Maxima und Minima stetiger FUnktionen

tags: hirsch, Stetigkeit, Funktion

Theorem. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es existiert dann ein $x_m, x_M \in [a, b]$ mit*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \forall x \in [a, b]]$$

Beweis. Wir zeigen die Existenz von x_M. x_m kann durch das Maximum von $-f(x)$ gezeigt werden. Sei

$$S := \sup\{f(x) : x \in [a, b]]\}$$

$$S_n = \begin{cases} S - \frac{1}{n}, \text{ falls } S < \infty \\ n, , \text{ falls } S = +\infty \end{cases} \tag{1}$$

Es gilt: $S_n < S$ (Da wenn $S_n = n$, dann $S = \infty$)

$$\exists x_n \in [a, b] : S \geq f(x_n) > S_n$$

Sonst wäre S nicht größer als S_n.

Die Folge der $(x_n)_n$ für jedes S_n ist beschränkt von a und b und hat dementsprechen eine konvergente Teilfolge.

$$x_{n_k} \text{mit } \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0 \tag{2}$$
$$a \leq x_{n_k} \leq b \tag{3}$$
$$a \leq x_0 \leq b \tag{4}$$
$$a \in [a, b] \tag{5}$$

Da f stetig folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0), \text{ da } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

$f(x_{n_k}) > n_k = S_{n_k} < \infty$ ist nicht möglich, da $f(x_{n_k})$ konvergent ist und somit nicht größer als eine divergente Folge sein kann.

$$0 = f(x_{n_k}) - f(x_0) \leq S - f(x_0) \leq f(x_{n_k}) = f(x_0) + \frac{1}{n_k} = 0$$
$$S - f(x_0) = 0$$
$$S = f(x_0)$$

Da $x_0 \in [a, b]$ ist $f(x_0) \in f([a, b])$ und somit ist $f(x_0)$ nicht nur Supremum, sonder Maximum. □