

Aufgaben für Analysis I

Blatt NUMMER

IHRE NAME

Aufgabe 3.1

8)

$h_n = n^k \cdot x^n$, wobei $|x| < 1$

Es soll durch Induktion über n gezeigt werden, dass $\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : x^n < \frac{1}{n^k}, \forall n < N$.

Induktionsanfang

Sei $n > k$, Sei n so gewählt, dass $(\frac{n}{n+1})^k > x$.

Sei $x^n > \frac{1}{n^k}$. Es soll gezeigt werden, dass dann für ein späteres $k \cdot n$ die Ungleichung gilt.

Es gilt demnach: $x^n = \frac{1}{n^k} + \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Für größere n , kann ε beliebig klein gewählt werden, da sowohl x^n , als auch $\frac{1}{n^k}$ gegen 0 konvergieren.

$$x^{kn} = \left(\frac{1}{n^k} + \varepsilon\right)^k \quad (1)$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{1}{n^{2k-i}} \cdot \varepsilon^i \quad (2)$$

$$< \frac{1}{n^{2k}} \quad (3)$$

$$< \frac{1}{n^k \cdot n^k} \quad (4)$$

$$< \frac{1}{(kn)^k} \quad (5)$$

$$(6)$$

Somit gilt $x^{nk} < \frac{1}{n^k}$ als Induktionsanfang. Es soll durch den Induktionsschritt gezeigt werden, dass die Ungleichung $x^m < \frac{1}{m}$ ab diesem Punkt für alle $m > nk$ gilt.

Induktionsschritt

Die Folge $(\frac{n}{n+1})$ konvergiert gegen 1.

Somit konvergiert auch die Folge $(\frac{n}{n+1})^k$

Sei also n so gewählt, dass $(\frac{n}{n+1})^k > x$. Dies ist möglich, da $x < 1$.

Induktionshypothese: Sei $x^n < \frac{1}{n^k}$.

$$x^{n+1} = x \cdot x^n \quad (7)$$

$$< \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \cdot x^n \quad (8)$$

$$\stackrel{IH}{<} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \cdot \frac{1}{n^k} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^k} \quad (10)$$

Da gilt $x^n < \frac{1}{n^k}$, gilt auch: $x^n \cdot n^{k-1} < \frac{1}{n}, \forall n < N$.

Nach Beispielaufgabe e7 konvergiert $\frac{1}{n}$ gegen 0. Da $h(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge nach Satz 4.8 gegen 0.

Aufgabe 3.2

Sei ein $\varepsilon < 0$.

Sei ein n_0 gewählt, sodass $|a - a_{n_0}| < \varepsilon$

Sei ein k gewählt, sodass $\frac{\max\{a_1, \dots, a_{n_0}, n_0 \cdot a + n_0 \cdot \varepsilon \cdot b\}}{kn_0} < \frac{\varepsilon - |a - a_{n_0}|}{2}$

Sei $N > n_0 \cdot k$

$$\left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right| = \left| \frac{a_1 + \dots + a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + \dots + a_{2n_0}}{n} \right| \quad (11)$$

Nr 3.4

sei $k_0 = k^2$

Zu zeigen:

$$k_0(1+1)^n > (1+q)^{n-1} + 2(1+q)^{n-2} \cdots + n$$
$$\iff k > d_n = \frac{1}{k(1+q)} + \frac{2}{k(1+q)^2} + \cdots + \frac{n}{k(1+q)^2}$$

Sei n_0 so gewählt, dass $\frac{n_0}{k(q+1)^{n_0}} < \varepsilon$

Dies ist möglich, da $\frac{n_0}{(q+1)^{n_0}}$ gegen 0 konvergiert.

Es gibt somit eine Konstante M , sodass

$$d_n = M + \sum_{i=0}^{\infty} e_n$$

, wobei

$$e_1 < \varepsilon$$

und

$$e_{n+1} = \frac{e_n}{(q+1)k} + \frac{e_n}{(q+1)k \cdot n_0}$$

Sei k nun so gewählt, dass $k(q+1) > 4$. Es gilt: $e_n < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$

Beweis fehlt

Es gilt somit:

$$\sum_{i=0}^{\infty} e_n < \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = m$$

Somit gilt:

$$d_n < M + m$$

k kann beliebig größer gewählt werden, sodass gilt $k > d_n$.

Die einzige Bedingung für k , dass $k(q+1) > 4$ ist, bleibt dadurch bestehen.

Somit kann k so gewählt werden, dass

$$k > d_n \iff k^2 = k_0 > d_n \cdot k =$$

1 Lemma 1

Sei k so gewählt, dass $k > \frac{1}{q-1}$.

$$e_1 = \frac{1}{q+1} \quad (12)$$

$$\text{Die Folge } S' = e_1 + \frac{2e_1}{q+1} + \frac{2^2e_1}{(q+1)^2} + \dots \text{ konvergiert gegen } \frac{1}{q-1}. \quad (13)$$

$$\text{Es gilt: } k > S' > S \quad (14)$$

$$\text{Somit gilt: } k(1+q)^n > (1+q)^{n-1} + 2(1+q)^{n-2} + \dots + n \quad (15)$$

Beweis

Es soll gezeigt werden, dass $a_n < (\frac{c}{c+\delta})^n$, für ein $\delta > 0$. Da gezeigt wurde, dass $(\frac{c}{c+\delta})^n$ gegen 0 konvergiert, konvergiert aufgrund des Sandwich Satzes auch a_n gegen 0.

Es gilt nach Lemma 1:

$$a_n < c^{\sum_{i=1}^{n-1} i(q+1)^{(n-i)}} \cdot A^{(q+1)^n}$$

$$\text{Sei } A = \frac{1}{(c+\delta)^k}.$$

Somit gilt:

$$a_n < \frac{c^{\sum_{i=1}^{n-1} i(q+1)^{(n-i)}}}{(c+\delta)^{k(q+1)^n}} = \frac{c^{c'}}{(c+\delta)^{a'}}$$

Nach Lemma 2 kann für k ein Wert gewählt werden, sodass

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(q+1)^{(n-i)} < k(q+1)^n$$

, also

$$c' < a'$$

Somit gilt

$$a_n < \frac{c^{c'}}{(c+\delta)^{a'}} < \frac{c^{c'}}{c}$$

Lemma1

Zu zeigen ist, dass die Folge

$$c'_n = \sum$$

Beweis

$$a_n < c^{c'_n} \cdot A^{(1+q)^n}$$

Nach Lemma 1 ist gezeigt, dass der Exponent von c c'_n gegen einen Wert l konvergiert.

Sei A eine beliebige reelle Zahl, sodass $A < \frac{1}{c^l}$.

$$a_n < c^l \cdot A^{(1+q)^n} < \frac{c^l}{c^{l(1+q)^n}} \leq \frac{1}{c^{(1+q)^n}} < \frac{1}{c^n}$$

Da $c > 1$ konvergiert $\frac{1}{c^n}$ gegen 0. Nach dem Sandwich Satz strebt a_n somit gegen 0.

Da A beliebig war, gilt dies für alle a_n , für die gilt $a_1 < A$.