tags:

Satz 5.1.3

tags: stetige Funktionen

Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ bijektiv und stetig.
Dann ist auch $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ stetig

Sei zum Zwecke des Widerspruchs, dass f^{-1} nich stetig.

Es gibt dann eine folge $(y_n)_n$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$und es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| > \varepsilon$$

Sei eine neue Folge $(x_n)_n \subset [a, b]$ definiert, sodass $x_n = f^{-1}(y_n)$. Da x_n beschränkt ist durch a, b, muss die Folge nach Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge haben.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x}$$

Also: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$

$f(\bar{x}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0$

(Da y_{n_k} eine Teilfolge von $(y_n)_n$ ist und somit ebenfalls gegen y_0 konvergiert.)

$$f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(\bar{x})) = \bar{x} \tag{1}$$
$$f^{-1}(y_0) = x_0 \tag{2}$$
$$\bar{x} = x_0 \tag{3}$$

Es muss außerdem gelten:

$$|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon \tag{4}$$
$$|\lim_{k\to\infty} x_{n_k} - x_0| = |\bar{x} - x_0| > \varepsilon \tag{5}$$

Dies ist ein Widerspurch.