Moderne Methoden der Regelungstechnik

2. Einführung zur Regelung im Zustandsraum

Prof. Dr. Horst Schulte

Sommer-Semester April – Juli 2021

Hochschule für Technik
und Wirtschaft Berlin

University of Applied Sciences

Inhalt

1. Zustandsraumbegriff in der Modellbildung
2. Lineare zeitinvariante Zustandsraummodelle
3. Einführung in die Zustandsregelung
4. Quadratische Ljapunov-Funktionen

Literatur: Feedback Control of Dynamic Systems (Sixth Edition)

Authors: Gene F. Franklin, J. David Powell (Stanford University), Abbas Emami-Naeini, SC Solutions, Inc.

Chapter 7: State-Space Design (online copy on Moodle)

1. Zustandsraumbegriff in der Modellbildung

- *Zustände* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beschreiben die Variablen von n (inneren) *konzentrierten Energiespeichern* eines dynamischen Systems n‘ter Ordnung
- Dynamik in System setzt Energiespeicherung voraus
- *Zustände bzw. Zustandsvariablen* beschreiben den Energiegehalt der in einem dynamischen System enthaltenen Speicherelemente
- Zustandsvariablen sind z. B.
  - Spannung u an einem Kondensator
  - Strom i in einer Induktivität
  - Auslenkung x der Feder
  - Geschwindigkeit dx/dt der Masse
  - Drehzahl *omega* einer rotierenden Masse

1. Zustandsraumbegriff in der Modellbildung

- Neben realen physikalischen Energien kann der Energiebegriff auch auf rein informationsverarbeitende Systeme (Routing Systeme, Warteschlangen Mechanismen etc.) oder hybride Systeme (Cyberphysical systems) erweitert werden

- Zustände werden in Zustandsvektoren zusammengefasst

  x = (*x1, x2, ... , xn)^T \in R^nxn*

- Zustandsvektoren spannen Zustandsräume der *n*'ten Dimension auf

- Zustandsraummodelle enthalten den Zustandsvektor ***x*** (Dimension n), den Eingangsvektor ***u*** (Dimension m) und den Ausgangsvektor ***y*** (Dimension p) als Variablen

- Zustandsraummodelle bestehen aus einer Differentialgleichung des Zustandsvektors mit Eingangsvektor und einer Ausgangsgleichung

1. Zustandsraumbegriff in der Modellbildung

- Zustandsraummodell: Zustandsdifferentialgleichung, Ausgangsgleichung

  $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ mit $\boldsymbol{x}$ als Zustandsvektor, $\boldsymbol{u}$ als Eingangsvektor

  $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ mit $\boldsymbol{y}$ als Ausgangsvektor

- Zustandsraummodelle ermittelt man über die Methoden der mathematischen Modellbildung oder Systemidentifikation

- Lösung eines Zustandsraumodelles lautet $\boldsymbol{x}(t)$ für t = [0 ….. infinit)

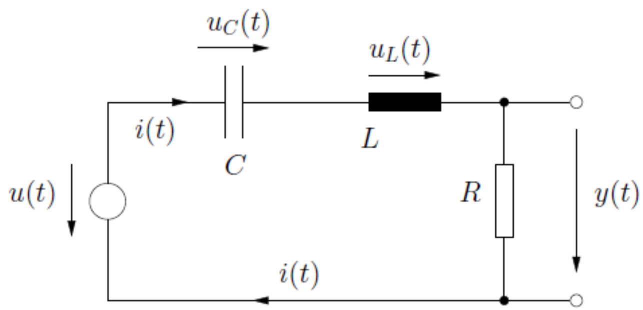
- Analytische Lösung ist bei Nichtlinearitäten meist nicht bestimmbar

- Simulation als Integration von $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ liefert numerische Lösung
- Bestimmte Klassen von Zustandsraummodellen lassen sich auch ohne analytische Lösung über die Eigenschaften der Systemmatrizen, dem bestimmen einer Lyapunov Funktion etc. analysieren

1. Zustandsraumbegriff in der Modellbildung

Zustandsraummodelle Beispiele

1.) elektrischer Schaltkreis



$\sum u = 0 \qquad -u + u_C + u_L + u_R = 0$

$u_L = L \frac{di}{dt} \quad , \quad u_R = i\,R$

$$-u + u_C + L\frac{di}{dt} + i\,R = 0 \qquad (1)$$

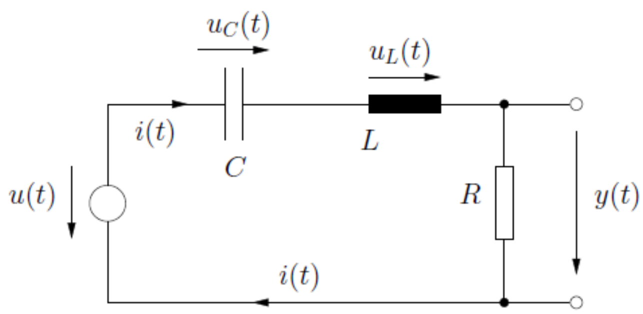
Zustände sind die Spannung an Kondensator $u_C =: x_1$

und der Strom durch die Induktivität $i =: x_2$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_C \\ i \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Zustandsraummodelle Beispiele

1.) elektrischer Schaltkreis



aus (1) folgt mit den Definition in (2) die DGL

$$L \dot{x}_2 = -R x_2 - x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R}{L} x_2 - \frac{1}{L} x_1 + \frac{1}{L} u \qquad (3)$$

weiterhin gilt $Q = C u_C$

$$\frac{dQ}{dt} = i = C \frac{du_C}{dt}$$

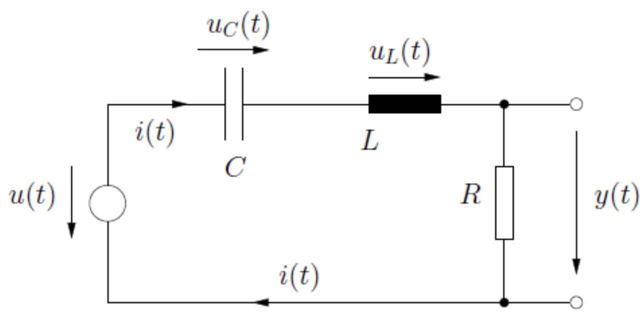
mit (2) folgt

$\Rightarrow$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C} x_2 \qquad (4)$$

Zustandsraummodelle Beispiele

1.) elektrischer Schaltkreis



(3) und (4) werden in eine DGL mit dem Zustandsvektor $\underline{x} = (x_1 \;\; x_2)^T$ zusammengefaßt

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} x_2 \\ -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \end{pmatrix}$$

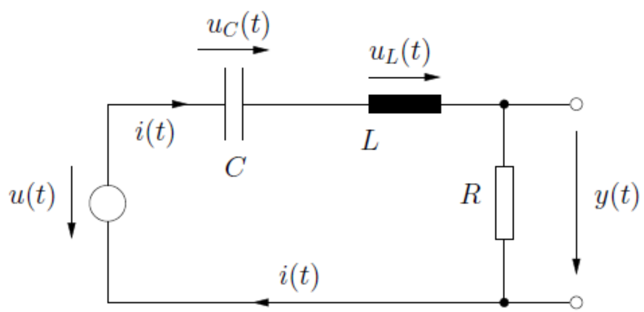
$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix} u} \qquad (5)$$

(5) bezeichnet die <u>Zustandsdifferentialgleichung</u>

1. Zustandsraumbegriff in der Modellbildung

Zustandsraummodelle Beispiele

1.) elektrischer Schaltkreis



Die Ausgangsgleichung ergibt sich durch den Zusammenhang mit dem Zustandsvektor

$$y = R \underbrace{i}_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

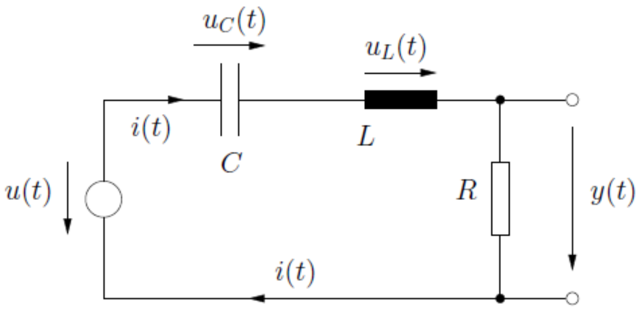
$$y = \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

1. Zustandsraumbegriff in der Modellbildung

Zustandsraummodelle Beispiele

1.) elektrischer Schaltkreis



(3) und (4) werden in einer DGL mit dem Zustandsvektor $\underline{x} = (x_1 \;\; x_2)^T$ zusammengefaßt

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} x_2 \\ -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix} u} \quad (5)$$

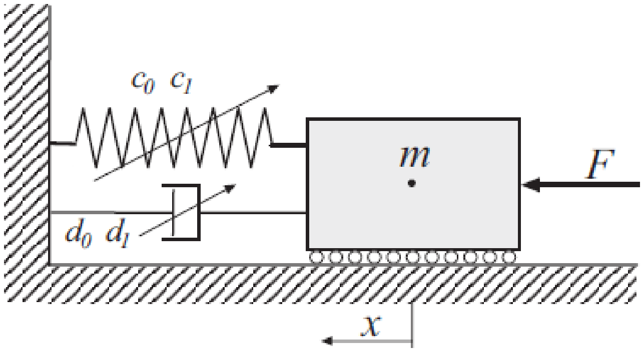
(5) bezeichnet die <u>Zustandsdifferentialgleichung</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

1. Zustandsraumbegriff in der Modellbildung

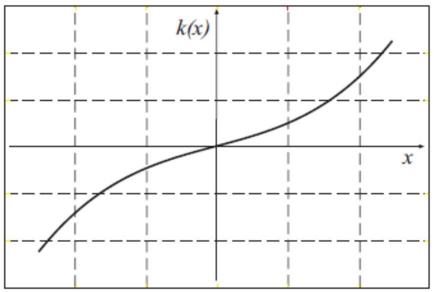
Zustandsraummodelle Beispiele

2.) mechanisches 1-DOF Modell mit nichtlinearer Feder, nichtlinearem Dämpfer

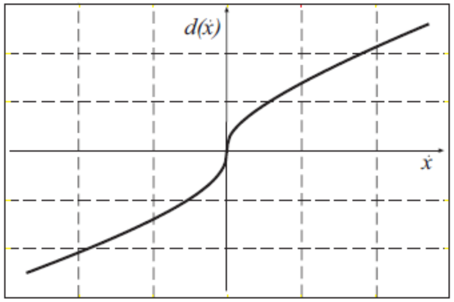


nichtlineare Feder

$$k(x) = c_0\, x + c_1\, x^3\,, \qquad c_0 > 0\,, \quad c_1 > 0$$



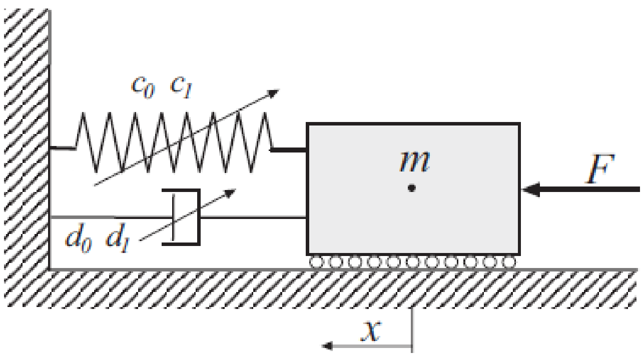
nichtlinearer Dämpfer



$$d(\dot{x}) = d_0\, \dot{x} + \mathrm{sgn}(\dot{x})\, d_1\, \sqrt{|\dot{x}|} = \begin{cases} d_0\, \dot{x} - d_1\, \sqrt{|\dot{x}|} & \text{falls } \dot{x} < 0 \\ d_0\, \dot{x} + d_1\, \sqrt{\dot{x}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Zustandsraummodelle Beispiele

2.) mechanisches 1-DOF Modell mit nichtlinearer Feder, nichtlinearem Dämpfer



$$m\ddot{x} = F - d_0\dot{x} - \operatorname{sgn}(\dot{x})\, d_1 \sqrt{|\dot{x}|} - c_0 x - c_1 x^3$$

$$x_1 = x \qquad x_2 = \dot{x} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$m\dot{x}_2 = F - d_0 x_2 - \operatorname{sgn}(x_2)\, d_1 \sqrt{|x_2|} - c_0 x_1 - c_1 x_1^3$$

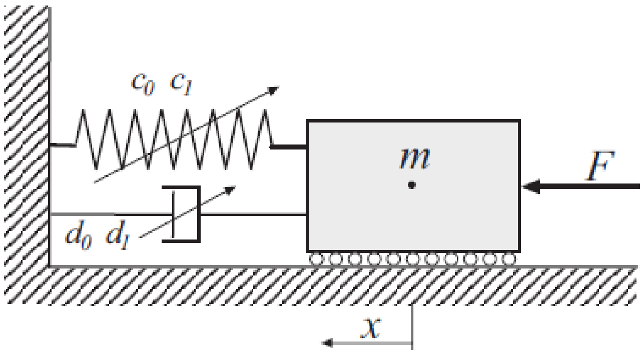
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}F - \frac{d_0}{m}x_2 - \frac{d_1}{m}\operatorname{sgn}(x_2)\sqrt{|x_2|} - \frac{c_0}{m}x_1 - \frac{c_1}{m}x_1^3$$

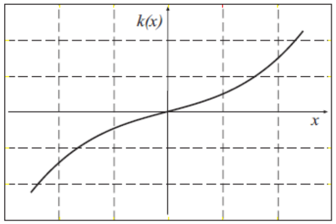
$$\dot{x}_1 = x_2$$

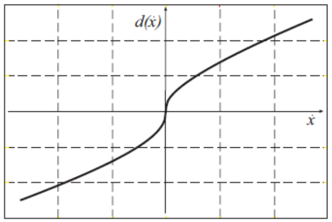
1. Zustandsraumbegriff in der Modellbildung

Zustandsraummodelle Beispiele

2.) mechanisches 1-DOF Modell mit nichtlinearer Feder, nichtlinearem Dämpfer





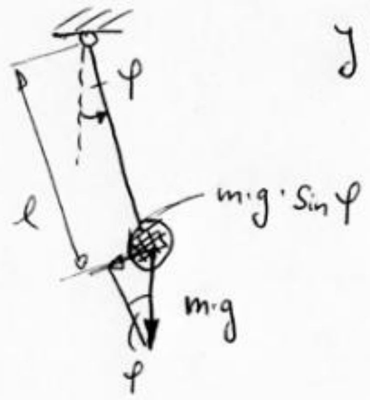


$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c_0}{m} & -\frac{d_0}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} F}_{\text{lin. Anteil}} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{d_1}{m}\,\mathrm{sgn}\,x_2\sqrt{|x_2|} - \frac{c_1}{m}x_1^3 \end{pmatrix}$$

nichtlin. Anteil

Zustandsraummodelle Beispiele

3.) Mathematisches Pendel



$$J \ddot{\varphi} = \sum M$$

Steinersche Satz

$$J = l^2 m$$

$$l^2 m \ddot{\varphi} = -m \cdot g \sin\varphi \cdot l$$

$$m\, l \ddot{\varphi} = -g \sin\varphi \qquad x_1 = \varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin\varphi \qquad x_2 = \dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_2 = g/l \sin x_1 \quad , \quad \dot{x}_1 = \dot{\varphi} = x_2$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g/l \sin x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_1) \end{pmatrix} = \underline{f}(\underline{x})$$

2. Lineare zeitinvariante Zustandsraummodelle

Struktur

$d\boldsymbol{x}/dt = \mathbf{A}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{B}\,\boldsymbol{u}$ Zustandsdifferentialgleichung

$\boldsymbol{y} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{D}\,\boldsymbol{u}$ Ausgangsgleichung

$\boldsymbol{x} = [\, x_1, x_2, \ldots , x_n \,]^T$ Zustandsvektor mit Zustandsvariablen

$\boldsymbol{u} = [\, u_1, u_2, \ldots , u_m \,]^T$ Eingangsvektor mit m-Eingängen

$\boldsymbol{y} = [\, y_1, y_2, \ldots , y_p \,]^T$ Ausgangsvektor mit p-Ausgängen

2. Lineare zeitinvariante Zustandsraummodelle

Modellbildung

- Folgt aus den *first prinziples* (Newton-Euler, Kirchhoff) und konstituierenden Gleichungen
- Unterteilung der Variablen in Eingänge, Ausgänge und innere Zustandsvariablen
- Zustandsvariablen sind die Energiespeichern des System zugeordnet
- Wahl der Ausgänge ergibt sich aus den vorhandenen Messwerten (Sensoren)
- Wahl der Eingänge folgt aus den vorhandenen Aktuatoren
- System was sich aus der Modellbildung ergibt ist entweder linear zeitinvariant oder nichtlinear in den Eingängen und/oder Zuständen
- Beispiele: elektrischer Schaltkreis, nichtlinear in den Zuständen

2. Lineare zeitinvariante Zustandsraummodelle

Näherung des nichtlinearen Systems um Gleichgewichtspunkte mittels Lineares zeitinvariantes Zusstandsraummodell

- **Methoden**

1. Taylor Linearisierung des nichtlinearen Systems um Gleichgewichtspunkte
2. Approximation von Winkelbeziehungen mit der Gültigkeit der Annahme kleiner Winkel φ

$$\sin\varphi = \varphi, \qquad \cos\varphi = 1$$

- Inverses Pendel
- Swing Equation in der elektrischen Energietechnik

2. Lineare zeitinvariante Zustandsraummodelle

Taylor Linearisierung

- Linearisierung des nichtlinearen Systems $d\mathbf{x}/dt = \boldsymbol{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$
- Motivation
  - ermöglicht Beschreibung der Dynamik des nichtlinearen Systems um Gleichgewichtspunkte
  - Beschreibung der Dynamik im Linearen ermöglicht eine umfangreiche Analyse und Synthese mittels Methoden der linearen Algebra (wolhbekannter Framework auch für große Systeme)
- Gleichgewichtspunkte $\{\mathbf{x}_C,\mathbf{u}_C\}$ erfüllen die Gleichung $0 = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_C,\mathbf{u}_C)$
- Dynamik des linearen Systems um die Gleichgewichtspunkte mit

$$\Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_c \qquad \Delta \underline{u} = \underline{u} - \underline{u}_c$$

2. Lineare zeitinvariante Zustandsraummodelle

Taylor Linearisierung

Lineares Ersatzmodell   Originalmodell

$$\Delta\dot{\underline{x}} = A\,\Delta\underline{x} + B\,\Delta\underline{u} \;\approx\; \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$$

um Gleichgewichtspunkt

$$A = \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}_e,\underline{u}_e}, \quad B = \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\right|_{\underline{x}_e,\underline{u}_e}$$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

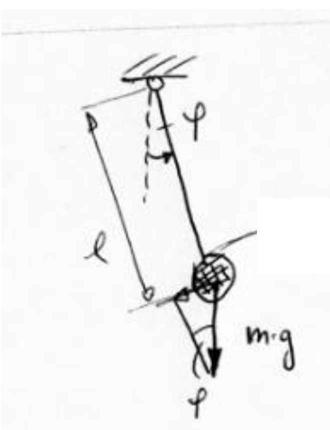
2. Lineare zeitinvariante Zustandsraummodelle

Taylor Linearisierung: Beispiel mathematisches Pendel

$$\underbrace{\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})}_{\text{allg. Struktur}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_1) \end{pmatrix}}_{\text{Pendel ohne externe Eingänge}}$$

Pendel ohne externe Eingänge
rein autonomes System

$\underline{f}(\underline{x}) \overset{!}{=} \underline{0}$ $\qquad x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}$



$f_1(x_2) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = 0$

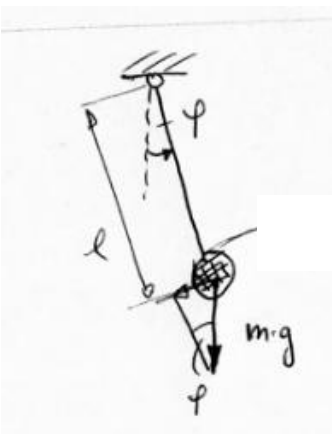
$f_2(x_1) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{g}{\ell} \sin x_1 = 0$

$\rightsquigarrow \quad x_1 = 0$

$ \quad x_1 = \frac{\pi}{2}$

Zwei Gleichgewichtspunkte

Taylor Linearisierung: Beispiel mathematisches Pendel



Ersatzmodelle für $x_1 \in [0, \pi/2]$: hängendes Pendel
inverses Pendel

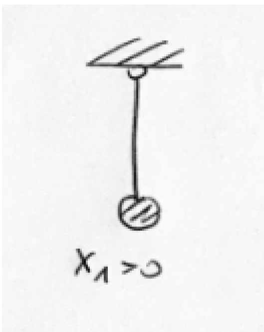
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -g/\ell \cos x_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

$$A = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\underline{x}_c} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

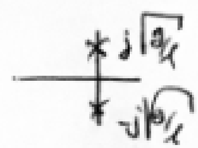
Keine Eingänge

Taylor Linearisierung: Beispiel mathematisches Pendel



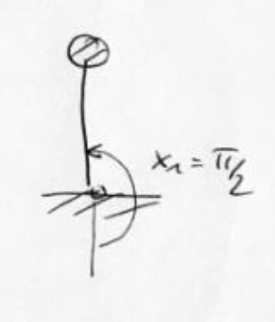
$$\Delta \dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix}}_{A_1} \Delta \underline{x} \qquad \text{für } x_1 = 0 \qquad \text{hängendes Pendel}$$

$$\text{eig } A_1 = \pm j\sqrt{g/l}$$



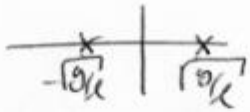
2. Lineare zeitinvariante Zustandsraummodelle

Taylor Linearisierung: Beispiel mathematisches Pendel



$$\Delta \dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}}_{A_2} \Delta \underline{x} \qquad \text{für } x_1 = \pi/2$$

$$\operatorname{eig} A_2 = \left\{ \begin{matrix} -\sqrt{g/l} \\ \sqrt{g/l} \end{matrix} \right\}$$



3. Einführung in die Zustandsregelung

Eigenschaften der Zustandsrückführung

- Rückführung aller Systemzustände auf die Systemeingänge mit zusätzlicvher Vorgabe eines Referenzwerts $\mathbf{r}(\mathrm{t})$ zur Folgeregelung

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{f_u}(\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t), t)$$

- Rückführung erfolgt bei der linearen Zustandsregelung als gewichtete lineare Kombination aller Zustände

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\,\mathbf{x}(\mathrm{t}) + \mathbf{F}\,\mathrm{r}(\mathrm{t})$$

- Regler selber ist dynamiklos, allein durch Rückführung wird die Systemdynamik manipuliert (zielgerichtet => Reglerdesign)
- Beispiel m=1: $u = -k_1\,x_1 - \ldots\ldots -k_n\,x_n + v\,r$

- Abgrenzung zur PID Regelung
  - Ausgangsregelung, da nur diese zurückgeführt werden
  - enthält mit D- und I-Anteil eine eigene Dynamik

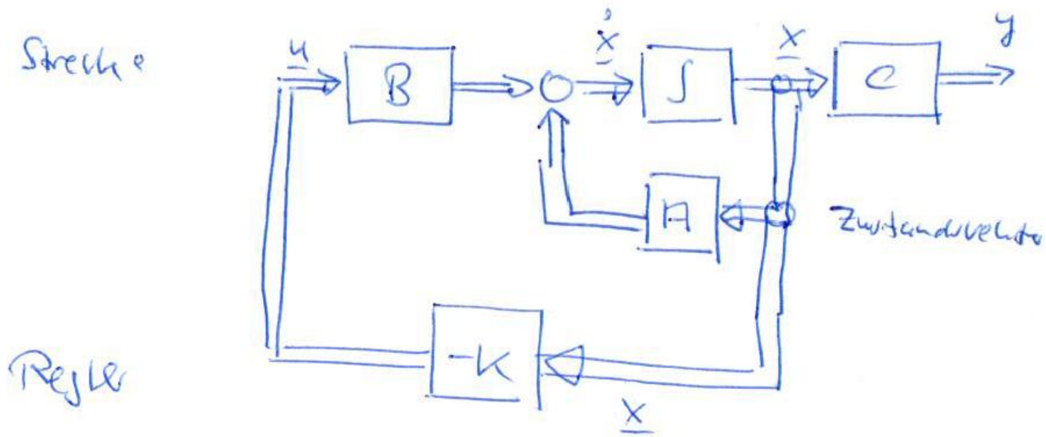
3. Einführung in die Zustandsregelung

Regelungsstrukturen linearer Zustandsregler

1. einfache Zustandsrückführung

- **Strukturbild mit Strecke / Regelgesetz**

$$\underline{u} = -K\,\underline{x}$$



- **Nachteil**

  - Regelung aller Zustände in den Ursprung

- **Vorteile**

  - einfache Struktur

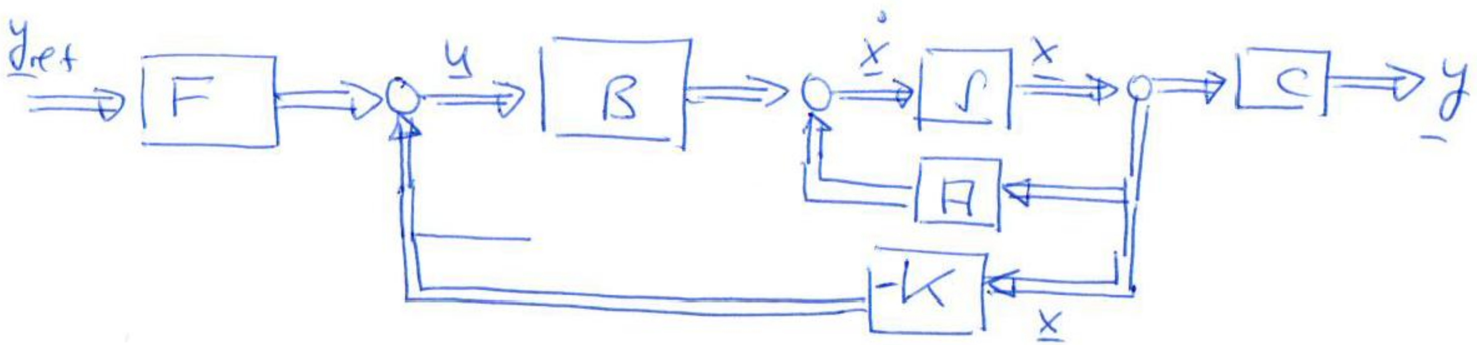
  - ausreichend, wenn Regelziele damit erfüllt sind

3. Einführung in die Zustandsregelung

Regelungsstrukturen linearer Zustandsregler

2. Zustandsrückführung mit Referenzwertvorgabe mittels Vorfilter

- **Strukturbild mit Strecke/ Regelgesetz** $\underline{u} = F\, y_{ref} - K\, \underline{x}$



- **Nachteil**
  - nicht stationär exakt (Referenzwert wird nicht erreicht) bei Modellunsicherheiten
- **Vorteile**
  - schnell (da keine Integration enthalten , vgl. siehe 3.)

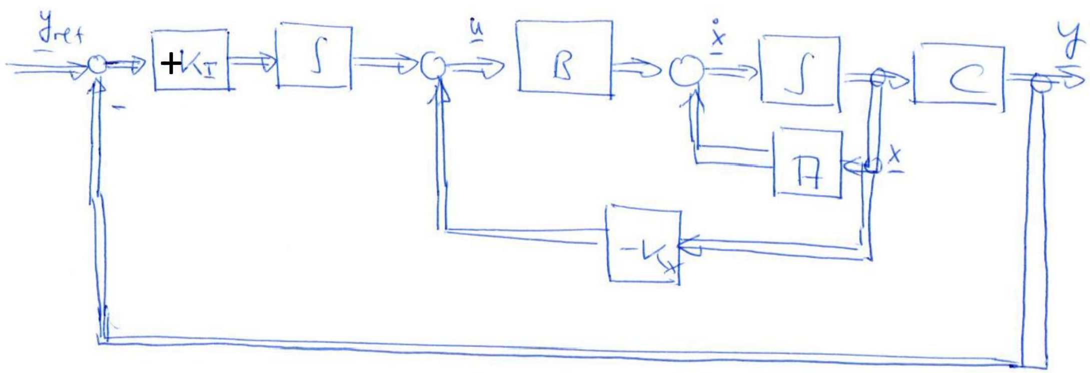
3. Einführung in die Zustandsregelung

Regelungsstrukturen linearer Zustandsregler

3. Zustandsrückführung mit Referenzwertvorgabe und zusätzlicher Ausgangsrückführung zur Bildung der Regelfehlers

- **Strukturbild mit Strecke / Regelgesetz**

$$\underline{u} = +K_I \int_0^t \left(y_{ref}(\tau) - y(\tau)\right) d\tau - K_x \, \underline{x}$$



- **Vorteil**
  - stationär exakt (Referenzwert wird nicht erreicht) auch bei Modellunsicherheiten
- **Nachteil**
  - langsamer als Referenzwertvorgabe mittels Vorfilter

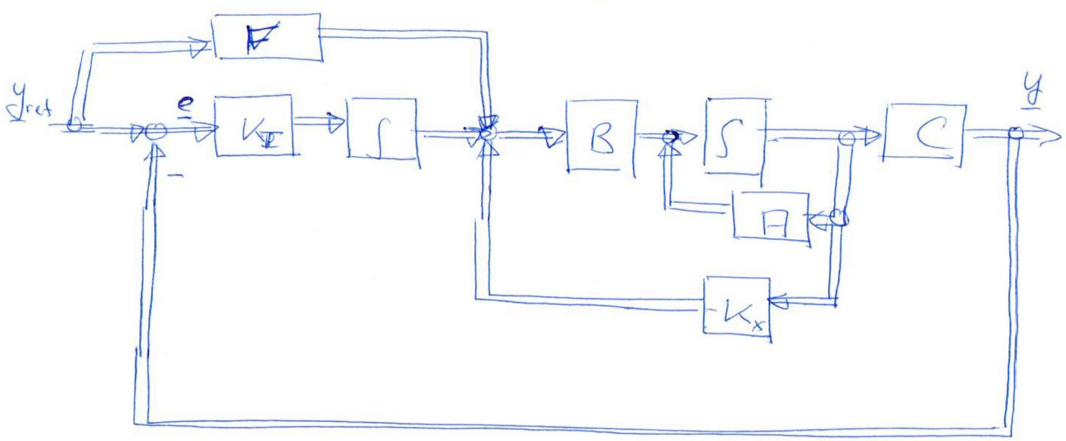
3. Einführung in die Zustandsregelung

Regelungsstrukturen linearer Zustandsregler

4. Zustandsrückführung mit Referenzwertvorgabe, Ausgansgrückführung zur Bildung der Regelfehlers und Vorfilter

- **Strukturbild mit Strecke / Regelgesetz**

$$u = F\, y_{ref} + K_I \int_0^t (\underline{y}_{ref} - \underline{y})\, d\tau - K_x\, \underline{x}$$



- **Vorteile**
  - stationär exakt (Referenzwert wird nicht erreicht) auch bei Modellunsicherheiten
  - Schnelligkeit weil mittels Vorfilter Referenzwerte direkt aufgeschaltet werden
- **Nachteil**
  - aufwendiger Entwurf

3. Einführung in die Zustandsregelung

Methoden des Reglerentwurf für die Klasse der linearen Zustandsregler

- Annahme: System wird mittels linearer Zustandsraummodelle hinreichend gut beschrieben
- d.h. es wird mit dem folgenden Modell beschrieben

  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}\,, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}$ *(siehe Abschnitt 2)*

- **Methoden**

  1. Vorgabe der Polstellen des geschlossenen Kreises

$$\underbrace{\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}}_{\text{desired closed loop poles}} = \underbrace{\text{eig}\ \mathbf{(A\text{-}BK)}}_{\text{solution of eigenvalue problem}} \Rightarrow \underbrace{\mathbf{K}}_{\text{gives state feedback gain}}$$

  - Berechnungsverfahren für SISO Systeme
    - Ackermannformel (*wird noch vorgestellt*)
  - Berechnungsverfahren für MIMO Systeme
    - Modale Regelung und Entkopplung nach Falb-Wolovich

3. Einführung in die Zustandsregelung

Methoden des Reglerentwurfs für die Klasse der linearen Zustandsregler

- **Methoden**

  2. Ljapunov-basierte Vorgabe von Polstellenregionen

  - Berechnungsverfahren für SISO <u>und</u> MIMO Systeme

    – im Gegensatz zur exakten Polstellenvorgabe werden gewünschte <u>Polstellenregionen</u> vorgegeben

    – Designansatz: Vorgabe Ljapunov-Funktionskandidaten in einer kanonischen quadratischen Form

    – das Finden einer Ljapunovfunktion wird dabei zurückgeführt auf die Berechnung von positiv definiten Matrizen

    – Berechnung basiert auf numerischen konvexen Optimierungsverfahren für lineare Matrixungleichungen

    – Vorteil: sehr flexibel und skalierbar

    -> skalierbar: Vorgabe von zusätzlich Anforderung an die Regelung

4. Quadratische Ljapunov Funktionen

Motivation

- **Ljapunovfunktionen sind additiv wie die Energien bei der Lagrange Energiemethode**
- Quadratische Funktionen eignen sich als Funktionskandidaten für lineare Systeme
- Gewichete Kombination von linearen Systemen zur Beschreibung von nichtlinearer Systemen können aufgrund der additiven Eigenschaften der Ljapunovfunktion ebenfalls mittels quadratischer Ljapunov Funktionen behandelt werden (Analyse / Synthese)
- das Finden von quadratischen Ljapunovfunktionen wird reduziert auf die berechnung von Linearen Matrixgleichungen und (flexibler) lienaren Matrixungleichungen
- aus diesem Grund werden im folgenden Grundlagen zur Matrixalgebra vorgestellt

4. Quadratische Ljapunov Funktionen

Grundlagen: Matrixalgebra

SYMMETRIC, SKEW-SYMMETRIC, AND POSITIVE DEFINITE MATRICES

Definition 3.10 *A square matrix* $\mathbf{M}$ *is symmetric if* $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ *(in other words, if* $\forall\, i, j \quad M_{ij} = M_{ji}$*). A square matrix* $\mathbf{M}$ *is skew-symmetric if* $\mathbf{M} = -\mathbf{M}^T$ *(i.e, if* $\forall\, i, j \quad M_{ij} = -M_{ji}$*).*

An interesting fact is that any square $n \times n$ matrix $\mathbf{M}$ can be represented as the sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix. This can be shown by the following decomposition

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{M} + \mathbf{M}^T}{2} + \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}^T}{2}$$

where the first term on the left side is symmetric and the second term is skew-symmetric.

4. Quadratische Ljapunov Funktionen

Grundlagen: Matrixalgebra

Another interesting fact is that the quadratic function associated with a skew-symmetric matrix is always zero. Specifically, let $\mathbf{M}$ be a $n \times n$ skew-symmetric matrix and $\mathbf{x}$ an arbitrary $n \times 1$ vector. Then the definition of a skew-symmetric matrix implies that

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = -\,\mathbf{x}^T \mathbf{M}^T \mathbf{x}$$

Since $\mathbf{x}^T \mathbf{M}^T \mathbf{x}$ is a scalar, the right-hand side of the above equation can be replaced by its transpose. Therefore,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = -\,\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$$

This shows that

$$\forall\, \mathbf{x}\,,\;\; \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = 0 \tag{3.16}$$

In designing some tracking control systems for robots, for instance, this fact is very useful because it can simplify the control law, as we shall see in chapter 9.