



Hochschule für Technik
und Wirtschaft Berlin

University of Applied Sciences

Schwungrad Pendel: Modellbildung/Simulation (M2)

Name:

Milan Larsen

Sebastian Richter

Cyrill Schmiedehausen

Aaron Zielstorff

Matrikelnummer:

581929

572906

XXXXXX

567183

Fachbereich: FB1

Studiengang: M. Elektrotechnik

Fachsemester: 2. FS

Fach: M2 Modellbildung/Simulation

Dozent: Prof. Dr.-Ing. Steffen Borchers

Abgabe am: 23. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Versuchsaufbau	6
2	Modellierung des Schwungrad-Pendels	8
2.1	Modellierung des Gleichstrommotors	8
2.2	Modellierung des Schwungrad-Pendels	9
2.2.1	Lagrange Ansatz	9
2.2.2	Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen	9
2.2.3	Generalisierte Koordinaten	10
2.2.4	Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie	10
2.2.5	Herleitung der Bewegungsgleichungen	11
3	Zustandsraumdarstellung	12
3.1	Nichtlineares Zustandsraummodell	12
3.2	Lineares Zustandsraummodell	13
4	Vergleich lineares/nichtlineares System	16
5	Sensitivitätsanalyse der Modellparameter	18
5.1	Lokale und globale Sensitivitätsanalyse	18
5.2	Parameter	19
6	Globale Sensitivitätsanalyse nach Monte Carlo Methode	28
7	Aufschwingen des Schwungrad-Pendels	36
8	Zustandsregler	37
8.1	Reglerentwurf	37
8.1.1	Nachweis der Steuerbarkeit	37
8.1.2	Reglergesetz	38
8.1.3	Lineare Matrixungleichungen	39
8.2	Reglervalidierung am linearen Modell	41
8.3	Regleranwendung am nichtlinearen Modell	46
9	Beobachterentwurf	48
10	Ausblick	49

Abbildungsverzeichnis

1.1	Modellskizze des Versuchs	7
2.1	Ersatzschaltbild Gleichstrommotor	8
4.1	Übersicht der Simulationsstruktur	16
4.2	Nichtlineare Strecke	16
4.3	Lineare Strecke	16
4.4	Vergleich der Pendelwinkel θ - kleine Auslenkung	17
4.5	Vergleich der Pendelwinkel θ - große Auslenkung	17
5.1	Modellantwort auf Eingangssprung der Motorspannung	20
a	Schwungrad Geschwindigkeit	20
b	Schwungrad Beschleunigung	20
c	Pendel Beschleunigung	20
d	Motor Moment	20
e	Pendel Geschwindigkeit	20
f	Pendel Winkel	20
5.2	Modellantwort auf Varianz des Parameters: l_2	22
a	Schwungrad Geschwindigkeit	22
b	Schwungrad Beschleunigung	22
c	Pendel Beschleunigung	22
d	Motor Moment	22
e	Pendel Geschwindigkeit	22
f	Pendel Winkel	22
5.3	Modellantwort auf Varianz des Parameters: J_2	23
a	Schwungrad Geschwindigkeit	23
b	Schwungrad Beschleunigung	23
c	Pendel Beschleunigung	23
d	Motor Moment	23
e	Pendel Geschwindigkeit	23
f	Pendel Winkel	23
5.4	Modellantwort auf Varianz des Parameters: M_2	24
a	Schwungrad Geschwindigkeit	24
b	Schwungrad Beschleunigung	24
c	Pendel Beschleunigung	24
d	Motor Moment	24
e	Pendel Geschwindigkeit	24
f	Pendel Winkel	24
5.5	Modellantwort auf Varianz des Parameters: C_1	25
a	Schwungrad Geschwindigkeit	25

b	Schwungrad Beschleunigung	25
c	Pendel Beschleunigung	25
d	Motor Moment	25
e	Pendel Geschwindigkeit	25
f	Pendel Winkel	25
5.6	Modellantwort auf Varianz des Parameters: C^2	26
a	Schwungrad Geschwindigkeit	26
b	Schwungrad Beschleunigung	26
c	Pendel Beschleunigung	26
d	Motor Moment	26
e	Pendel Geschwindigkeit	26
f	Pendel Winkel	26
6.1	Scatterplot über alle Parameter	29
6.2	Scatterplots über die maximale Schwungradgeschwindigkeit	30
a	Korrelation Motorspannung V_m	30
b	Korrelation Reibung C_2	30
6.3	Scatterplots über die Einschwingzeit der Schwungradgeschwindigkeit	30
a	Korrelation Reibung C_2	30
b	Korrelation Trägheitsmoment J_2	30
6.4	Korrelation Trägheitsmoment J_2	31
6.5	Scatterplot über die maximale Schwungradbeschleunigung	31
6.6	Scatterplots über die Einschwingzeit der Schwungradbeschleunigung	32
a	Korrelation Reibung C_2	32
b	Korrelation Trägheitsmoment J_2	32
6.7	Scatterplots über die maximale Pendelauslenkung	32
a	Korrelation Motorspannung V_m	32
b	Korrelation Trägheitsmoment J_2	32
c	Korrelation Länge l_2	32
6.8	Korrelation Reibung C_1	33
6.9	Scatterplot über die Pendeleinschwingzeit	33
6.10	Korrelation Trägheitsmoment J_2	33
6.11	Scatterplot über die maximale Pendelgeschwindigkeit	33
6.12	Korrelation Trägheitsmoment J_2	34
6.13	Scatterplot über die maximale Pendelbeschleunigung	34
6.14	Korrelation Motorspannung V_m	35
6.15	Scatterplot über das maximale Motormoment	35
6.16	Scatterplots über die Einschwingzeit des Motormoments	35
a	Korrelation Reibung C_2	35
b	Korrelation Trägheitsmoment J_2	35

8.1	Systemstruktur mit einfacher Zustandsrückführung	38
8.2	Einschränkung der Polregion bei exponentieller Stabilität	39
8.3	Einschränkung der Polregion bei Erweiterung der LMI	40
8.4	Polstellen der Systemmatrix	41
8.5	Polstellenlagen der Systemmatrix und des geschlossenen Regelkreises . . .	45
8.6	Relevante Kurvenverläufe zur Validierung des Reglers	46
8.7	Relevante Kurvenverläufe zur Anwendung des Reglers	47

Tabellenverzeichnis

1.1	Modellparameter des Schwungrad-Pendels	6
6.1	Varianz der Modellparameter des Schwungrad-Pendels	28
8.1	Auswertung von V_m für unterschiedliche Anfangsauslenkungen	42
8.2	Auswertung von V_m bei einem Anfangswinkel von 15°	43
8.3	Auswertung von V_m bei einem Anfangswinkel von 14°	44

1 Einführung und Versuchsaufbau

Inhalt dieser Belegarbeit ist die Modellierung eines inversen Pendels, welches über ein Schwungrad regelungstechnisch in der aufrechten Position stabil gehalten werden soll.

Diese Arbeit geht dabei im ersten Abschnitt auf den **Versuchsaufbau** und die **Modellierung** des Pendels ein. Es schließt sich eine

Sensitivitäts- und Parameteranalyse an, über welche der Einfluss bestimmter Modellgrößen auf das Verhalten des Systems untersucht wird.

Nachdem das Modell aufgestellt und auf seine Eigenschaften analysiert wurde, folgt die Implementierung als Simulation in Matlab/Simulink. Dafür soll zunächst das **Aufschwingen des Pendels** umgesetzt werden. Kann das Pendel bis in einen bestimmten Bereich um die obere Ruhelage bewegt werden, übernimmt ein **einfacher Zustandsregler**, welcher ebenfalls in dieser Arbeit entworfen wird.

Abschließend wird ein **Beobachter** umgesetzt, über welchen die nicht messbaren Zustände des Systems rekonstruiert werden können, um den Regler am realen Versuch in Betrieb zu nehmen.

Nachfolgend findet sich die Darstellung der Modellparameter/Konstanten zur Modellierung des Schwungrad-Pendels (siehe Tabelle 1.1).

Symbol	Parameter	Wert/Einheit
θ	Winkel des Pendels	rad
φ	Winkel des Schwungrades	rad
J_1	Trägheitsmoment des Pendels (+ Motorstator)	$0.01186 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
J_2	Trägheitsmoment des Rads (+ Motorrotor)	$0.0005711 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
c_1	Reibungsfaktor des Pendels	$0.04 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
c_2	Reibungsfaktor des Rads	$0.0001 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
m_1	Masse des Pendels und Stators	0.826 kg
m_2	Masse des Rads und Rotors	0.583 kg
l_1	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Pendels	0.1053 m
l_2	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Rads	0.14 m
K_b	Back-End-Konstante	$0.0987 \frac{\text{V}}{\text{rad}}$
K_t	Motor-Drehmoment-Konstante	$0.0987 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}}$
R_a	Widerstand der Ankerwicklung	1.5562Ω

Tab. 1.1: Modellparameter des Schwungrad-Pendels

Ziel der Arbeit soll es sein, anhand von Beispielparametern eine effektive Regelung umzusetzen, welche später bei der Übernahme auf einen realen Versuchsaufbau einfach adaptiert

werden kann. Dazu ist es wichtig ein gutes Modell umzusetzen und den Einfluss der verschiedenen Modell- und Regelparame-ter auf das Verhalten des Systems zu kennen.

Abbildung 1.1 zeigt den modellhaften Versuchsaufbau. Das System besteht aus einem Pendel und einem Schwungrad. Das Pendel kann frei rotieren um die Oz -Achse, die senkrecht zur Oxy -Ebene steht. Das Schwungrad wird durch einen Gleichstrommotor angetrieben und dreht sich um eine Achse parallel zur Oz -Achse. Das Pendel kann durch die Reaktionskraft ausbalanciert werden, die durch das Schwungrad erzeugt wird.

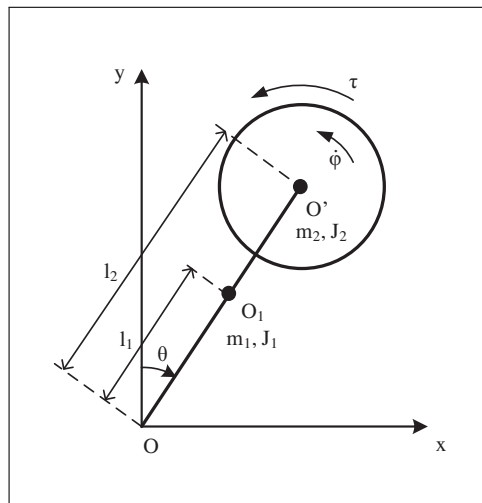


Abb. 1.1: Modellskizze des Schwungrad-Pendel-Versuchs inklusive relevanter Modellparameter

Weiterhin gelten folgende Voraussetzungen für das System:

- Das Pendel ist frei gelagert.
- Der Motor (Gleichstrommaschine) ist spannungsgeregt (bei $V_{m,Max} = 20\text{ V}$).
- Der Winkel (θ) des Pendels und der Winkel (φ) des Schwungrades werden gemessen.

Es sind folgende Einschränkungen ermittelt/festgelegt worden:

- Das Aufschwingen soll über eine schnelle Steuerung umgesetzt werden.
- Es soll ein Zustandsregler mit vier Zuständen (x_1 bis x_4) verwendet werden für die Regelung um die Ruhelage.
- Für die Ermittlung der Winkelgeschwindigkeiten ($\dot{\theta}$ und $\dot{\varphi}$) ist die Rekonstruktion über einen Beobachter notwendig.

2 Modellierung des Schwungrad-Pendels

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Modellierung des Schwungrad-Pendels inklusive des treibenden Gleichstrommotors.

2.1 Modellierung des Gleichstrommotors

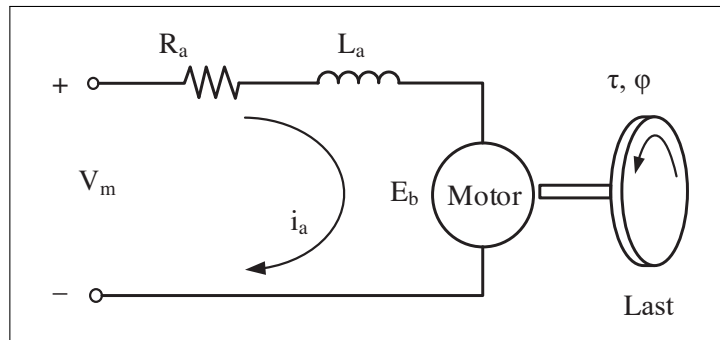


Abb. 2.1: Ersatzschaltbild des Gleichstrommotors am Schwungrad-Pendel

Abbildung 2.1 zeigt das Ersatzschaltbild des Gleichstrommotors am Schwungrad-Pendel. Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz ergibt folgende Gleichung:

$$V_m = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_b \quad (2.1)$$

Die gegenelektromotorische Kraft (EMK) hängt von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und der Gegen-EMK-Konstante K_b wie folgt ab:

$$E_b = K_b \dot{\varphi} \quad (2.2)$$

Angenommen die Wirkung der Induktivität ist sehr klein ($L_a \ll R_a$), Gleichung 2.1 ergibt sich zu

$$i_a = \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a}. \quad (2.3)$$

Das Motordrehmoment τ ist mit dem Ankerstrom i_a durch eine Motordrehmomentkonstante K_t verbunden. Die Modellgleichung des Gleichstrommotors ergibt sich somit zu:

$$\tau = K_t i_a = K_t \frac{V_m - K_b \dot{\phi}}{R_a} \quad (2.4)$$

2.2 Modellierung des Schwungrad-Pendels

Zur Modellierung des Pendels wurde der Lagrange-Ansatz gewählt, um die Bewegungsgleichungen des Pendels herzuleiten.

2.2.1 Lagrange Ansatz

Die nachfolgende Gleichung zeigt den **Lagrange Ansatz** unter Berücksichtigung der **dissipativen Funktion**. Diese besagt in Erweiterung zu der Lagrange-Formulierung, dass Energie in einem Vorgang in Wärme umgewandelt wird. Mit Hilfe der dissipativen Funktion können **Reibungsverluste** bei der Energiemethode nach Lagrange berücksichtigt werden.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.5)$$

2.2.2 Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen

In Abbildung 1.1 sind zwei Teilchen bzw. Massepunkte im \mathbb{R}^2 zu erkennen. Zum Einen die des Pendels und zum Anderen die des Schwungrades. Somit gilt grundsätzlich:

- 2 Punkte: 4 Freiheitsgrade (FHG)

Das Schwungrad-Pendel besitzt jedoch auch zwei Zwangsbedingungen, die wie folgt formuliert werden können:

- Das Pendel kann nur um die 0z-Achse rotieren:
 $z = 0$
- Die Masse m_2 ist über des Pendel mit dem Aufhängepunkt 0 gekoppelt:
 $(y_{m_1} - y_{m_2})^2 + (x_{m_1} - x_{m_2})^2 = l_2^2$

Beide Zwangsbedingungen sind holonom-skleronom, da sie als Gleichungen zwischen zwei Koordinaten angegeben werden können und nicht von der Zeit abhängig sind. Somit bleiben am Ende noch zwei Freiheitsgrade (FHG) übrig.

2.2.3 Generalisierte Koordinaten

Aus den verbliebenen Freiheitsgraden werden die generalisierten Koordinaten abgeleitet. Dabei gilt grundsätzlich folgender Zusammenhang im \mathbb{R}^2 :

$$\boxed{S = 2n - k} \quad (2.6)$$

mit S als Anzahl der Freiheitsgrade und somit auch der Anzahl der generalisierten Koordinaten, n der Anzahl der Teilchen und k der Anzahl der holonomen Zwangsbedingungen.

Die beiden Generalisierten Koordinaten sind somit:

- $q_1 = \theta$
- $q_2 = \varphi$

2.2.4 Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie

Für die Lagrange-Formulierung werden die kinetische und die potentielle Energie des Systems benötigt. Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der translatorischen kinetischen Energie $E_{\text{kin,trans}}$ und der rotatorischen kinetischen Energie $E_{\text{kin,rot}}$. Die Gleichungen sind nachfolgend aufgestellt.

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,trans}} &= \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2\dot{\theta})^2 \\ E_{\text{kin,rot}} &= \frac{1}{2}J_1(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_2(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die gesamte **kinetische Energie des Systems** ist somit:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}} \\ E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2 \right) \dot{\theta}^2 + J_2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Der Ursprung der potentiellen Energie liegt bei Null. Somit ergibt sich die **potentielle Energie des Systems** zu:

$$\boxed{E_{\text{pot}} = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos(\theta)} \quad (2.9)$$

2.2.5 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Die **Lagrange-Funktion** L wird aus der Differenz der kinetischen Energie aus Gleichung 2.8 und der potentiellen Energie aus Gleichung 2.9 berechnet.

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

$$L = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2) \dot{\theta}^2 + J_2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos(\theta)$$

(2.10)

Die **dissipative Energie** D ist:

$$D = \frac{1}{2} c_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{\varphi}^2$$

(2.11)

Zieht man nun den Ansatz aus Gleichung 2.5 heran und wendet diesen für die generalisierte Koordinate θ an, so erhält man die **Bewegungsgleichung des Schwungrades**:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2) \ddot{\theta} + J_2 \ddot{\varphi} + c_1 \dot{\theta} - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta) = 0$$

(2.12)

Ebenfalls der Gleiche Ansatz wird nun für die generalisierte Koordinate φ angewendet:

$$J_2 (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + c_2 \dot{\varphi} = \tau$$

(2.13)

Setzt man nun Gleichung 2.4 in Gleichung 2.13 ein erhält man die **Bewegungsgleichung des Pendels**:

$$J_2 (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + c_2 \dot{\varphi} = K_t i_a = K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a}$$

(2.14)

3 Zustandsraumdarstellung

Um das Verhalten mittels mathematischer Beziehungen zu veranschaulichen, wird die **Zustandsraumdarstellung** verwendet. Der **Systemeingang** wird festgelegt mit

$$\underline{u} = V_m, \quad (3.1)$$

wobei V_m die Eingangsspannung des Gleichstrommotors aus Gleichung 2.1 ist. Die **Systemzustände** des Schwungrad-Pendels sind:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Nach zeitlicher Ableitung des Zustandsvektors ergibt sich der **Vektor der Zustandsänderung** zu:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Die **Ausgänge des Systems** gleichen den vier Zuständen und ergeben sich somit zu

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

3.1 Nichtlineares Zustandsraummodell

Zum Aufstellen des nichtlinearen Zustandsraummodells werden die Gleichung 2.12 und Gleichung 2.14 nach den höchsten Ableitungen von $\ddot{\varphi}$ und $\ddot{\theta}$ umgestellt.

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a} - c_2 \dot{\varphi} - J_2 \cdot \ddot{\theta}}{J_2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-J_2 \ddot{\varphi} - c_1 \dot{\theta} + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Beide Gleichungen sind über die Winkelbeschleunigung des Schwungrades $\ddot{\varphi}$ und die des Pendels $\ddot{\theta}$ miteinander verkoppelt. Durch das gegenseitige ineinander Einsetzen werden die Abhängigkeiten eliminiert.

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a} - c_2 \dot{\varphi} - J_2 \cdot \left(\frac{-J_2 \ddot{\varphi} - c_1 \dot{\theta} + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2} \right)}{J_2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-J_2 \left(\frac{K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a} - c_2 \dot{\varphi} - J_2 \cdot \ddot{\theta}}{J_2} \right) - c_1 \dot{\theta} + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 3.1, 3.2 und 3.3, durch das einsetzen in Gleichung 3.6 und dem Zusammenfassen und Umstellen nach $\ddot{\varphi}$ bzw. $\ddot{\theta}$ folgt das **nichtlineare Zustandsraummodell**.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{K_t \cdot \frac{V_m - K_b \cdot x_4}{R_a} - c_2 \cdot x_4 - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(x_1) + c_1 \cdot x_2}{J_2} \\ x_4 \\ \frac{(m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(x_1) - c_1 \cdot x_2 - \left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2 \right) \cdot \frac{K_t \cdot \frac{V_m - K_b \cdot x_4}{R_a}}{J_2}}{J_2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2 Lineares Zustandsraummodell

Das Verhalten des nichtlinearen Systems ist für große Änderungen des Eingangssignals nicht vorhersehbar. Um dennoch Aussagen über das Systemverhalten treffen zu können, wird das nichtlineare Zustandsraummodell mithilfe der Taylorreihenentwicklung um eine Ruhelage (\underline{x}^*) linearisiert. Die nichtlinearen Restglieder $\underline{R}(\Delta \underline{x}^2, \Delta \underline{u}^2)$ werden zu Null angenommen. Durch die Linearisierung wird das Systemverhalten für kleine Änderungen um die Ruhelage kontrollierbar. Nachfolgend ist die Taylorreihenentwicklung für Linearisierung aufgeführt:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}^* + \Delta \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}^* + \Delta \underline{x}, \underline{u}^* + \Delta \underline{u}) \\ &= \underline{f}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{u} + \underline{R}(\Delta \underline{x}^2, \Delta \underline{u}^2)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Durch die Annahme über das Verhalten der nichtlinearen Restglieder folgt die Struktur des linearen Zustandsraummodells dargestellt in Gleichung 3.9.

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\underline{x}} &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{u} \\ \Delta \underline{y} &= \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{x} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial u_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{u}\end{aligned}\quad (3.9)$$

Um das linearisierte Zustandsraummodell zu erhalten, werden die einzelnen Gleichungen des nichtlinearen Zustandsraummodells aus Gleichung 3.7 nach den Zuständen x_1 bis x_4 , sowie dem Eingang V_m partiell abgeleitet und die Ruhelage \underline{x}^* eingesetzt. Dabei werden sowohl die Ruhelage des hängenden Pendels (untere Ruhelage) und die des stehenden Pendels (obere Ruhelage) betrachtet. In Gleichung 3.10 dargestellt ist die untere Ruhelage, mit Hilfe derer das lineare Zustandsraummodell für das hängende Pendel bestimmt werden kann. Anhand dessen kann das lineare Zustandsraummodell in Simulink mit dem nichtlinearen Zustandsraummodell im nachfolgenden Abschnitt (Abschnitt 4) verglichen werden.

$$\underline{x}_1^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.10)$$

Die Regelung, welche in Abschnitt 8 entworfen wird soll dafür sorgen, dass das Pendel in der oberen Ruhelage verweilt. Diese wird beschrieben durch:

$$\underline{x}_2^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.11)$$

Die allgemeine Form des **linearen Zustandsraummodells** lautet:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C} \cdot \underline{x} + \underline{D} \cdot \underline{u}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Wendet man nun die Linearisierungsvorschrift aus Gleichung 3.9 unter Nutzung der Ruhelagen an, so erhält man das konkrete linearisierte Zustandsraummodell für das System. In Gleichung 3.13 ist das linearisierte Zustandsraummodell für die obere Ruhelage und in Gleichung 3.14 das für die untere Ruhelage dargestellt.

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -50.9760 & -1.2328 & 0 & 0.1960 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 50.9760 & 1.2328 & 0 & -11.3323 \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9548 \\ 0 \\ 113.0101 \end{bmatrix} \cdot V_m \\ \Delta \underline{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \underline{0} \cdot V_m\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 50.9760 & -1.2328 & 0 & 0.1960 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -50.9760 & 1.2328 & 0 & -11.3323 \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9548 \\ 0 \\ 113.0101 \end{bmatrix} \cdot V_m \\ \Delta \underline{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \underline{0} \cdot V_m\end{aligned}\quad (3.14)$$

4 Vergleich lineares/nichtlineares System

In Abbildung 4.1 ist die Übersicht der notwendigen Simulationsstruktur dargestellt. Aus der Übersicht geht hervor, dass beide Systeme unterschiedliche Eingänge besitzen und somit ein direkter Vergleich ohne entsprechende Berücksichtigung der Linearisierungsvorschriften unmöglich ist. Das linearisierte Modell verwendet als Eingang im Gegensatz zum nichtlinearen Modell eine Differenz Δu . Die Strukturen des nichtlinearen und des linearen Modells sind zur Information in Abbildung 4.2 und Abbildung 4.3 visualisiert.

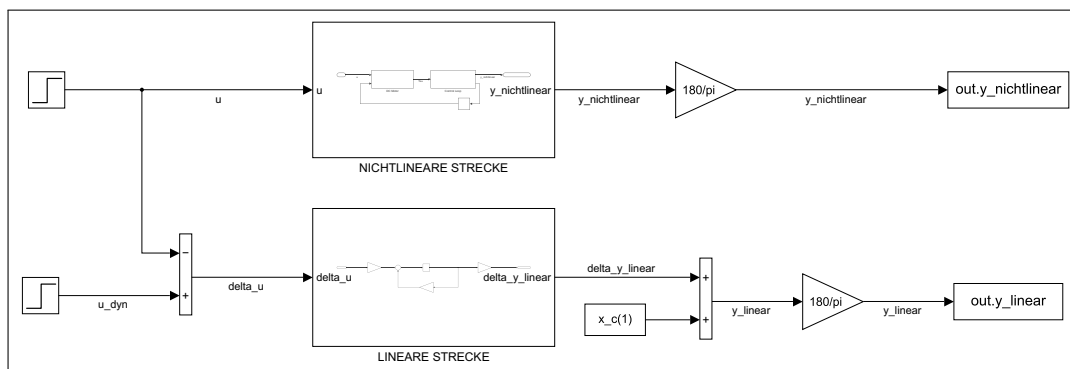


Abb. 4.1: Übersicht der Simulationsstruktur

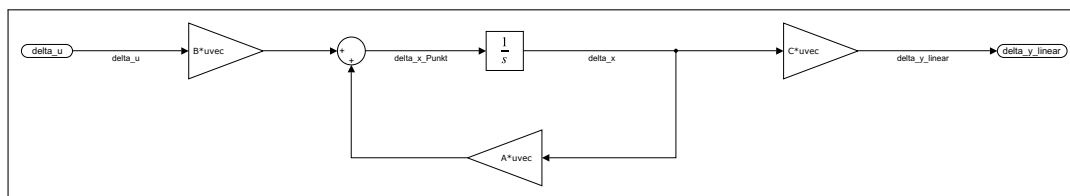


Abb. 4.2: Nichtlineare Strecke

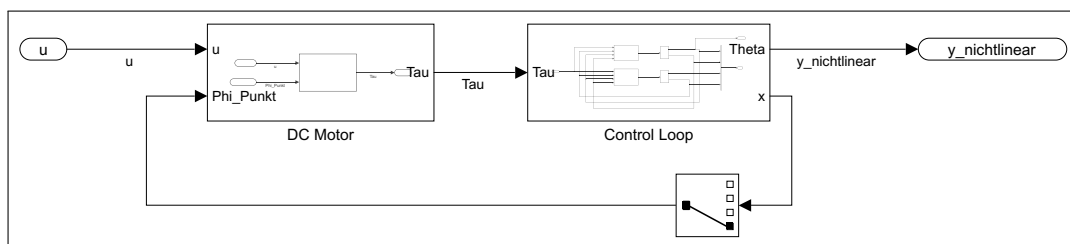


Abb. 4.3: Lineare Strecke

Um das lineare mit dem nichtlinearen Modell zu vergleichen, werden gemäß Abschnitt 3 zu den Zuständen $\Delta \underline{x}$ die Ruhelagen \underline{x}^* aus Gleichung 3.10 addiert. Aus der Abbildung 4.4 und Abbildung 4.5 geht hervor, dass die implementierten Systeme für kleine Abweichungen von der Ruhelage mit steigender Zeit t selbiges Verhalten aufweisen.

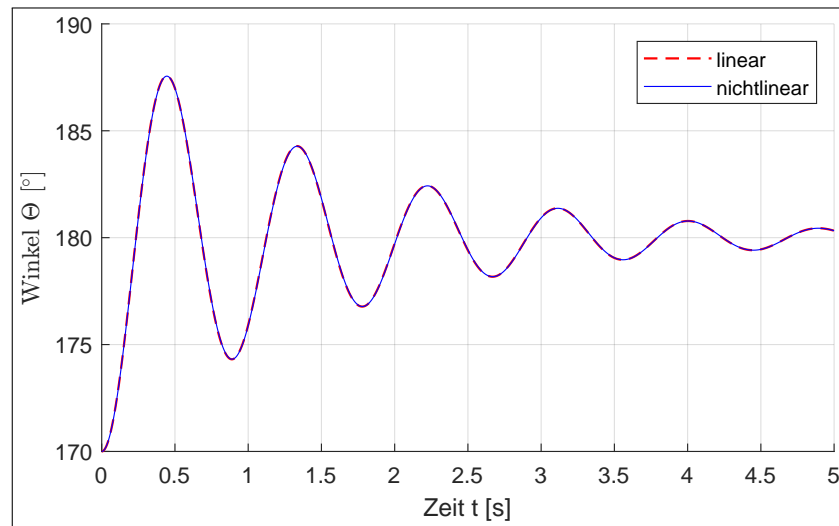


Abb. 4.4: Vergleich der Pendelwinkel θ bei -10° Anfangsauslenkung zur Ruhelage

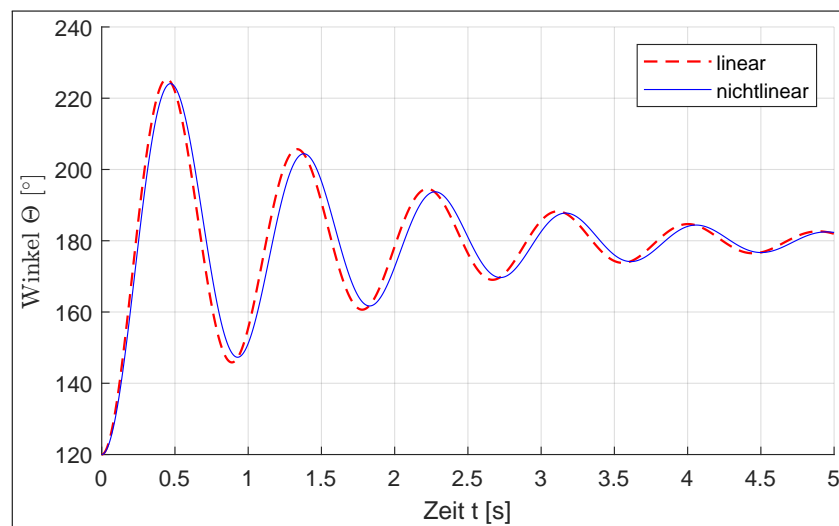


Abb. 4.5: Vergleich der Pendelwinkel θ bei -60° Anfangsauslenkung zur Ruhelage

5 Sensitivitätsanalyse der Modellparameter

In diesem Abschnitt wird eine Parameter- und Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Es wird dabei die Auswirkung von der Varianz von bestimmten Modellparametern auf die Varianz der Ausgangsparameter untersucht.

Ziel der Sensitivitätsanalyse ist es, wichtige Parameter zu identifizieren und daraus eine Optimierung der Parameter zu ermitteln.

Das Ergebnis der Sensitivitätsanalyse dient zum weiteren Verständnis des mathematischen Modells bzw. dem zugrundeliegenden Simulationsmodell.

5.1 Lokale und globale Sensitivitätsanalyse

Die verschiedenen Verfahren zur Sensitivitätsanalyse lassen sich in drei Kategorien einteilen: Lokale, globale Sensitivitätsanalyse und der sogenannten Screening-Methode.

Bei der lokalen Sensitivitätsanalyse wird für bestimmte Werte der Ausgangsgrößen der Einfluss der Eingangsgrößen untersucht. Dabei wird immer ein Parameter variiert und die restlichen konstant gehalten (One-At-a-Time-Methode, OAT). Die Sensitivitätsanalyse wird so für jeden Parameter einzeln durchgeführt und abschließend kann die spezifische Sensitivität der einzelnen Parameter ermittelt werden. Mathematisch entspricht dies den partiellen Ableitungen der Parameter bezüglich der Ausgangsgrößen

One-factor-at-a-time ($\pm 20\%$, $\pm 1\sigma$)

$$sensitivity = \frac{\Delta Y}{\Delta X_i} \quad \text{Für jeden Parameter } X_i, i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

- Nur lokale Variation um Arbeitspunkt
- keine Korrelation zwischen Parametern
- Standardabweichung benötigt Annahme zur Distribution und überspannt nicht den gesamten Wertebereich

Ausdruck als Partial-Ableitung

$$sensitivity = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \quad (5.2)$$

Für die Analytische Lösung wird ein lineares Modell benötigt. Die Linearisierung wurde zwar in Kap. 8.1.3 für dieses Modell durchgeführt, jeddoch soll im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter darauf eingegangen werden.

Globale Sensitivitätsanalyse

Bei der globalen Sensitivitätsanalyse wird, im Gegensatz zur lokalen Sensitivitätsanalyse nicht nur ein Parameter variiert, sondern alle Parameter gleichzeitig. Dies macht es möglich auch Abhängigkeiten unter den Parametern zu berücksichtigen.

Ebenso werden die Parameter nicht nur über einen kleinen lokalen Bereich verändert, sondern über den gesamten Definitionsbereich. Dieser ist bei physikalischen Modellen meist nicht bekannt, sodass hierfür eine statistische Verteilung der Parameter angenommen werden muss. Dennoch sollte die Verteilung so gewählt werden, dass sie den tatsächlichen physikalischen möglichen Verteilungen möglichst nahe kommt.

Allerdings ist die globale Sensitivitätsanalyse sehr aufwendig und kann nur für kleine Modelle durchgeführt werden.

Monte Carlo Methode: Die Monte Carlo Methode ist eine statistische Methode, die zur Lösung von Problemen mit mehreren Variablen eingesetzt wird. Sie generiert einen zufälligen Parameterraum und berechnet für diesen die Ausgangsgrößen. Die so entstehenden Scatterplots können dann zur einfachen graphischen Analyse der Parameter verwendet werden.

5.2 Parameter

Aus den gesamten Modellparametern des Schwungradpendels (1.1) werden folgende Parameter untersucht:

- $C1, C2$
- $J1, J2$
- $m1, m2$
- $l1, l2$
- V_m

Es wird dabei die Auswirkung der Varianz genannter Parameter auf folgende Modellgrößen untersucht:

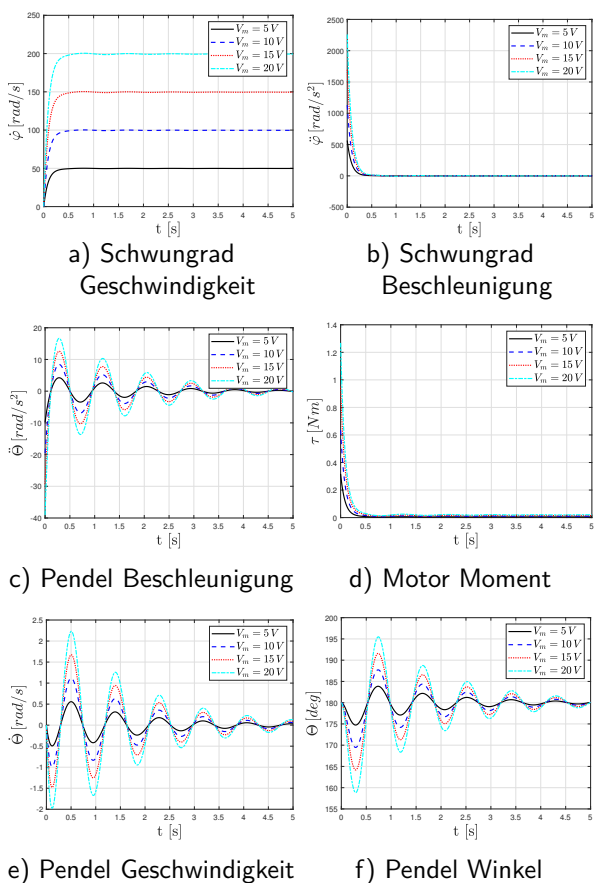
- Schwungrad Geschwindigkeit: $\dot{\varphi}$
- Schwungrad Beschleunigung: $\ddot{\varphi}$
- Pendel Winkel: Θ

- Pendel Geschwindigkeit: $\dot{\Theta}$
- Pendel Beschleunigung: $\ddot{\Theta}$
- Motor Moment: τ

Modellantwort auf Eingangssprung

Um ein besseres Verständnis des Modells zu erlangen, wird die Antwort wichtiger Parameter auf einen Sprung der Motorspannung V_m betrachtet. Zugrundeliegendes ist das in 3.1 entwickelte Simulink-Modell.

Der Eingangsprung der Motorspannung erfolgt in den Größen: $V_m = 5\text{ V}, 10\text{ V}, 15\text{ V}, 20\text{ V}$. Das Pendel befindet sich dabei in Ruhelage ($\Theta = 180^\circ$). Ein Eingangsprung führt zu einem Moment an der Motorwelle, welches das Schwungrad und das Pendel in Bewegung versetzt.



In Abb. 5.1a ist zu erkennen, dass der stabile Zustand der Endgeschwindigkeit des Schwungrades ungefähr zur selber Zeit ($t = 0.5\text{ s}$) erreicht wird. Die dabei erreichte Endgeschwindigkeit ist direkt abhängig von der angelegten Motorspannung V_m .

Das Maximum des Motormomentes hängt dabei ebenso von der Höhe der angelegten Motorspannung V_m ab (Abb. 5.1d). Das Moment erzeugt dabei eine Beschleunigung des Schwungrades (Abb. 5.1b), die ebenso durch das Moment in Abhängigkeit zur Höhe des angelegten Motorstroms steht.

Das Pendel wird durch das Moment in Bewegung versetzt und schwingt in Eigenfrequenz (Abb. 5.1f). Die Amplitude der Pendelbewegung ist dabei abhängig von der Höhe der angelegten Motorspannung V_m .

Die Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.1e) hat ihren Nulldurchgang beim maximaler Amplitude des Pendelwinkels (Abb. 5.1d), wobei die maximale Pendelgeschwindigkeit bei $\tau = 180^\circ$ erreicht wird.

Abb. 5.1: Modellantwort auf Eingangssprung der Motorspannung

Nach Erreichen der Endgeschwindigkeit des Schwungrades, geht die Beschleunigung gegen null und das Motormoment gleicht dem Reibungsmoment (Abb. 5.1d). Das Pendel ist ab diesem Moment nur noch durch die Gravitation beeinflusst und schwingt so lange bis es in Ruheposition zurückkehrt.

Einfluss der Länge des Pendels zum Massezentrum des Schwungrades (l_2)

Die Länge von der Aufhängung des Pendels bis zum Masseschwerpunkt des Schwungrades (l_2) ist ein weiterer Parameter, der im Folgenden untersucht wird. In den Simulationen (Abb. 5.2) wurde der Parameter l_2 von 0.1 m bis 1.5 m variiert. Die Motorspannung wird dabei auf 10 V gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

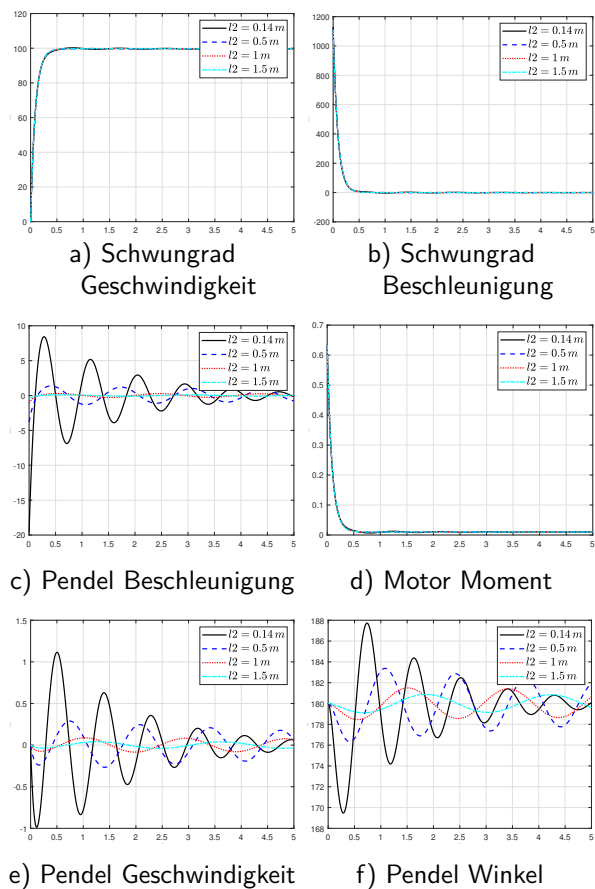


Abb. 5.2: Modellantwort auf Varianz des Parameters: l_2

Abbildung 5.2a, 5.2a, 5.2d zeigen keine Abweichung, was zeigt das der Parameter l_2 keinen Einfluss auf die Modellgrößen $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, τ hat. Es ist jedoch ein Einfluss auf die Parameter Θ , $\dot{\Theta}$, $\ddot{\Theta}$ (Abb. 5.2f, 5.2e, 5.2c) zu erkennen.

Bei kleinerer Länge l_2 erhöht sich die Amplitude des Winkels Θ sowie dessen Geschwindigkeit $\dot{\Theta}$ und Beschleunigung $\ddot{\Theta}$.

Ebenso ist zu erkennen, dass sich die Eigenfrequenz, mit der das Pendel schwingt, verändert. Je größer die Länge l_2 ist, desto größeres Moment muss aufgebracht werden, um die gleiche Winkelauslenkung Θ zu erreichen. Daraus folgt, dass größere Pendellängen die Winkelantwort des Modells verschlechtern.

Einfluss des Trägheitsmoments des Schwungrads (J_2)

Der Einfluss des Trägheitsmoments des Schwungrades (J_2), auf die Modellparameter wird in den Simulationen (Abb. 5.3) untersucht. Der Parameter J_2 wird dabei von 0.0005 kgm^2 bis 0.008 kgm^2 variiert. Die Motorspannung wird dabei auf 10 V gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

Die stationäre Endgeschwindigkeit des Schwungrades, wird durch den Parameter $J2$ stark beeinflusst (Abb. 5.3a). Bei erhöhter Trägheit des Schwungrades erhöht sich die Anstiegszeit, bis ein eingeschwungener Zustand erreicht wird. Der Wert konvergiert allerdings bei allen Werten von $J2$ gegen die gleiche Endgeschwindigkeit.

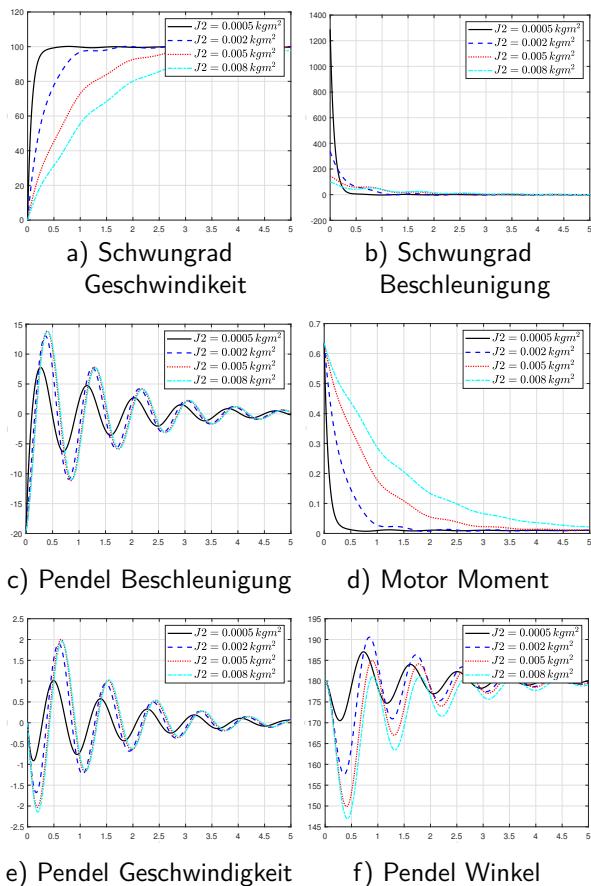


Abb. 5.3: Modellantwort auf Varianz des Parameters: $J2$

Die Beschleunigung des Schwungrades wird ebenfalls stark beeinflusst (Abb. 5.3b). Hierbei ist zu erkennen, dass ein erhöhtes Trägheitsmoment die maximale Beschleunigung bei $t \approx 0s$ verringert. Ebenso wird der stationäre Zustand später erreicht und mit weiterer Erhöhung des Parameters ist ein Schwingen der Beschleunigung zu erkennen.

Das maximale Motormoment (Abb. 5.3d) ist bei allen Werten von $J2$ gleich, benötigt aber bei größeren Werten von $J2$ länger, um den stationären Zustand zu erreichen.

Dadurch, dass das Moment bei erhöhten Trägheitsmoment länger anliegt, wird auch eine größere Kraft auf das Pendel ausgeübt (Abb. 5.3c).

In Abb. 5.3f ist zu erkennen, dass ein größerer Winkelausschlag des Pendels erreicht wurde.

Dies ist ebenso der Fall bei der Pendelbeschleunigung (Abb. 5.3c) und der Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.3e).

Das Trägheitsmoment des Schwungrades $J2$ hat also einen positiven Einfluss auf die Winkelantwort des Modells.

Einfluss der Masse des Schwungrads (M_2)

Der Einfluss der Masse des Schwungrades (m_2), auf die Modellparameter wird in den Simulationen (Abb. 5.4) untersucht. Der Parameter J_2 wird dabei von 0.01 kg bis 1.5 kg variiert. Die Motorspannung wird dabei auf 10 V gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

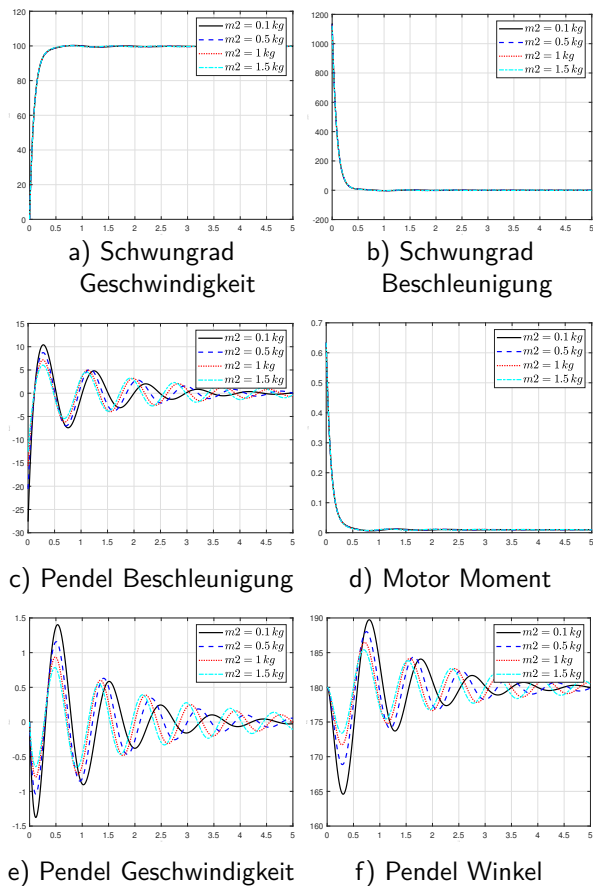


Abb. 5.4: Modellantwort auf Varianz des Parameters: M_2

In den Simulationen ist zu erkennen, dass die Schwungradgeschwindigkeit (5.4a), die Schwungradbeschleunigung (5.4b) und das Motormoment (5.4d) durch den Parameter m_2 nicht beeinflusst werden.

Die Masse des Schwungrads hat also auf die gehaltenen Größen keinen Einfluss.

Der Winkel des Pendels (Abb. 5.4f) verringert sich mit Erhöhung der Masse m_2 . Dies ist auch bei der Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.4e) und der Pendelbeschleunigung (Abb. 5.4c) zu erkennen.

Dies liegt an der, durch die zusätzliche Masse, erhöhten Gewichtskraft, die auf das Pendel wirkt.

Ebenso wird die Dämpfung der Schwingung verändert und die Schwingungsdauer verlängert sich.

Die Erhöhung des Parameters m_2 trägt also zu einer Verschlechterung der Modellantwort bei.

Einfluss der Reibung des Pendels (C_1)

Der Einfluss der Reibung des Pendels (C_1), auf die Modellparameter wird in den Simulationen (Abb. 5.5) untersucht. Der Parameter C_1 wird dabei von 0.01 N m s rad⁻¹ bis

1.5 newtonms/rad variiert. Die Motorspannung wird dabei auf 10 V gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

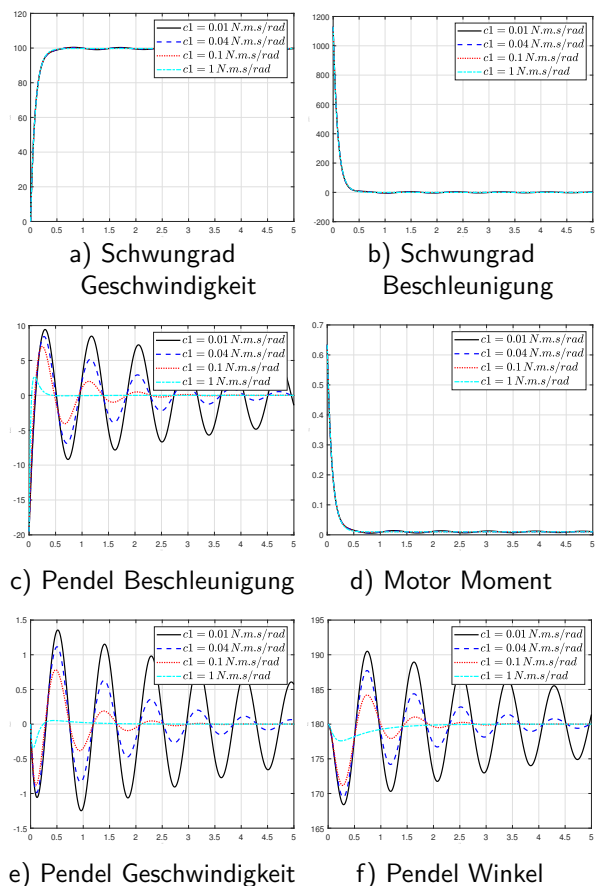


Abb. 5.5: Modellantwort auf Varianz des Parameters: $C1$

0.0001 N m s rad⁻¹ bis 0.1 N m s rad⁻¹ variiert. Die Motorspannung wird dabei auf 10 V gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

Die Schwungradgeschwindigkeit (Abb. 5.5a) und die Schwungradbeschleunigung (Abb. 5.5b) werden durch den Parameter $C1$ nicht beeinflusst.

Ebenso wird das Motormoment (5.5d) durch die Reibung des Pendels nicht beeinflusst.

In der Pendelauslenkung (Abb. 5.5d) ist der Einfluss der Reibung deutlich zu erkennen. Je höher der Reibungskoeffizient, desto kleiner wird die Pendelauslenkung.

Ebenso wird, wie zu erwarten, die Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.5e) und die Pendelbeschleunigung (Abb. 5.5c) durch die Reibung des Pendels gedämpft.

Daraus lässt sich schließen, dass ein Teil des Momentes benötigt wird, um die Reibung zu überkommen.

Die Erhöhung des Parameters $C1$ trägt also zu einer Verschlechterung der Modellantwort bei.

Einfluss der Reibung des Schwungrades ($C2$)

Der Einfluss der Reibung des Schwungrades ($C2$), auf die Modellparameter wird in den Simulationen (Abb. 5.6) untersucht. Der Parameter $C2$ wird dabei von

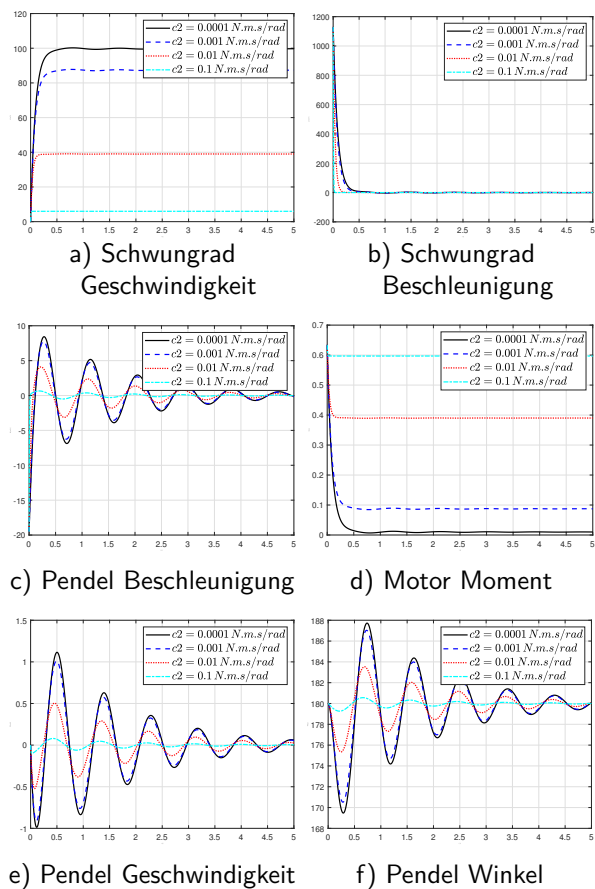


Abb. 5.6: Modellantwort auf Varianz des Parameters: C_2

dem Pendelwinkel (Abb. 5.6f) bemerkbar.

Je höher der Reibungskoeffizient C_2 desto geringer die Amplituden. Die Eigenfrequenz wird nicht beeinflusst.

Damit ist der Reibungskoeffizient C_2 ein wichtiger Parameter, der alle wichtigen Modellgrößen beeinflusst.

Die Schwungradgeschwindigkeit (Abb. 5.6a) wird durch die Reibung des Schwungrades stark beeinflusst. Je höher der Reibungskoeffizient, desto kleiner wird die maximale Schwungradgeschwindigkeit.

Die Reibung wirkt ebenfalls dämpfend auf Schwingung in der Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit erreicht bei höher Reibung schneller ihren stabilen Endwert.

Die Schwungradbeschleunigung (Abb. 5.6b) wird ebenfalls durch die Reibung beeinflusst. Die maximale Beschleunigung um $t \approx 0$ s ist unabhängig von C_2 , jedoch fällt sie schneller ab, je höher der Reibungskoeffizient ist.

Dadurch wird auch das Motormoment (Abb. 5.6d) beeinflusst. Je höher der Reibungskoeffizient, desto mehr Moment muss der Motor im stabilen Zustand aufbringen, um die Reibung zu überwinden.

Infolgedessen stellt sich ein konstantes Motormoment ein.

Das nun fehlende Motormoment macht sich auch in der Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.6e), der Pendelbeschleunigung (5.6c) und

Überblick wichtiger Parameter und deren beeinflusste Modellgrößen

Im folgenden wird ein Überblick über die wichtigsten Parameter und deren beeinflussten Modellgrößen gegeben.

Dabei handelt es sich um keine gewichtete Liste, sondern nur ein Überblick aus den Parametern die die speziellen Modellgrößen beeinflussen.

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ Schwungradgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ <ul style="list-style-type: none"> – V_m – J_2 – C_2 ▪ Schwungradbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ <ul style="list-style-type: none"> – V_m – J_2 – C_2 ▪ Pendelbeschleunigung $\ddot{\Theta}$ <ul style="list-style-type: none"> – V_m – l_2 – J_2 – m_2 – C_1 – C_2 | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Motormoment τ <ul style="list-style-type: none"> – V_m – J_2 – C_2 ▪ Pendelgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ <ul style="list-style-type: none"> – V_m – l_2 – J_2 – m_2 – C_1 – C_2 ▪ Pendelwinkel Θ <ul style="list-style-type: none"> – V_m – l_2 – J_2 – m_2 – C_1 – C_2 |
|---|--|

Besonders Wichtige Parameter sind:

- Länge des Pendels zum Massenschwerpunkt l_2
- Trägheitsmoment des Schwungrades J_2
- Reibung des Schwungrades C_2
- Reibung des Pendels C_1

All diese Parameter beeinflussen die wichtigsten Modellgrößen wie Pendelgeschwindigkeit, Pendelbeschleunigung und Pendelwinkel.

6 Globale Sensitivitätsanalyse nach Monte Carlo Methode

Bei der globalen Sensitivitätsanalyse mit der Monte Carlo Methode werden die Parameter in einem bestimmten Bereich zufällig gewählt und die Modellgrößen berechnet. Da es sich um eine Vielzahl von Parametern und Modellgrößen handelt, müssen viele Simulationen durchgeführt werden.

Symbol	Parameter	Varianz der Parameter
J_1	Trägheitsmoment des Pendels (+ Motorstator)	$0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ bis $0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
J_2	Trägheitsmoment des Rads (+ Motorrotor)	$0.0001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ bis $0.001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
c_1	Reibungsfaktor des Pendels	$0.04 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$ bis $0.4 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
c_2	Reibungsfaktor des Rads	$0.0001 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$ bis $0.001 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
m_1	Masse des Pendels und Stators	0.8 kg bis 8 kg
m_2	Masse des Rads und Rotors	0.5 kg bis 5 kg
l_1	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Pendels	0.1 m bis 1 m
l_2	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Rads	5 V bis 20 V
V_m	Motorspannung	0.1 m bis 1 m

Tab. 6.1: Varianz der Modellparameter des Schwungrad-Pendels

Über die in Tab. 6.1 aufgeführten Parameter wird eine Monte Carlo Simulation mit jeweils 1000 Zufallswerten pro Parameter durchgeführt. Die Ergebnisse werden als Scatterplots dargestellt.

Betrachtet man die Simulation über den gesamten Parameterraum (6.1), können einige eindeutige Korrelationen erkannt werden. Bei Scatterplots ohne deutliche Korrelation lässt sich keine Beeinflussung der Modellgrößen durch den gegebenen Parameter feststellen.

Schwungradgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$

$\dot{\varphi}$ max:

Bei der maximalen Schwungradgeschwindigkeit gibt es zwei Parameter, die die Modellgröße

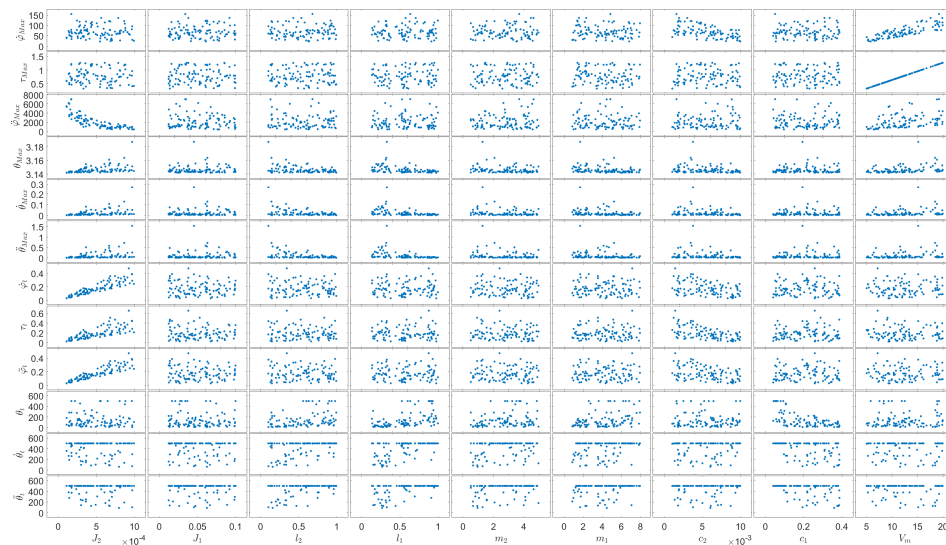


Abb. 6.1: Scatterplot über alle Parameter

signifikant beeinflussen.

Dabei handelt es sich um die Motorspannung V_m (Abb. 6.2a) und die Reibung des Schwungrades C_2 (Abb. 6.2b). Mit der definierten Varianz hat die Motorspannung einen größeren Einfluss, ist aber in Abhängigkeit von der Reibung des Schwungrades.

$\dot{\varphi}$ Settling Time:

Bei der Settling Time gibt es zwei Parameter die eine Korrelation erkennen lassen. Das Trägheitsmoment des Schwungrades J_2 (Abb.6.3b) ist positiv und die Reibung des Schwungrades C_2 (Abb.6.3a) negativ mit der Einschwingzeit korreliert.

Schwungradbeschleunigung $\ddot{\varphi}$

$\ddot{\varphi}$ max:

Bei der maximalen Schwungradbeschleunigung gibt es eine deutliche Korrelation. Das Trägheitsmoment des Schwungrades J_2 (Abb.??) ist negativ mit der maximalen Schwungradbeschleunigung korreliert (Abb. ??).

$\ddot{\varphi}$ Settling Time:

Es gibt eine deutliche positive Korrelation zwischen dem Trägheitsmoment des Schwungrades

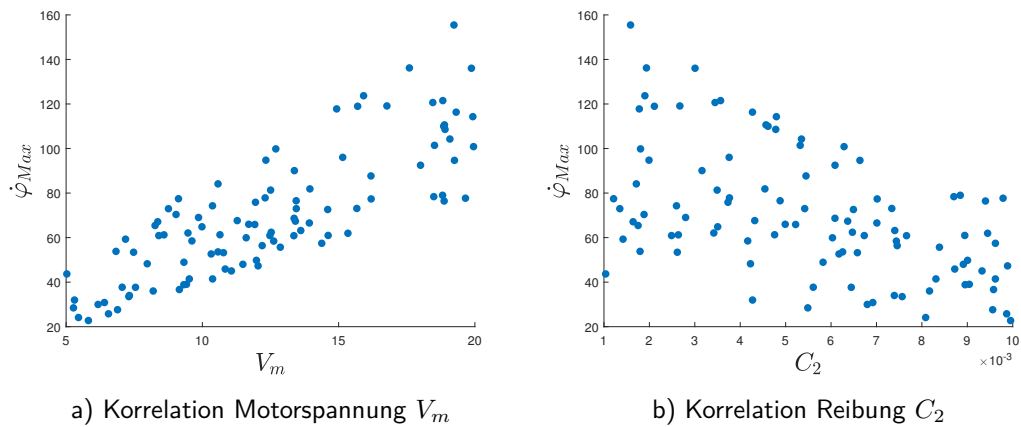


Abb. 6.2: Scatterplots über die maximale Schwungradgeschwindigkeit

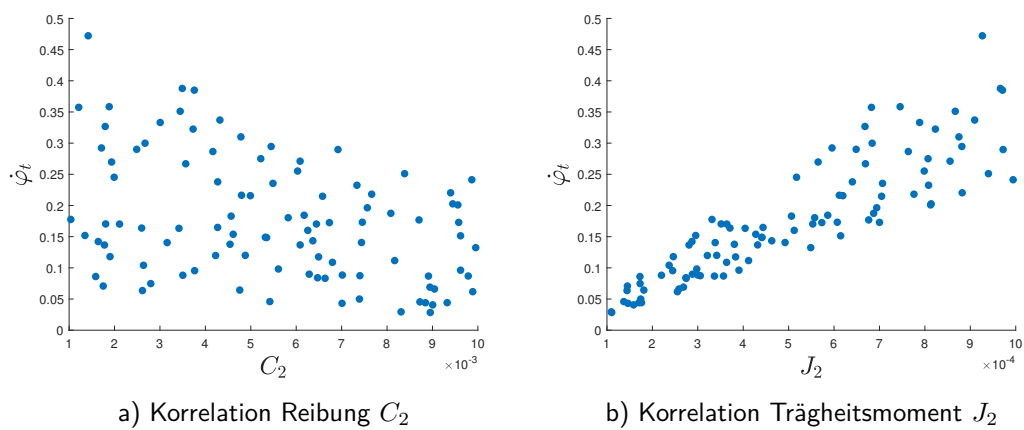


Abb. 6.3: Scatterplots über die Einschwingzeit der Schwungradgeschwindigkeit

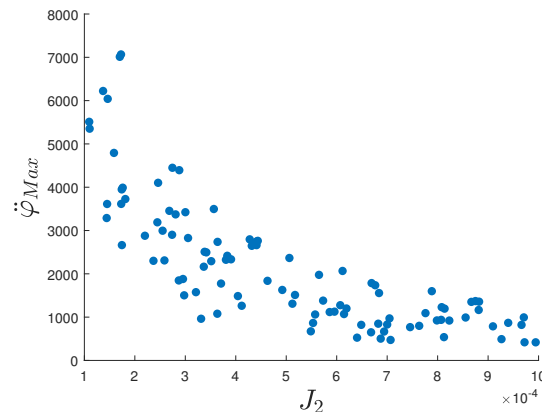
Abb. 6.4: Korrelation Trägheitsmoment J_2

Abb. 6.5: Scatterplot über die maximale Schwungradbeschleunigung

J_2 und der Einschwingzeit der Schwungradbeschleunigung (Abb. 6.6b).

Eine leicht negative Korrelation gibt es zwischen der Reibung des Schwungrades C_2 und der Einschwingzeit der Schwungradbeschleunigung (Abb. 6.6a).

Pendelauslenkung Θ

Θ max:

Das Trägheitsmoment des Schwungrades J_2 (Abb.6.7b) sowie die Motorspannung V_m (Abb. 6.7a) sind positiv mit der maximalen Pendelauslenkung korreliert.

Die Länge l_2 ist negativ mit der maximalen Pendelauslenkung korreliert (Abb. 6.7c).

Θ Settling Time:

Bei der Pendeleinschwingzeit gibt es den negativ korrelierten Parameter „Reibung des Pendels C_1 “,

Pendelgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$

$\dot{\Theta}$ max:

Es besteht eine positive Korrelation zwischen der maximalen Pendelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmoment des Schwungrades J_2 (Abb. 6.10).

$\dot{\Theta}$ Settling Time:

Es lässt sich keine klare Korrelation erkennen.

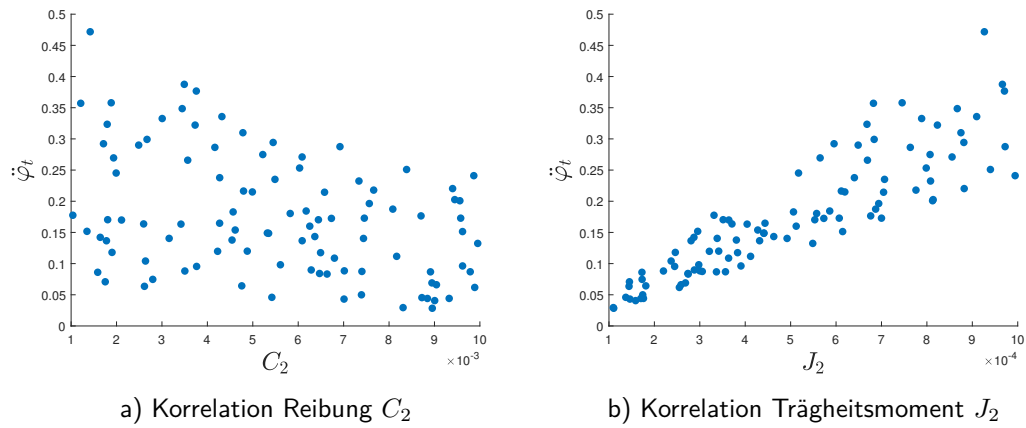


Abb. 6.6: Scatterplots über die Einschwingzeit der Schwungradbeschleunigung

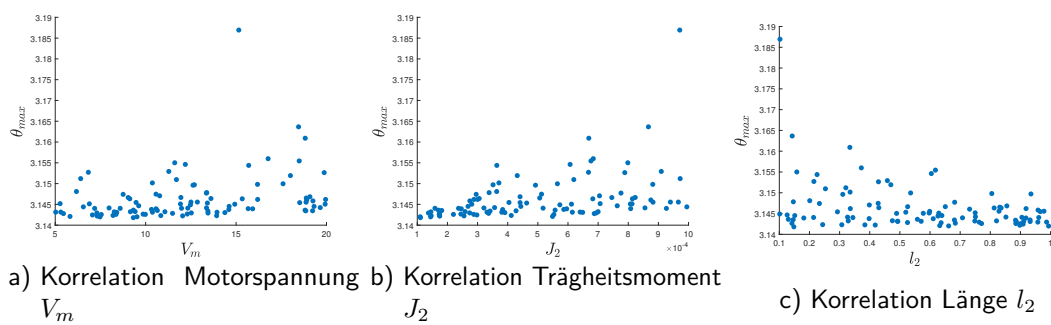


Abb. 6.7: Scatterplots über die maximale Pendelauslenkung

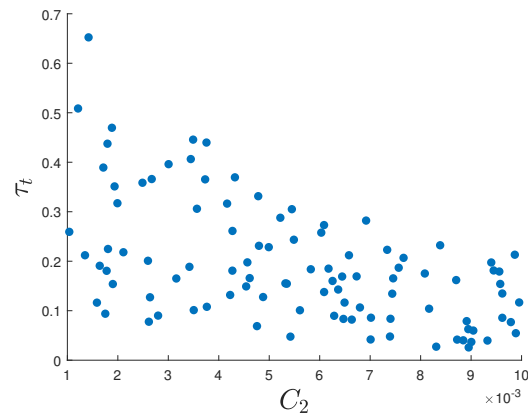
Abb. 6.8: Korrelation Reibung C_1

Abb. 6.9: Scatterplot über die Pendeleinschwingzeit

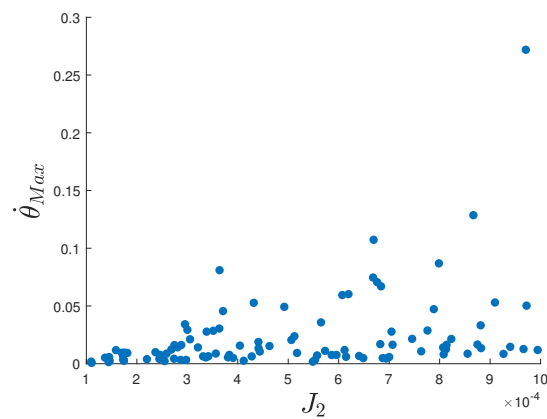
Abb. 6.10: Korrelation Trägheitsmoment J_2

Abb. 6.11: Scatterplot über die maximale Pendelgeschwindigkeit

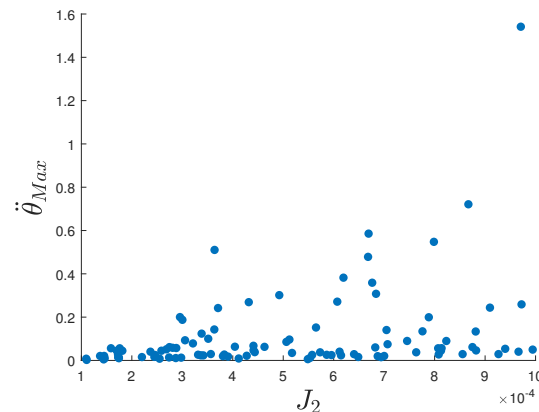
Abb. 6.12: Korrelation Trägheitsmoment J_2

Abb. 6.13: Scatterplot über die maximale Pendelbeschleunigung

Pendelbeschleunigung $\ddot{\Theta}$

$\ddot{\Theta}$ max:

Es besteht eine positive Korrelation zwischen der maximalen Pendelbeschleunigung und dem Trägheitsmoment des Schwungrades J_2 (Abb. 6.12).

$\ddot{\Theta}$ Settling Time:

Es lässt sich keine klare Korrelation erkennen.

Motormoment τ

τ max:

Das maximale Motormoment ist positiv mit der Motorspannung V_m (Abb. ??) korreliert.

τ Settling Time:

Es besteht eine deutliche positive Korrelation zwischen dem Trägheitsmoment des Schwungrades J_2 (Abb. ??) sowie eine negative Korrelation zwischen dem Reibungsfaktor C_2 (Abb. 6.16a) und der Einschwingzeit des Motormoments (Abb. ??).

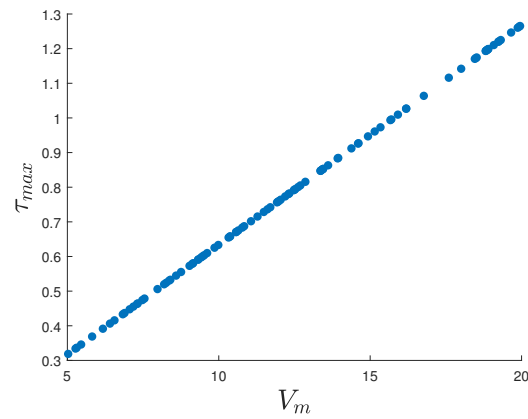
Abb. 6.14: Korrelation Motorspannung V_m

Abb. 6.15: Scatterplot über das maximale Motormoment

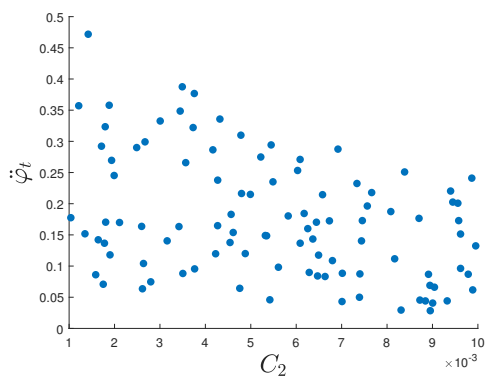
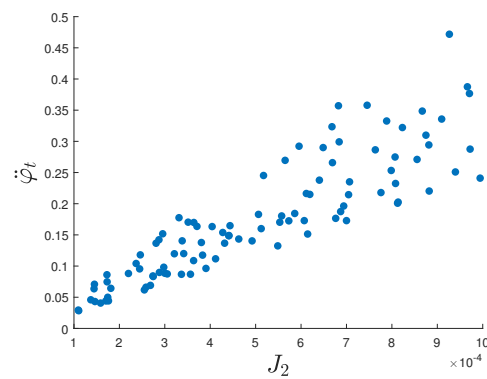
a) Korrelation Reibung C_2 b) Korrelation Trägheitsmoment J_2

Abb. 6.16: Scatterplots über die Einschwingzeit des Motormoments

7 Aufschwingen des Schwungrad-Pendels

8 Zustandsregler

Der nachfolgende Zustandsregler basiert auf einer **einfachen Zustandsrückführung**, d.h. Änderungen innerhalb des Systems werden auf die vorher definierte Ruhelage ausgeregelt.

8.1 Reglerentwurf

8.1.1 Nachweis der Steuerbarkeit

Zur Implementierung einer Reglerstruktur wird vorausgesetzt, dass das System steuerbar ist. Die vollständige Steuerbarkeit ist gegeben, wenn unter Berücksichtigung der Eingangsgröße $\underline{u}(t)$ das System von jedem beliebigen Anfangszustand \underline{x}_0 in jeden beliebigen Endzustand \underline{x}_e überführt werden kann. Der Nachweis erfolgt über die Auswertung der **Steuerbarkeitsmatrix** \underline{Q}_s . Zur Berechnung werden die Systemmatrix \underline{A} und die Eingangsmatrix \underline{B} benötigt (Gleichung 8.1).

$$\underline{Q}_s = \begin{pmatrix} \underline{B} & \underline{A} \cdot \underline{B} & \dots & \underline{A}^{(n-1)} \cdot \underline{B} \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Bei **SISO**- oder **SIMO**-Systemen folgt eine quadratische Matrix, d.h. die **Bedingung** für die Steuerbarkeit lautet:

$$\det(\underline{Q}_s) \neq 0.$$

Sofern ein **MISO**- oder **MIMO**-System vorliegt, muss der **Rang** gleich n bzw. m sein. Die Variablen n und m geben die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen und Spalten wieder. Falls

$$\begin{aligned} n &> m : \\ \text{rank}(\underline{Q}_s) &= m \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} n &< m : \\ \text{rank}(\underline{Q}_s) &= n \end{aligned}$$

gilt, ist das System steuerbar.

Durch **Anwendung** der Vorschrift aus Gleichung 8.1 folgt die Steuerbarkeitsmatrix des inversen Pendels in der instabilen Ruhelage zu:

$$\underline{Q}_s = \begin{bmatrix} 0 & -1.9548 & 24.5620 & -381.4330 \\ -1.9548 & 24.5620 & -381.4330 & 4.5979 \cdot 10^3 \\ 0 & 113.0101 & -1.2831 \cdot 10^3 & 1.4670 \cdot 10^4 \\ 113.0101 & -1.2831 \cdot 10^3 & 1.4670 \cdot 10^4 & -1.6797 \cdot 10^5 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix ist quadratisch. Die **Determinante** folgt zu:

$$\det(\underline{Q}_s) \approx 12.24 \cdot 10^7. \quad (8.2)$$

Das implementierte System ist **steuerbar**.

8.1.2 Reglergesetz

Das allgemeine **Reglergesetz** für die Zustandsrückführung ist nachfolgend gezeigt. Die Systemstruktur kann der Abbildung 8.1 entnommen werden. Gleichungen zur Berechnung der Matrix K folgen in Unterunterabschnitt 8.1.3.

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \cdot \underline{x}(t) \quad (8.3)$$

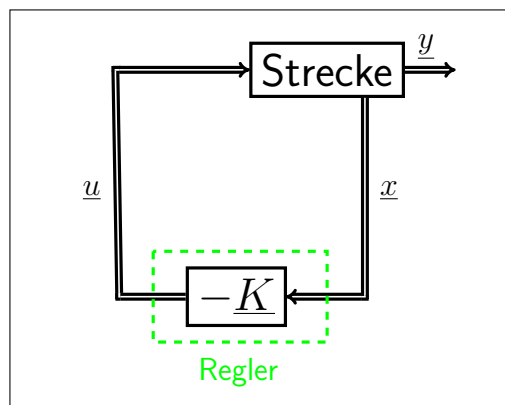


Abb. 8.1: Systemstruktur mit einfacher Zustandsrückführung

8.1.3 Lineare Matrixungleichungen

Die Berechnung der Reglermatrix K wird mit **quadratischen Ljapunov-Funktionen** und der **exponentiellen Stabilität** motiviert. Im ersten Schritt werden die Polstellenregionen lediglich durch die Vorgabe einer Decay-Rate α eingeschränkt. Die **Linearen Matrixungleichungen (LMI)** sind in Gleichung 8.4 dargestellt. Zur Visualisierung der Einschränkungen dient Abbildung 8.2. Das Lösen der LMI's, insbesondere der Gleichung 8.5 erfolgt mithilfe der Matlab-Toolbox **Robust-Control-Toolbox** (Linear Matrix Inequalities).

$$\underline{0} > \underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{X} \cdot \underline{A}^T - \underline{B} \cdot \underline{M} - \underline{M}^T \cdot \underline{B}^T + 2 \cdot \alpha \cdot \underline{X} \quad (8.4)$$

$$\underline{X} > \underline{0}$$

mit

$$\underline{K} = \underline{M} \cdot \underline{X}^{-1} \quad (8.5)$$

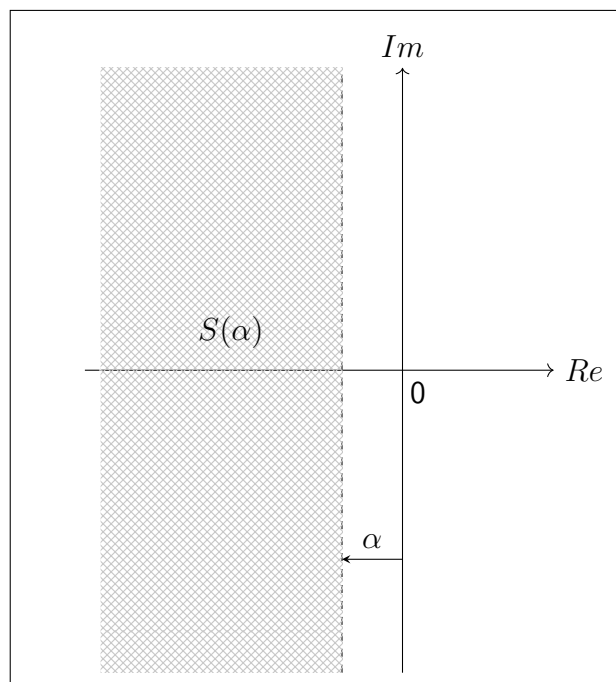


Abb. 8.2: Einschränkung der Polregion bei exponentieller Stabilität zu $S(\alpha)$

Sofern die Einschränkung mittels Decay-Rate nicht ausreicht, um die Voraussetzungen aus

Abschnitt 1 zu erreichen, werden zusätzliche LMI's eingeführt, welche weitere Einschränkungen mittels Kegel und Halbkreis vornehmen (Gleichung 8.6 und Abbildung 8.3).

$$\begin{aligned}
 \underline{0} &> \underline{AX} + \underline{XA}^T - \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T + 2\alpha \underline{X} \\
 \underline{0} &> \begin{pmatrix} (\underline{AX} + \underline{XA}^T - \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T) \sin \theta & (\underline{AX} - \underline{XA}^T - \underline{BM} + \underline{M}^T \underline{B}^T) \cos \theta \\ (\underline{XA}^T - \underline{AX} + \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T) \cos \theta & (\underline{AX} + \underline{XA}^T - \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T) \sin \theta \end{pmatrix} \\
 \underline{0} &> \begin{pmatrix} -r \underline{X} & \underline{AX} - \underline{BM} \\ \underline{XA}^T - \underline{M}^T \underline{B}^T & -r \underline{X} \end{pmatrix} \\
 \underline{X} &> \underline{0}
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

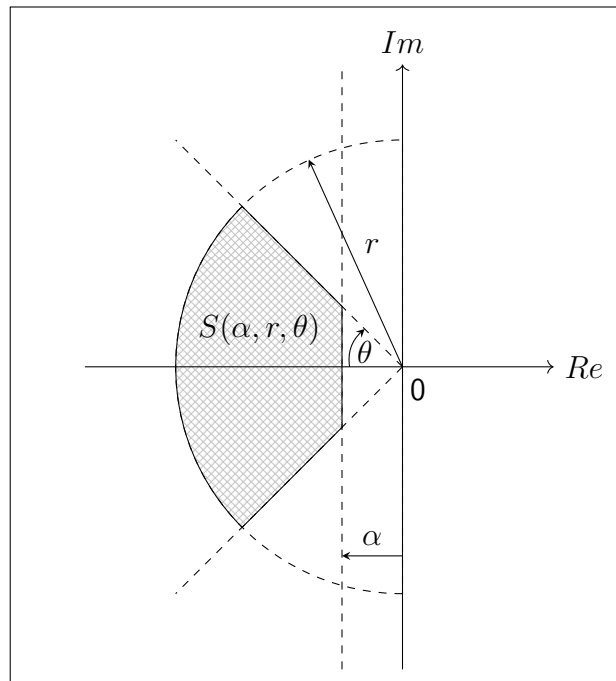


Abb. 8.3: Einschränkung der Polregion bei Erweiterung der LMI zu $S(\alpha, r, \theta)$

8.2 Reglervalidierung am linearen Modell

Um eine geeignete Reglerstruktur zu entwerfen, werden zuerst die **Polstellen der Systemmatrix A** bestimmt und grafisch dargestellt (Abbildung 8.4). Aus der Abbildung geht hervor, dass zwei der vier rein reellen Polstellen instabil sind, da diese einen Realteil größer oder gleich Null aufweisen. Dies hat ein instabiles Systemverhalten zur Folge.

$$\text{eig}(\underline{A}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.5169 \\ -7.5606 \\ -11.5214 \end{bmatrix}$$

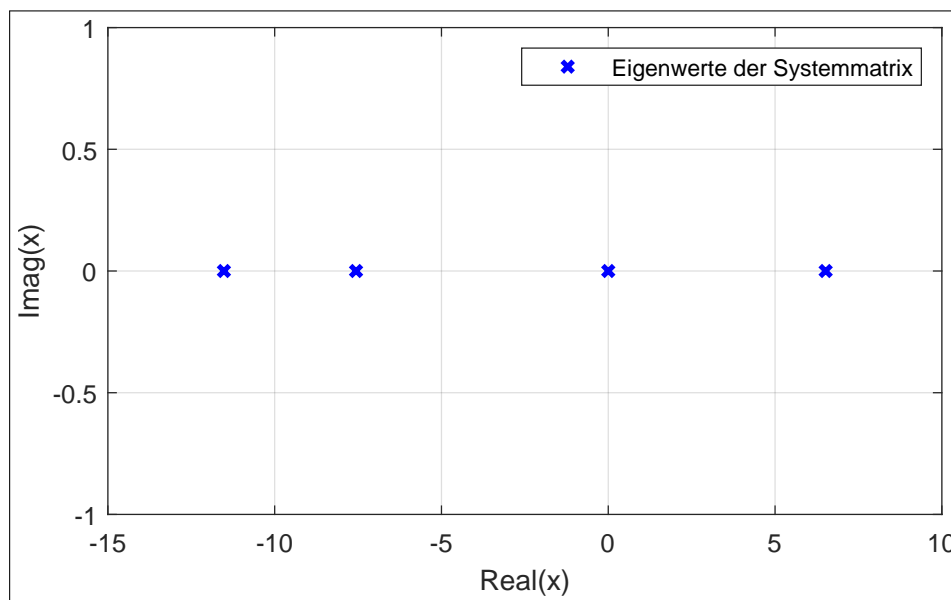


Abb. 8.4: Polstellen der Systemmatrix

Der zu entwerfende Regler muss in der Lage sein, die maximal zulässige Eingangsspannung von $V_{m,Max} = 20V$ auszureizen, jedoch nicht zu überschreiten, um größtmögliche Winkeländerungen von der definierten instabilen Ruhelage ausgleichen zu können. Die Simulationen werden mithilfe der Matlab-Erweiterung **Simulink** durchgeführt. Die Reglerstruktur ist in ?? dargestellt. Das linearisierte Zustandsraummodell verwendet gemäß Definition Delta-Größen, welche bei der Anwendung des linearen Reglers am nichtlinearen Modell berücksichtigt werden müssen. Da die entstehende K-Matrix eine Größe von (1×4) besitzt, wird fortan die Vektorschreibweise k bevorzugt.

Im ersten Versuch wird nur die Decay-Rate α variiert (vgl. Abbildung 8.2). Der Startwinkel des Pendels wird von 15° solange verringert, bis der Maximalwert der anliegenden Eingangsspannung $V_m \leq 20V$ erreicht. Zur Übersicht der Ergebnisse dient Tabelle 8.1.

Anfangsauslenkung Pendel [°]	Kriterium	α				
		1.0	0.5	0.3	0.1	0.05
15	$V_{m,Max}$ [V]	39.107	31.983	29.184	26.471	27.351
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	-	-
14	$V_{m,Max}$ [V]	36.500	29.851	27.238	24.706	25.528
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	-	-
13	$V_{m,Max}$ [V]	33.893	27.719	25.293	22.941	23.704
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	-	-
12	$V_{m,Max}$ [V]	31.286	25.587	23.347	21.177	21.881
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	-	-
11	$V_{m,Max}$ [V]	28.679	23.454	21.401	19.412	20.057
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	X	-

Tab. 8.1: Auswertung der Eingangsspannung V_m für unterschiedliche Anfangsauslenkungen des Pendels bei Vorgabe einer Decay-Rate α [X - erfüllt, - - nicht erfüllt]

Aus der Tabelle geht hervor, dass erst bei einem Anfangswinkel von 11° und $\alpha = 0.1$ die Spannung V_m unter 20V sinkt. Mithilfe der erweiterten LMI's wird nun versucht, ein größeren Startwinkel zu ermöglichen und weiterhin die Constraints einzuhalten. Dafür wird die Anfangsauslenkung des Pendels erneut, von 15° startend, verringert. Zusätzlich erfolgt eine Variation des Kegelwinkels Θ zwischen 10° und 60° . Der Radius r des Halbkreises variiert zwischen 11 und 15 (vgl. Abbildung 8.3). Die Decay-Rate α nimmt die bereits betrachteten Werte an. In der Tabelle 8.2 und Tabelle 8.3 sind die relevanten Ergebnisse dargestellt. Die vollständigen Tabellen liegen dem digitalen Anhang bei.

α	$\Theta [^\circ]$	r	$V_{m,Max} [V]$	kleinste Spannung
1.00	10	12	21.056	-
1.00	20	11	21.146	-
1.00	30	12	21.169	-
1.00	40	11	21.282	-
1.00	50	11	21.391	-
1.00	60	12	21.604	-
0.50	10	13	20.713	-
0.50	20	13	20.719	-
0.50	30	13	20.751	-
0.50	40	13	20.947	-
0.50	50	13	20.986	-
0.50	60	12	21.265	-
0.30	10	14	20.519	-
0.30	20	13	20.590	-
0.30	30	13	20.620	-
0.30	40	13	20.722	-
0.30	50	13	20.926	-
0.30	60	15	21.083	-
0.10	10	15	20.294	-
0.10	20	14	20.398	-
0.10	30	14	20.442	-
0.10	40	14	20.598	-
0.10	50	13	20.777	-
0.10	60	14	20.972	-
0.05	10	15	20.256	X
0.05	20	14	20.377	-
0.05	30	14	20.420	-
0.05	40	14	20.537	-
0.05	50	13	20.819	-
0.05	60	14	20.945	-

Tab. 8.2: Auswertung der Eingangsspannung V_m für den **Anfangswinkel 15°** des Pendels bei Vorgabe einer Decay-Rate α , Kegelwinkel Θ und Radius r [**X** - erfüllt, - - nicht erfüllt]

α	$\Theta [^\circ]$	r	$V_{m,Max} [V]$	größte Spannung
1.00	10	13	19.912	-
1.00	20	13	19.966	-
1.00	30	11	19.771	-
1.00	40	12	19.886	-
1.00	50	11	19.965	-
1.00	60	12	20.164	-
0.50	10	12	19.498	-
0.50	20	11	19.685	-
0.50	30	11	19.786	-
0.50	40	11	19.880	-
0.50	50	14	19.997	X
0.50	60	13	19.926	-
0.30	10	12	19.824	-
0.30	20	11	19.953	-
0.30	30	15	19.954	-
0.30	40	15	19.672	-
0.30	50	11	19.990	-
0.30	60	12	19.832	-
0.10	10	13	19.326	-
0.10	20	12	19.489	-
0.10	30	12	19.436	-
0.10	40	12	19.621	-
0.10	50	11	19.904	-
0.10	60	15	19.803	-
0.05	10	13	19.244	-
0.05	20	12	19.528	-
0.05	30	12	19.528	-
0.05	40	12	19.636	-
0.05	50	15	19.752	-
0.05	60	15	19.793	-

Tab. 8.3: Auswertung der Eingangsspannung V_m für den **Anfangswinkel 14°** des Pendels bei Vorgabe einer Decay-Rate α , Kegelwinkel Θ und Radius r [X - erfüllt, - - nicht erfüllt]

Bei einem Anfangswinkel von 15° wird die Eingangsspannung nicht kleiner als 20V (Tabelle 8.2). Eine Verringerung auf 14° führt zu einem akzeptablen Ergebnis (Tabelle 8.3). Die

maximale Spannung beträgt $V_{m,Max} \approx 19.997V$. Die eingestellten Parameter folgen zu:

$$\alpha = 0.50; \quad \Theta = 50^\circ; \quad r = 14. \quad (8.7)$$

Bei den gewählten Parametern und der Berücksichtigung bei der Berechnung der LMI's resultieren die Werte des k-Vektors.

$$\underline{k} = [-75.7055 \quad -9.6779 \quad -0.0154 \quad -0.1327] \quad (8.8)$$

Die Polstellen des geschlossenen Regelkreises sind nachfolgend aufgelistet und im Vergleich zu den Polstellen der Systemmatrix in Abbildung 8.5 dargestellt.

$$eig(\underline{A} - \underline{b} \cdot \underline{k}) = \begin{bmatrix} -6.3199 + j0.3236 \\ -6.3199 - j0.3236 \\ -3.1548 + j0.0000 \\ -0.6905 + j0.0000 \end{bmatrix}$$

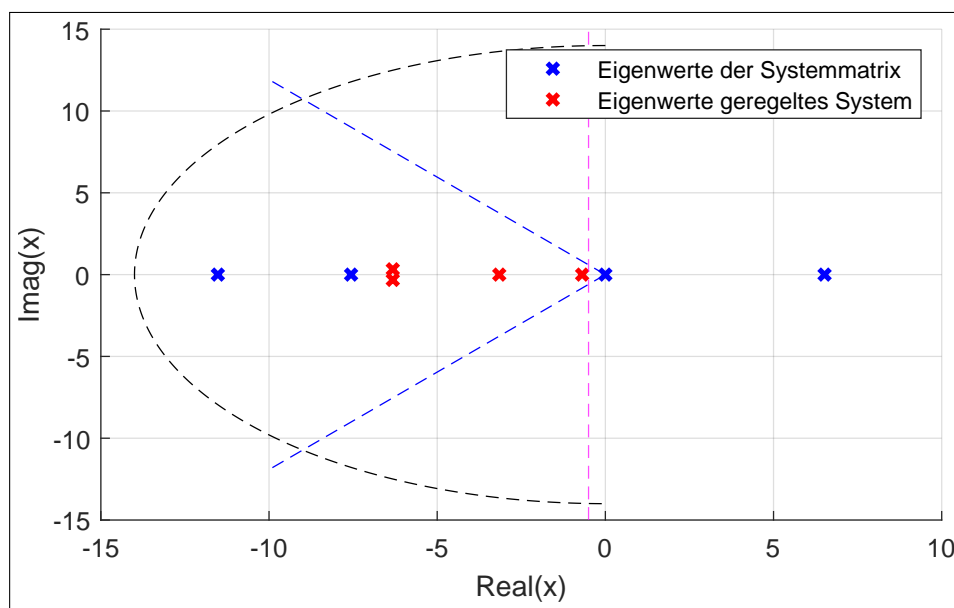


Abb. 8.5: Vergleich der Polstellenlagen der Systemmatrix A und des geschlossenen Regelkreises

Der geschlossene Regelkreis weist nur Polstellen mit einem Realteil kleiner Null auf. Folglich ist das System stabil. In Abbildung 8.6 sind der Kurvenverlauf des Pendelwinkels Θ , als auch der des Schwungradwinkels φ dargestellt. Aus den Kurvenverläufen wird geschlussfolgert, dass die implementierte Reglerstruktur das Pendel in die instabile Ruhelage zurückregelt. Die maximale Eingangsspannung von 20V wird dabei nicht überschritten. Die eingangs gesetzten Regelziele gelten als erfüllt.

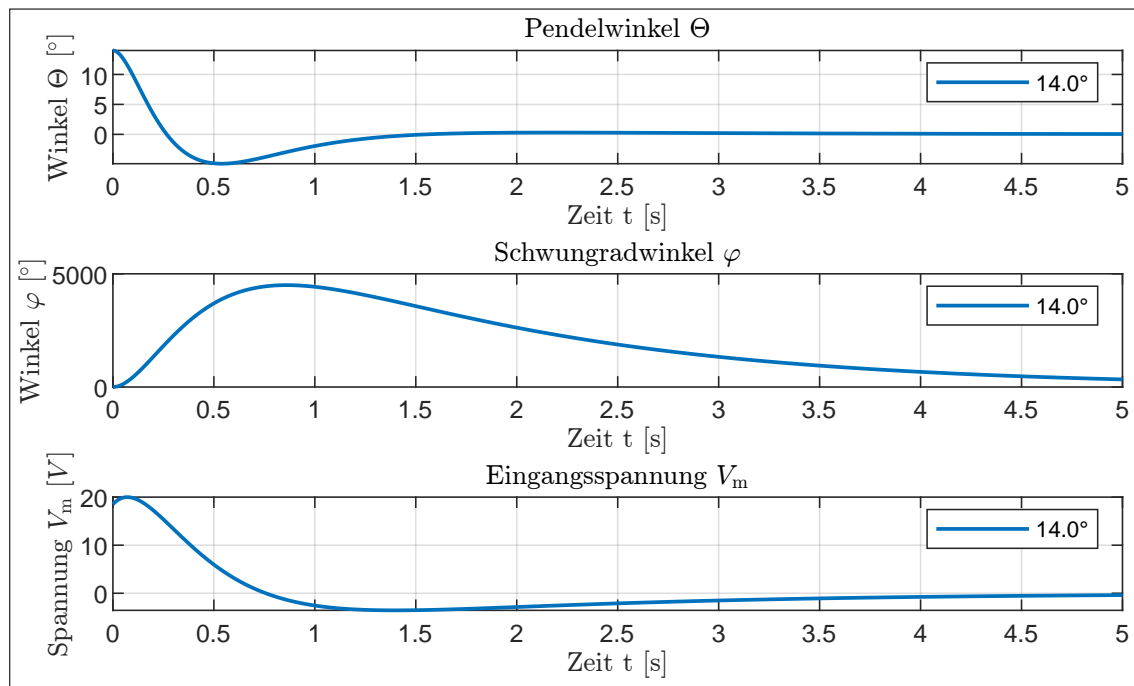


Abb. 8.6: Relevante Kurvenverläufe zur Validierung des Reglers

8.3 Regleranwendung am nichtlinearen Modell

Bei der Anwendung des linearen Reglers am nichtlinearen Modell werden die erweiterten LMI-Parameter aus Gleichung 8.7 angesetzt, d.h. der k -Vektor aus Gleichung 8.8 gilt. Die relevanten Kurvenverläufe sind in Abbildung 8.7 dargestellt. Diese ähneln den Kurvenverläufen aus Abbildung 8.6. Die maximale Eingangsspannung des nichtlinearen Modells ist: $V_{m,Max} \approx 19.924V$. Die vorgegebenen Constrains sind eingehalten. Der lineare Regler ist in der Lage, das instabile nichtlineare System für Auslenkungen bis 14° zu stabilisieren.

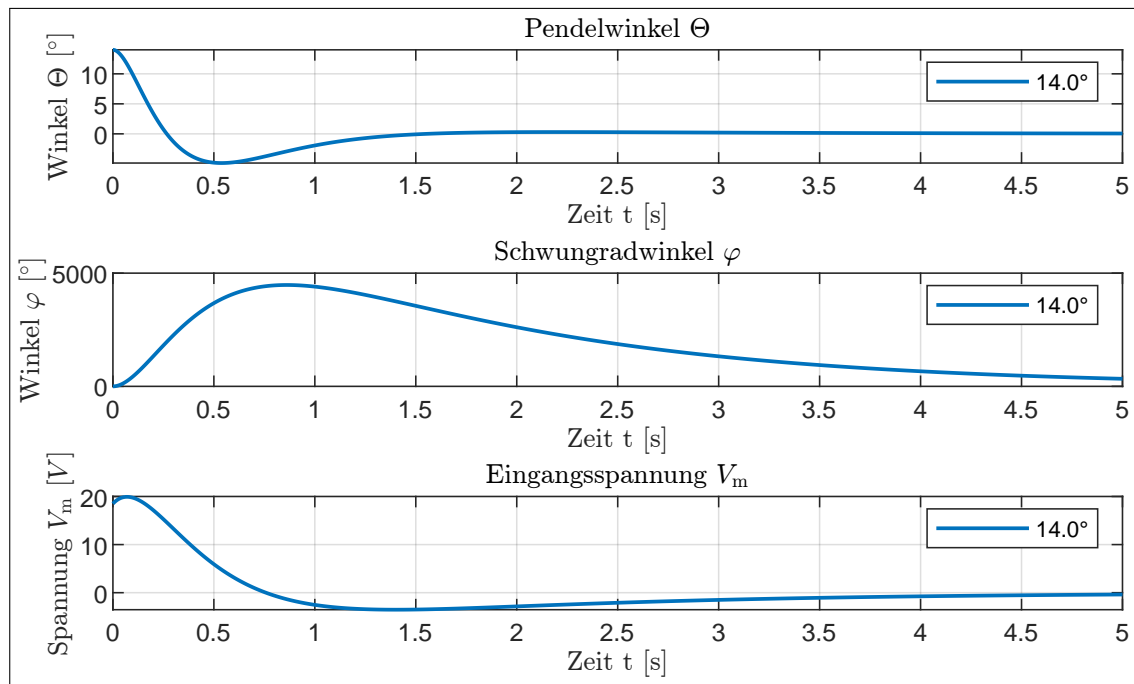


Abb. 8.7: Relevante Kurvenverläufe zur Anwendung des Reglers

9 Beobachterentwurf

10 Ausblick