

Korollar 3.9: Für $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gilt $a_n < a_{n+1}$

$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ gilt $b_{n+1} > b_n$

Beweis:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$> \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

□

Definition 3.10:

Wir definieren $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

die ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{-a : a \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}_0$

die rationallyen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \neq 0 \right\}$

die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Satz 3.11: (1) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ dann gilt. (i) $-a \in \mathbb{Z}$

(ii) $a+b \in \mathbb{Z}$

(iii) $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

(2) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis: "Übung." (man nutzt Satz 3.4 und $-(-a) = a$ sowie $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$)

Nich könnte hoffen, dass wir mit \mathbb{Q} und ohne das Vollständigkeitsaxiom auskommen oder?

Definition: $p \in \mathbb{R}$ heißt Primzahl falls $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ und $p = n \cdot m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ impliziert $n = 1$ oder $m = 1$.

Behauptung: Jede natürliche Zahl lässt sich als eindeutiges Produkt von Primzahlen schreiben \Rightarrow siehe CA

Proposition 3.12: Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$, dann gibt entweder $n = 2k$ ("n ist gerade") oder $n = 2k+1$ ("n ist ungerade").

Beweis: $\Pi := \{ k \in \mathbb{N} : 2k \geq n \}$. $\Pi \neq \emptyset$ da $2n \in \Pi$.

für ein $k \in \mathbb{N}$.

Nach Satz 3.6. existiert ein kleinstes $k_0 \in \Pi$. d.h. $2k_0 \geq n$.

Falls $2k_0 = n$ sind wir fertig also $\exists k_0 \quad 2k_0 = n$. Setze $\bar{k} := k_0 - 1$

dann folgt also $2\bar{k} < n < 2\bar{k} + 2 = 2k_0$ wir subtrahieren $2\bar{k}$

und erhalten $0 < n - 2\bar{k} < 2$ bzw. $1 \leq n - 2\bar{k} \leq 2 \xrightarrow{\text{Korollar 3.5}} n = 2\bar{k} + 1$ □

Folgerung 3.13: Jede $n \in \mathbb{N}$ lässt sich eindeutig zerlegen in

$$n = 2^m u \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}_0, u \text{ ungerade.}$$

Nun $A(n)$ sei richtig für $n_0 = 1$. mit $m=0, k=0$

Nun sei $A(n)$ richtig für $n \in \mathbb{N}_0$ nun. folgt für $n_0 + 1$

nach Prop. 3.12 $n_0 + 1 = 2k$ oder $n_0 + 1 = 2k + 1$

Im zweiten Fall sind wir fertig. Folg. $n_0 + 1 = 2k$.

Dann gilt. $k < n_0 \Rightarrow k$ hat eine eindeutige Zerlegung.

$$k = 2^m u \Rightarrow n_0 + 1 = 2^m u$$

Die Zerlegung der endlich da. $2^m u = 2^{\tilde{m}} \tilde{u}$

wir nehmen an $m \neq \tilde{m} \Rightarrow$

$$2^m u = \tilde{u}$$

aber da \tilde{u} ungerade folgt $u = \tilde{u}$.

Satz 3.14: $\nexists q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$

Beweis: Annahme $\exists q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. da $(-q)^2 = q^2 = 2$

können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $q \geq 0$

$$\text{d.h. } q = \frac{a}{b}$$

[Nach Folgerung 3.13 können wir annehmen, dass entweder a oder b ungerade]

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \quad \text{d.h.} \quad a^2 = 2b^2$$

da eine ungerade Zahl in Quadrat ungerade.

$$\Rightarrow a \text{ ist gerade} \quad \Rightarrow a = 2m \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 4m^2 = 2b^2 \Rightarrow 2m^2 = b^2 \Rightarrow b \text{ ist gerade} \quad \square$$

Damit können in \mathbb{Q} nicht alle algebraischen Gleichungen gelöst werden!

Nun werden wir zum zweiten Mal das Vollständigkeitsaxiom nutzen.

existiert nur in \mathbb{A} .

Satz 3.15: (Satz von Archimedes)

Zu $a \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

Beweis: Annahme $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n < a$ d.h. a ist eine obere Schranke von \mathbb{N}

$$\stackrel{(V)}{\Rightarrow} (\exists \sup \mathbb{N} = S < \infty$$

da $S-1 < S \quad \exists n \in \mathbb{N}$ mit $S-1 < n$

$\Rightarrow S < n+1$ aber $n+1 \in \mathbb{N}$ und damit war S keine obere Schranke \square

3.16

Bemerkung: Satz 3.8 ist äquivalent zu $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis: $\stackrel{4}{\Rightarrow}$ aus Satz 3.8 $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > \varepsilon^{-1} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

$\stackrel{5}{\Leftarrow}$ sei $\alpha > 0$ gegeben $\Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow n > \alpha \quad \square$

Korollar 3.17: \mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R} . d.h. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b \quad \exists q \in \mathbb{Q}$,

so dass $a < q < b$.

Beweis: Wir können $b > 0$ annehmen sonst betrachte $\tilde{b} = -a$, $\tilde{a} = -b$.

Falls $a < 0$ wähle $q = 0$. Nach der Bemerkung. $\exists n \in \mathbb{N}$ mit

$0 < \frac{1}{n} < b-a$. Die Menge $\{k \in \mathbb{N} : k \cdot \frac{1}{n} > a\}$ ist nach Satz 3.8

nicht leer und damit existiert ein kleinstes Element m .

$$\text{mit} \quad \frac{m}{n} > a \quad \text{aber} \quad \frac{m-1}{n} \leq a \quad \text{d.h.} \quad \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) \\ = b \quad \square$$

[Damit ist eine "Vervollständigung" von \mathbb{Q} und eine Möglichkeit, Würden später in einer Hörsaalübung zeigen, dass \mathbb{Q} abzählbar ist im Gegensatz zu \mathbb{R} .]

Satz 3.18 : $\forall c \in \mathbb{R} \text{ mit } c > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0$, so dass

$x^n = c$. Wir kreuzen x mit der n-ten Wurzel von c und schreiben $x = \sqrt[n]{c}$.

Beweis: für $n=2$ die Uniformiertheit für Übungsaufgabe siehe Aufgabe 3.1 (3)

Sei $c \neq 0$ für $c=0$ ist $x=0$ eine Lösung. falls $x \neq 0 \Rightarrow$
 $x \neq 0$ d.h. x ist kein Lösung.

Eindeutigkeit: Sei $x_1^2 = c \wedge x_2^2 = c = 0$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(\underbrace{x_1 + x_2}_{>0 \text{ da } x_1, x_2 > 0}) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad \square$$

$$a^n - b^n = (a-b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k \right)$$

Existenz: Sei $\mathcal{D} := \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \leq c \}$

$\mathcal{D} \neq \emptyset$ da $0 \in \mathcal{D}$

\mathcal{D} ist nach oben beschränkt, da für $x > c+1$

folgt $x^2 \geq (c+1)^2 \geq c+1 > c$ und damit $x \notin \mathcal{D}$.

Behauptung: $x_0 := \sup \mathcal{D}$ löst $x^2 = c$

Beweis: Annahme $x_0^2 < c$. Sei $\delta < \min \left\{ \frac{c^2 - x_0^2}{2(2x_0 + 1)}, 1 \right\}$

$$\begin{aligned} \text{dann wähle } (x_0 + \varepsilon)^2 &= x_0^2 + 2x_0\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &= x_0^2 - c^2 + \varepsilon \cdot (2x_0 + \varepsilon) + c^2 \\ &\leq -\frac{c^2 - x_0^2}{2} + c^2 < c^2 \Rightarrow x_0 + \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

Annahme $x_0^2 > c$, da $x_0 = \sup \mathcal{D}$ $\exists x > x_0 - \varepsilon$ für $\delta < \min \left\{ \frac{x_0^2 - c^2}{2(2x_0 + 1)}, 1 \right\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 &\geq (x_0 - \varepsilon)^2 = x_0^2 - c^2 - 2\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 + c^2 \\ &\geq (x_0^2 - c^2) - 2\varepsilon x_0 + c^2 \geq \frac{x_0^2 - c^2}{2} + c^2 \\ &> c^2 \end{aligned} \quad \square \quad \square$$

Wir kommen später nochmal darüber zurück an die Berechnung von

\sqrt{x} bzw. $\sqrt[n]{x}$ zu studieren.

Bemerkung: Sei $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ dann gilt: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Wir definieren:

$$a^{-m} := (a^m)^{-1} = \frac{1}{a^m} \quad (\text{denn ist } a^{m-n} = a^0 = 1 \text{ wahr})$$

$$\Rightarrow a^{k+l} = a^k \cdot a^l \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$$

und

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Dies motiviert. $a^{\frac{1}{n}}$ für $\sqrt[n]{a}$

Definition 3.20: $\forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, a > 0$ setzen wir $a^q = (\sqrt[n]{a})^m$

Bemerkung: Nun überprüft schnell, dass $a^{q+r} = a^q \cdot a^r$

$$a^{qr} = (a^q)^r \quad \forall q, r \in \mathbb{Q}$$

$a > 0$.

4. Folgen, Reihen und Grenzwerte

Definition 4.1: Eine Folge von reellen Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

d.h. wir ordnen jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zu.

Wir schreiben $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$(e2) \quad a_n = (-1)^n \text{ oder } ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ oder } (1, -1, 1, -1, \dots)$$

$$\text{Beispiel: } (e1) \quad a_n = n \text{ oder } (n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ oder } (1, 2, 3, 4, \dots)$$

$$\text{Harmonische } (e3) \quad a_n = \frac{1}{n} \text{ oder } (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ oder } (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$$

Folge

$$\text{oder } a_n = \frac{1}{n^s} \text{ für } s \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Geometrische } (e4) \quad \begin{array}{l} \text{Folge} \\ \text{für } a \neq 0 \end{array} \quad a_n = a^n \text{ oder } (a^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ oder } (a, a^2, a^3, \dots)$$

$$(e5) \quad a_n = A + 0 \cdot d_1 + d_2 \cdot 10^{-1} + \dots + d_k \cdot 10^{-k} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

d.h. a_n ist die Dezimalentwicklung von a bis zur

$$(e6) \quad a_n = \sqrt[n]{a} \quad \text{für } a \geq 0 \quad \text{oder} \quad (\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad (a, \sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \dots)$$

$$(e7) \quad a_n = \sqrt[n]{a} \quad i \quad (\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}} \quad \begin{array}{l} \text{für } n \in \mathbb{N} \\ \text{Übung:} \end{array} \quad (e)$$

Mit Hilfe der Vollständigen Induktion können wir Folgen auch rekursiv definieren:

d.h. (i) a_1, a_2, \dots, a_{n_0} wird explizit angegeben

(ii) a_n lässt sich mittels einer Vorschrift $V(n)$ aus

$$\{a_l : l \leq n\} \text{ berechnen für } n > n_0.$$

Beispiel: (e8) Fibonacci-Zahlen

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$\text{d.h. } (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$$

Definition 4.2: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Die Zahl a heißt Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a ; \quad \begin{matrix} a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \\ a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \end{matrix}$$

möglich für
n ∈ N $a - \varepsilon$ a_n *für n > N*
** a a + ε*

Bemerkung 4.3: der ε -Ball um a $\circ \times \times \times \circ \times \rightarrow$

$$B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

wird auch ε -Umgebung von a genannt.

Definition 4.2 besagt geometrisch.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } a_n \in B_\varepsilon(a) \quad \forall n > N$$

Beispiel: (e3) Konvergenz gegen 0

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Bew.: Nach Bemerkung 3.16 $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$

$$\Rightarrow |a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

(e2) Konvergenz nicht

Bew.: Annahme $a_n \rightarrow a$. Wähle $0 < \frac{1}{2} < \varepsilon$ und $N > 0$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 &= |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < 1 \end{aligned}$$

Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig.

Satz 4.4: Falls eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a und b konvergiert so gilt $a = b$.

Beweis: Annahme $a \neq b$ d.h. $|a - b| > 0$

Wähle $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} |a - b|$ und $N > 0$ so dass

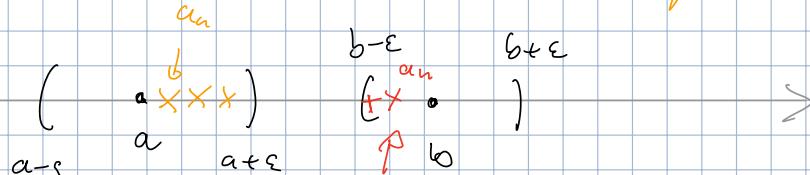
$$\bullet |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

$$\bullet |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

aber $|a - b| < |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \frac{1}{2} |a - b| \Rightarrow \{$

aber auch nur klar für $n > N$

□



nur klar für $n > N$

Beispiele: (e4)

Behauptung:

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 < a < 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \end{cases}$ (1)

nicht eindeutig sonst. (2)

Bew: (2) ist klar da $1^n = 1 \quad \forall n$. genaus $a = 0$

(1) zu nun $0 < |a| < 1 \Rightarrow |a|^n \geq 1$ d.h. setze $d = |a|^n - 1 \geq 0$

dann folgt aus Bernoulli. $|a|^n = (1+d)^n \geq (1+nd) \geq nd$

$$\Rightarrow |a|^n \leq \frac{1}{(1+nd)} \leq \frac{1}{n-d} < \varepsilon \quad \text{falls } n > N > \varepsilon d. \quad \square$$

Satz 4.5: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Wähle $\varepsilon = 1$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1 \forall n \geq N$.

Dann folgt für $n > N$ $|a_n| \leq |a| + |\alpha - a_n| \leq |a| + 1$.

Damit haben wir gezeigt, dass falls $A := \max \{|a_i|\} : i \leq N$

$$|a_n| \leq \max\{A, |a| + 1\}$$

□

(C4) (3) $\alpha = -1$ entspricht der Folge aus (C2). Für $|a| = 1 + x > 1$

d.h. $x > 0$ folgt.

$$|a^n| = |a|^n = (1+x)^n > 1+nx > 1 \quad \text{für } n \text{ genügend groß, Bernoulli}$$

d.h. $|a^n|$ ist nicht beschränkt $\Rightarrow a_n$ nicht konvergent.

(C5) Sei $1 \leq a \Rightarrow 1 \leq a^{\frac{1}{n}} < a$ und

$$a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1 + \underbrace{(a^{\frac{1}{n}} - 1)}_{\geq 0}\right)^n \geq 1 + n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$\Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| \leq \frac{a-1}{n} \rightarrow 0$$

□

Den Fall $a < 1$ bzw. $a^{-1} > 1$ werden wir mittels der Menge S auf diese zurückführen. da

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(a^{-1})^{\frac{1}{n}}}$$

(26)

$$n = \left(n^{\frac{1}{n}} \right)^n = (1 + x_n)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x_n^\ell \geq \binom{n}{2} x_n^2$$

&

$$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 0 \quad x_n^2 \leq \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1} \rightarrow 0 \quad \square$$

(27)

nicht konvergent 2. Art $f_n \geq \frac{n}{2}$ für $n \geq 2$.

$$f_1 = 1 > \frac{1}{2}; \quad f_2 = 1 > \frac{n}{2}; \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$$
$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}(n-3) \quad \square$$

4.1. Rechenregeln für konvergente Folgen

Übung

Wir hatten schon gezeigt dass

a_n konvergent $\Rightarrow a$ beschränkt

$$\bullet n^k a_n b$$

$$\bullet C^n a_n^{t+s} \geq a_{n+1}$$

Satz 4.6:

Seien (a_n) , (b_n) zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

dann gelten:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a \cdot b$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0$$

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

Beweis: (i) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\exists N_a, N_b > 0$ s.d.

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_b$$

\Rightarrow für $n > \max\{N_a, N_b\}$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\exists N_a, N_b > 0$ s.d.

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \quad \forall n > N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n > N_b$$

$$\Rightarrow |a_n| < |a| + 1 \quad \& \quad |b_n| < |b| + 1 \quad \forall n > \max\{N_a, N_b\}$$

$$\text{und } |a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iii) Sei $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{|b|}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ und wie zuvor $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \min\left\{\frac{1}{|b|}, 1\right\}$
 $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \min\left\{\frac{|a|+1}{|b|^2}, 1\right\}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| &\leq |a_n| \cdot \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| + \frac{1}{|b|} \cdot |a_n - a| \\ &\leq \frac{|a_n|}{|b_n||b|} |b - b_n| + \frac{1}{|b|} |a_n - a| \end{aligned}$$

$$\text{da } |b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq \frac{|b|}{2} \quad < 2 \cdot \frac{(|a|+1)}{|b|^2} |b - b_n| + \frac{1}{|b|} |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \max(N_1, N_2)$$

(iv) Dies folgt direkt aus $|a_n - a| \leq |a_n - a|$ (siehe Satz 2.7 (5)) \square

Bemerkung (i) & (ii) impliziert dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{da (ii) ergibt} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda a \quad (b_n \equiv \lambda)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu b_n = \mu b \quad (a_n \equiv \mu)$$

(iv) impliziert, dass

$(a_n)_n$ ist eine Nullfolge $\Leftrightarrow (|a_n|)_n$ ist eine Nullfolge.

[Die Menge der konvergenten Folgen in \mathbb{R} bilden einen Vektorraum d.h.

Wenn wir mit $X := \{ (a_n)_n : (a_n) \text{ konvergent} \}$ die Menge aller

konvergenten Folgen betrachten, so folgt das

$$(\lambda a_n)_n, (\mu b_n)_n \in X \Rightarrow (\lambda a_n + \mu b_n)_n \in X \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Theoretisch können wir sogar Satz 4.6 (ii) hinzunehmen

und erhalten, dass X zusätzlich ein Ring ist.]

Satz 4.7: (Monotonie der Grenzwerte)

Seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$ und $a_n \leq b_n$. dann folgt $a \leq b$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, dann existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_a$$

$$|b_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_b$$

$$\Rightarrow (b - a) \geq (b_n - a_n) - |b_n - b| - |a_n - a| \geq -2\varepsilon \quad \forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig folgt $b - a \geq 0$ \square

Bemerkung: $b_n > a_n \quad \forall n$ impliziert NICHT $b > a$

Bsp: $b_n = \frac{1}{n}$ und $a_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Folgerung: Falls $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit $A \leq a_n \leq B \quad \forall n$, dann folgt $A \leq \lim_n a_n \leq B$

Beispiel:

$$2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 \leq 3$$

Satz 4.8:

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{und} \quad (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n \leq c_n \leq b_n,$$

dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ beliebig wähle N_a, N_b wie zuvor d.h.

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_a$$

$$|b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_b$$

und damit $\forall n > \max\{N_a, N_b\}$

$$a - \varepsilon \leq a_n + \underbrace{|a_n - a| - \varepsilon}_{> 0} \leq c_n \leq b_n \leq a + |b_n - a| \leq a + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \max\{N_a, N_b\}$$

□

Beispiel: (1) Sei $s \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq s \leq k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n^k} \leq \sqrt[n]{ns} \leq \sqrt[n]{n^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ns} = 1$$

(2) Sei $s \in \mathbb{Q}$ mit $s \leq k$, $k \in \mathbb{N}$

und $-1 < x < 1$ dann folgt aus

$$0 \leq n^s |x^n| \leq n^k |x^n|$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^s x^n = 0$$

4.2. Unendliche Reihen.

Definition 4.9: Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen.

Durch

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

wird $(a_k)_k$ eine neue Folge $(s_n)_n$ zu geordnet.

Wir nennen (s_n) eine unendliche Reihe (kurz Reihe).

Wir schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots .$$

(a_n werden Glieder, s_n Partialsummen genannt.)

Falls $(s_n)_n$ konvergiert heißt die Reihe konvergent und

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ heißt Wert der Reihe.}$$

Bemerkung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ steht sowohl für die Reihe $(s_n)_n$ als auch für den Grenzwert $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Beispiel (geometrische Reihe): $a_k = a^k$ für $a \in \mathbb{R}$.

(mit der Konvention $0^0 = 1$ d.h. für $a=0 \Rightarrow s_n = 1 \forall n$)

$$\text{Sei } |a| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

Beweis:

$$(1-a) \cdot \sum_{k=0}^n a^k = \sum_{n=0}^n a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = 1 - a^{n+1}$$

d.h.

$$S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Nach Satz 4.6 folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-a}$.

Bemerkung 4.10: Jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lässt sich als Reihe (S_n) darstellen. :

Definiere $b_k = a_k - a_{k-1}$ für $k > 1$ & $b_0 = a_0$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n b_k = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k - a_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n. \end{aligned}$$

Eine solche Summe nennt man Teleskopsumme.

Beispiel: $a_k = \frac{k}{k+1} \Rightarrow b_0 = 0$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \frac{k^2 - (k^2-1)}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 0 \\ \text{bzw. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= 1. \end{aligned}$$

4.3 Monotone Folgen und bestimmte Divergenz gegen $\pm \infty$

Definition 4.11: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt bestimmt divergent gegen $\pm \infty$ ($(-\infty)$)

(wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$) falls

$\forall k \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $a_n \geq k \quad \forall n > N$.

Bemerkung:

- Wir haben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} -a_n = -\infty$
- Eine Folge kann nicht konvergent und bestimmt divergent sein.

Proposition 4.12: Wir haben die folgende Äquivalenz

$(a_n)_n$ ist eine Nullfolge $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ bestimmt divergent gegen $+\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$

Beweis: " \Rightarrow " Sei $k \in \mathbb{R}, k > 0 \exists N$ mit $|a_n| < \frac{1}{k} \quad \forall n > N$
 $\Rightarrow |a_n|^{-1} > k \quad \forall n > N$.

" \Leftarrow " Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N$ mit $|a_n|^{-1} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n > N$
 $\Rightarrow |a_n| < \varepsilon \quad \forall n > N$

□

Definition 4.13: Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt monoton fallend.

(monoton wachsend) falls $a_n \leq a_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq a_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$)

Satz 4.14: Jede monotone Folge konvergiert oder divergiert bestimmt.

Beweis:

Behauptung: Wir können annehmen, dass $(a_n)_n$ monoton wachsend.

Falls (a_n) monoton fallend ist $(-a_n)_n$ ist monoton wachsend.

Falls wir den Satz für monoton wachsende Folgen gezeigt haben

$$\Rightarrow \text{entweder } \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty \quad \text{Bemerkung:} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$\text{oder } \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = a \quad \text{Satz 4.6:} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -a$$

Sei (a_n) nun eine monoton wachsende Folge.

Behauptung: Falls $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

" \Leftarrow " ist offensichtlich; " \Rightarrow " Sei $K > 0$. Da $\{a_n\}$ nicht beschränkt

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > K \Rightarrow \forall n > n_0$ gilt $a_n > a_{n_0} > K$

Behauptung: Falls $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \rightarrow \infty} \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: $a := \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ erachtet.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$

mit $a - \varepsilon < a_N$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a \quad \forall n > N$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 0 \leq a_n - a \leq \varepsilon \quad \forall n > N \quad \square$$

Bemerkung: Wir haben gesehen, dass für $(a_n)_n$ monoton wachsend

$$(\text{fallend}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \rightarrow \infty} \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup_n a_n$$

$$(\inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf a_n)$$

Beispiel

Eulerische Zahl:

Wir erkennen aus, dass die Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ monoton wachsend ist und $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ monoton fallend.

$$\text{d.h. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ existiert.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ existiert.}$$

$$\text{Behauptung: } a = b = e$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: Wir haben } a_n &\leq b_n \text{ und } 0 \leq b_n - a_n = (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n} - 1) \\ &= a_n \cdot \frac{1}{n} = b_n \quad (\frac{a_n}{b_n}) \cdot \frac{1}{n} = b_n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{n+1} \\ &\leq \frac{e}{n} \leq \frac{3}{n} \text{ für } n \geq 7. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.7 gilt

$$0 \leq b - a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \leq 0$$

□

Definition 4.15: (Limes superior, Limes inferior)

Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{c_m : m \geq n\} \quad (1)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{c_m : m \geq n\}. \quad (2)$$

Bemerkung: Die Grenzwerte (1) & (2) sind wohldefiniert:

Wir definieren

$$b_n = \inf \{c_m : m \geq n\} \leq c_n \leq c_n = \sup \{c_m : m \geq n\}.$$

$(b_n)_n$ ist monoton wachsend, $(c_n)_n$ monoton fallend und damit existieren ihre Grenzwerte:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n \sup_{m \geq n} a_m$$

Beweis: wähle $\varepsilon > 0$

$$\exists N : c_n < a + \varepsilon$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n \inf_{m > n} a_m.$$

$$b_n > a - \varepsilon \forall n > N$$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < b_n < a_n < c_n < a + \varepsilon$$

- eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann wenn

4.4. Cauchy-Folgen / Cauchy-Kriterium. $c_\infty = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = b_\infty$

Bem: Wie können wir überprüfen ob eine Folge konvergiert. ohne den Grenzwert zu kennen?

Definition 4.16: Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn sie das Cauchy-Kriterium erfüllt:

(C) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$.

Satz 4.17: Ein Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau, dann wie sie eine Cauchy-Folge ist.

Bemerkung: Das Cauchy-Kriterium gibt uns die Möglichkeit zu bestimmen, ob eine Folge konvergiert ohne den Grenzwert zu kennen.

Bemerkung: Ein "mehrerer Raum", bei uns $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, heißt vollständig. Wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beweis: " \Rightarrow " d.h. wir nehmen an, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ist d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ existiert.}$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N$$

$$\Rightarrow |a_n - a_m| < |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon \quad \forall n, m > N.$$

\Leftarrow 1. Schritt: Jede Cauchy-Folge ist beschränkt. und damit $\limsup_n a_n < \infty$

2. Schritt: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a = \limsup_n a_n$

Der Grenzwert existiert
auf jeden Fall, aufgrund
der kompakten Eigenschaft

zu Schritt 1: Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m > N.$$

d.h. $|a_n| \leq |a_{N+1}| + 1 \quad \forall n > N$

$$\Rightarrow |a_n| < \max \{ |a_i| + 1 : i = 1, \dots, N+1 \} \stackrel{=: A}{<} \infty.$$

Insgesamt gilt $a_n < A \quad \forall n$ und damit

$$a = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq A.$$

\nearrow die Folge der Folge konvergiert gegen a auf

zu Schritt 2: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $c_n = \sup \{ a_m : m \geq n \}$

Da $\limsup_n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|c_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N_1. \Rightarrow |c_{N_3} - a| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow c_{N_3} < \frac{\varepsilon}{3} + a$$

Wähle $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_{N_1}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N_2$. $\Rightarrow c_{N_3} - \frac{\varepsilon}{3} < a$
 $c_{N_3} \geq a$

Sei $N_3 = \max \{ N_1, N_2 \} + 1$.

Da $c_{N_3} = \sup \{ a_m : m \geq N_3 \} < \infty$ existiert $N_4 \geq N_3$

mit $c_{N_3} > a_{N_4} > c_{N_3} - \frac{\varepsilon}{3}$.

Sei $n \geq N_4$

$$= |a_n - a| \leq |a - c_{N_3}| + |c_{N_3} - a_{N_4}| + |a_{N_4} - a_n|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Beispiel / Übung:

$\exists \theta < 1$:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folg., so dass $|a_{n+1} - a_n| < \theta |a_n - a_{n-1}|$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ ist eine Cauchy Folg. $\Rightarrow a_n$ ist konvergent.

4.5. Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Definition 4.16: (Teilfolge) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $(a_{n_k})_k$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, d.h. $n_k < n_{k+1} \forall k$. Dann heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_n$.

Bemerkung: Falls $(a_n)_n$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $(a_{n_k})_k$ eine Teilfolge so gilt.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Die Umkehrung gilt nicht z.B. $b_n = (-1)^n$:

$(b_{2k})_k = (1)_k$ konvergiert aber b_n nicht.

Definition 4.17: Sei (a_n) eine Folge so heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ existiert mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Zusatz 4.18: Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Dann gilt.

a ist ein Häufungspunkt \iff jedes ε -Ball um a enthält unendlich viele a_n .

Beweis: "Umkehrung."

Beispiel: $(a_n) = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow$ Häufungspunkte $-1, 1$.

$$(a_n = n + (-1)^n n + \frac{1}{n} = \begin{cases} 2n + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ 1 & n \text{ ungerade.} \end{cases})$$

hat den Häufungspunkt 0 .

Bemerkung: Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt.

Satz 4.18: (Satz von Bolzano Weierstrass)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, dann existiert eine konvergente Teilfolge:

Beweis: Die Idee ist zu zeigen, dass $\limsup a_n = b$ EIN HÄUFUNGSPUNKT ist.

$$\text{Beweis: Da } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \Rightarrow \limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < \infty$$

$$\text{wobei } b_n = \sup \{a_m : m \geq n\}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \limsup a_n$$

Behauptung: Wir finden eine Teilfolge mit.

Dann gilt $a_k \rightarrow b$ und $b_n \rightarrow b$

$$(1) |a_{k(n+1)} - b_{k(n)+1}| < \frac{1}{n}, \quad k(n+1) \geq k(n)+1$$

Die Behauptung impliziert den Satz da.

$$\text{jede Teilfolge von } b_n \text{ konvergiert gegen } b$$

$$b_{k(n)-1} - \frac{1}{n} \leq a_{k(n)} \leq b_{k(n)} \Rightarrow \text{Pausse ist } \geq$$

Lösungsschritt aus Grunddefinition von b

und die linke und rechte Seite konvergieren gegen b somit konvergiert $a_{k(n)}$ gegen b .

Beweis der Behauptung: (Konstruktion von $k(n)$ durch Induktion)

Wähle $k(0) = 0$ und $k(1) \in \mathbb{N}$, so dass

$$b_1 - 1 < a_{k(1)} < b_1.$$

$$\text{d.h. } b_{k(n-1)+1} \Rightarrow a_{k(n)} \geq b_{k(n-1)+1} - \frac{1}{n}$$

Annahme: $k(n)$ ist gewählt. $\Rightarrow \exists k(n+1) \geq k(n)+1$ so dass

$$b_{k(n)+1} = \sup \{a_m : m \geq k(n)+1\} \geq a_{k(n+1)} \geq b_{k(n)} + \frac{1}{n}.$$

$\Rightarrow (a_{k(n)})_n$ existiert. da $k(n) \leq k(n+1)$

wir können schreiben, dass

Bemerkung 1) Falls $\limsup a_n < +\infty$

so ist $\limsup a_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(genauso für $\liminf a_n$)

2) Sei H die Menge aller Häufungspunkte

so gilt $\sup H = \limsup a_n$ & $\inf H = \liminf a_n$

4.6: Konvergenzkriterien für Reihen.

W.d.h. sei $(s_n = \sum_{k=1}^n a_k)_n$ eine Reihe. Wir sagen eine Reihe konvergiert g.l.w. $(s_n)_n$ konvergiert.

Bemerkung 4.22 / Korollar zu 4.17:

$$\sum_n a_n \text{ konvergiert} \Leftrightarrow (s_n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow (s_n) \text{ ist eine Cauchyfolge} \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| = |s_m - s_n| \\ = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| = |s_m - s_n| < \varepsilon \quad \forall m \geq n > N.$$

Korollar 4.23: $\sum_n a_n$ konvergiert $\Rightarrow (a_n)_n$ ist eine Nullfolge.

(d.h. $|a_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ist ein notwendiges

Kriterium aber kein hinreichendes!)

Beweis: Wähle in (1) $m = n+1$.

Satz 4.24 (Majorantenkriterium)

Sei $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ Reihen mit $|a_n| \leq b_n \quad \forall n$ und $\sum_n b_n$ konvergent.

$\Rightarrow \sum_n a_n$ konvergent (mit $|\sum_n a_n| \leq \sum_n b_n$)

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $(s_n = \sum_{k=1}^n a_k)_n$ Cauchy:

Sei $(\sigma_n = \sum_{k=n}^n b_k)_n$ die Folge der Partialsummen zu $\sum_n b_n$.

Da $(\sigma_n)_n$ konvergent: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$.

$$\Rightarrow |s_n - s_m| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^m b_k = |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon.$$

□

Vergleichstest für Folgen:

falls $a_n \leq b_n$	$\Rightarrow \sum_n a_n \leq \sum_n b_n$
genauso falls $a_n \geq b_n$	$\text{und } \sum_n a_n = \sum_n b_n$
	$\Rightarrow \sum_n c_n = \sum_n a_n = \sum_n b_n$

△ Notwendige Bedingung

Majorantenkriterium $\rightarrow |a_n| \leq b_n \wedge b_n$ konvergent.

Cauchy-Vereinfachungskriterium

Leibnizkriterium

Wurzelkriterium

Quotientenkriterium

$$|a_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$|a_n| \leq b_n \wedge b_n \text{ konvergent.}$$

$$a_n \geq 0; a_n \text{ monoton fallend:}$$

$$\rightarrow \text{Konvergenz einer Reihe}$$

$$a_n \geq 0; a_n \text{ monoton fallende Nullfolge}$$

$$\sum a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergent}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konvergent.}$$

Satz 4.28 (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_n$ eine Folge, falls (w1) $\exists N \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta < 1 \quad \forall n > N$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ absolut konvergent

(w2) $\exists N \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{|a_n|} \geq \lambda > 1 \quad \forall n > N$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ nicht konvergent.

Satz 4.28 (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_n$ eine Folge, falls (q1) $\exists N \in \mathbb{N}: |a_n| > 0; \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \Theta < 1 \quad \forall n > N$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ absolut konvergent.

(q2) $\exists N \in \mathbb{N}: |a_n| > 0; \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \lambda > 1 \quad \forall n > N$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ nicht konvergent.

Bemerkung:

(w1) $\Leftrightarrow (w1)^*: \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \Theta^* < 1$

(q1) $\Leftrightarrow (q1)^*: \exists N \in \mathbb{N}: |a_n| > 0 \quad \forall n > N \quad \& \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \Theta^* < 1$

(w2) $\Leftrightarrow (w2)^*: \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda^* > 1$

(q2) $\Leftrightarrow (q2)^*: \exists N \in \mathbb{N}: |a_n| > 0 \quad \forall n > N \quad \& \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \Theta^* > 1$

Beweis der Bemerkung: (Wir zeigen für (w1) & (w2). Der Fall (q1) & (q2) ist analog)

(w1) $\Rightarrow (w1)^*$: ist offensichtlich

(w1)* $\Rightarrow (w1)$: Wähle $1 > \Theta = \frac{\Theta^* + 1}{2} > \Theta^*$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_n \sup_{m > n} \sqrt[m]{|a_m|}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \sup_{m > N} \sqrt[m]{|a_m|} \leq \Theta \Rightarrow (w1) \text{ gilt.}$$

(w2) \Rightarrow (w2)* : ist offensichtlich.

$$(w2)^* \Rightarrow (w2) : \text{Wähle } b_n \text{ mit } 1 < \lambda = \frac{\lambda^* + 1}{2} < \lambda^*$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_n \sup_{m > n} \sqrt[m]{|a_m|}$$



$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \inf_{m > N} \sqrt[m]{|a_m|} \geq \lambda \Rightarrow (w2) \text{ gilt}$$

Beweis der Kriterien:

zu (w1) & (q1) : Behauptung: (w1) impliziert $|a_n| \leq \Theta^n \quad \forall n > N$
(q1) impliziert (A) $|a_{n+1}| \leq \Theta^{n-N} |a_{n+1}| \quad \forall n \geq N+1$
& $|a_{n+1}| > 0$

Beweis der Behauptung: zu (w1): falls $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta \Rightarrow |a_n| \leq \Theta^n$ Intervall

zu (q1): (A) folgt per Induktion aus $|a_{n+1}| \leq \Theta |a_n| \quad \forall n \geq N+1$

$$A(N+1): |a_{N+1}| \leq \Theta^0 |a_{N+1}|$$

$$A(n+1) \Rightarrow A(n+2): |a_{n+2}| \leq \Theta |a_{n+1}| \leq \Theta \cdot \Theta^{n-N} |a_{N+1}| \leq \Theta^{(n+1)-N} |a_{N+1}|$$

Beweis der absoluten Konvergenz:

Definition der Majorante: $b_n = \begin{cases} \Theta^n \max\{1, \Theta^N |a_{N+1}|\} & \forall n \geq N+1 \\ |a_n| & \forall n \leq N \end{cases}$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \Theta^n$ ist konvergent (mit Grenzwert $\frac{1}{1-\Theta}$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Die Behauptung impliziert, dass $|a_n| \leq b_n \quad \forall n$ l.h.s. b_n ist eine Majorante
 $\xrightarrow{\text{Majorantenkriterium}} \sum_n a_n$ absolut konvergent.

zu (w2) \Rightarrow (q2): Behauptung: (w2) impliziert $|a_n| \geq \lambda^n \quad \forall n \geq N$
 (q2) impliziert $|a_{n+1}| \geq \lambda^{n-N} |a_N| \quad \forall n \geq N$
 $\Rightarrow |a_{n+1}| > 0$

Beweis der Behauptung (analog zu oben):

$$(\text{zu w2}): \sqrt[n]{|a_n|} \geq \lambda \Rightarrow |a_n| \geq \lambda^n$$

$$(\text{zu q2}): |a_{n+1}| \geq \lambda |a_n| \text{ per Ind.} \quad A(N+1): |a_{N+1}| \geq \lambda^0 |a_{N+1}|$$

$$A(n+1) \rightarrow A(n+2): |a_{n+2}| \geq \lambda |a_{n+1}| \geq \lambda \lambda^{n-N} |a_{N+1}| = \lambda^{(n+1)-N} |a_{N+1}|$$

Beweis, dass damit die notwendige Bedingung nicht erfüllt ist:

$$\text{da } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = +\infty \quad \text{da } \lambda > 1$$

$$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} |a_n| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n \min \{1, \lambda^{-N} |a_{N+1}|\} = +\infty$$

$\Rightarrow |a_n| \text{ ist keine Nullfolge.}$

□

Beispiel: Exponentielle Reihe: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{d.h.} \quad a_n = \frac{x^n}{n!}$

$$\text{Wurzelkriterium: } \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \quad \text{da } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \Rightarrow (\text{w1}^*) \text{ ist erfüllt.}$$

Quotientenkriterium: falls $|x| > 0 \Rightarrow a_n \neq 0 \quad \forall n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{(n+1)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow (\text{q2}^*) \text{ ist erfüllt.}$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert $E(x)$ absolut.

Bemerkung zur Optimalität der Kriterien:

Harmonische Reihe: $\sum_n \frac{1}{n}$ konvergiert nicht.

$$\text{zu (w.)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\text{zu (q.)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

"S-Harmonische Reihe": $s > 1, s \in \mathbb{Q} : \sum_n \frac{1}{n^s}$ konvergent. (★)

$$\text{zu (w.) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^s}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^s} = 1$$

$$\text{zu (q.) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^s \cdot n^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^s = 1$$

zu (★): Es gilt: sei $s \in \mathbb{R}$ dann gilt $(a_n)_n$ konvergent g.d.w. $(a_n^s)_n$ konvergent.
mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^s = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^s$

zu (★): Anwendung des Cauchy-Konditionenkriterium:

$0 \leq \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{n^s}$ d.h. $\left(\frac{1}{n^s} \right)_n$ ist eine monoton fallende Folge.

$$\sum a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = (2^n)^{1-s} = (2^{1-s})^n \quad \text{da } s > 1$$

$$\Rightarrow (2^{1-s}) < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-s})^n \text{ ist konvergent.}$$

4.7: Umordnung von Reihen:

W.d.h. des Beispiels

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & -1 & -1 & \ddots \\ & & -1 & -1 & 1 \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \sum = 0 \quad \Leftrightarrow 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ddots \quad \sum = 1$$

Definition: (Umordnung) Eine Reihe $\sum b_n$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum a_n$

falls eine Bijektion $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert mit $b_n = a_{\tau(n)}$

Bijektion bedeutet: $\tau(i) = \tau(j) \Rightarrow i = j$ (Injektivität)

$\forall i \in \mathbb{N} \exists j \in \mathbb{N} : \tau(j) = i$ (Surjektivität)

damit $\exists \tau^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \tau \circ \tau^{-1}(i) = i \forall i$

mit $\tau^{-1}(i) = j$ falls $\tau(j) = i$ (wodurch aufgrund der Injektivität Eindeutigkeit & Surjektivität (Existenz))

Bemerkung / Lemma: Sei $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion, dann gilt

$\forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : \{1, \dots, N\} \subseteq \{\tau(1), \dots, \tau(n)\}$

Beweis der Bemerkung: Wähle $N = \max \{ \bar{\tau}^1(1), \dots, \bar{\tau}^1(N) \}$

Satz 4.27: Die folgenden Aussagen sind äquivalent

(1) $\sum_n a_n$ konvergiert absolut.

(2) $\sum_n a_{\sigma(n)}$ ist konvergent für jede Bijektion σ

d.h. jede Umordnung von $\sum_n a_n$ ist konvergent.

Bemerkung / Lemma: Sei $\forall N \in \mathbb{N} \exists \bar{N} \in \mathbb{N}$ so dass

$$\{1, \dots, N\} \subseteq \{\tau(1), \dots, \tau(\bar{N})\}$$

Beweis: wähle $\bar{N} = \max \{ \tau^i(i) : i=1, \dots, N \}$

\downarrow
der Maximalwert der Gesamtanzahl
von $\tau(1) \dots \tau(N)$

Satz 4.27: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent

(2) $\sum_n a_{\tau(n)}$ ist konvergent für jede Umordnung τ

Zudem gilt $\sum_n a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n = \sum_n a_{\tau(n)} \quad \forall n$.

Beweis:

(1) \Rightarrow (2): Es reicht zu zeigen, dass $\sigma_n = \sum_{k=1}^n a_{\tau(k)}$ es die Grenzwert $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hat.

Cauchy-Folge ist:

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$.

$$\text{und } \left| \sum_{k=1}^m a_k - a \right| < \varepsilon \quad \forall m > N$$

(siehe Lemma)

Wähle $\bar{N} > 0$, so dass $\tau(k) \geq N \quad \forall k \geq \bar{N} \Rightarrow$ Für $n > m > \bar{N}$

$$|\sigma_n - \sigma_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

$$\text{und } |\sigma_n - a| = \left| \sum_{k=1}^n a_{\tau(k)} - a \right| = \left| \sum_{k=1; \tau(k) \leq N}^N a_{\tau(k)} - a + \sum_{k=1; \tau(k) > N}^n a_{\tau(k)} - a \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k - a \right| + \left| \sum_{k=1; \tau(k) > N}^n a_k \right|$$

(2) \Rightarrow (1): Wir definieren die nicht negativen Folgen.

$$\cdot \quad a_n^+ := \max\{a_n, 0\} \quad a_n^- := \max\{-a_n, 0\} \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon.$$

$$\text{d.h. } a_n^+ - a_n^- = a_n \quad \& \quad a_n^+ + a_n^- = |a_n|$$

\Rightarrow $\sum_n a_n$ ist abs. konv. \Leftrightarrow Es gibt Umordnungen τ der $\sum_n a_n$ wobei konv.

Falls $\sum_n a_n^+$ oder $\sum_n a_n^-$ konvergent

$\Rightarrow \sum_n a_n^+$ und $\sum_n a_n^-$ konvergent. $\Rightarrow \sum_n a_n$ konvergent

\Rightarrow Widerspruch zu Analysis
d.h. $\sum_n a_n$ nicht abs.
konv.

Dann falls $\sum_n a_n^+$ konvergent $\Rightarrow \alpha_n^- = a_n^+ - a_n$ konvergent

also Summe zweier konvergenter Folgen

Seien also $\sum_n a_n^+$ & $\sum_n a_n^-$ strikt divergent.

Sei $I^- := \{n \in \mathbb{N} : a_n^- > 0\}$ und $I^+ = \mathbb{N} \setminus I^-$ d.h.

$$I^+ \cap I^- = \emptyset \quad \& \quad I^+ \cup I^- = \mathbb{N}.$$

Es reicht nun eine Abzählung \bar{c} von $I^+ \cup I^-$ zu finden,

so dass $\sum_n \alpha_{\bar{c}(n)}$ strikt divergent.

Seien $\mu : \mathbb{N} \rightarrow I^+$ & $\nu : \mathbb{N} \rightarrow I^-$ Abzählungen von I^+ und I^-

Wir finden nun eine monoton wachsende Folge $(n_k)_k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(i) \quad n_k > k$$

$$(ii) \quad \sum_{l=1}^{n_k} a_{\mu(l)} + \sum_{l=1}^{k-1} a_{\nu(l)} > k$$

haben wir eine solche Folge gefunden definiieren wir

$$\bar{c} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(\mu(n_1), \dots, \mu(n_1), \nu(1), \mu(n_2+n_1), \dots, \mu(n_2), \nu(2), \mu(n_2+n_1), \dots)$$

d.h. $\sum_{e=1}^n a_{\mu(e)} = \sum_{e=1}^{\mu(n)} a_e^+$ ist die Folge $(a_{\mu(e)})_e$ strikt divergent.

$$\Rightarrow \exists n_1 \text{ mit } \sum_{e=1}^{n_1} a_{\mu(e)} > 1.$$

Sei nun n_k gewählt. Da $\sum_{e=n_k+1}^{\infty} a_{\mu(e)} = +\infty$

$$\Rightarrow \exists n_{k+1} > n_k \text{ mit.}$$

$$\sum_{e=n_k+1}^{n_{k+1}} a_{\mu(e)} > (k+1) + \sum_{e=1}^k a_{\nu(e)} - \sum_{e=1}^{n_k} a_{\mu(e)}$$

Q

Korollar / Satz 4.28: (Cauchy Produkt von Reihen)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen, dann gilt.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_{m-k} b_k \right)$$

Beweis: Es gibt eine eindeutige Anordnung der Folge der Produkte $a_m b_k$ und diese ist die rechte Reihe.

Wir werden sehen, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Wir betrachten die Indexmenge $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und die Familie $(a_k b_k)_{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.

1. Beobachtung: Falls $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ zwei Abzählungen von \mathbb{N} , dann ist $\bar{\psi}^{-1} \circ \phi$ eine Umordnung von \mathbb{N} .

2. Beobachtung: Falls ϕ abzählbar \Rightarrow Satz 4.27

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)}$$

absolut konvergent für jede

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi_1(n)} b_{\psi_2(n)}$$

absolut konvergent für jede (mit selbigem Grenzwert)

andere Abzählung $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi_1(n)} b_{\psi_2(n)}$$

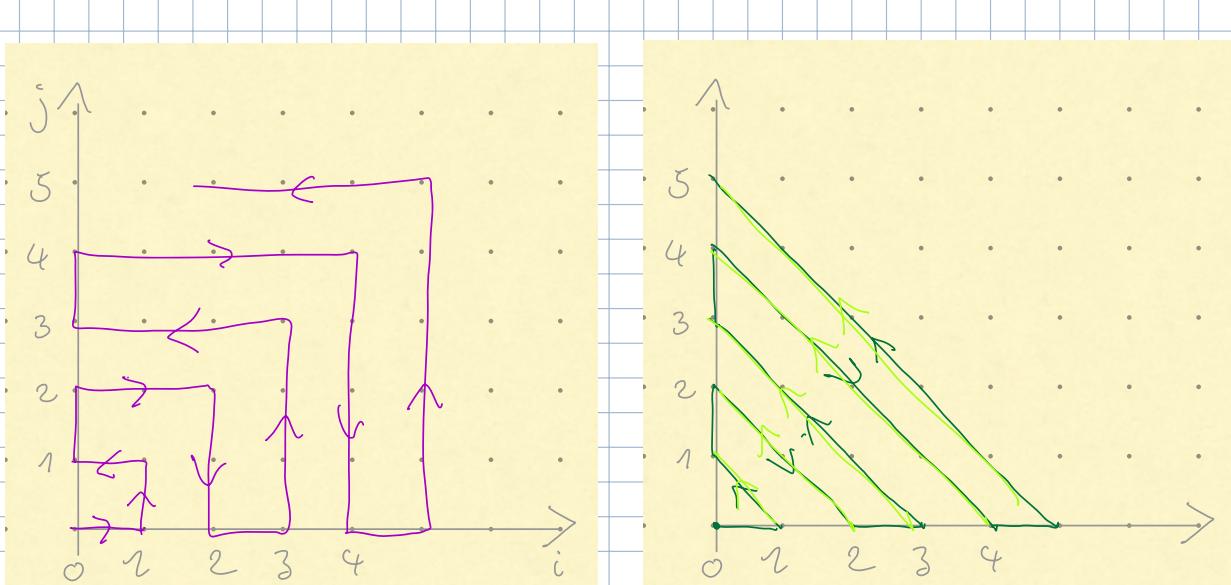
\Rightarrow Beweisstrategie: I. Finde $\phi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, so dass

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\phi_1(n)}| |b_{\phi_2(n)}| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

II. Finde $\psi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, so dass

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi_1(n)} b_{\psi_2(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$



Abschätzung ϕ : \mathbb{P}

Zu I

Wir stellen fest, dass

$$(a) \quad \phi(\{1, \dots, (N+1)^2\}) = \{(i,j) : \max\{i,j\} \leq N\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{(N+1)^2} |a_{\phi_n(n)}| |b_{\phi_n(n)}| = \left(\sum_{i=0}^N |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^N |b_j| \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{(N+1)^2} |a_{\phi_1(n)}| |b_{\phi_2(n)}| = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right)$$

konvergiende Produkt konvergenter Folgen nach Satz 4.27

(b) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)}$ ist absolut konvergent und

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{(N+1)^2} a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^N |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^N |b_j| \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) \end{aligned}$$

Zu II:

Wir stellen fest, dass

$$\psi(\{1, \dots, \frac{(N+1)(N+2)}{2}\}) = \{(j, i-j) : 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq i\}$$

Damit: Summe dieser beiden Mengen ist gleich

$$0 \leq i+j \leq N$$

und damit

$$\sum_{i=1}^{N+1} a_{q_1(i)} b_{q_2(i)} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^i a_{i,j} b_{ij}.$$

$\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 $\psi(k) = (k_1, k_2)$

□

4.8 Potenzreihen

(Dies ist eine der wichtigsten Klassen von Reihen in der Analysis)

Definition 4.29: (Potenzreihen)

Eine Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots$$

heißt Potenzreihe wobei $x \in \mathbb{R}$ (bzw. x einem IR-Nadel)

und $(a_n)_n$ eine Folge.

Lemma 4.30: Sei $P(x)$ konvergent in einem Punkt x_0

dann ist $P(x)$ absolut konvergent für x mit $|x| < |x_0|$

Beweis: da $P(x_0)$ konvergent ist $|a_n x_0^n|$ eine Nullfolge.

d.h. $\exists A > 0$ mit $|a_n x_0^n| < A \forall n$

⇒ für x mit $|x| < |x_0| \Rightarrow$

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n \leq A \theta^n \quad \text{mit } \theta = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$$

da $\sum_{n=0}^{\infty} A \theta^n = \frac{A}{1-\theta} < \infty$ folgt die Konvergenz von

$\sum_n |a_n x^n|$ durch das Majoranten-Kriterium.

□

Definition 4.31: (Konvergenzbereich und Konvergenzradius):

Die Menge $K = \{x : P(x) \text{ konvergent}\}$ heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

$R = \sup \{ |x| : x \in K \}$ heißt Konvergenzradius.

Lemma 4.30 impliziert, dass $B_R(0) = \{x : |x| < R\} \subseteq K$
 $\exists R, R' \in \mathbb{R}$

Beispiele:

$$(1) E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad K = \mathbb{R} \quad \& \quad R = +\infty$$

$$(2) P_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad \text{da } n! x^n \text{ keine Nullfolge} \quad K = 0 \quad \& \quad R = 0$$

$$(3) P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \Rightarrow \quad K = [-1, 1] \quad \& \quad R = 1$$

$$(4) P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad \Rightarrow \quad K = [-1, 1] \quad \& \quad R = 1$$

$$(5) P_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \quad \Rightarrow \quad K = [-1, 1] \quad \& \quad R = 1.$$

⚠ Die Ränder müssen separat analysiert werden.

Satz 4.32: Seien $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihen, so gilt.

$$(1) \text{ falls } P(x), Q(x) \text{ konvergen: } P(x) + Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$(2) \text{ falls } P(x), Q(x) \text{ absolut konvergent: } P(x) \cdot Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

mit $c_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m$

Definition 4.34: (Konvergenzbereich und Konvergenzradius):

Die Menge $K = \{x : P(x) \text{ konvergent}\}$ heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

$R = \sup \{ |x| : x \in K \}$ heißt Konvergenzradius.

Lemma 4.30 impliziert, dass $B_R(0) = \{x : |x| < R\} \subseteq K$
 $\exists R, R' \in \mathbb{R}$

Beispiele:

$$(1) E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad K = \mathbb{R} \quad \& \quad R = +\infty$$

$$(2) P_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad \text{da } n! x^n \text{ keine Nullfolge} \quad K = 0 \quad \& \quad R = 0$$

$$(3) P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \Rightarrow \quad K = [-1, 1] \quad \& \quad R = 1$$

$$(4) P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad \Rightarrow \quad K = [-1, 1] \quad \& \quad R = 1$$

$$(5) P_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \quad \Rightarrow \quad K = [-1, 1] \quad \& \quad R = 1.$$

⚠ Die Ränder müssen separat analysiert werden.

Satz 4.35: Seien $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihen, so gilt.

$$(1) \text{ falls } P(x), Q(x) \text{ konvergen: } P(x) + Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$(2) \text{ falls } P(x), Q(x) \text{ absolut konvergent: } P(x) \cdot Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

mit $c_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m$

Insgesamt gelten (1) & (2) $x \in \mathbb{B}_R$ mit $R = \min\{R_1, R_2\}$
 wobei R_1, R_2 die Konvergenzradien von P & Q sind.

Beweis: (1) folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen
 Satz 4.6.

(2) folgt aus dem Cauchy produkt, da

$$\sum_{m=0}^n (a_{n-m} x^{n-m}) (b_m x^m) = c_n \cdot x^n \quad \square$$

Der Konvergenzradius einer Reihe ist damit von großen Unkord.
 Das Wurzelkriterium gibt die Möglichkeit ihn zu bestimmen:

Satz 4.36: (Cauchy-Hadamard)

Sei $P(x) = \sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe so gilt.

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{da}$$

(i) $P(x)$ absolut konvergent für $|x| < R$

(ii) $P(x)$ divergent für $|x| > R$

(iii) keine Aussage für $|x| = R$.

Beweis: $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} |x| = \frac{1}{R} \cdot |x|$

□

4.9. Die Exponentialreihe. I

Satz 4.37: (Die Exponentialreihe)

$$\text{Die Exponentialreihe } \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ (d.h. der Konvergenzradius $R = +\infty$)

Sie hat die Eigenschaft: (AT) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$(WT) \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\exp(x_n) - 1}{x_n} = 1$$

$$(i) \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \exp(k) = \exp(1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

zudem gilt die Abschätzung:

$$|\exp(x) - S_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für } |x| < 1 + \frac{n}{2}$$

$\exp(x)$ ist eine Potenzreihe mit $a_n = \frac{1}{n!}$ Satz 4.83.

Beweis: $a_n = \frac{1}{n!}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \Rightarrow R = +\infty$

(Additivität)

!

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+n}}{(k+n)!}$$

$$\text{und. } \exp(kx) - S_n(x) = \sum_{l=(n+1)}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{n+l}}{(n+l)!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{(n+l)!} = \dots \frac{x^n}{(n)!} = \dots \frac{x^k}{(n+k)!}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{c_{n,k}} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n+1} \right)^k$$

$$\text{with } c_{n,k} = \frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} = \prod_{l=0}^k (n+1+l)$$

$$\leq \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{n+1}}$$

$$\frac{x}{n+2} \leq \frac{1}{2}$$

we show by induction on k that $c_{n,k} \geq (n+2)^k$

$$c_{n,0} = 1 \quad ; \quad (k \rightarrow k+1) \quad c_{n,k+1} = (n+1+k+1) c_{n,k}$$

$$\geq (n+2) c_{n,k} \geq (n+2)^{k+1}$$

Wortung: L steht für

$$x \leq 1 + \frac{n}{2}$$

(AT) Wir verwenden das Cauchy product für Reihen an auf

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{=a_n}$$

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

Satz 4.21

$$\Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=0}^n}_{\text{Cauchy product}} a_{n-m} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

$$= c_n$$

$$c_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \frac{y^m}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$(w\bar{t}) \quad \left| \frac{\exp(x)-1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = |x| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} \right|$$

$$\leq |x| \frac{1}{|x| - \frac{|x|}{4}} \quad \text{oder} \quad \leq |x| \frac{1}{1-|x|} \quad \forall |x| < 1$$

$$\stackrel{=0}{\rightarrow} \lim_{|x| \rightarrow 0} \left| \frac{\exp(x)-1}{x} - 1 \right| = 0$$

$$(i) \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{und. } 1 = \exp(0) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0 \quad \text{für } x > 0$$

$$\Rightarrow \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{z. B.} \quad \text{(ii) } 1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \exp(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow (ii)

(iii) folgt per Induktion in $n \in \mathbb{N}_0$

$$(n=0): \exp(0) = 1 = \exp(1)^0 \quad (n \rightarrow n+1): \quad \exp(n+1) = \exp(1) \exp(n)$$

$$= \exp(1) \exp(n)^1 = \exp(1)^{n+1}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$

$$\Rightarrow \exp(-k) = \frac{1}{\exp(|k|)} = \frac{1}{\exp(1)^{|k|}} = \exp(1)^{-k} \quad \square$$

5. \mathbb{C}, \mathbb{R}^n & \mathbb{C}^n

Bemerkung: Wir hatten geschenkt $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 \geq 0$ d.h.

die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung in \mathbb{R} .

Die imaginäre Einheit i (die imaginäre Zahl mit $i^2 = -1$)

hat interessante Konsequenzen.

5.1. Definition von \mathbb{C} .

Definition 5.1 (a) : (1. Definition der komplexen Zahlen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $a+bi \in \mathbb{C}$ und wir definieren

$$\text{die Summe: } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\text{das Produkt: } (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Definition 5.2 :

Seien A, B zwei Mengen. Die Menge

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

heißt das kartesische Produkt / Kreuzprodukt von A, B

d.h. die Menge aller Paare / Tuple (a, b) mit $a \in A, b \in B$.

Definition 5.1 (b) : (2. Definition der komplexen Zahlen)

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen " $+$ " & " \cdot " definiert durch

$$"+" : (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$\cdot " : (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

Bemerkung: Es gilt $\mathbb{R} \cong \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$

d.h. (in der Sprache der abstrakten Algebren), dass \mathbb{R} isomorph zu $\mathbb{R} := \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ ist. :

Summe & Produkt sind "gleich":

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (ab,0)$$

Deshalb schreiben wir a anstelle von $(a,0)$, insbesondere da

$$a \cdot (c,d) = (a,0) \cdot (c,d) = (ac, ad)$$

Bemerkung: (1) da $(0,a) \cdot (0,b) = (-ab,0)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

und damit sind $(0,1)$ & $(0,-1)$ Wurzeln von -1

(2) wir setzen $i = (0,1)$ und schreiben.

$$\Rightarrow (a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$$

$$= a + bi$$

damit sind die beiden Definitionen äquivalent.

Satz 5.1 Die Körperaxiome (K1)-(K5) gelten auch für \mathbb{C}

Beweis: Siehe Blatt 1 Aufgabe 3.2.

Das neutrale Element der Addition ist $0 = 0 + 0i$

" der Nullpotenz ist $1 = 1 + 0i$

Das inverse Element " zu z ist $-z = (-x_1) + (-y_1)i$

" zu $z \neq 0$ ist $\frac{1}{z} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \right) - i \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$

⚠ \mathbb{C} ist kein Körper aber nicht angeordnet, den wir gesucht werden.
angeordneter Körper gibt. $a^2 > 0 \Rightarrow s$ zu $i^2 = -1$.

Definition 5.2: Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$, dann heißt

- x der Realteil von z (Notation $\operatorname{Re}(z) = x$)
- y der Imaginärteil von z (Notation $\operatorname{Im}(z) = y$)
- $x - yi$ die konjugierte Zahl (Notation $\bar{z} = (x - yi)$)
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z

Satz 5.3: Für $a, b \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (i) \quad \overline{\bar{a}} &= a & \rightarrow a = x + yi \\ (ii) \quad \overline{a+b} &= \bar{a} + \bar{b} & \bar{a} = x - yi \\ (iii) \quad \overline{ab} &= \bar{a} \cdot \bar{b} & \bar{b} = x - (-yi) = x + yi = b \end{aligned}$$

$$(iv) \quad \operatorname{Re}(a) = \frac{1}{2} (a + \bar{a})$$

$$(v) \quad \operatorname{Im}(a)i = \frac{1}{2} (a - \bar{a})$$

$$(vi) \quad a - \bar{a} \iff a \in \mathbb{R}$$

$$(vii) \quad |a| \geq |\operatorname{Re}(a)|, \quad |a| \geq |\operatorname{Im}(a)| \quad \& \quad |a| = |\bar{a}|$$

$$\max\{|\operatorname{Re}(a)|, |\operatorname{Im}(a)|\} \leq |a| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re}(a)|, |\operatorname{Im}(a)|\}$$

Beweis: "Übung" zu (vii)

In besondere schreiben wir die Inversen der Multiplikativität schreiten als: $\bar{z}^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Bemerkung: Die Notation waren auf vorangegangene Gleichungen abgestimmt wollen wir kurz überprüfen ob wir unser Ziel näher kommen:

Proposition 5.4.

Für jedes $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat die Gleichung $z^2 = c$

genau die beiden Lösungen $\{z, -z\}$ mit

$$z = \sqrt{\frac{|c| + \operatorname{Re}(c)}{2}} + i \operatorname{sign}(\operatorname{Im}(c)) \sqrt{\frac{|c| - \operatorname{Re}(c)}{2}}$$

$$(\text{wobei } \text{sign}(y) = \begin{cases} +1 & \text{falls } y > 0 \\ -1 & \text{falls } y < 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases})$$

Beweis: Sei $c = a + ib$ (d.h. $\operatorname{Re}(c) = a$, $\operatorname{Im}(c) = b$ &

$$|c|^2 = a^2 + b^2$$

und $z = x + iy$ Sei eine Lösung von $z^2 = c$.

Wir können annehmen, dass $x \geq 0$. Sonst betrachte $-z$.

$$(x^2 - y^2) + i2xy = a + ib$$

$$\text{d.h. } x^2 - y^2 = a \quad (1)$$

$$2xy = b \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |c|^2 = a^2 + b^2 &= (x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2 = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + 4x^2 y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 = |z|^4 \end{aligned}$$

$$\text{d.h. da } |c|, |z| \geq 0 \Rightarrow |c| = |z|^2.$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{|c|}$$

$$(1) \text{ gibt nun. } x^2 - y^2 = 2x^2 - (x^2 + y^2)$$

$$= 2x^2 - |z|^2$$

$$= 2x^2 - |c|$$

$$\Rightarrow 2x^2 = a + |c| \text{ o.d.w. } x^2 = \frac{a + |c|}{2} \geq 0$$

$$\text{da } x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a + |c|}{2}} \text{ (eindeutig!)}$$

$$(2) \text{ gibt. } y^2 = x^2 - a = \frac{|c| - a}{2} \geq 0.$$

$$\text{d.h. } y \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{|c| - a}{2}} \right\}$$

$$\text{da } \text{sign}(y) = \text{sign}(b) \text{ nach (2)}$$

$$\Rightarrow y = \text{sign}(b) \sqrt{\frac{|c-a|}{2}}$$

□

Korollar: Für jedes $u, v \in \mathbb{C}$ hat die Gleichung

$$z^2 + uz + v = 0$$

genau zwei Lösungen für $v \neq \frac{u^2}{4}$, die Lösung $z = -\frac{u}{2}$ für $v = \frac{u^2}{4}$.

Beweis.

$$z^2 + uz + \frac{u^2}{4} + \left(v - \frac{u^2}{4}\right) = 0$$

nach. Proposition 5.2 $\exists w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = \frac{u^2}{4} - v$

d.h. $0 = \left(z + \frac{u}{2}\right)^2 - w^2 = (z + \frac{u}{2} + w)(z + \frac{u}{2} - w)$

or $z = -\frac{u}{2} \pm w$

□

Da wir Folgen mit Werten in \mathbb{C} betrachten wollen, brauchen wir einen "Abstand". Die wichtigste Eigenschaft, die wir bisher für \mathbb{R} genutzt hatten waren: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Proposition 5.5: $\forall a, b \in \mathbb{C}$

$$(i) |ab| = |a||b|$$

$$(ii) |a+b| \leq |a| + |b|$$

Beweis: (i) $|ab|^2 = (\bar{a}\bar{b}) \cdot (\bar{a}\bar{b}) = a \cdot \bar{a} \cdot b \cdot \bar{b} = |a|^2 |b|^2$

$$(ii) |a+b|^2 = (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = a\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{b} + b\bar{a}$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re}(a\bar{b})}_{\leq |a\bar{b}|} \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$$

$$\leq |a\bar{b}| = |a||b| = |a||b|$$

$$= (|a| + |b|)^2$$

□

Definition 4.34: (Konvergenzbereich und Konvergenzradius):

Die Menge $K = \{x : P(x) \text{ konvergent}\}$ heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

$R = \sup \{ |x| : x \in K \}$ heißt Konvergenzradius.

Lemma 4.30 impliziert, dass $B_R(0) = \{x : |x| < R\} \subseteq K$
 $\exists R, R' \in \mathbb{R}$

Beispiele:

$$(1) E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad K = \mathbb{R} \quad \& \quad R = +\infty$$

$$(2) P_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad \text{da } n! x^n \text{ keine Nullfolge} \quad K = 0 \quad \& \quad R = 0$$

$$(3) P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \Rightarrow \quad K = [-1, 1] \quad \& \quad R = 1$$

$$(4) P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad \Rightarrow \quad K = [-1, 1] \quad \& \quad R = 1$$

$$(5) P_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \quad \Rightarrow \quad K = [-1, 1] \quad \& \quad R = 1.$$

⚠ Die Ränder müssen separat analysiert werden.

Satz 4.35: Seien $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihen, so gilt.

$$(1) \text{ falls } P(x), Q(x) \text{ konvergen: } P(x) + Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$(2) \text{ falls } P(x), Q(x) \text{ absolut konvergent: } P(x) \cdot Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

mit $c_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m$

Insgesamt gelten (1) & (2) $x \in \mathbb{B}_R$ mit $R = \min\{R_1, R_2\}$
 wobei R_1, R_2 die Konvergenzradien von P & Q sind.

Beweis: (1) folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen
 Satz 4.6.

(2) folgt aus dem Cauchy produkt, da

$$\sum_{m=0}^n (a_{n-m} x^{n-m}) (b_m x^m) = c_n \cdot x^n \quad \square$$

Der Konvergenzradius einer Reihe ist damit von großen Unkord.
 Das Wurzelkriterium gibt die Möglichkeit ihn zu bestimmen:

Satz 4.36: (Cauchy-Hadamard)

Sei $P(x) = \sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe so gilt.

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{da}$$

(i) $P(x)$ absolut konvergent für $|x| < R$

(ii) $P(x)$ divergent für $|x| > R$

(iii) keine Aussage für $|x| = R$.

Beweis: $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} |x| = \frac{1}{R} \cdot |x|$

□

4.9. Die Exponentialreihe. I

Satz 4.37: (Die Exponentialreihe)

$$\text{Die Exponentialreihe } \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ (d.h. der Konvergenzradius $R = +\infty$)

Sie hat die Eigenschaft: (AT) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$(WT) \quad \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\exp(x_n) - 1}{x_n} = 1$$

$$(i) \quad \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \quad \exp(k) = \exp(1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

zudem gilt die Abschätzung:

$$|\exp(x) - s_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für } |x| < 1 + \frac{n}{2}$$

$\exp(x)$ ist eine Potenzreihe mit $a_n = \frac{1}{n!}$ Satz 4.83.
Beweis: $a_n = \frac{1}{n!}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \Rightarrow R = +\infty$

$$\text{und. } \exp(x) - s_n(x) = \sum_{l=(n+1)}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{n+l}}{(n+l)!}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{c_{n+k}} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n+2}\right)^k$$

$$\text{with } c_{n+k} = \frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} = \prod_{l=0}^k (n+1+l) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{n+2}}$$

we show by induction on k that $c_{n+k} \geq (n+2)^k$

$$\frac{x}{n+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \leq 1 + \frac{n}{2}$$

$$c_{n,0} = 1 \quad ; \quad (k \rightarrow k+1) \quad c_{n,k+1} = (n+1+k+1) c_{n,k}$$

$$\geq (n+2) c_{n,k} \geq (n+2)^{k+1}$$

(AT) Wir verwenden das Cauchy product für Reihen an auf

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{=a_n}$$

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

Satz 4.21

$$\Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=0}^n}_{\text{Cauchy product}} a_{n-m} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

$$= c_n$$

$$c_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \frac{y^m}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$(w\bar{t}) \left| \frac{\exp(x)-1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = |x| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} \right|$$

$$\leq |x| \frac{1}{|x| - \frac{|x|}{4}} \quad \text{oder} \quad \leq |x| \frac{1}{1-|x|} \quad \forall |x| < 1$$

$$\stackrel{=0}{\rightarrow} \lim_{|x| \rightarrow 0} \left| \frac{\exp(x)-1}{x} - 1 \right| = 0$$

$$(i) \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{und. } 1 = \exp(0) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0 \quad \text{für } x > 0$$

$$\Rightarrow \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{z. B.} \quad \text{(ii) } 1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \exp(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow (ii)$

(iii) folgt per Induktion in $n \in \mathbb{N}_0$

$$(n=0): \exp(0) = 1 = \exp(1)^0 \quad (n \rightarrow n+1): \quad \exp(n+1) = \exp(1) \exp(n)$$

$$= \exp(1) \exp(n)^1 = \exp(1)^{n+1}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$

$$\Rightarrow \exp(-k) = \frac{1}{\exp(|k|)} = \frac{1}{\exp(1)^{|k|}} = \exp(1)^{-k} \quad \square$$

5. \mathbb{C}, \mathbb{R}^n & \mathbb{C}^n

Bemerkung: Wir hatten geschenkt $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 \geq 0$ d.h.

die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung in \mathbb{R} .

Die imaginäre Einheit i (die imaginäre Zahl mit $i^2 = -1$)

hat interessante Konsequenzen.

5.1. Definition von \mathbb{C} .

Definition 5.1 (a) : (1. Definition der komplexen Zahlen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $a+bi \in \mathbb{C}$ und wir definieren

$$\text{die Summe: } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\text{das Produkt: } (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Definition 5.2 :

Seien A, B zwei Mengen. Die Menge

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

heißt das kartesische Produkt / Kreuzprodukt von A, B

d.h. die Menge aller Paare / Tuple (a, b) mit $a \in A, b \in B$.

Definition 5.1 (b) : (2. Definition der komplexen Zahlen)

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen " $+$ " & " \cdot " definiert durch

$$"+" : (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$\cdot " : (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

Bemerkung: Es gilt $\mathbb{R} \cong \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$

d.h. (in der Sprache der abstrakten Algebren), dass \mathbb{R} isomorph zu $\mathbb{R} := \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ ist. :

Summe & Produkt sind "gleich":

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (ab,0)$$

Deshalb schreiben wir a anstelle von $(a,0)$, insbesondere da

$$a \cdot (c,d) = (a,0) \cdot (c,d) = (ac, ad)$$

Bemerkung: (1) da $(0,a) \cdot (0,b) = (-ab,0)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

und damit sind $(0,1)$ & $(0,-1)$ Wurzeln von -1

(2) wir setzen $i = (0,1)$ und schreiben.

$$\Rightarrow (a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$$

$$= a + bi$$

damit sind die beiden Definitionen äquivalent.

Satz 5.1 Die Körperaxiome (K1)-(K5) gelten auch für \mathbb{C}

Beweis: Siehe Blatt 1 Aufgabe 3.2.

Das neutrale Element der Addition ist $0 = 0 + 0i$

" der Nullpotenzen ist $1 = 1 + 0i$

Das inverse Element " zu z ist $-z = (-x_1) + (-y_1)i$

" zu $z \neq 0$ ist $\frac{1}{z} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \right) - i \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$



\mathbb{C} ist kein Körper aber nicht angeordnet, den wir gesucht werden.
angeordneter Körper gibt. $x^2 > 0 \Rightarrow$ S zu $i^2 = -1$.

Definition 5.2: Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$, dann heißt

- x der Realteil von z (Notation $\operatorname{Re}(z) = x$)
- y der Imaginärteil von z (Notation $\operatorname{Im}(z) = y$)
- $x - yi$ die konjugierte Zahl (Notation $\bar{z} = (x - yi)$)
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z

Satz 5.3: Für $a, b \in \mathbb{C}$

- $\overline{\bar{a}} = a$
- $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$
- $\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}$
- $\operatorname{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$
- $\operatorname{Im}(a)_i = \frac{1}{2} \cdot (a - \bar{a})$
- $a - \bar{a} \iff a \in \mathbb{R}$
- $a \bar{a} = |a|^2 = \operatorname{Re}(a)^2 + |\operatorname{Im}(a)|^2 \geq 0 \quad \& \quad |a|^2 = 0 \iff a = 0$
- $|a| \geq |\operatorname{Re}(a)|, \quad |a| \geq |\operatorname{Im}(a)| \quad \& \quad |a| = |\bar{a}|$
 $\max\{|\operatorname{Re}(a)|, |\operatorname{Im}(a)|\} \leq |a| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re}(a)|, |\operatorname{Im}(a)|\}$

Beweis: "Übung" zu (vi)

In besondere schreiben wir die Inversen der Multiplikativität schreiten als: $\bar{z}^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Bemerkung: Die Notationen waren auf vorangegangene Gleichungen abgestimmt.
wir müssen überprüfen ob wir unser Ziel näher kommen:

Proposition 5.4.

Für jedes $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat die Gleichung $z^2 = c$

genau die beiden Lösungen $\{z, -z\}$ mit

$$z = \sqrt{\frac{|c| + \operatorname{Re}(c)}{2}} + i \operatorname{sign}(\operatorname{Im}(c)) \sqrt{\frac{|c| - \operatorname{Re}(c)}{2}}$$

$$(\text{wobei } \text{sign}(y) = \begin{cases} +1 & \text{falls } y > 0 \\ -1 & \text{falls } y < 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases})$$

Beweis: Sei $c = a + ib$ (d.h. $\operatorname{Re}(c) = a$, $\operatorname{Im}(c) = b$ & $|c|^2 = a^2 + b^2$)

und $z = x + iy$ Sei eine Lösung von $z^2 = c$.

Wir können annehmen, dass $x \geq 0$. Sonst betrachte $-z$.

$$(x^2 - y^2) + i2xy = a + ib$$

$$\text{d.h. } x^2 - y^2 = a \quad (1)$$

$$2xy = b \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |c|^2 = a^2 + b^2 &= (x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2 = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + 4x^2 y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 = |z|^4 \end{aligned}$$

$$\text{d.h. da } |c|, |z| \geq 0 \Rightarrow |c| = |z|^2.$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{|c|}$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ gibt nun. } x^2 - y^2 &= 2x^2 - (x^2 + y^2) \\ &= 2x^2 - |z|^2 \\ &= 2x^2 - |c| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x^2 = a + |c| \text{ o.w. } x^2 = \frac{a + |c|}{2} \geq 0$$

$$\text{da } x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a + |c|}{2}} \text{ (eindeutig!)}$$

$$(2) \text{ gibt. } y^2 = x^2 - a = \frac{|c| - a}{2} \geq 0.$$

$$\text{d.h. } y \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{|c| - a}{2}} \right\}$$

$$\text{da } \text{sign}(y) = \text{sign}(b) \text{ nach (2)}$$

$$\Rightarrow y = \text{sign}(b) \sqrt{\frac{|c-a|}{2}}$$

□

Korollar: Für jedes $u, v \in \mathbb{C}$ hat die Gleichung

$$z^2 + uz + v = 0$$

genau zwei Lösungen für $v \neq \frac{u^2}{4}$, die Lösung $z = -\frac{u}{2}$ für $v = \frac{u^2}{4}$.

Beweis.

$$z^2 + uz + \frac{u^2}{4} + \left(v - \frac{u^2}{4}\right) = 0$$

nach. Proposition 5.2 $\exists w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = \frac{u^2}{4} - v$

d.h. $0 = \left(z + \frac{u}{2}\right)^2 - w^2 = (z + \frac{u}{2} + w)(z + \frac{u}{2} - w)$

or $z = -\frac{u}{2} \pm w$

□

Da wir Folgen mit Werten in \mathbb{C} betrachten wollen, brauchen wir einen "Abstand". Die wichtigste Eigenschaft, die wir bisher für \mathbb{R} genutzt hatten waren: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Proposition 5.5: $\forall a, b \in \mathbb{C}$

$$(i) |ab| = |a||b|$$

$$(ii) |a+b| \leq |a| + |b|$$

Beweis: (i) $|ab|^2 = (\bar{a}\bar{b}) \cdot (\bar{a}\bar{b}) = a \cdot \bar{a} \cdot b \cdot \bar{b} = |a|^2 |b|^2$

$$(ii) |a+b|^2 = (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = a\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{b} + b\bar{a}$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re}(a\bar{b})}_{\leq |a\bar{b}|} \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$$

$$\leq |a\bar{b}| = |a||b| = |a||b|$$

$$= (|a| + |b|)^2$$

□

Bisher wir uns mit der aufgesprochenen Konvergenz beschäftigt

definieren wir \mathbb{R}^n & \mathbb{C}^n

5.2 Definieren von \mathbb{R}^n & \mathbb{C}^n

Definition 5.2* (n -faches kartesisches Produkt)

Seien $\{A_i\}_{i=1}^n$ eine Familie von Mengen so definieren wir

ihre kartesische Produkt rekursiv:

$$\bigotimes_{i=1}^n A_i = \left(\bigotimes_{i=1}^{n-1} A_i \right) \otimes A_n \quad \text{wobei } \bigotimes_{i=1}^1 A_i = A_1$$

d.h. $\bigotimes_{i=1}^n A_i = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in A_i\}$
n-tuple

In besondere definieren wir

$$\mathbb{R}^n = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^n = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}$$

mit der Betragsfunktion (Abstand zu 0)

$$|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} \quad \text{für } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

\mathbb{R}^n nennt man den n -dimensionalen Euklidischen Raum.

Bemerkung 5.6: \mathbb{R}^n ist ein reeller Vektorraum

d.h. für $x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Setzen wir } \alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$$

\mathbb{C}^n ein komplexer Vektorraum mit

$$\alpha z + \beta w = (\alpha z_1 + \beta w_1, \dots, \alpha z_n + \beta w_n)$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ & $z, w \in \mathbb{C}^n$

Lemma 5.7 Die Betragsfunktion auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n

Sei $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C}$ bzw. $v, w \in \mathbb{R}^n$ & $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{|v_{11}|^2 + |v_{21}|^2 + \dots + |v_{n1}|^2}$$

(i)

$$\max_{i=1, \dots, n} |v_i| \leq |v| \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$$

mit Beträgen von $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ kann genauso gezeigt werden, wie mit Beträgen von \mathbb{R}

(ii) $|v| \geq 0 \quad \& \quad |v|=0 \Leftrightarrow v=0$

(iii) $|\alpha v| = |\alpha| |v| \quad (\text{positiv 1-homogen})$

(iv) $|v+w| \leq |v| + |w| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$

Beweis:

(i) $\max_i |v_i|^2 \leq |v|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq n \max_i |v_i|^2$

(ii) folgt aus (i) da $1 \cdot 1 \geq 0$ auf \mathbb{C} bzw. \mathbb{R} .

und falls $|v|=0 \Rightarrow \max_i |v_i|=0 \Rightarrow v_i=0 \forall i$
 $\Rightarrow v=0$

(iii) $|\alpha v|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha v_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha|^2 |v_i|^2 = |\alpha|^2 |v|^2$

auf \mathbb{C} bzw \mathbb{R} scha
bekannter

(iv) $|v+w|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i + w_i|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 + 2\operatorname{Re}(v_i \bar{w}_i) + |w_i|^2$
 $\leq \sum_{i=1}^n |v_i|^2 + 2|v_i||w_i| + |w_i|^2$
 $\leq |v|^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + |w|^2$
 Blatt 1
 $= |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2$ □

Satz 5.8 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ und $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ sind vollständig.

d.h. falls $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ ist eine Cauchyfolge

so ist $(a_n)_n$ konvergent: $\exists a \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$$

Satz 5.9 Der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt in \mathbb{R}^n & \mathbb{C}^n .

0. Schritt: Reduktion von \mathbb{C}^n auf \mathbb{R}^n

Beweis: Wir zeichen beide Sätze zusammen für \mathbb{R}^n . denn $I: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

gegeben durch $I(z_1, \dots, z_n) = (\operatorname{Re}z_1, \operatorname{Im}z_1, \operatorname{Re}z_2, \operatorname{Im}z_2, \dots, \operatorname{Re}z_n, \operatorname{Im}z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\text{erfüllt } I(z) - I(w) = I(z-w) \quad \& \quad |I(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

1. Schritt: Satz 5.8 folgt aus Satz 5.9

Es gelte Satz 5.8. Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ Cauchy $\Rightarrow (a_n)_n$ beschränkt $\Rightarrow \exists (a_{n_k})_k$ eine Teilfolge und $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\text{mit } \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k} - a| = 0 \quad \text{und } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \underline{\text{wegen Cauchy}}$$

$$\Rightarrow |a_m - a| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a|$$

$$\Rightarrow |a_m - a| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_m - a_{n_k}| + \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k} - a| \leq \varepsilon$$

2. Schritt: Beweis von S.8

Sei $(a(u))_u$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R}^n . d.h. $\exists A > 0: |a(u)| \leq A \quad \forall u \in \mathbb{N}$.

Wir haben $a(u) = (a_1(u), a_2(u), \dots, a_n(u))$ mit $a_j(u) \in \mathbb{R} \quad j=1, \dots, n$

und $|a_j(u)| \leq |a(u)| \leq A \quad (\text{u. } \rightarrow \text{Nur S.7.})$

d.h. $(a_j(u))_u$ sind beschränkte Folgen in \mathbb{R} .

wir finden nun Teilstufen. $(m_j(k))_{k \in \mathbb{N}} \subset (m_j(k))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$

$$\text{so dass } \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_\ell(m_j(k)) = \alpha_\ell \quad \forall j \leq \ell$$

dies heißt nach endlich vielen Schritten erreichen wir $j = n$.

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass

$$|\alpha_\ell(m_n(k)) - \alpha_\ell| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \forall k > N_\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \text{sei } N_\varepsilon = \max \{ N_\ell : \ell = 1, \dots, n \}$$

$$|\alpha(m_n(k)) - \alpha| < \sqrt{n} \max \{ |\alpha_\ell(k) - \alpha_\ell| : \ell = 1, \dots, n \} \\ < \varepsilon \quad \forall k > N_\varepsilon$$

wir wählen $m_0(k) = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

sei nun $(m_j(k))_k$ gewählt $\Rightarrow (a_{j+1}(m_j(k)))_k$ ist eine beschränkte Folge in \mathbb{R}

Satz von $\Rightarrow \exists (l_k)_k \subseteq \mathbb{N} \times a_{j+1} \in \mathbb{R}$ mit

Bolzano-Wierstraß

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{j+1}(m_j(l_k)) = a_{j+1}.$$

Wir setzen $m_{j+1}(k) = m_j(l_k)$.

□

j

Konsequenz: (I) Wir können Folgen $(a_n)_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}^n$ bzw. $a_n \in \mathbb{C}^n$ anschauen.

Alle Resultate bisher gelten die nicht die Potenzreihen der reellen Zahlen beziehen.

(II) Wir können Reihen $\sum_n a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}^n$ (bzw. \mathbb{R}^n) anschauen:

Reziproken / Wurzel- / Quotientenkriterium.

Wichtig: Es gilt weiterhin dass Quotienten kriterium-

Wurzelkriterium (nicht Leibniz)

(III) Wir können Potenzreihenreihen

$\sum_n a_n z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ oder $z \in \mathbb{R}$

und $a_n \in \mathbb{C}^n$ oder $z \in \mathbb{R}^n$

anschauen und die Sätze über Konvergenzradien ... gelten.

Wir haben nur das Reziprokenkriterium benötigt.

6. Funktionen

Definition 6.1: Seien A & B zwei Mengen.

Eine Funktion (oder Abbildung) $f: A \rightarrow B$ ist eine Vorschrift,

die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.
reellwertig komplex wertig

Bsp.: (1) $A \subseteq \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}), $B = \mathbb{R}$ (oder c) vektoriell

$$(2) f(x) = \begin{pmatrix} ax \\ bx^2 \\ cx^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$f: x \mapsto x^2$$

Definition 6.2: • A heißt Definitionsbereich von f .

• $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ heißt Wertebereich von f

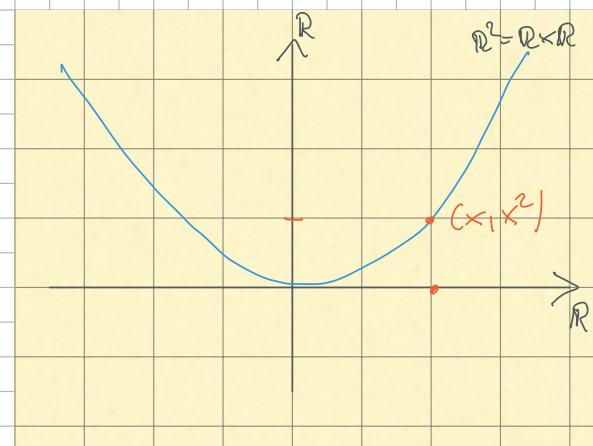
• falls $C \subseteq A$ so heißt $f(C) = \{f(x) : x \in C\} \subseteq f(A)$
 das Bild von C unter f .

im Falle (1) mit $A = \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{x : x \geq 0\}$

Definition 6.3: Sei $f: A \rightarrow B$ eine Funktion so heißt

die Tray $G(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$

der Graph von f



6.1. Algebraische Operationen:

Seien $f, g: A \rightarrow C$, dann definieren wir

(i) $f+g: A \rightarrow C$ die Funktion wie gegeben durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

(ii) $f \cdot g: A \rightarrow C$ "

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{Wertbereich:}$$



(iii) falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$ (d.h. $0 \notin g(A)$)

$$\left(\frac{f}{g}\right): A \rightarrow C \quad \text{mit} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iv) genauso $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f), \overline{f}, |f|$

Definition 6.1.1 (Komposition)

Seien $f: A \rightarrow B$ & $g: B \rightarrow C$, ihre Komposition / Verkettung

$(g \circ f): A \rightarrow C$ ist definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkung: Jede algebraische Operation kann als Verkettung realisiert werden:

z.B. $f+g$

Sei $F: A \rightarrow \mathbb{C}^2 : F(a) = (f(a), g(a))$

und $p: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad p(a, b) = a + b$

$$\Rightarrow f+g = p \circ F: A \rightarrow \mathbb{C}$$

Definition 6.1.2 $f: A \rightarrow B$

(i) heißt surjektiv falls $f(A) = B$

d.h. $\forall b \in B \exists a \in A$ mit $f(a) = b$

(ii) injektiv falls $f(x) \neq f(y) \quad \forall x \neq y \in A$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

(iii) bijektiv falls f injektiv & surjektiv.

Bemerkung: Bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion

nach (i)&(ii) $\forall b \exists! a \in A$ mit $f(a)=b$

d.h. wir können eine Abbildung $g: B \rightarrow A$ definieren.

mit $g(b)=a$ für $a \in A$ mit $f(a)=b$.

(Überprüfung, dass g die Definition G.1 erfüllt.)

Definition G.1.3.: Die Funktion $g: B \rightarrow A$ heißt Umkehrfunktion von f

falls $(g \circ f)(a) = a \quad \forall a \in A \quad \& \quad (f \circ g)(b) = b \quad \forall b \in B$.

(Übung: zeige dass g eindeutig)

$$g(b) = g \circ (f \circ k)^{(b)} = (g \circ f)(k^{(b)}) = k(b)$$

Definition G.1.4.: (neutrales Element der Komposition.)

Die "einfache" Abbildung $id: A \rightarrow A$ $id(a)=a$ heißt die Identitätsabbildung.

(Sie ist das neutrale Element der Komposition.)

Beispiele: (a) Wurzelfunktion:

Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$ mein

$a \mapsto \sqrt[m]{a}$ ist die Funktion. (mit inverser Funktion $g(x)=x^m$)

(b) Polynome: seien $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$$

für $x \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) heißt Polynom

(werden in der LA noch näher behandelt.)

(c) Potenzreihen auf ihrer Konvergenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit } (a_k)_k \text{ reell oder komplexwertig}$$

Konsequenz: (I) Wir können Folgen $(a_n)_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}^n$ bzw. $a_n \in \mathbb{C}^n$ anschauen.

Alle Resultate bisher gelten die nicht die Potenzreihen der reellen Zahlen beziehen.

(II) Wir können Reihen $\sum_n a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}^n$ (bzw. \mathbb{R}^n) anschauen:

Reziproken / Wurzel- / Quotientenkriterium.

Wichtig: Es gilt weiterhin dass Quotienten kriterium-

Wurzelkriterium (nicht Leibniz)

(III) Wir können Potenzreihenreihen

$\sum_n a_n z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ oder $z \in \mathbb{R}$

und $a_n \in \mathbb{C}^n$ oder $z \in \mathbb{R}^n$

anschauen und die Sätze über Konvergenzradien ... gelten.

Wir haben nur das Reziprokenkriterium benötigt.

6. Funktionen

Definition 6.1: Seien A & B zwei Mengen.

Eine Funktion (oder Abbildung) $f: A \rightarrow B$ ist eine Vorschrift,

die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.
 reellwertig complexwertig

Bsp.: (1) $A \subseteq \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}), $B = \mathbb{R}$ (oder c) vektoriell

$$(2) f(x) = \begin{pmatrix} ax \\ bx^2 \\ cx^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$f: x \mapsto x^2$$

Definition 6.2: • A heißt Definitionsbereich von f .

• $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ heißt Wertebereich von f

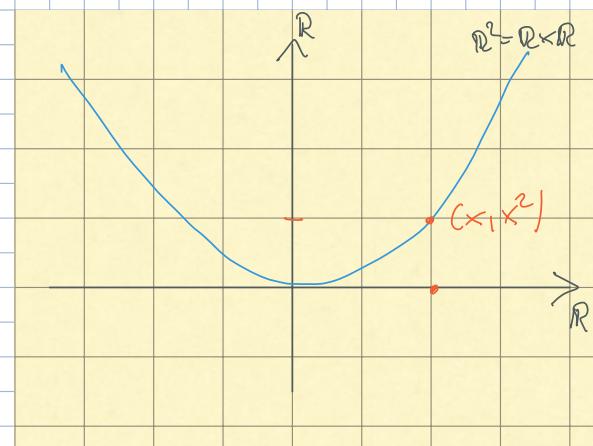
• falls $C \subseteq A$ so heißt $f(C) = \{f(x) : x \in C\} \subseteq f(A)$
 das Bild von C unter f .

im Falle (1) mit $A = \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{x : x \geq 0\}$

Definition 6.3: Sei $f: A \rightarrow B$ eine Funktion so heißt

die Menge $G(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$

der Graph von f



6.1. Algebraische Operationen:

Seien $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$, dann definieren wir

(i) $f+g: A \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion wie gegeben durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

(ii) $f \cdot g: A \rightarrow \mathbb{C}$ "

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{Wertbereich: } \downarrow$$

(iii) falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$ (d.h. $0 \notin g(A)$)

$$\left(\frac{f}{g}\right): A \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iv) genauso $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f), \overline{f}, |f|$

Definition 6.1.1 (Komposition)

Seien $f: A \rightarrow B$ & $g: B \rightarrow C$, ihre Komposition / Verkettung

$(g \circ f): A \rightarrow C$ ist definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkung: Jede algebraische Operation kann als Verkettung realisiert werden:

z.B. $f+g$

Sei $F: A \rightarrow \mathbb{C}^2$: $F(a) = (f(a), g(a))$

und $p: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad p(a, b) = a + b$

$$\Rightarrow f+g = p \circ F$$

Definition 6.1.2 $f: A \rightarrow B$

(i) heißt surjektiv falls $f(A) = B$

d.h. $\forall b \in B \exists a \in A$ mit $f(a) = b$

(ii) injektiv falls $f(x) \neq f(y) \quad \forall x \neq y \in A$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

(iii) bijektiv falls f injektiv & surjektiv.

Bemerkung: Bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion

nach (i)&(ii) $\forall b \exists! a \in A$ mit $f(a)=b$

d.h. wir können eine Abbildung $g: B \rightarrow A$ definieren.

mit $g(b)=a$ für $a \in A$ mit $f(a)=b$.

(Überprüfung, dass g die Definition G.1 erfüllt.)

Definition G.1.3.: Die Funktion $g: B \rightarrow A$ heißt Umkehrfunktion von f

falls $(g \circ f)(a) = a \quad \forall a \in A \quad \& \quad (f \circ g)(b) = b \quad \forall b \in B$.

(Übung: zeige dass g eindeutig)

$$g(b) = g \circ (f \circ k)^{(b)} = (g \circ f)(k^{(b)}) = k(b)$$

Definition G.1.4.: (neutrales Element der Komposition.)

Die "einfache" Abbildung $id: A \rightarrow A$ $id(a)=a$ heißt die Identitätsabbildung

(Sie ist das neutrale Element der Komposition.)

Beispiele:

- (a) Wurzelfunktion:

Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$ mein

$a \mapsto \sqrt[m]{a}$ ist die Funktion. (mit inverser Funktion $g(x)=x^m$)

(b) Polynome: seien $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$$

für $x \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) heißt Polynom

(werden in der LA noch näher behandelt.)

(c) Potenzreihen auf ihrer Konvergenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit } (a_k)_k \text{ reell oder komplexwertig}$$

$x \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

\mathbb{C}^* $x \mapsto \exp(x)$

7. Stetige Funktionen und Grenzwerte
In diesem Kapitel ist D eine Teilmenge von \mathbb{R}^n (oder \mathbb{C}^n)

Definition 7.1: Definitionsbereich

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (oder \mathbb{C}^n) und $x_0 \in D$. Dann heißt f stetig in x_0 .

falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig in D falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Bemerkung: x_0 ist eine Unstetigkeitsstelle von f falls

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in D : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Beispiele:

(1) $f = a$ die konstante Funktion, da $|f(x) - f(y)| = 0 \quad \forall x, y$

(2) $f(x) = x$ die Identitätsfunktion, da $|f(x) - f(y)| = |x - y|$

(3) die Abstandsfunction: $f(x) = |x - p|$ für $p \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = ||x - p| - |y - p|| \leq |x - y|$$

Definition 7.2: $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) heißt Lipschitz stetig (kurz Lipschitz)

$D \subset \mathbb{R}^n$
 $D \subset \mathbb{C}^n$

falls $\exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D$

Jede Lipschitz stetige Funktion ist stetig (wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$)

$$L|x - y| <$$

$$|x - y| < \delta \quad \underline{x, y \in D}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} \leq \varepsilon$$

⇒ Implikation der Stetigkeit aus der Lipschitz stetigkeit

Satz 7.3: (Folgenkriterium für die Stetigkeit)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}) und $x_0 \in D$. Dann ist äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

(ii) $\forall (x_n)_n \subset D : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow f$ ist stetig in x_0 , falls $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Beweis: (i) \Rightarrow (ii) Sei $(x_n)_n \subset D$ gegeben und $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

$\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f$ stetig

$\exists N \in \mathbb{N} : |x_N - x_0| < \delta \wedge n > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

(ii) \Rightarrow (i) (durch Widerspruch.) $\Rightarrow \neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$

Annahme f ist nicht stetig in x_0 für $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: Es gibt Folge, die zum Def. von f konvergiert, aber nicht im Wertebereich

$\exists \varepsilon > 0 : \exists x_n \in D : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ aber } |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$
 $\forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \delta \text{ aber } |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$
 damit haben wir $(x_n)_n \subset D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ aber } |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$
 $\Rightarrow x_n \text{ konv. gegen } x_0 \text{ aber } f(x_n) \text{ konv. nicht gegen } f(x_0)$
 $\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, also ist ein Widerspruch zu (ii). \square

7.1 Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 7.1.1: Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) stetig in x_0 , so gilt:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) $\wedge g: D \rightarrow \mathbb{R}$

(i) $f + g$ stetig in x_0

(ii) $f \cdot g$ "

(iii) $\frac{f}{g}: D \setminus \{g \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) stetig in x_0 , falls $g(x_0) \neq 0$
 $\frac{1}{f} \cdot g$ " falls $f(x_0) \neq 0$ (und $f \neq 0$)

Beweis: Idee: Nutze das Folgenkriterium um es auf den Satz

für Folgen zurückzuführen Satz 4.6.

Sei $(x_n)_n \subset D$ eine beliebige Folge mit $\lim_n x_n = x_0$

so folgt aus Satz 8.3 $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$, $\lim_n g(x_n) = g(x_0)$

Nun folgt aus Satz 4.6:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + g(x_n) = f(x_0) + g(x_0)$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f + g(x_n) \rightarrow f + g(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot g(x_n) = f(x_0)g(x_0)$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad [\text{da } g(x_0) \neq 0] \quad \square$$

Konsequenzen:

1) $f(x) = x^m$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ [$(ii) + \text{Bsp. (1)}$]

2) Polynome sind stetig d.h.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d$$

Bemerkung: Da $f(x) = x$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig

\Rightarrow der Raum aller Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^n bildet
Vektorraum

Satz 7.1.2 Sei $f: A \rightarrow B$ | $g: B \rightarrow C$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^n)$, $B \subseteq \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^m)$

und f stetig in $x_0 \in A$, g stetig in $f(x_0)$. dann ist $g \circ f$ stetig in x_0 , $C \subseteq \mathbb{R}^l(\mathbb{C}^k)$

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

Beweis: (Wir wenden das Folgenkriterium an)

$$\text{Sei } (x_n)_n \subseteq A \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ z.z. } \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x_0)$$

$$\text{d.h. } f \text{ stetig in } x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Sei nun $(y_n = f(x_n))_n \subseteq A$. d.h. y_n ist eine Folge in A

$$\text{mit ein } y_n = y_0 \text{ mit } y_0 = f(x_0)$$

$$\text{Da } g \text{ stetig in } \underset{f(x_0)}{y_0} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0) = g(f(x_0)) \quad \square$$

Satz 7.1.3: Sei $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijektiv und stetig

$$\Rightarrow f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b] \text{ stetig.}$$

Beweis: Annahme f^{-1} sei nicht stetig in $c \leq y_0 \leq d$

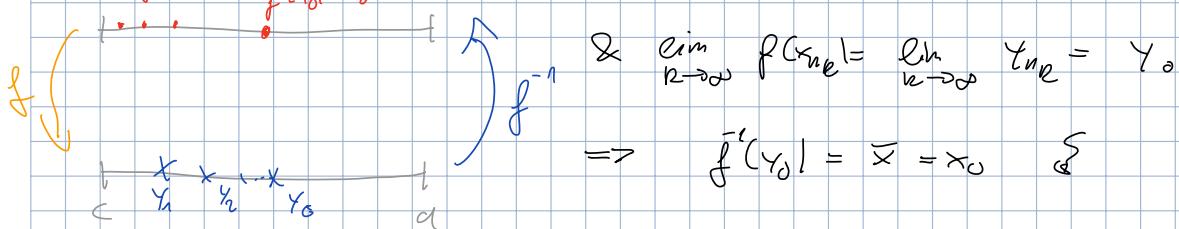
$\exists (y_n)_n \subseteq [c, d]$ & $\varepsilon > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ aber $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| > \varepsilon \forall n$.

Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$. Da $a \leq x_n \leq b \quad \forall n$ ist $(x_n)_n$ eine beschränkte

Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_{n_k})_k$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x}$

da $|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon \quad \forall k \Rightarrow |\bar{x} - x_0| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon$

$$\text{aber } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$



$$\text{und } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y_0) = \bar{x} = x_0 \quad \square$$

□

Bemerkung: Satz 7.8.1.3 gilt im allgemeinen nicht, wenn f nicht

stetig auf ganz $[a, b]$ ist. (Beispiel.)

Konsequenz: (a) die Funktion $x \mapsto x^{\frac{1}{m}}$ ist stetig auf $[0, \infty]$ für $m \in \mathbb{N}$ als Umkehrfunktion von $x \mapsto x^m$

(b) die Funktion $x \mapsto x^q$ ist stetig auf $[0, \infty]$

für $q = \frac{k}{e} \in \mathbb{Q}, q \geq 0$ als Komposition von
 $f(y) = y^k$ & $g(z) = z^{\frac{1}{e}}$

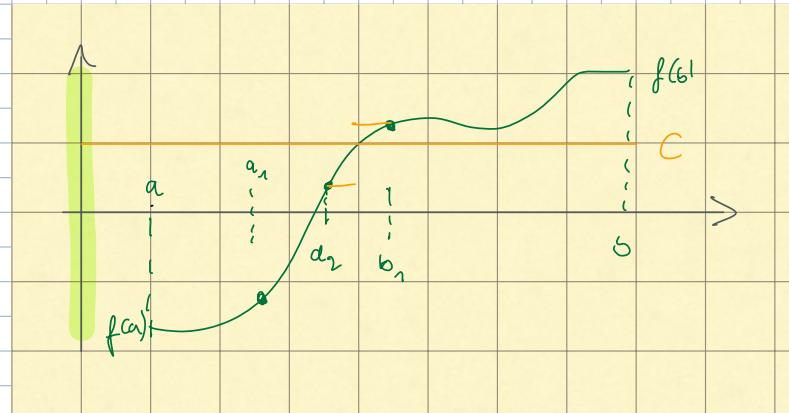
(c) die Funktion $x \mapsto x^q$ ist stetig auf $[0, \infty]$

für $q \in \mathbb{Q}, q < 0$ da $x^q = \frac{1}{x^{-q}}$

7.2 Sätze über stetige Funktionen

Satz 7.2.1 (Zwischenwertsatz)

Eine stetige Abbildung $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Beweis: Idee: Intervallschachtelung (Vollständigkeitsaxiom), so dass

$$f(a_k) \leq c \leq f(b_k) \quad \& \quad (b_k - a_k) = 2^{-k} (b - a)$$

$$a_k \leq b_k$$

Wir können annehmen, dass $f(a) < f(b)$ sonst betrachte $-f$

(der Fall $f(a) = f(b) = c$ ist trivial).

Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $\left(I_k = [a_k, b_k] \right)_k$ mit

$$(i) \quad f(a_k) \leq c \leq f(b_k)$$

$$(ii) \quad (b_k - a_k) \leq 2^{-k} (b - a)$$

$$(k=0) \quad I_0 = [a, b] \quad \left\{ \begin{array}{l} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \\ [a_k, b_k] \end{array} \right. \text{ falls } f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geq c$$

$$(k \rightarrow k+1): \quad I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = \left\{ \begin{array}{l} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k] \end{array} \right. \text{ sonst.}$$

$$\Rightarrow |I_{k+1}| = \frac{1}{2} (b_k - a_k) = 2^{-(k+1)} (b - a)$$

$$\Rightarrow \exists! x_0 \in I_k \text{ u.h. } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k .$$

$$\text{Da } f \text{ stetig folgt } c \geq \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(x_0) , \quad c \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0) = c$$

□

6. Funktionen

Definition 6.1: Seien A & B zwei Mengen.

Eine Funktion (oder Abbildung) $f: A \rightarrow B$ ist eine Vorschrift,

die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.
 reellwertig complexwertig

Bsp.: (1) $A \subseteq \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}), $B = \mathbb{R}$ (oder c) vektoriell

$$(2) f(x) = \begin{pmatrix} ax \\ bx^2 \\ cx^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$f: x \mapsto x^2$$

Definition 6.2: • A heißt Definitionsbereich von f .

• $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ heißt Wertebereich von f

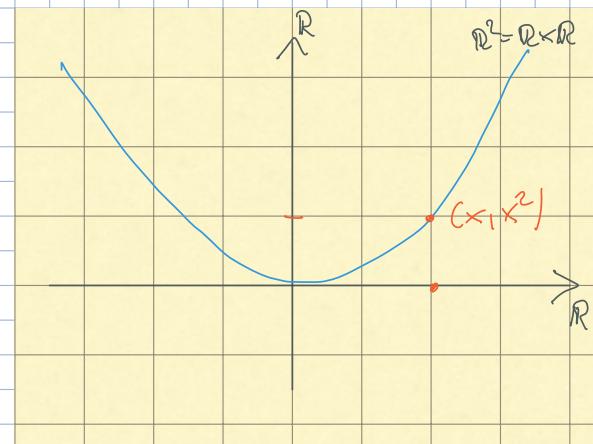
• falls $C \subseteq A$ so heißt $f(C) = \{f(x) : x \in C\} \subseteq f(A)$
 das Bild von C unter f .

im Falle (1) mit $A = \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{x : x \geq 0\}$

Definition 6.3: Sei $f: A \rightarrow B$ eine Funktion so heißt

die Menge $G(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$

der Graph von f



6.1. Algebraische Operationen:

Seien $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$, dann definieren wir

(i) $f+g: A \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion wie gegeben durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

(ii) $f \cdot g: A \rightarrow \mathbb{C}$ "

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{Wertbereich: } \downarrow$$

(iii) falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$ (d.h. $0 \notin g(A)$)

$$\left(\frac{f}{g}\right): A \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(iv) genauso $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f), \overline{f}, |f|$

Definition 6.1.1 (Komposition)

Seien $f: A \rightarrow B$ & $g: B \rightarrow C$, ihre Komposition / Verkettung

$(g \circ f): A \rightarrow C$ ist definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkung: Jede algebraische Operation kann als Verkettung realisiert werden:

z.B. $f+g$

Sei $F: A \rightarrow \mathbb{C}^2$: $F(a) = (f(a), g(a))$

und $p: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad p(a, b) = a + b$

$$\Rightarrow f+g = p \circ F$$

Definition 6.1.2 $f: A \rightarrow B$

(i) heißt surjektiv falls $f(A) = B$

d.h. $\forall b \in B \exists a \in A$ mit $f(a) = b$

(ii) injektiv falls $f(x) \neq f(y) \quad \forall x \neq y \in A$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

(iii) bijektiv falls f injektiv & surjektiv.

Bemerkung: Bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion

nach (i)&(ii) $\forall b \exists! a \in A$ mit $f(a)=b$

d.h. wir können eine Abbildung $g: B \rightarrow A$ definieren.

mit $g(b)=a$ für $a \in A$ mit $f(a)=b$.

(Überprüfung, dass g die Definition G.1 erfüllt.)

Definition G.1.3.: Die Funktion $g: B \rightarrow A$ heißt Umkehrfunktion von f

falls $(g \circ f)(a) = a \quad \forall a \in A \quad \& \quad (f \circ g)(b) = b \quad \forall b \in B$.

(Übung: zeige dass g eindeutig)

$$g(b) = g \circ (f \circ k)^{(b)} = (g \circ f)(k^{(b)}) = k(b)$$

Definition G.1.4.: (neutrales Element der Komposition.)

Die "einfache" Abbildung $id: A \rightarrow A$ $id(a)=a$ heißt die Identitätsabbildung.

(Sie ist das neutrale Element der Komposition.)

Beispiele: (a) Wurzelfunktion:

Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$ mein

$a \mapsto \sqrt[m]{a}$ ist die Funktion. (mit inverser Funktion $g(x)=x^m$)

(b) Polynome: seien $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$$

für $x \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) heißt Polynom

(werden in der LA noch näher behandelt.)

(c) Potenzreihen auf ihrer Konvergenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit } (a_k)_k \text{ reell oder komplexwertig}$$

$x \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

\mathbb{C}^* $x \mapsto \exp(x)$

7. Stetige Funktionen und Grenzwerte
In diesem Kapitel ist D eine Teilmenge von \mathbb{R}^n (oder \mathbb{C}^n)

Definition 7.1:

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (oder \mathbb{C}^n) und $x_0 \in D$. Dann heißt f stetig in x_0

falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig in D falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Bemerkung: x_0 ist eine Unstetigkeitsstelle von f falls

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in D : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Beispiele:

(1) $f = a$ die konstante Funktion, da $|f(x) - f(y)| = 0 \quad \forall x, y$

(2) $f(x) = x$ die Identitätsfunktion, da $|f(x) - f(y)| = |x - y|$

(3) die Abstandsfunction: $f(x) = |x - p|$ für $p \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = ||x - p| - |y - p|| \leq |x - y|$$

Definition 7.2: $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) heißt Lipschitz stetig (kurz Lipschitz)

falls $\exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D$

Jede Lipschitz stetige Funktion ist stetig (wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$)

Satz 7.3: (Folgenkriterium für die Stetigkeit)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}) und $x_0 \in D$. Dann ist äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0

(ii) $\forall (x_n)_n \subset D : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

Beweis: (i) \Rightarrow (ii) Sei $(x_n)_n \subset D$ gegeben und $\varepsilon > 0$.

$\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \delta \quad \forall n > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

(ii) \Rightarrow (i) (durch Widerspruch.)

Annahme f ist nicht stetig in x_0 für $n \in \mathbb{N}$

$\exists x_n \in D : |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

dann haben wir $(x_n)_n \subset D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \forall n$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, also ist ein Widerspruch zu (ii). \square

7.1 Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 7.1.1: Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) stetig in x_0 , so gilt:

(i) $f + g$ stetig in x_0

(ii) $f \cdot g$ "

(iii) $\frac{f}{g} : D \setminus \{g \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. \mathbb{C}) stetig in x_0 . falls $g(x_0) \neq 0$

Beweis: Idee: Nutze das Folgenkriterium um es auf den Satz

für Folgen zurückzuführen Satz 4.6.

Sei $(x_n)_n \subset D$ eine beliebige Folge mit $\lim_n x_n = x_0$

so folgt aus Satz 8.3 $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$, $\lim_n g(x_n) = g(x_0)$

Nun folgt aus Satz 4.6:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + g(x_n) = f(x_0) + g(x_0)$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot g(x_n) = f(x_0)g(x_0)$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad [\text{da } g(x_0) \neq 0] \quad \square$$

Konsequenzen:

1) $f(x) = x^m$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ [(ii) + Bsp (1)]

2) Polynome sind stetig d.h.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d$$

Satz 7.1.2 Sei $f: A \rightarrow B$ | $g: B \rightarrow C$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^m(C^n)$, $B \subseteq \mathbb{R}^n(C^m)$ und f stetig in x_0 , g stetig in $f(x_0)$. dann ist $g \circ f$ stetig in x_0 , $C \subseteq \mathbb{R}^m(C^n)$

Beweis: (Wir wenden das Folgenkriterium an)

$$\text{Sei } (x_n)_n \subseteq D \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ z.z. } \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x_0)$$

$$\text{da } f \text{ stetig in } x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Sei nun $(y_n = f(x_n))_n \subseteq A$. d.h. y_n ist eine Folge in A

$$\text{mit } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \text{ mit } y_0 = f(x_0)$$

$$\text{Da } g \text{ stetig in } x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0) = g(f(x_0)) \quad \square$$

Satz 7.1.3: Sei $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijektiv und stetig

$$\Rightarrow f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b] \text{ stetig.}$$

Beweis: Annahme f^{-1} sei nicht stetig in $c \leq y_0 \leq d$

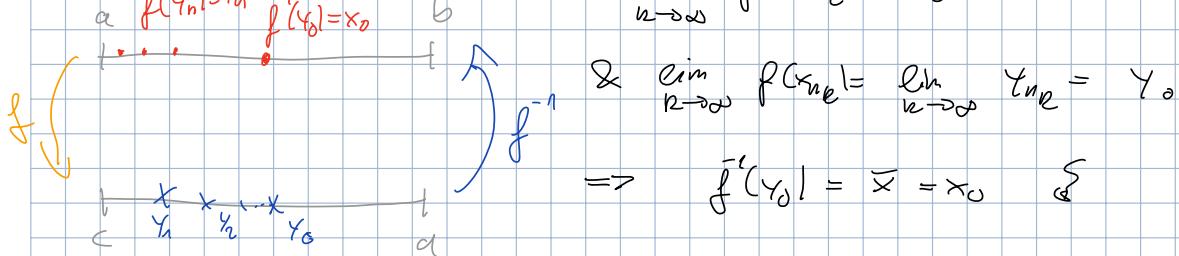
$\exists (y_n)_n \subseteq [c, d] \text{ \& } \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \text{ aber } |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| > \varepsilon \forall n.$

Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$. Da $a \leq x_n \leq b \quad \forall n$ ist $(x_n)_n$ eine beschränkte

Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_{n_k})_k$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x}$

da $|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon \quad \forall k \Rightarrow |\bar{x} - x_0| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon$

$$\text{aber } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$



□

Bemerkung: Satz 8.1.3 gilt im allgemeinen nicht, wenn f nicht

stetig auf ganz $[a, b]$ ist. (Beispiel.)

Konsequenz: (a) die Funktion $x \mapsto x^{\frac{1}{m}}$ ist stetig auf $[0, \infty[$ für $m \in \mathbb{N}$
als Umkehrfunktion von $x \mapsto x^m \Rightarrow f[0, \infty] \rightarrow [0, q^m]$ stetig zuweisen

(b) die Funktion $x \mapsto x^q$ ist stetig auf $[0, \infty[$

für $q = \frac{k}{e} \in \mathbb{Q}, q \geq 0$ als Komposition von

$$f(y) = y^k, \quad g(z) = z^{\frac{1}{e}} \Rightarrow g(x) = x^q = (\underbrace{x^{\frac{1}{e}} \circ x^k}_{\text{aus 2 stetigen Funktionen}})$$

aus 2 stetigen Funktionen

(c) die Funktion $x \mapsto x^q$ ist stetig auf $[0, \infty[$

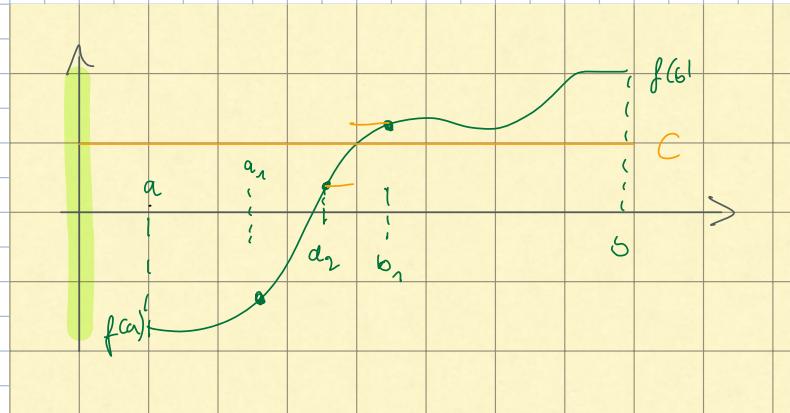
$$\text{für } q \in \mathbb{Q}, q < 0 \quad \text{da } x^q = \frac{1}{x^{-q}} \text{ stetig}$$

7.2 Sätze über stetige Funktionen

Satz 7.2.1 (Zwischenwertsatz)

Eine stetige Abbildung $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

wicht komplexe Zeichen, da \mathbb{C} nicht geordnet



Gezeichnete einer

epochal

Beweis:

Idee: Intervallschachtelung (Vollständigkeitsaxiom), so dass

$$I_n = [a_n, b_n] \supset I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

$$f(a_k) \leq c \leq f(b_k) \quad \& \quad (b_k - a_k) = 2^{-k} (b - a)$$

$$\Rightarrow f(a_k) \leq c \leq f(b_k) \quad \forall k$$

$$\text{durch } \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k = \{x\} \Rightarrow \exists x \in \text{Intervall}$$

$$|I_k| = b_k - a_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Wir können annehmen, dass $f(a) < f(b)$. Sonst betrachte $-f$

(der Fall $f(a) = f(b) = c$ ist trivial).

Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $(I_k = [a_k, b_k])_k$ mit

$$(i) \quad f(a_k) \leq c \leq f(b_k)$$

$$(ii) \quad (b_k - a_k) \leq 2^{-k} (b - a) = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0$$

$$(k=0) \quad I_0 = [a, b] \quad \left\{ \begin{array}{l} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \\ [a_k, b_k] \end{array} \right. \quad \text{falls } f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geq c$$

$$(k \rightarrow k+1): \quad I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = \left\{ \begin{array}{l} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k] \end{array} \right. \quad \text{sonst.}$$

$$\Rightarrow |I_{k+1}| = \frac{1}{2} (b_k - a_k) = 2^{-(k+1)} (b - a)$$

$$\Rightarrow \exists! x_0 \in I_k \quad \forall k \quad \text{d.h.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k .$$

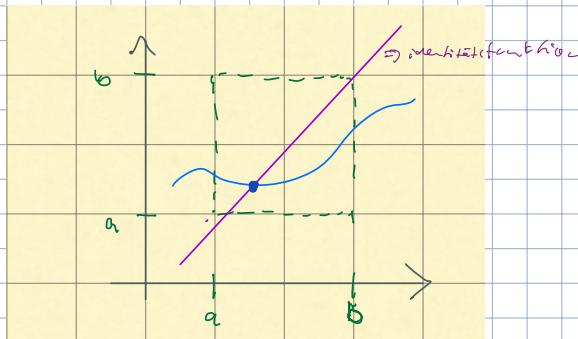
$$\text{Da } f \text{ stetig folgt } c \geq \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(x_0) \quad , \quad c \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0) = c$$

□

Korollar 7.2.2 (Fixpunkt)

Sei $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ ^{stetig} dann existiert $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.



Beweis: Wir möchten zeigen, dass $G(f)$ schneidet $G(x) \Rightarrow$ Graph der Identität

Wir betrachten $g(x) := f(x) - x$. g ist stetig und

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{und} \quad g(b) = f(b) - b \leq 0 \Rightarrow f(s) \in [a, b], \forall s \in [a, b]$$

$\Rightarrow \exists x \in [a, b] \text{ mit } g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ \square

7.3 Maxima und Minima stetiger Funktionen

Satz 7.3.1 (I) (Existenz von Maximum & Minimum)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\exists x_m, x_M \in [a, b]$ mit

$$x_m \in [a, b]$$

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]$$

d.h. f nimmt sein Maximum und sein Minimum an.

Beweis: Wir zeigen die Existenz von x_M . $\Rightarrow x_m$ kann durch Führen ist x_M von $-f(x)$

Wir betrachten $S := \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \}$

Falls $S < \infty$ wähle $S_n = S - \frac{1}{n}$, falls $S = \infty$ wähle $S_n = n$.

\Rightarrow da $S_n < S$, dann S_n ist oben beschränkt und nach oben

Da $S_n < S \Rightarrow \exists x_n \in [a, b]$ mit $S \geq f(x_n) > S_n$.

\Rightarrow nach oben beschränkte Folge

Da $(a \leq x_n \leq b)$ können wir den Satz von Bolzano-Weierstraß anwenden,

d.h. wir finden eine Teilfolge x_{n_k} mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_\infty$

da $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt $a \leq x_\infty \leq b$ d.h. $x_\infty \in [a, b]$.

Da f stetig $f \circ f$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_\infty)$

d.h. $f(x_{n_k}) > n_k = s_{n_k}$ ist nicht möglich. $\Rightarrow S < \infty \Rightarrow f(x_{n_k}) \leq S$

und damit $f(x_{n_k})$ kann keine Majorante einer divergenten Folge s_{n_k} der $f(x_{n_k})$ konvergiert

$$0 \leq f(x_{n_k}) - f(x_\infty) \leq S - f(x_\infty) \leq f(x_{n_k}) - f(x_\infty) + \frac{1}{n_k} = 0$$

\Downarrow
0

\Downarrow

\Downarrow

\Downarrow

\Rightarrow

$$S = f(x_\infty) \Leftrightarrow S - f(x_\infty) = 0$$

ij

Bemerkung: Hauptbestandteil des Beweises war:

vergleiche (0.2): hier
kompat

folgt aus
Bolzano-
Weierstraß

Definition 7.3.2:

$$\boxed{x_n \in [a, b] \Rightarrow \exists (u_k)_{k \in \mathbb{N}}: x_0 \notin [a, b], \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0}$$

eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) mit der Eigenschaft.

umgrenzung auf \mathbb{R}^n

alle Teilfolgen
die konvergiert,
konvergiert in
den Bereich

(K) $\forall (x_n)_n \in E \quad \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, x \in E$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.

\Leftrightarrow gibt Teilfolge
der Folge, deren Grenzwert
in E liegt

Bsp: (a) $[a, b]$ siehe Beweis.

(b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$ mit $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots$

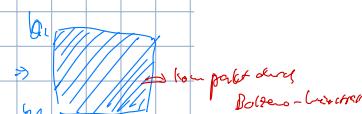
Ebenfalls mittels Bolzano-Weierstraß.

(c) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$

Ebenfalls mittels Bolzano-Weierstraß.

(d) $\overline{B_R} = \{x \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n): \|x\| \leq R\}$

Ebenfalls mittels Bolzano-Weierstraß + Stetigkeit von $\|\cdot\|$.



Lemma 7.3.2*: Seien $\{K_i\}_{i=1}^N$ eine (endliche) Familie von kompakten Mengen.

Dann ist $\bigcup_{i=1}^N K_i$ kompakt.

Beweis: bsp: Schubkastenprinzip:

Sei $(x_n)_n \subseteq \bigcup_{i=1}^N K_i$ gegeben. $\Rightarrow \exists i_0 : K_{i_0}$ enthält unendlich

viele Elemente $\Rightarrow \exists (n_k)_k$ eine Teilfolge so dass $(x_{n_k})_k \subset K_{i_0}$

da K_{i_0} kompakt $\Rightarrow \exists (n_{k_l})_l$ Teilfolge und $x_\infty \in K_{i_0}$

so dass $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{n_{k_l}} = x_\infty$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^N K_i$ st. kompakt

(J)

Satz 7.3.1 (II) (Existenz von Maximum & Minimum)

Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) kompakt.

so $\exists x_m, x_7 \in E$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_7) \quad \forall x \in E.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 8.3.1. (I)

7.4. Gleichmäßige Stetigkeit.

Wdh. f ist stetig in x_0 falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \quad (\text{für } x \in D) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig an D falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Normierung hängt δ vom x_0 ab.

Definition 7.4.1 Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) heißt

gleichmäßig stetig (auf D) falls: $\Rightarrow \delta$ hängt weder von x_0 ab.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta, x, y \in D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

Satz 7.4.2: Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) stetig und E kompakt

so ist f gleichmäßig stetig.

je ein Grenzwert δ existiert in der Menge

Beweis: (durch Widerspruch)

Falls f nicht gleichmäßig stetig, $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in E$ $|x_\delta - y_\delta| < \delta$

und $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

sei $\delta = \frac{1}{n}$

Insgesamt $\exists n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ & $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

$(x_n)_n \subseteq E \xrightarrow{E \text{ kompakt}} (x_{n_k})_k$ mit $\lim_k x_{n_k} = x$

$\Rightarrow \lim_k |x_{n_k} - y_{n_k}| \rightarrow 0$

Sei $y_{n_k} = x$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x$

Satz 7.3.1 (II) (Existenz von Maximum & Minimum)

Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) kompakt.

so $\exists x_m, x_7 \in E$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_7) \quad \forall x \in E.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 8.3.1. (I)

7.4. Gleichmäßige Stetigkeit.

Wdh. f ist stetig in x_0 falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, x \in D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig an D falls f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Normierung hängt δ vom x_0 ab.

Definition 7.4.1 Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) heißt

gleichmäßig stetig (auf D) falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta, x, y \in D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

Satz 7.4.2: Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) stetig und E kompakt

so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: (durch Widerspruch)

Falls f nicht gleichmäßig stetig, $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in E |x_\delta - y_\delta| < \delta$

$$\text{d.h. } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$$

Insgesamt $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ & $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

$(x_n)_n \subseteq E \xrightarrow{E \text{ kompakt}} (x_{n_k})_k$ mit $\lim_k x_{n_k} = x$

$$\Rightarrow |y_{n_k} - x_\omega| \leq |x_{n_k} - x| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x_n - x| + \frac{1}{n_k} \rightarrow 0.$$

d.h. $x_{n_k} \rightarrow x$, $y_{n_k} \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$)
 Da f stetig
 $\Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$
 $\Rightarrow b$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(y_{n_k}) - f(x)| = 0$$

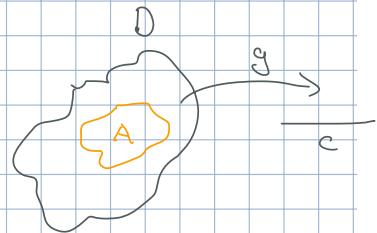
es

□

7.5 Stetige Fortsetzung und Grenzwerte

Definition 7.5.1: (Einschränkung)

Sei $g: D \rightarrow C$ eine Funktion, für $A \subset D$ ist
 $g|_A : A \rightarrow C$ mit $g|_A(a) = g(a) \quad \forall a \in A$
 die Einschränkung von g auf A .



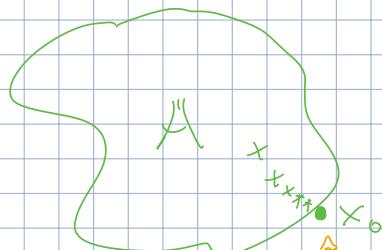
Definition 7.5.2: (Fortsetzung)

Sei $f: A \rightarrow C$ eine Funktion, eine Funktion $g: D \rightarrow C$ heißt

Fortsetzung von f falls $\overset{A \subset D}{\circlearrowleft} g|_A = f$ d.h. $g(a) = f(a) \quad \forall a \in A$

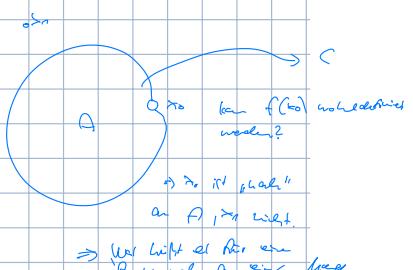
Frage: Sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ (C^n) stetig gegeben und $x_0 \notin A$

- $\exists g: A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (C^n) stetig ?
- ist g eindeutig? ?



x_0
nicht interessant

interessant; da dieser Punkt von A aus erreicht werden kann.



Definition 7.5.3:

$x_0 \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ heißt Häufungspunkt von $A \subseteq \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad x \in A : \quad |x - x_0| < \varepsilon$$

äquivalent zu

$$\Leftrightarrow \exists \quad (x_n)_n \subseteq A \quad \text{mit} \quad \lim_n x_n = x_0$$

so ist ein Häufungspunkt der
Folge (Ankette) s.d.u. x_0 Häufungspunkt
der Menge $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Antworten: • Falls x_0 kein Häufungspunkt: - f hat unendlich viele
Fortsetzungen

• Sie sind nicht eindeutig.

$$\text{z.B. } f(x_0) = a$$

• Falls x_0 Häufungspunkt ist $f(x_0)$ eindeutig

(Eindeutigkeit des Grenzwertes).

Definition 7.5.4: Grenzwert einer Funktion

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ und x_0 ein Häufungspunkt von D .

$a \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ heißt Grenzwert von f in x_0 falls.

$$\forall (x_n)_n \in D \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

man schreibt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, bzw. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = a$ \rightarrow wenn $f(x_0)$ definiert
wäre, hätte er den Wert a

Satz. 7.5.5: Folgende Aussagen sind äquivalent:

Logikheit Funktionen lokale
in Mengen mit Löchern

(i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

(ii) die Funktion $F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ a & x = x_0 \end{cases}$ ist stetig in x_0

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x - x_0| < \delta, \quad x \in D \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Folgenkt. zur Definition
angewandt auf f
 ε - δ -Def.
Folgenkt. auf F

Beweis: Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem Folgenkriterium der Stetigkeit.

ε - δ Definition der Stetigkeit von f

(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)

2 Folgenkriterien für die Stetigkeit von f \Leftrightarrow "Äquivalenz" der Folgenkriterien \Leftrightarrow ε - δ Kriterien.)

Satz 7.5.6: (Rechenregeln für Grenzwerte) \Rightarrow rechtsseitig
wie für Zahlen für stetige Funktionen stimmen.

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) und x_0 ein Häufungspunkt von D .

Rechenregeln
für konv. Folgen

Falls die Grenzwerte existieren so gilt.

$$(a) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) + \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

$$(c) \text{ falls } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

Beweis: Folgt direkt aus den Rechenregeln für konvexe Folgen.

Satz 7.5.7 (Verträglichkeit mit Komposition).

Sei $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, folgt

(i) x_0 ein Häufungspunkt von A

(ii) $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ Häufungspunkt von B / $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert

(iii) $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$ existiert

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$$

Beweis: Sei $(x_n)_n \subseteq A$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$ existiert

$$\Rightarrow (f(x_n) = y_n)_n \subseteq B \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n))$$

Q

Spezielle Notation / Definition 7.5.8:

1. Fall: Falls $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von A

lassen wir dann $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = \pm \infty$ zu

(entsprechend der Konvergenz von Folgen).

In diesem Fall hat f eine Asymptote in x_0 .

$(f(x_n))_n$ strengiert bestimmt $f(x_n)$ in \mathbb{D}
mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

2. Fall: Falls $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B$

- $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$ zulässig d.h. w.l.v. definieren

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in A}} f(x) \quad / \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in A}} f(x)$$

- Falls $|x_0| < \infty$ definieren wir die einseitigen Grenzwerte.

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A \setminus \{x > x_0\}}} f(x)$$

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A \setminus \{x < x_0\}}} f(x)$$

Einschub: 7.6.1 Monotone Funktionen.

Definition 7.6.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

$$f \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{l} \text{streng monoton wachsend} \\ \text{ " } \\ \text{monoton fallend} \\ \text{ " } \\ \text{streng} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{falls} \\ \forall x, y \in D \quad x < y \\ f(x) \leq f(y) \quad \text{monoton wachsend} \\ f(x) < f(y) \quad \text{streng monoton wachsend} \\ f(x) \geq f(y) \quad \text{monoton fallend} \\ f(x) > f(y) \quad \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\}$$

Satz 7.6.2: Sei $f: [a, b] \rightarrow f([a, b])$ stetig.

so ist äquivalent f ist bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist streng monoton.

Zudem gilt $f([a, b])$ ist das Intervall zwischen $f(a)$ & $f(b)$ und f^{-1} ist ebenfalls streng monoton.

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

Beweis: Wir können annehmen, dass $f(a) \leq f(b)$ sonst behandle
 $-f(x)$. \Rightarrow Funktion streng monoton wachsend

Lsgschw \rightarrow streng.
 \Leftrightarrow " sei nicht streng monoton
" Annahme: $\exists x < y$ mit $f(x) \geq f(y)$
 $" = "$ ist nicht möglich da sonst f nicht injektiv.

d.h. wir nehmen an: $f(x) > f(y)$.

$$\Rightarrow f(a) < f(x) \quad ; \quad f(x) > f(y)$$

$$\text{sei } \max\{f(a), f(y)\} < c < f(x).$$

Nach ZWS $\exists x_0 \in [a, x]$ mit $f(x_0) = c$

$\exists x_1 \in [x, y]$ mit $f(x_1) = c$

\Rightarrow Widerspruch zur Lsgschw.

\Leftrightarrow da f streng monoton folgt aus den Zws.

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] \Rightarrow \text{alle c zwischen } f(a) \text{ und } f(b)$$

f ist injektiv nach Annahme. (streng monoton)

\Rightarrow surjektiv als Konsequenz des ZWS.

Die Monotonie von f^{-1} ist als Übungsaufgabe.

Corollar 7.6.3: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig & streng monoton

$\Rightarrow f^{-1}$ existiert und ist stetig.

\Rightarrow falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

B Sei $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

!

$$y = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$$

Beweis: Kombinieren Satz 7.6.1 mit Satz 7.1.3:

Satz 7.1.3: Sei $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijektiv und stetig

$\Rightarrow f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig. (und surjektiv)

□

8. Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen.

8.1. Die Exponentialfunktion II (auf \mathbb{C})

Wir hatten bisher gezeigt:

4.3. Die Exponentialreihe. I

Satz 4.34 : (Die Exponentialreihe)

$$\text{Die Exponentialreihe } \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ (d.h. der Konvergenzradius $R = +\infty$)

Sie hat die Eigenschaft: (AT) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$(WT) \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\exp(x_n) - 1}{x_n} = 1$$

$$(i) \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \exp(k) = [\exp(1)]^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

zudem gilt die Abschätzung:

$$|\exp(x) - s_n(x)| \leq 2 \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für } |x| < 1 + \frac{n}{2}$$

Nun möchten wir eine zweite Charakterisierung finden:

Satz 8.1.1: $\exists!$ $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ so dass

$$(A) \quad \exp(z+v) = \exp(z)\exp(v) \quad \forall z, v \in \mathbb{C}$$

"Additivitätseigenschaft"

$$(W) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1$$

"Wachstum"

Für diese Funktion gilt:

$$(i) \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(ii) \quad \exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(iii) \quad \exp(z) \text{ ist stetig} \quad \& \quad e^q = \exp(q) \quad \forall q \in \mathbb{Q} \quad \text{wobei}$$

$e = \exp(1)$ ist die "Eulersche Zahl".