UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Lineare Algebra 1

Łukasz Grabowski

Mathematisches Institut

Lemma. Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

- Falls $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear abhängig sind, dann sind auch $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ linear abhängig.
- Sei T injektiv. Falls $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind, dann sind auch $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ linear unabhängig.
- Sei T surjektiv. Falls $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ein Erzeugendensystem sind, dann sind auch $T(\mathbf{v}_1)$,. . ., $T(\mathbf{v}_n)$ ein Erzeugendensystem.

Es folgt dass wenn T ein Isomoprhismus ist dann $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind eine Basis gdw. $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ eine Basis sind.

Satz. Seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^m$, sei $A := [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \in M_{m \times n}$ und sei B eine Matrix im Zeilenstufenform, die aus A durch das Gaußche Eliminationsverfahren entsteht. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sind linear abhängig gdw. es ein Pivot in jeder Spalte von B gibt.

Satz. Seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^m$, sei $A := [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ und sei B eine Matrix im Zeilenstufenform, die aus A durch das Gaußche Verfahren entsteht. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sind ein Erzeugendensystem gdw, es ein Pivot in jeder Zeile von B gibt.

Satz. Falls $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind, dann $m \leqslant n$

Satz. Falls $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ ein Erzeugendensystem sind dann $m \geqslant n$

Satz. Falls $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ eine Basis sind dann $m = n$

Satz. Sei V ein Vektorraum, und sei $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in V$ eine Basis. Dann

- falls $v_1, \ldots, v_m \in V$ linear unabhängig sind, dann $m \leqslant n$
- falls $v_1, \ldots, v_m \in V$ ein Erzeugendensystem sind dann $m \geqslant n$
- falls $v_1, \ldots, v_m \in V$ eine Basis ist dann $m = n$

- Insbesondere falls ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V hat eine Basis $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ dann definieren wir die Dimension von V als $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim V := n$. Dies hängt von der Wahl der Basis nicht ab.
- Wenn V und W isomorph sind dann $\dim(V) = \dim(W)$. Also $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ sind isomorph gdw. $n = m$.
- Falls $\dim V = n$ dann jedes Erzeugendensystem hat mindestens n Elemente.
- Falls $\dim V = n$ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ linear unabhängig sind, dann $m \leqslant n$.
- Falls $\dim V = n$ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind dann sind sie eine Basis.
- Falls $\dim V = n$ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ linear unabhängig sind, aber keine Basis, dann können wir $\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ finden sodass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ eine Basis sind.

- Falls $A \in M_{m \times n}$ ein Isomorphismus ist, also $A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, dann $m = n$. Andersgeagt nur Quadrat-matrizen können Isomorphismen sein.
  - Tatsätzlich, wir haben schon gezeigt dass $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ isomorph sind gdw. $n = m$.

- Sei $A \in M_{n\times n}$. Dann A ist injektiv gdw A ist surjektiv.
  - Sei $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{K}^n$ die Standardbasis.
  - Falls A injektiv ist dann $A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n$ linear unabhängig sind, weswegen auch eine Basis.
  - Aber $\sum_i a_i A\mathbf{e}_i = A(\sum_i a_i \mathbf{e}_i)$, also jede Linearkombination der Vektoren $A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n$ ist auch im Bild von A. Es folgt dass A surjektiv ist.
  - Falls A surjektiv ist dann $A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n$ ein Erzeugendensystem ist, weswegen es enthält eine Basis.
  - Da eine Basis genau n Elemente hat, es folgt dass $A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n$ eine Basis ist, und es folgt dass A ist injektiv: wir haben $A(\sum_i x_i \mathbf{e}_i) = \sum_i x_i A\mathbf{e}_i$ und verschiedene Linearkombinationen werden auf verschiedende Linearkombinatione abgebildet.

- Der gleiche Beweis zeigt dass wenn $\dim V < \infty$ und $T\colon V \to V$ eine lineare Abbilung ist, dann T ist injektiv gdw. T ist surjektiv. (Übung)
- Übung: Wenn $\dim V = \infty$ dann Injektivität und Surjektivität von $T\colon V \to V$ sind nicht äquivalent.

- Sei V ein Vektorraum. Ein Untervektorraum von V ist eine Teilmenge $W \subset V$ mit der Eigenschaft dass wenn $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ und $a \in \mathbb{K}$ dann $a\mathbf{x} \in W$ und $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$.
- Insbesondere ist W selbst ein Vektorraum.
- Beispiele:
  - $\{\mathbf{0}\}$ und V selbst sind Untervektorräume von V.
  - Die leere Menge ist kein Unterraum von V.
  - Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{V}$. Der lineare Spann dieser Vektoren ist die Menge $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ aller Linearkombinationen der Form $a_1\mathbf{v}_1 + a_1\mathbf{v}_2 + \ldots + a_r\mathbf{v}_r$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$.
    - Es ist ein Untervektorraum: $(\sum_i a_i\mathbf{v}_i) + (\sum_i b_i\mathbf{v}_i) = \sum_i (a_i + b_i)\mathbf{v}_i$, $a \sum_i a_i\mathbf{v}_i = \sum_i aa_i\mathbf{v}_i$.

- Wir betrachten häufig $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) \subset \mathbb{K}^n$ als eine “Kopie” von $\mathbb{K}^{n-1}$ in $\mathbb{K}^n$.

- Wenn $S \subset V$ ist eine beliebige Menge, der lineare Spann $\operatorname{span}(S)$ ist die Menge aller Linearkombinationen der Form $\sum_{\mathbf{v} \in S} a(\mathbf{v})\mathbf{v}$, wobei $a\colon S \to \mathbb{K}$ ist eine beliebige Funktion mit der Eigenschaft dass es nur endlich viele $\mathbf{v} \in S$ existieren mit $a(\mathbf{v}) \neq 0$.

  - Es ist ein Untervektorraum: $\sum_{\mathbf{v} \in S} a(\mathbf{v})\mathbf{v} + \sum_{\mathbf{v} \in S} b(\mathbf{v})\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{v} \in S}(a(\mathbf{v}) + b(\mathbf{v}))\mathbf{v}$, $b \sum_{\mathbf{v} \in S}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{v} \in S} ba(\mathbf{v})\mathbf{v}$.

- Falls $\dim(V) = n$ und $W \subset V$ ein Untervektorraum ist dann $\dim(W) \leqslant n$ (insbesondere W hat eine Basis).
  - ▶ Tatsätzlich, falls $W = \{\mathbf{0}\}$ dann gibt's nichts zu beweisen.
  - ▶ Sonst nehmen wir jetzt das grösste Zahl $d \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft dass es ein linear unabhängiges System $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_d \in W$ existiert.
    - ▷ Wir wissen dass $d \leqslant n$ weil jedes System in V das linear unabhängig ist hat höchstens n Elemente.
  - ▶ Die Vektoren $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_d$ sind ein Erzeugendessytem, weil sonst könnten wir $\mathbf{w}_{d+1} \in W$ finden sodass $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{d+1}$ linear unabhängig sind.

- Sei $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem von m Gleichungen mit n Variablen. Andersgesagt, sei $A \in M_{m\times n}$, und sei $\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_n)^T$. Sei $L \subset \mathbb{K}^n$ die Menge aller Lösungen. Dann L ist ein Untervektorraum.
  - Die Basis von L können wir aus einer Zeilenstufenform von A berechnen.
  - Sei $S \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$ eine Zeilnstufenform dieses Systems.
  - Seien $X_{s(1)}, \ldots X_{s(d)}$ die freien Variablen. Wir setzen $X_{s(1)} = 1, X_{s(2)} = 0, \ldots, X_{s(d)} = 0$ und das gibt uns eine Lösung $\mathbf{f}_1 \in L$. Ähnlich bekommen wir Lösungen $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_d$.
  - Sie sind linear unabhängig, denn in der Linearkombination $\sum_i a_i\mathbf{f}_i$ der $s(j)$-te Koeffizient (wenn wir sie als Vektor in $\mathbb{K}^n$ betrachten) ist gleich a_i.
  - Jede Lösung ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{f}_i$, da jede Lösung ist durch die freie Variablen eindeutig bestimmt.
- Es folgt dass die Anzahl der freien Variablem, oder die Anzahl von Spalten ohne Pivots in S, ist gleich $\dim(L)$.

- Sei jetzt $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ nicht null. Ist die Menge M der Lösungen von $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ ein Untervektorraum? Nein: $\mathbf{0} \notin L$.

- Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum und sei $\mathbf{v} \in V$. Dann definieren wir $\mathbf{v} + W = W + \mathbf{v} := \{\mathbf{v} + \mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in W\}$. Das ist kein Vektorraum.

Proposition. Sei $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Sei $L \subset \mathbb{K}^n$ die Menge der Lösungen des Systems $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$, und sei M die Menge der Lösungen des Systems $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$. Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Lösung von $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$. Dann $M = L + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Beweis. • Sei $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_n)^T$

- Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$. Dann $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ also $A(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Wir können schreiben $\mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{a} \in L + \mathbf{a}$.

- Sei $\mathbf{x} \in L + \mathbf{a}$. Dann $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{a}$ wobei $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Aber dann $A\mathbf{x} = A\mathbf{v} + A\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$, also $\mathbf{x} \in M$. □

- Sei $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.
- Kern von A definieren wir als $\ker(A) := \{\mathbf{v} \in V\colon A(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$
  - Wenn A eine Matrix ist, $\ker(A)$ ist die Menge der Lösungen des Systems $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$.
  - $\ker(A)$ ist ein Untervektorraum von V. Wenn $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ker(A)$ dann $A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A(\mathbf{v}) + A(\mathbf{w}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, und $A(a\mathbf{v}) = aA(\mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- Bild von A bezeichnen wir mit $\operatorname{im}(A)$. Also $\operatorname{im}(A) := \{A(\mathbf{v})\colon \mathbf{v} \in V\}$.
  - $\operatorname{im}(A)$ ist ein Untervektorraum von W. Wenn $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \operatorname{im}(A)$ dann $\mathbf{v} = A(\mathbf{x}), \mathbf{w} = A(\mathbf{y})$, für irgenwelche $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$, also $\mathbf{v} + \mathbf{w} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y})$, und es folgt dass $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \operatorname{im}(A)$. (Multiplikation durch Skalare - Übung)

Lemma. Sei $A \in M_{m\times n}$, und nehmen wir an dass $A = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ für irgenwelche $\mathbf{v}_i \in \mathbb{K}^n$. Dann $\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Beweis. • Wir haben $A\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, wobei $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Es folgt dass $\mathbf{v}_i \in \mathrm{im}(A)$.

- Aber $A(\sum_i a_i \mathbf{e}_i) = \sum_i a_i A(\mathbf{e}_i) = \sum_i a_i \mathbf{v}_i$.
  - ▶ Dewegen jedes Element im Bild von A ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, und
  - ▶ jede Linearkombination dieser Vektoren ist im Bild von A. $\square$

- Wir definieren $\operatorname{rank}(A) := \dim(\operatorname{im}(A)) = \dim \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, wenn $A = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$.

- Wir wissen schon dass das Gausche Eliminationsverfahren ändert $\ker(A)$ nicht, insbesondere $\dim \ker(A)$ bleibt unverändert.

- Andererseits $\operatorname{im}(A)$ kann sich ändern. Seien Z.B.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann B entsteht aus A durch eine Elementaroperation, aber $\mathbf{e}_1 \in \operatorname{im}(B)$ und $\mathbf{e}_1 \notin \operatorname{im}(A)$.

- Wir möchten jetzt zeigen dass $\operatorname{rank}(A)$ bleibt durch die Elementaroperationen unverändert.

- Übung: Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum von V. Dann $T(U)$ ist ein Untervektorraum von W.

Lemma. Sei $T\colon V \to W$ ein Isomorphismus und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann U und $T(U)$ sind isomorph. Insbesondere $\dim(U) = \dim(T(U))$.

Beweis. Wir beschränken den Definitionsbereich von T zu U, und bekommen dadurch die lineare Abbildung $T_{|U}\colon U \to T(U)$. Sie ist injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus.

$\square$

Lemma. Seien $A, B \in M_{m\times n}$, und nehmer wir an, dass B aus A durch eine Elementar-operation entsteht. Dann $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Beweis.

- Erst betrachten wir eine Elementaroperation des Typs 1, also Tausch von zwei Zeilen mit indexen α und β.
  - Wir definieren ein Isomorphismus $T\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ mit der Formel $T(\mathbf{e}_i) := \mathbf{e}_i$ wenn $i \neq \alpha, \beta$, $T(\mathbf{e}_\alpha) := T(\mathbf{e}_\beta)$, $T(\mathbf{e}_\beta) = T(\mathbf{e}_\alpha)$.
  - Dann $T(\operatorname{im}(A)) = \operatorname{im}(B)$.

- Als nächstes betrachten wir eine Elementaroperation des Typs 2, also es gibt Indexe α, β so dass $Z'_\alpha = Z_\alpha + aZ_\beta$, und für $i \neq \alpha$ gilt $Z'_i = Z_i$.
  - ▶ Wir definieren ein Isomorphismus $T\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ mit der Formel $T(\mathbf{e}_i) := \mathbf{e}_i$ wenn $i \neq \alpha$ und $T(\mathbf{e}_\alpha) := \mathbf{e}_\alpha a + \mathbf{e}_b e$.
    - ▷ Die Vektoren $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_m)$ sind eine Basis, da sie ein Erzeugendensystem sind, mit m Elementen.
  - ▶ Dann $T(\mathrm{im}(A)) = \mathrm{im}(B)$. □

Korollar. Sei $A \in M_{m\times n}$ und sei $S \in M_{m\times n}$ in der Zeilenstufenform, die aus A durch das Gaußsche Eliminationsverfahren aus A entsteht. Dann $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(S)$. $\square$

Proposition. Sei $S \in M_{m\times n}$ in der Zeilenstufenform. Dann die Spalten, die Pivots enthalten, sind eine Basis von $\operatorname{im}(S)$.

Insbesondere ist $\dim(\operatorname{im}(S))$ gleich zur Anzahl von Pivots in S.

Beweis. • Wir benutzen die Induktion über r, die Anzahl von Pivots in S. OBdA die Anzahl von Pivots ist gleich der Anzahl der Zeilen. Falls $r = 1$ dann $S = (0, \dots, 0, a_1, \dots, a_m)$ wobei $a_1 \neq 0$. Dann a_1 aufspannt $\operatorname{im}(S) = \mathbb{K}$.

• Sei jetzt $r \geqslant 1$ beliebig. Wir nehmen an dass die folgende IH gilt: für alle Matrizen S in der Zeilenstufenform mit r Zeilen und r Pivots, die Spalten, die die Pivots enthalten, sind eine Basis von $\operatorname{im}(S)$,

- Wir möchten die folgende IB beweisen: für alle Matrizen S in der Zeilenstufenform mit $r+1$ Zeilen und $r+1$ Pivots, die Spalten, die die Pivots enthalten, sind eine Basis von $\mathrm{im}(S)$,
- Beweis der IB: S sieht also so aus: $\begin{pmatrix} & S' & \\ 0\ldots 0 a_1 \ldots a_n \end{pmatrix}$ wobei $a_1 \neq 0$, und S' ist eine Matrix in der Zeilnstufenform, mit r Pivots, die sich links von a_1 befinden.
- Aus der IH S' hat als Basis die Spalten $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ die Pivots enthalten. Sei $\mathbf{v}_{r+1} \in \mathbb{K}^r$ der Vektor der sich über a_i befindet. Wir sollen Zeigen dass die Vekotren

$$\mathbf{w}_1 := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{w}_r := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_r \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_{r+1} := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{r+1} \\ a_1 \end{pmatrix}$$

eine Basis sind.

  - Lineare Unabhängigkeit: falls $\sum_{i=1}^{r+1} a_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ dann $a_{r+1} = 0$, da nur $\mathbf{w}_{r+1}$ die letzte Koordinate beeinflusst. Jetzt aus der Tatsache, dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ eine Basis sind, folgt $a_i = 0$ für alle i.

- ▶ Erzegendensystem: Sei $\mathbf{v}$ irgenwelche Linearkombination der Spalten von S, und sei a die eltzte Koordiante von $\mathbf{v}$. Dann $\mathbf{v} - \frac{a}{a_1}\mathbf{w}_{r+1}$ hat die letzte Koordinate gleich 0, weswegen können wir es als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ schreiben. □

Satz. (“Rangsatz”) Sei $A \in M_{m \times n}$. Dann $\dim\ker(A) + \dim\operatorname{im}(A) = n$

Beweis. • Sei S eine Zeilenstufenform die aus A durch das Eliminationsverfahren entsteht.

• Wir wissen $\dim\ker S = \dim\ker A$ und $\dim\operatorname{im} S = \dim\operatorname{im} A$. Also es reicht zu beweisen dass $\dim\ker(S) + \dim\operatorname{im}(S) = n$.

• Aber $\dim\operatorname{im}(S)$ ist die Anzahl von Pivots, und $\dim\ker(S)$ ist die Anzahl von Spalten ohne Pivots. □

Lemma. Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann $\dim \operatorname{im}(A) \leqslant n$.

Beweis. Sei $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ eine Basis von V. Dann $A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)$ sind ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im}(A)$. □

- Übung: Sei $T\colon V \to W$ wo $\dim V, \dim W < \infty$, seien $\alpha\colon V' \to V$ und $\beta\colon W \to W'$ Isomoprhismen. Dann $\dim \ker(T) = \dim \ker(\beta \circ T) = \dim \ker(T \circ \alpha)$ und $\dim \operatorname{im}(T) = \dim \operatorname{im}(\beta \circ T) = \dim \operatorname{im}(T \circ \alpha)$.

Satz. ("Rangsatz") Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann $\dim\ker(T) + \dim\operatorname{im}(T) = n$.

Beweis.
- oBdA können wir Annehmen das $W = \operatorname{im}(A)$, also $\dim(W) = m < \infty$.
- Seien $\alpha\colon \mathbb{K}^n \to V$ und $\beta\colon W \to \mathbb{K}^m$ Isomorphismen. Dann $T' := \beta \circ T \circ \alpha$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, also $\dim\ker T' + \dim\operatorname{im} T' = n$.
- Also die Aussgage folgt aus der vorherigen Übung. $\square$