Lösungen Blatt 3

Aufgabe 3.1 Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine nicht leere, beschränkte Menge. Zu zeigen ist:

(1) M besitzt ein kleinstes und größtes Element.
(2) M enthält nur endlich viele Elemente.

Lösung. In der Vorlesung wurde der Begriff *beschränkt* für Teilmengen von $\mathbb{R}$ eingeführt, also verstehen wir "$M \subset \mathbb{N}$ beschränkt" als "M ist beschränkt als Teilmenge von $\mathbb{R}$". D.h. es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq m \leq b$ für alle $m \in M$.

(2): Da $M \subset \mathbb{N}$ und 1 eine untere Schranke für $\mathbb{N}$ ist (Satz 3.4), ist 1 eine untere Schranke für M. Nach dem Satz von Archimedes (Satz 3.15) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b \leq N$. Dann ist N eine obere Schranke für M, und folglich gilt

$$M \subset [1, N] \cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq N\}.$$

Nach Korollar 3.5 gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$: es gibt kein $m' \in \mathbb{N}$ mit $m < m' < m + 1$. Das bedeutet, dass die Menge auf der rechten Seite genau N Elemente besitzt. Folglich besitzt M höchstens N Elemente.

(1): M ist nicht leer und nach (2) endlich. Wir können die Elemente von M paarweise in ihrer Größe vergleichen (Satz 2.5), und da es nur endlich viele sind, können wir sie durch diesen paarweisen Vergleich alle ihrer Größe nach anordnen. Insbesondere gibt es ein größtes und ein kleinstes Element (welche genau dann gleich sind, wenn M nur ein Element enthält).

□

Aufgabe 3.2 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$;
(2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2 - 1)$;
(3) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n)$.
(4) Sei $a_0 = 1$ und $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Finden Sie eine explizite Formel für a_n und beweisen Sie sie.

Anmerkung: Auch wenn hier "für alle $n \in \mathbb{N}$" steht und $\mathbb{N}$ bei 1 beginnt, ist bei Aussagen (1)–(3) auch $n = 0$ als Induktionsanfang möglich, bei (4) jedoch nicht.

Lösung (1)**.** Sei $A(n)$ die Aussage $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Induktionsanfang: $n = 1$. Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. ✓
Induktionsschritt: $n \to n + 1$. Sei $A(n)$ wahr (Induktionsannahme), also gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n + 1)^2 \\
&\overset{\text{(IA)}}{=} \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 \\
&= \frac{n(n + 1)(2n + 1) + 6(n + 1)^2}{6} \\
&= \frac{(n + 1)\left(n(2n + 1) + 6(n + 1)\right)}{6} \\
&= \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6} \\
&= \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)}{6},
\end{aligned}$$

also folgt $A(n + 1)$. □

Lösung (2)**.** Sei $A(n)$ die Aussage $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

Induktionsanfang: $n = 1$. Es gilt $\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = 1^2 = 1 = \frac{1\cdot 3}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3}$. ✓
Induktionsschritt: $n \to n+1$. Sei $A(n)$ wahr (Induktionsannahme), also gelte $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\overset{\text{(IA)}}{=} \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 \\ &= \frac{n(4n^2-1) + 3\cdot(2n+1)^2}{3} \\ &= \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3} \\ &= \frac{(n+1)((4(n+1)^2-1)}{3},\end{aligned}$$

also folgt $A(n+1)$. □

Lösung (3)**.** Sei $A(n)$ die Aussage $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right)$.
Induktionsanfang: $n = 1$. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a^{n+1} - b^{n+1} = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right)$. ✓
Induktionsschritt: $n \to n+1$. Sei $A(n)$ wahr (Induktionsannahme), also gelte $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n+1} a^{(n+1)-k}b^k\right) &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{(n+1)-k}b^k\right) + ab^{n+1} - b^{n+2} \\ &= a(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right) + ab^{n+1} - b^{n+2} \\ &= a(a^{n+1} - b^{n+1}) + ab^{n+1} - b^{n+2} \\ &= a^{n+2} - b^{n+2},\end{aligned}$$

also folgt $A(n+1)$. □

Lösung (Variante ohne Induktion)**.** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}a^{n+1} - b^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{s=1}^{n} a^{(n+1)-s}b^s - \left(\sum_{t=1}^{n} a^{(n+1)-t}b^t + b^{n+1}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{n} a^{(n+1)-s}b^s - \sum_{t=1}^{n+1} a^{(n+1)-t}b^t \\ &= \sum_{s=0}^{n} a^{(n+1)-s}b^s - \sum_{l=0}^{n} a^{n-l}b^{l+1} \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right).\end{aligned}$$

Lösung (4)**.** Durch Ausrechnen der ersten paar Folgenglieder findet man die Vermutung: $a_n = 2^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Durch Einsetzen dieser Vermutung in die rekursive Formel aus der Aufgabe ergibt sich die folgende zu zeigende Aussage $A(n)$: $1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2^{n-1}$ (hier muss der Summand $k = 0$ einzeln geschrieben werden, da $a_0 = 1$ nicht gleich 2^{-1} ist). Multiplikation mit 2 und Schreibweise $2 = 1 + 1$ ergibt die schönere, äquivalente Aussage $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n$, hier nehmen wir aber im Folgenden die ursprüngliche.

Induktionsanfang: $n = 1$: $1 + \sum_{k=1}^{1-1} 2^k = 1 + 0 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$ ✓.
Induktionsschritt: $n \to n+1$. Sei $A(n)$ wahr (Induktionsannahme), also gelte $1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2^{n-1}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{n+1-1} 2^{k-1} &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1} + 2^{n-1} \\ &\overset{\text{IA}}{=} 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^n \\ &= 2^{n+1-1}, \end{aligned}$$

also folgt $A(n+1)$. □

Aufgabe 3.3 Durch Induktion beweise man die *Schwarzsche Ungleichung*: Für beliebige reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ gilt

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)\,.$$

Lösung:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage

$$(a_1 b_1)^2 \le (a_1^2)(b_1^2)$$

offenbar wahr (nach dem Assoziativ- und Kommutativgesetz des Körpers $\mathbb{R}$).
Induktionsschritt: Sei die Behauptung für n wahr. Nach der binomischen Formel gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_{n+1} b_{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2$$

Nach Induktionsvoraussetzung/annahme (IV bzw. IA) gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \quad (i)$$

und wegen $2rq \le r^2 + q^2$ für $r, q \in \mathbb{R}$ (vgl. Blatt 1, Aufgabe 3.4(1)) auch

$$2 a_{n+1} b_i b_{n+1} a_i \le a_{n+1}^2 b_i^2 + b_{n+1}^2 a_i^2 \quad (ii)$$

für alle i.

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\
&\overset{(i)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} 2a_{n+1}b_i b_{n+1} a_i + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\
&\overset{(ii)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(a_{n+1}^2 b_i^2 + b_{n+1}^2 a_i^2\right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + a_{n+1}^2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + b_{n+1}^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2\right)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.4 Für die $p$ten *Potenzsummen*, $p \in \mathbb{N}$

$$S_p(n) := \sum_{i=1}^{n} i^p$$

beweise man

$$\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} S_{p+1-i}(n) = (n+1)^{p+1} - 1\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} S_{p+1-i}(n) = \\
&\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^{p+1-i} \\
&\overset{\text{Summen}}{\underset{\text{vertauschen}}{=}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} k^{p+1-i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} k^{p+1-i} - k^{p+1}\right) \\
&\overset{\text{Aufg. 2.1}}{=} \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - k^{p+1} \\
&\overset{\text{Teleskop-}}{\underset{\text{summe}}{=}} (n+1)^{p+1} - 1.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.5 Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion auf $\mathbb{Z}$. Wir definieren $\Delta f(x) := f(x+1) - f(x)$. Für $n \geq 2$ sei $\Delta^n f$ rekursiv gegeben durch $\Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f)$. Zeigen Sie, dass $\Delta^n f = 0$ genau dann, wenn f ein Polynom der Ordnung $\leq n-1$ ist, d.h.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$.

Lösung: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die folgende Aussage: Für jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gilt $\Delta^n f = 0$ genau dann, wenn f ein Polynom der Ordnung $\leq n-1$ ist.

Beweis per Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist zu zeigen: Für jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gilt $\Delta f = 0$ genau dann, wenn f ein Polynom der Ordnung 0 ist, d.h. es gibt ein $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Die Gleichung $\Delta f = 0$ bedeutet $f(x+1) - f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

Beweis der Aussage für $n = 1$:

Angenommen, es gibt ein $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Dann folgt $f(x+1) - f(x) = a_0 - a_0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

Angenommen, es gilt $f(x+1) - f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$, also $f(x) = f(x+1)$. Nach Definition von $\mathbb{N}$ folgt dann $f(n) = f(0)$ und $f(-n) = f(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f(x) = f(0) =: a_0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

Die Aussage ist also wahr für $n = 1$. ✓

Induktionsschritt: Nehme an, die Aussage $A(n)$ ist wahr.

Zu zeigen ist die Aussage $A(n+1)$: Für jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gilt $\Delta^{n+1} f = 0$ genau dann, wenn f ein Polynom der Ordnung $\leq n + 1 - 1 = n$ ist.

Angenommen, f ist ein Polynom der Ordnung $\leq n$. Dann können wir $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}}_{=:P(x)} + a_n x^n$$

mit $a_i \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq n$ schreiben, wobei $P : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ein Polynom vom Grad $\leq n-1$ ist, also nach $A(n)$ die Gleichung $\Delta^n P = 0$ erfüllt. Sei $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch $g(x) := a_n x^n$. Dann gilt

$$\Delta g(x) = a_n (x+1)^n - a_n x^n = a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k - x^n \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_n \binom{n}{k} x^k.$$

Dies ist ein Polynom der Ordnung $\leq n-1$, also gilt $\Delta^n \Delta g = 0$ nach $A(n)$. Es folgt

$$\Delta^{n+1} f = \Delta^{n+1}(P + g) = \Delta \Delta^n P + \Delta^n \Delta g = 0.$$

Umgekehrte Richtung: Angenommen, $\Delta^{n+1} f = 0$, also $0 = \Delta^n \Delta f$. Gemäß $A(n)$, angewandt auf die Funktion $\Delta f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ist Δf ein Polynom der Ordnung $\leq n-1$.

Betrachte nun die Funktion $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$g(x) := n f(x) - x \Delta f(x).$$

Dann berechnen wir (mit der Konvention $\Delta^0 f := f$)

$$\begin{aligned}
\Delta^n g(x) &= n\Delta^n f(x) - \Delta^n (x \Delta f(x)) \\
&= n\Delta^n f(x) - \Delta^{n-1} \Delta (x \Delta f(x)) \\
&= n\Delta^n f(x) - \Delta^{n-1} \big((x+1) \Delta f(x+1) - x \Delta f(x) \big) \\
&= n\Delta^n f(x) - \Delta^{n-1} \Big(x \big(\Delta f(x+1) - \Delta f(x) \big) + \Delta f(x+1) \Big) \\
&= n\Delta^n f(x) - \Delta^n f(x+1) - \Delta^{n-1} (x \Delta^2 f(x)) \\
&= n\Delta^n f(x) - \Delta^n f(x) + \underbrace{\Delta^n f(x) - \Delta^n f(x+1)}_{= -\Delta^{n+1} f(x) = 0} - \Delta^{n-1} (x \Delta^2 f(x)) \\
&= (n-1) \Delta^n f(x) - \Delta^{n-1} (x \Delta^2 f(x)).
\end{aligned}$$

Falls $n = 1$, ist das Ergebnis $= 0$, denn $\Delta^2 f = \Delta^{n+1} f = 0$. Wenn $n \geq 2$, dann können wir weiter umformen

$$\begin{aligned}
\Delta^n g(x) &= (n-1)\Delta^n f(x) - \Delta^{n-2}\Delta(x\Delta^2 f(x)) \\
&= (n-1)\Delta^n f(x) - \Delta^{n-2}((x+1)\Delta^2 f(x+1) - x\Delta^2 f(x)) \\
&= (n-1)\Delta^n f(x) - \Delta^{n-2}\Big(x\big(\Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x)\big) + \Delta^2 f(x+1)\Big) \\
&= (n-1)\Delta^n f(x) - \Delta^n f(x) + \underbrace{\Delta^n f(x) - \Delta^n f(x+1)}_{=\Delta^{n+1} f(x)=0} - \Delta^{n-2}(x\Delta^3 f(x)) \\
&= (n-2)\Delta^n f(x) - \Delta^{n-2}(x\Delta^3 f(x)).
\end{aligned}$$

Ist $n = 2$, ist das Ergebnis wieder $= 0$, denn $\Delta^3 f = \Delta^{n+1} f = 0$, und andernfalls wiederholen wir denselben Trick noch $(n-2)$-mal, und erhalten

$$\Delta^n g(x) = (n-n)\Delta^n f(x) - \Delta^{n-n}(x\Delta^{n+1} f(x)) = x\underbrace{\Delta^{n+1} f(x)}_{=0} = 0.$$

Gemäß $A(n)$ ist also g ein Polynom der Ordnung $\leq n-1$. Wir haben nun nach Definition von g

$$nf(x) = x\Delta f(x) + g(x)$$

mit $\Delta f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Polynomen der Ordnung $\leq n-1$. Die rechte Seite ist also ein Polynom der Ordnung $\leq n$, und aufgrund der Tatsache, dass f Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt, impliziert die obige Gleichung, dass das Polynom auf der rechten Seite Werte in $n\mathbb{Z}$ annimmt. D.h.

$$f(x) = \frac{1}{n}\big(x\Delta f(x) + g(x)\big)$$

ist ein wohldefiniertes Polynom $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ der Ordnung $\leq n$. $\square$