3.5

tags: hirsch, Uebungsaufgaben

Daten

$0 \leq |z_0| < R$
$r = R - |z_0| > 0$
$z \in B_r(z_0)$

Aufgabe

Sei

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine pOtenzreihe mit $a_n \in \mathbb{C}, \forall n$ mit Konvergenzradius $R > 0$.

Zeigen sie,dass für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < R$ eine Potenzreihe $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_n$ mit Konvergenzradius $r = R - |z_0|$ existiert, sodass

$$Q(z) = P(z_0 + z), \forall z \in B_r(z_0)$$

Hypothese:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z + z_0)^n = \sum_{n=0}^{N} z^n b_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} z^n \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k \tag{1}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} z^n \frac{1}{2} \lim_{M \to \infty} \sum_{k}^{M} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k \tag{2}$$

Durch Induktion bewiesen gilt folgende Aussage:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n (z + z_0)^n = \sum_{n=0}^{N} z^n \cdot \sum_{k=0}^{N-n} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \cdot z_0^k \tag{3}$$