Ranksatz

tags: grabowski

Sei V, W Vektorräume
Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Ranksatz:

$$\dim(V) = n \implies \dim\ker(T) + \dim im(T) = n$$

Der Ranksatz soll zunächst für die entsprechende Matrix $A \in M_{n\times m}$ von T bewiesen werden.

1 Beweis für Matrix A

Theorem 1. *(Rangsatz) Sei* $A \in M_{m\times n}$. *Dann* $\dim ker(A) + \dim im(A) = n$

Beweis. Sei S eine Zeilenstufenform, die aus A durch das Eliminationsverfahren entsteht.
Es reicht zu zeigen, dass $\dim ker(S) + \dim im(S) = n$
Da $\dim ker(S)$ die Anzahl der Spalten ohne pivots und $\dim im(S)$ die Anzahl der Spalten mit pivots, muss ihre Summe die Anzahl aller Spalten ergeben, die n ist, was zu zeigen war. □

1.1 Reduktion von A auf S

Es soll bewiesen werden, dass sich we

1.2 Beweis für Zeilenstufenform S von A

1.2.1

Es gilt:
$\dim im(S)$ ist die Anzahl von Spalten mit Pivots in dem Gelichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Die Spalten, die Pivots enthalten, sind eine Basis von $im(S)$

Beweis. Beweis durch Induktion über die Anzahl von Pivots r in S.

□

1.2.2

Es gilt:
$\dim ker(S)$ ist die Anzahl von Spalten ohne Pivots in dem Gleichungssystem S.
$ker(S)$ sind alle Lösungen des Gleichnungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

2 Beweis für allgemeine lineare Abbildungen