3.5

tags: hirsch, Uebungsaufgaben

Daten

$0 \leq |z_0| < R$
$r = R - |z_0| > 0$
$z \in B_r(z_0)$

Aufgabe

Sei

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine pOtenzreihe mit $a_n \in \mathbb{C}, \forall n$ mit Konvergenzradius $R > 0$.

Zeigen sie,dass für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < R$ eine Potenzreihe $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_n$ mit Konvergenzradius $r = R - |z_0|$ existiert, sodass

$$Q(z) = P(z_0 + z), \forall z \in B_r(z_0)$$

Notizen

Zu zeigen:
Für jedes z_0 im Konvergenzbereich von $P(z)$ gibt es eine weitere Potenzreihe $Q(z)$, die im Bereich $(z_0 - r, z_0 + r)$ denselben Wert hat wie $P(z_0 + z)$.

Für jedes z_0, für das $P(z)$ konvergiert, gibt es eine "kleinere"Potenzreihe $Q(z)$, die im Bereich $R - |z_0|$ um z_0 divergent ist und genau dem Wert von $P(z_0 + z)$ entspricht.

Extremwerte

Sei $z_0 = 0$.
$Q(z) = P(z)$:

$$Q(z) = P(0 + z), \forall z \in B_R(0)$$

Sei $z_0 = R$.

Fragen

Was ist mit $B_r(z_0)$ gemeint, wenn $Q(z)$ den Konvergenzradius r hat.

$$\begin{aligned}
&r = R - |z_0| > 0 \\
&x \in B_r(z_0) = (z_0 - R + |z_0|, z_0 + R - |z_0|) = (z_0 - r, z_0 + r) \\
&x < R
\end{aligned}$$

Es kann aber sein, dass $R > x > r$. Dann würde $Q(x)$ divergieren, da x außerhalb des Konvergenzradius, aber $P(x + z_0)$ würde konvergieren, da $x < R$.

alle anderen Bedinungen wären trotzdem erfüllt:
$|z_0| < R$