Exponentialreihe

tags: hirsch

Theorem. *Satz 8.1.1 Es gibt genau eine Funktion exp* $: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit den Folgenden Eigenschaften:*

- *(A)* $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ *(Äddditionseigenschaft")*
- *(W)* $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1$ *("Wachstum")*

$(\exp(z) = \sum_n^\infty \frac{z^k}{n!})$

Für diese Funktion gilt:

- *(i)* $\exp(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$
- *(ii)* $\exp(z) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n$
- *(iii)* $\exp(z)$ *ist stetig und* $e^q = \exp(q), \forall q \in \mathbb{Q}$, *wobei* $e = \exp(1)$ *ist die Eulersche Zahl*

Sei eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die die Eigenschaften $(A), (W)$ erfüllt.

1.

1.1 $f(z) = f(n \cdot \frac{z}{n}) \overset{(A)}{=} f(\frac{z}{n})^n$

1.2
Setze $z_n := n(f(\frac{z}{n}) - 1)$
Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = n(f(\frac{z}{n}) - 1) = n \cdot (\frac{z}{n}) \cdot \underbrace{\left(\frac{f(\frac{z}{n}) - 1}{\frac{z}{n}}\right)}_{\text{gegen 1, siehe eigenschaft } W \text{ für } \exp(\frac{z}{n})} \quad \textit{(Erweiterung mit } \frac{z}{n}\textit{)} \tag{1}$$

$$= z \cdot 1 = z \tag{2}$$

1.3

$$f\left(\frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n(f(\frac{z}{n}) - 1)}{n}\right)^n \textit{(Erweiterung)}$$

Lemma 8.2: Fundamentallemma der Exponentialfunktion

Lemma 1. *Für alle* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z_n}{n})^n = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} \tag{3}$$

Beweis. Einzigartigkeit:

$$f(z) \overset{1.1}{=} \lim_{n\to\infty} f(\frac{z}{n})^n \overset{1.3}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n(f(\frac{z}{n}) - 1)}{\frac{z}{n}}\right)^n \tag{4}$$

$$\overset{8.2}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} = \exp(z) \tag{5}$$

ii)

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \overset{8.2}{=} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z_n}{n})^n \tag{6}$$

$$\overset{1.2}{=} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n \tag{7}$$

iii)

□