

# Exponentialreihe

tags: hirsch

**Theorem.** Satz 8.1.1 Es gibt genau eine Funktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (A)  $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$  ("Additionseigenschaft")
- (W)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1$  ("Wachstum")

$$(\exp(z) = \sum_n^\infty \frac{z^n}{n!})$$

Für diese Funktion gilt:

- (i)  $\exp(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$
- (ii)  $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$
- (iii)  $\exp(z)$  ist stetig und  $e^q = \exp(q), \forall q \in \mathbb{Q}$ , wobei  $e = \exp(1)$  ist die Eulersche Zahl

Sei eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die die Eigenschaften (A), (W) erfüllt.

1.

$$1.1 \quad f(z) = f(n \cdot \frac{z}{n}) \stackrel{(A)}{=} f(\frac{z}{n})^n$$

1.2

$$\text{Setze } z_n := n(f(\frac{z}{n}) - 1)$$

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = n(f(\frac{z}{n}) - 1) = n \cdot (\frac{z}{n}) \cdot \underbrace{\left( \frac{f(\frac{z}{n}) - 1}{\frac{z}{n}} \right)}_{\text{gegen 1, siehe eigenschaft W für } \exp(\frac{z}{n})} \quad (\text{Erweiterung mit } \frac{z}{n}) \quad (1)$$

$$= z \cdot 1 = z \quad (2)$$

1.3

$$f\left(\frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n(f(\frac{z}{n}) - 1)}{n}\right)^n \quad (\text{Erweiterung})$$

## Lemma 8.2: Fundamentallemma der Exponentialfunktion

**Lemma 1.** Für alle  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} \quad (3)$$

*Beweis.* Einzigartigkeit:

$$f(z) \stackrel{1.1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{z}{n}\right)^n \stackrel{1.3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n(f(\frac{z}{n}) - 1)}{n}\right)^n \quad (4)$$

$$\stackrel{8.2}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} = \exp(z) \quad (5)$$

ii)

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \stackrel{8.2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \tag{6}$$

$$\stackrel{1.2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \tag{7}$$

iii)

□