Aaron Tsamaltoupis, Matr.Nr.: 3762396

December 1, 2025

3.1

2)

Es gilt:

$$e = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k$$

wobei die Folge $((1+\frac{1}{k})^k)_k$ monoton steigend ist.
Es gilt $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > e > (1+\frac{1}{n})^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
0 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e &= \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e & (1)\\
&< \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n & (2)\\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} & (3)\\
&< e \cdot \frac{1}{n} & (4)
\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2 \leq e^2 \cdot \frac{1}{n^2} \qquad (5)$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2}$ ist somit eine Majorante der Reihe $\sum\limits_{n}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2$.
Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^2 \cdot \frac{1}{n^2} = e^2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit auch die Reihe

$$\sum_{n}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^2$$

3.4

Es gilt:

$$\{1, 2, \dots, m - (d + 1)\} \subseteq \{\tau(1), \dots, \tau(m)\} \subseteq \{1, \dots, m + d\}, \forall m \in \mathbb{N}$$

Da $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, kann ein N gewählt werden, sodass für alle $n > N$ gilt:

$$a_n < \frac{\varepsilon}{4 \cdot d}$$

Nach dem Cauchy-Kriterium kann ein $M \in \mathbb{N}$ gewählt werden, sodass

$$\forall m > n > M : \sum_{k=n}^{m} a_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

.

Sei $m > \max\{N, M\} + d$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{m} a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^{m} a_n\right| &= \left|\sum_{n=1}^{m-d-1} a_n \; + \sum_{n=m-d}^{m} a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^{m} a_n\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=m-d}^{m} a_n \right| + \sum_{n=m-d}^{m} |a_{\tau(n)}| \\
&\leq \left|\sum_{n=m-d}^{m} a_n\right| + \sum_{n=m-d}^{m+d} |a_n| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2d \cdot \frac{\varepsilon}{4d} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Da die Folgen einen beliebig kleinen Abstand haben, konvergieren sie zu dem selben Grenzwert.