Ranksatz

tags: grabowski

Sei V, W Vektorräume
Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Ranksatz:

$$\dim(V) = n \implies \dim\ker(T) + \dim im(T) = n$$

Der Ranksatz soll zunächst für die entsprechende Matrix $A \in M_{n\times m}$ von T bewiesen werden.

1 Beweis für Matrix A

Theorem 1. *(Rangsatz) Sei $A \in M_{m\times n}$. Dann* $\dim ker(A) + \dim im(A) = n$

Beweis. Sei S eine Zeilenstufenform, die aus A durch das Eliminationsverfahren entsteht.
Es reicht zu zeigen, dass $\dim ker(S) + \dim im(S) = n$
Da $\dim ker(S)$ die Anzahl der Spalten ohne pivots und $\dim im(S)$ die Anzahl der Spalten mit pivots, muss ihre Summe die Anzahl aller Spalten ergeben, die n ist, was zu zeigen war. □

1.1 Reduktion von A auf S

Seien $A, B \in M_{m\times n}$ und B entsteht durch A durch eine Elementaroperation.
Dann $rank(A) = rank(B)$.
Es wurde bereits gezeigt, dass $kerA = kerB$ und somit auch $dimkerA = dimkerB$.
imA kann aber ungleich zu imB sein.
Es soll bewiesen werden, dass sich $\dim im(A)$ durch keine der gaußschen Elementaroperation ändert.
Also $\dim imA = \dim imB$

1.1.1 Typ 1

Tausch von zwei Zeilen mit Indexen α, β.
Sei $e_1, \dots, e_n$ die Basis der Spalten von A.
Sei ein Isomorphismus definiert:

$$T(e_i) := \begin{cases} e_i, \text{ falls } i \neq \alpha, \beta \\ e_\alpha, \text{ falls } i = \beta \\ e_\beta, \text{ falls } i = \alpha \end{cases} \tag{1}$$

Es gilt: $T(e_1), \dots, T(e_n)$ ist eine Basis der Spalten von B:
Linear unabhängig:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k T(e_k) = \sum_{k=0,k\neq\alpha,\beta}^{n} a_k e_k + T a_\alpha(e_\alpha) + a_\beta T(e\beta) = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k = v$$

Erzeugendensystem:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k T(e_k) = \sum_{k=0,k\neq\alpha,\beta}^{n} a_k e_k + T a_\alpha(e_\alpha) + a_\beta T(e\beta) = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k, \text{(linear unabhängig)}$$

1.1.2 Typ 2

Es gibt Indexe α, β, sodass $Z'_\alpha = Z_\alpha + a \cdot Z_\beta, i \neq \alpha \implies Z'_i = Z_i$, wobei Z Zeilen sind.
Sei ein Isomorphismus $T : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$, mit der Formel

$$T(e_\alpha) := e_\alpha + a \cdot e_\beta$$

$$\sum_{k}^{n} a_k \cdot T(e_k) = \sum_{k,k\neq\alpha,\beta}^{n} a_k \cdot e_k + a_\alpha(e_\alpha + a \cdot e_\beta) + a_\beta e_\beta = \sum_{n}^{\infty}$$

1.2 Beweis für Zeilenstufenform S von A

1.2.1 dim im (S)

Es gilt:
$\dim im(S)$ ist die Anzahl von Spalten mit Pivots in dem Gelichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Die Spalten, die Pivots enthalten, sind eine Basis von $im(S)$

Beweis. Beweis durch Induktion über die Anzahl von Pivots r in S. □

1.2.2 dim ker (S)

Es gilt:
$\dim ker(S)$ ist die Anzahl von Spalten ohne Pivots in dem Gleichungssystem S.
$ker(S)$ sind alle Lösungen des Gleichnungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

2 Beweis für allgemeine lineare Abbildungen

2.1 Lemma

Lemma 1. *Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und sei $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. DAnn* $\dim im(A) \leq n$

2.2 Übung: dimensionen von ker und im bleiben in Isomorphismen bestehen

Nach der Übung reicht es, den Rangsatz für isomorphe Vektorräumu von V und W zu zeigen.

Da $\dim(V) = n$ gibt es einen Isomorphismus $\alpha : \mathbb{K}^n \to V$ und $\beta : \mathbb{K}^m \to W$. Für diese Vektoräume wurde der Rangsatz bereits gezeigt.