Cauchy-Produkt

tags: Hirsch, Cauchy-Produkt

I

Es kann eine Abzählung gefunden werden $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
sodass $(N+1)^2$ natürliche Zahlen diese Tupel $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählen:

$$\{(i,j) : \max\{i,j\} \leq N^2\}$$

$\phi(k) = (\phi_1(k), \phi_2(k)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Sei die Elemnte der Tupel werden miteinander multiplizier und die Produkte summiert.
Es ergeben sich somit $(N+1)^2$ Produkte,da es genau so viele Tupel gibt.

Die Summe der Produkte dieser Tupel kann auch so geschrieben werden:

$$\left(\sum_{i=0}^{N^2} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{N^2} b_i\right)$$

$$\sum_{i=0}^{(N+1)^2} a_i \cdot b_i = \left(\sum_{i=0}^{N^2} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{N^2} b_i\right)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right)$$

II

Es kann eine Abzählung gefunden werden $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
sodass $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ natürliche Zahlen diese Tupel $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählen:

$$\{(i, j-i) | 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq i, i+j \leq N\}$$

$\psi(k) = (\psi_1(k), \psi_2(k)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Sei die Elemnte der Tupel werden miteinander multiplizier und die Produkte summiert.
Es ergeben sich somit $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ Produkte,da es genau so viele Tupel gibt.

Die Summe der Produkte dieser Tupel kann auch so geschrieben werden:

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j$$

Da es aber eine Abzählung dieser Tupel auf $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ natürliche Zahlen gibt, kann für jeder diser Tupel (n,m), eine natürliche zahl $k \leq \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ gefunden werden, sodass

$$\psi(k) = (n,m) = (\psi_1(k), \psi_2(k))$$

Somit gilt:

$$a_n \cdot b_m = a_{\psi_1(k)} \cdot b_{\psi_2(k)}$$

Somit gibt es eine Abzählung, sodass

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j = \sum_{i=0}^{\frac{(N+1)(N+2)}{2}} a_{\psi_1(i)} b_{\psi_2(i)}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{\psi_1(i)} b_{\psi_2(i)}$$

Fazit

Wie gerade gezeigt, gibt es zwei Abzählungen $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$\tau = \psi^{-1} \circ \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine Umordnung von $\mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \right)$$