

# Cauchy-Produkt

tags: Hirsch, Cauchy-Produkt

---

## I

Es kann eine Abzählung gefunden werden  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , sodass  $(N+1)^2$  natürliche Zahlen diese Tupel  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählen:

$$\{(i, j) : \max\{i, j\} \leq N^2\}$$

$$\phi(k) = (\phi_1(k), \phi_2(k)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Sei die Elemente der Tupel werden miteinander multipliziert und die Produkte summiert. Es ergeben sich somit  $(N+1)^2$  Produkte, da es genau so viele Tupel gibt.

Die Summe der Produkte dieser Tupel kann auch so geschrieben werden:

$$\left( \sum_{i=0}^{N^2} a_i \right) \left( \sum_{i=0}^{N^2} b_i \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{(N+1)^2} a_i \cdot b_i &= \left( \sum_{i=0}^{N^2} a_i \right) \left( \sum_{i=0}^{N^2} b_i \right) \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_i &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i \right) \end{aligned}$$

## II

Es kann eine Abzählung gefunden werden  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , sodass  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$  natürliche Zahlen diese Tupel  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählen:

$$\{(i, j-i) | 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq i, i+j \leq N\}$$

$$\psi(k) = (\psi_1(k), \psi_2(k)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Sei die Elemente der Tupel werden miteinander multipliziert und die Produkte summiert. Es ergeben sich somit  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$  Produkte, da es genau so viele Tupel gibt.

Die Summe der Produkte dieser Tupel kann auch so geschrieben werden:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^i a_{i-j} b_j$$

Da es aber eine Abzählung dieser Tupel auf  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$  natürliche Zahlen gibt, kann für jeder dieser Tupel  $(n, m)$ , eine natürliche Zahl  $k \leq \frac{(N+1)(N+2)}{2}$  gefunden werden, sodass

$$\psi(k) = (n, m) = (\psi_1(k), \psi_2(k))$$

Somit gilt:

$$a_n \cdot b_m = a_{\psi_1(k)} \cdot b_{\psi_2(k)}$$

Somit gibt es eine Abzählung, sodass

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^i a_{i-j} b_j = \sum_{i=0}^{\frac{(N+1)(N+2)}{2}} a_{\psi_1(i)} b_{\psi_2(i)}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i a_{i-j} b_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{\psi_1(i)} b_{\psi_2(i)}$$

## Fazit

Wie gerade gezeigt, gibt es zwei Abzählungen  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .  
 $\tau = \psi^{-1} \circ \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist eine Umordnung von  $\mathbb{N}$ .

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_i = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i \right)$$