

Ranksatz

tags: grabowski

Sei V, W Vektorräume

Sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

Ranksatz:

$$\dim(V) = n \implies \dim \ker(T) + \dim \operatorname{im}(T) = n$$

Der Ranksatz soll zunächst für die entsprechende Matrix $A \in M_{n \times m}$ von T bewiesen werden.

1 Beweis für Matrix A

Theorem 1. (Rangsatz) Sei $A \in M_{m \times n}$. Dann $\dim \ker(A) + \dim \operatorname{im}(A) = n$

Beweis. Sei S eine Zeilenstufenform, die aus A durch das Eliminationsverfahren entsteht.

Es reicht zu zeigen, dass $\dim \ker(S) + \dim \operatorname{im}(S) = n$

Da $\dim \ker(S)$ die Anzahl der Spalten ohne pivots und $\dim \operatorname{im}(S)$ die Anzahl der Spalten mit pivots, muss ihre Summe die Anzahl aller Spalten ergeben, die n ist, was zu zeigen war. \square

1.1 Reduktion von A auf S

Es soll bewiesen werden, dass sich $\dim \operatorname{im}(A)$ durch keine der gaußschen Elementaroperation ändert.

1.1.1 Typ 1

1.1.2 Typ 2

1.2 Beweis für Zeilenstufenform S von A

1.2.1 $\dim \operatorname{im}(S)$

Es gilt:

$\dim \operatorname{im}(S)$ ist die Anzahl von Spalten mit Pivots in dem Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Die Spalten, die Pivots enthalten, sind eine Basis von $\operatorname{im}(S)$

Beweis. Beweis durch Induktion über die Anzahl von Pivots r in S . \square

1.2.2 $\dim \ker(S)$

Es gilt:

$\dim \ker(S)$ ist die Anzahl von Spalten ohne Pivots in dem Gleichungssystem S .

$\ker(S)$ sind alle Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

2 Beweis für allgemeine lineare Abbildungen

2.1 Lemma

Lemma 1. Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und sei $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann $\dim \operatorname{im}(A) \leq n$

2.2 Übung: dimensionen von \ker und im bleiben in Isomorphismen bestehen

Nach der Übung reicht es, den Rangsatz für isomorphe Vektorräume von V und W zu zeigen.

Da $\dim(V) = n$ gibt es einen Isomorphismus $\alpha : \mathbb{K}^n \rightarrow V$ und $\beta : \mathbb{K}^m \rightarrow W$. Für diese Vektorräume wurde der Rangsatz bereits gezeigt.