz von Maximum & Minimum)

Sei $f: E \to \mathbb{R}$ stetig und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ kompakt.

So $\exists$ $x_m, x_M \in E$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in E.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 8.3.1. (I)

## 7.4. Gleichmäßige Stetigkeit

W.d.h. $f$ ist stetig in $x_0$ falls:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ : $|x - x_0| < \delta$, $x \in D$ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$f$ heißt stetig an $D$ falls $f$ stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Normalerweise hängt $\delta$ von $x_0$ ab.

Definition 7.4.1 Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ heißt gleichmäßig stetig (auf $D$) falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta, \; x, y \in D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz 7.4.2: Sei $f: E \to \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ stetig und $E$ kompakt so ist $f$ gleichmäßig stetig.

Beweis: (durch Widerspruch)

Falls $f$ nicht gleichmäßig stetig, $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0$ $\exists$ $x_\delta, y_\delta \in E$ $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ aber $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

Insbesondere $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $x_n, y_n$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ & $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

$(x_n)_n \subseteq E \overset{E \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} (x_{n_k})_k$ mit $\lim_k x_{n_k} = x$