

Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und E kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Beweis durch Widerspruch.

Sei f nicht gleichmäßig stetig.

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_\delta, y_\delta \in D : |x_\delta - y_\delta| < \delta$, aber $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

Insbesondere:

Sei $\delta = \frac{1}{n}$

Es gibt dann ein x_n, y_n , sodass:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ aber } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

$(x_n)_n$ stellt dabei eine Folge in der kompakten Menge E dar.

Es gibt also eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_\infty$

$$|y_{n_k} - x_\infty| \leq |x_{n_k} - x_\infty| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x_{n_k} - x_\infty| + \frac{1}{n_k} \rightarrow 0$$

Somit konvergiert auch die Teilfolge $(y_{n_k})_k$ gegen x .

Da f stetig ist, folgt aus dem Folgenkriterium:

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$$

$$f(y_{n_k}) \rightarrow f(x)$$

Die Folgen $f(y_{n_k})$ und $f(x_{n_k})$ sind also äquivalent.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(y_{n_k}) - f(x)| = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 : |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon, \forall k > K$$

Es gibt also ein $\delta = \frac{1}{n_k}$, für das gilt:

$$|x - y| < \delta \text{ (Denn so sind } x_{n_k} \text{ und } y_{n_k} \text{ definiert)} \implies |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. □