



Hochschule für Technik
und Wirtschaft Berlin

University of Applied Sciences

Schwungrad Pendel: Modellbildung/Simulation (M2)

Name:	Matrikelnummer:
Milan Larsen	581929
Sebastian Richter	572906
Cyrill Schmiedehausen	XXXXXX
Aaron Zielstorff	567183

Fachbereich:	FB1
Studiengang:	M. Elektrotechnik
Fachsemester:	2. FS
Fach:	M2 Modellbildung/Simulation
Dozent:	Prof. Dr.-Ing. Steffen Borchers
Abgabe am:	23. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Versuchsaufbau	4
2	Modellierung des Schwungrad-Pendels	6
2.1	Modellierung des Gleichstrommotors	6
2.2	Modellierung des Schwungrad-Pendels	7
2.2.1	Lagrange Ansatz	7
2.2.2	Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen	7
2.2.3	Generalisierte Koordinaten	8
2.2.4	Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie	8
2.2.5	Herleitung der Bewegungsgleichungen	9
3	Zustandsraumdarstellung	10
3.1	Nichtlineares Zustandsraummodell	10
3.2	Lineares Zustandsraummodell	11
4	Vergleich lineares/nichtlineares System	14
5	Sensitivitätsanalyse der Modellparameter	16
6	Aufschwingen des Schwungrad-Pendels	17
7	Zustandsregler	18
7.1	Reglerentwurf	18
7.1.1	Nachweis der Steuerbarkeit	18
7.1.2	Reglergesetz	19
7.1.3	Lineare Matrixungleichungen	20
7.2	Reglervalidierung am linearen Modell	22
7.3	Regleranwendung am nichtlinearen Modell	27
8	Beobachterentwurf	29
9	Ausblick	30
	Literaturverzeichnis	31

Abbildungsverzeichnis

1.1	Modellskizze des Versuchs	5
2.1	Ersatzschaltbild Gleichstrommotor	6
4.1	Übersicht der Simulationsstruktur	14
4.2	Nichtlineare Strecke	14
4.3	Lineare Strecke	14
4.4	Vergleich der Pendelwinkel θ - kleine Auslenkung	15
4.5	Vergleich der Pendelwinkel θ - große Auslenkung	15
7.1	Systemstruktur mit einfacher Zustandsrückführung	19
7.2	Einschränkung der Polregion bei exponentieller Stabilität	20
7.3	Einschränkung der Polregion bei Erweiterung der LMI	21
7.4	Polstellen der Systemmatrix	22
7.5	Simulink-Reglerstruktur	23
7.6	Polstellenlagen der Systemmatrix und des geschlossenen Regelkreises	26
7.7	Relevante Kurvenverläufe zur Validierung des Reglers	27
7.8	Relevante Kurvenverläufe zur Anwendung des Reglers	28

Tabellenverzeichnis

1.1	Modellparameter des Schwungrad-Pendels	4
7.1	Auswertung von V_m für unterschiedliche Anfangsauslenkungen	23
7.2	Auswertung von V_m bei einem Anfangswinkel von 15°	24
7.3	Auswertung von V_m bei einem Anfangswinkel von 14°	25

1 Einführung und Versuchsaufbau

Inhalt dieser Belegarbeit ist die Modellierung eines inversen Pendels, welches über ein Schwungrad regelungstechnisch in der aufrechten Position stabil gehalten werden soll.

Diese Arbeit geht dabei im ersten Abschnitt auf den **Versuchsaufbau** und die **Modellierung** des Pendels ein. Es schließt sich eine **Sensitivitäts- und Parameteranalyse** an, über welche der Einfluss bestimmter Modellgrößen auf das Verhalten des Systems untersucht wird.

Nachdem das Modell aufgestellt und auf seine Eigenschaften analysiert wurde, folgt die Implementierung als Simulation in Matlab/Simulink. Dafür soll zunächst das **Aufschwingen des Pendels** umgesetzt werden. Kann das Pendel bis in einen bestimmten Bereich um die obere Ruhelage bewegt werden, übernimmt ein **einfacher Zustandsregler**, welcher ebenfalls in dieser Arbeit entworfen wird.

Abschließend wird ein **Beobachter** umgesetzt, über welchen die nicht messbaren Zustände des Systems rekonstruiert werden können, um den Regler am realen Versuch in Betrieb zu nehmen.

Nachfolgend findet sich die Darstellung der Modellparameter/Konstanten zur Modellierung des Schwungrad-Pendels (siehe Tabelle 1.1).

Symbol	Parameter	Wert/Einheit
θ	Winkel des Pendels	rad
φ	Winkel des Schwungrades	rad
J_1	Trägheitsmoment des Pendels (+ Motorstator)	$0.01186 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
J_2	Trägheitsmoment des Rads (+ Motorrotor)	$0.0005711 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
c_1	Reibungsfaktor des Pendels	$0.04 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
c_2	Reibungsfaktor des Rads	$0.0001 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
m_1	Masse des Pendels und Stators	0.826 kg
m_2	Masse des Rads und Rotors	0.583 kg
l_1	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Pendels	0.1053 m
l_2	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Rads	0.14 m
K_b	Back-End-Konstante	$0.0987 \frac{\text{V}}{\text{rad}}$
K_t	Motor-Drehmoment-Konstante	$0.0987 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}}$
R_a	Widerstand der Ankerwicklung	1.5562Ω

Tab. 1.1: Modellparameter des Schwungrad-Pendels

Ziel der Arbeit soll es sein, anhand von Beispielparametern eine effektive Regelung umzusetzen, welche später bei der Übernahme auf einen realen Versuchsaufbau einfach adaptiert

werden kann. Dazu ist es wichtig ein gutes Modell umzusetzen und den Einfluss der verschiedenen Modell- und Regelparmeter auf das Verhalten des Systems zu kennen.

Abbildung 1.1 zeigt den modellhaften Versuchsaufbau. Das System besteht aus einem Pendel und einem Schwungrad. Das Pendel kann frei rotieren um die Oz -Achse, die senkrecht zur Oxy -Ebene steht. Das Schwungrad wird durch einen Gleichstrommotor angetrieben und dreht sich um eine Achse parallel zur Oz -Achse. Das Pendel kann durch die Reaktionskraft ausbalanciert werden, die durch das Schwungrad erzeugt wird.

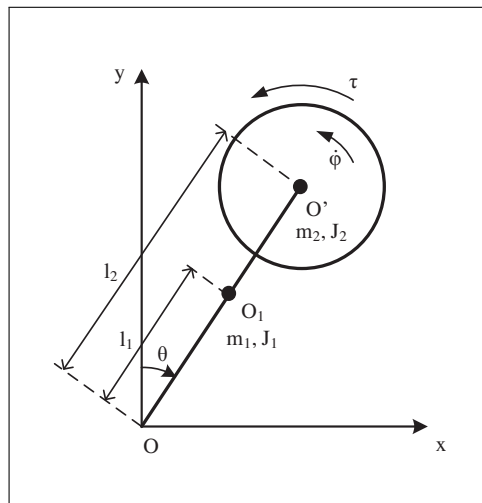


Abb. 1.1: Modellskizze des Schwungrad-Pendel-Versuchs inklusive relevanter Modellparameter

Weiterhin gelten folgende Voraussetzungen für das System:

- Das Pendel ist frei gelagert.
- Der Motor (Gleichstrommaschine) ist spannungsgeregt (bei $V_{m,Max} = 20\text{ V}$).
- Der Winkel (θ) des Pendels und der Winkel (φ) des Schwungrades werden gemessen.

Es sind folgende Einschränkungen ermittelt/festgelegt worden:

- Das Aufschwingen soll über eine schnelle Steuerung umgesetzt werden.
- Es soll ein Zustandsregler mit vier Zuständen (x_1 bis x_4) verwendet werden für die Regelung um die Ruhelage.
- Für die Ermittlung der Winkelgeschwindigkeiten ($\dot{\theta}$ und $\dot{\varphi}$) ist die Rekonstruktion über einen Beobachter notwendig.

2 Modellierung des Schwungrad-Pendels

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Modellierung des Schwungrad-Pendels inklusive des treibenden Gleichstrommotors.

2.1 Modellierung des Gleichstrommotors

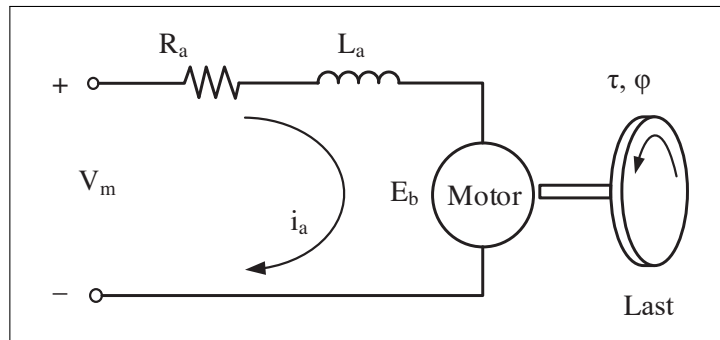


Abb. 2.1: Ersatzschaltbild des Gleichstrommotors am Schwungrad-Pendel

Abbildung 2.1 zeigt das Ersatzschaltbild des Gleichstrommotors am Schwungrad-Pendel. Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz ergibt folgende Gleichung:

$$V_m = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_b \quad (2.1)$$

Die gegenelektromotorische Kraft (EMK) hängt von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und der Gegen-EMK-Konstante K_b wie folgt ab:

$$E_b = K_b \dot{\varphi} \quad (2.2)$$

Angenommen die Wirkung der Induktivität ist sehr klein ($L_a \ll R_a$), Gleichung 2.1 ergibt sich zu

$$i_a = \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a}. \quad (2.3)$$

Das Motordrehmoment τ ist mit dem Ankerstrom i_a durch eine Motordrehmomentkonstante K_t verbunden. Die Modellgleichung des Gleichstrommotors ergibt sich somit zu:

$$\tau = K_t i_a = K_t \frac{V_m - K_b \dot{\phi}}{R_a} \quad (2.4)$$

2.2 Modellierung des Schwungrad-Pendels

Zur Modellierung des Pendels wurde der Lagrange-Ansatz gewählt, um die Bewegungsgleichungen des Pendels herzuleiten.

2.2.1 Lagrange Ansatz

Die nachfolgende Gleichung zeigt den **Lagrange Ansatz** unter Berücksichtigung der **dissipativen Funktion**. Diese besagt in Erweiterung zu der Lagrange-Formulierung, dass Energie in einem Vorgang in Wärme umgewandelt wird. Mit Hilfe der dissipativen Funktion können **Reibungsverluste** bei der Energiemethode nach Lagrange berücksichtigt werden.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.5)$$

2.2.2 Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen

In Abbildung 1.1 sind zwei Teilchen bzw. Massepunkte im \mathbb{R}^2 zu erkennen. Zum Einen die des Pendels und zum Anderen die des Schwungrades. Somit gilt grundsätzlich:

- 2 Punkte: 4 Freiheitsgrade (FHG)

Das Schwungrad-Pendel besitzt jedoch auch zwei Zwangsbedingungen, die wie folgt formuliert werden können:

- Das Pendel kann nur um die 0z-Achse rotieren:
 $z = 0$
- Die Masse m_2 ist über des Pendel mit dem Aufhängepunkt 0 gekoppelt:
 $(y_{m_1} - y_{m_2})^2 + (x_{m_1} - x_{m_2})^2 = l_2^2$

Beide Zwangsbedingungen sind holonom-skleronom, da sie als Gleichungen zwischen zwei Koordinaten angegeben werden können und nicht von der Zeit abhängig sind. Somit bleiben am Ende noch zwei Freiheitsgrade (FHG) übrig.

2.2.3 Generalisierte Koordinaten

Aus den verbliebenen Freiheitsgraden werden die generalisierten Koordinaten abgeleitet. Dabei gilt grundsätzlich folgender Zusammenhang im \mathbb{R}^2 :

$$\boxed{S = 2n - k} \quad (2.6)$$

mit S als Anzahl der Freiheitsgrade und somit auch der Anzahl der generalisierten Koordinaten, n der Anzahl der Teilchen und k der Anzahl der holonomen Zwangsbedingungen.

Die beiden Generalisierten Koordinaten sind somit:

- $q_1 = \theta$
- $q_2 = \varphi$

2.2.4 Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie

Für die Lagrange-Formulierung werden die kinetische und die potentielle Energie des Systems benötigt. Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der translatorischen kinetischen Energie $E_{\text{kin,trans}}$ und der rotatorischen kinetischen Energie $E_{\text{kin,rot}}$. Die Gleichungen sind nachfolgend aufgestellt.

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,trans}} &= \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2\dot{\theta})^2 \\ E_{\text{kin,rot}} &= \frac{1}{2}J_1(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_2(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die gesamte **kinetische Energie des Systems** ist somit:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}} \\ E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2 \right) \dot{\theta}^2 + J_2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Der Ursprung der potentiellen Energie liegt bei Null. Somit ergibt sich die **potentielle Energie des Systems** zu:

$$\boxed{E_{\text{pot}} = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos(\theta)} \quad (2.9)$$

2.2.5 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Die **Lagrange-Funktion** L wird aus der Differenz der kinetischen Energie aus Gleichung 2.8 und der potentiellen Energie aus Gleichung 2.9 berechnet.

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

$$L = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2) \dot{\theta}^2 + J_2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos(\theta)$$

(2.10)

Die **dissipative Energie** D ist:

$$D = \frac{1}{2} c_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{\varphi}^2$$

(2.11)

Zieht man nun den Ansatz aus Gleichung 2.5 heran und wendet diesen für die generalisierte Koordinate θ an, so erhält man die **Bewegungsgleichung des Schwungrades**:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2) \ddot{\theta} + J_2 \ddot{\varphi} + c_1 \dot{\theta} - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta) = 0$$

(2.12)

Ebenfalls der Gleiche Ansatz wird nun für die generalisierte Koordinate φ angewendet:

$$J_2 (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + c_2 \dot{\varphi} = \tau$$

(2.13)

Setzt man nun Gleichung 2.4 in Gleichung 2.13 ein erhält man die **Bewegungsgleichung des Pendels**:

$$J_2 (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + c_2 \dot{\varphi} = K_t i_a = K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a}$$

(2.14)

3 Zustandsraumdarstellung

Um das Verhalten mittels mathematischer Beziehungen zu veranschaulichen, wird die **Zustandsraumdarstellung** verwendet. Der **Systemeingang** wird festgelegt mit

$$\underline{u} = V_m, \quad (3.1)$$

wobei V_m die Eingangsspannung des Gleichstrommotors aus Gleichung 2.1 ist. Die **Systemzustände** des Schwungrad-Pendels sind:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Nach zeitlicher Ableitung des Zustandsvektors ergibt sich der **Vektor der Zustandsänderung** zu:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Die **Ausgänge des Systems** gleichen den vier Zuständen und ergeben sich somit zu

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

3.1 Nichtlineares Zustandsraummodell

Zum Aufstellen des nichtlinearen Zustandsraummodells werden die Gleichung 2.12 und Gleichung 2.14 nach den höchsten Ableitungen von $\ddot{\varphi}$ und $\ddot{\theta}$ umgestellt.

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a} - c_2 \dot{\varphi} - J_2 \cdot \ddot{\theta}}{J_2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-J_2 \ddot{\varphi} - c_1 \dot{\theta} + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Beide Gleichungen sind über die Winkelbeschleunigung des Schwungrades $\ddot{\varphi}$ und die des Pendels $\ddot{\theta}$ miteinander verkoppelt. Durch das gegenseitige ineinander Einsetzen werden die Abhängigkeiten eliminiert.

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a} - c_2 \dot{\varphi} - J_2 \cdot \left(\frac{-J_2 \ddot{\varphi} - c_1 \dot{\theta} + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2} \right)}{J_2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-J_2 \left(\frac{K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a} - c_2 \dot{\varphi} - J_2 \cdot \ddot{\theta}}{J_2} \right) - c_1 \dot{\theta} + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 3.1, 3.2 und 3.3, durch das einsetzen in Gleichung 3.6 und dem Zusammenfassen und Umstellen nach $\ddot{\varphi}$ bzw. $\ddot{\theta}$ folgt das **nichtlineare Zustandsraummodell**.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{K_t \cdot \frac{V_m - K_b \cdot x_4}{R_a} - c_2 \cdot x_4 - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(x_1) + c_1 \cdot x_2}{J_2} \\ x_4 \\ \frac{(m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(x_1) - c_1 \cdot x_2 - \left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2 \right) \cdot \frac{K_t \cdot \frac{V_m - K_b \cdot x_4}{R_a}}{J_2}}{J_2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2 Lineares Zustandsraummodell

Das Verhalten des nichtlinearen Systems ist für große Änderungen des Eingangssignals nicht vorhersehbar. Um dennoch Aussagen über das Systemverhalten treffen zu können, wird das nichtlineare Zustandsraummodell mithilfe der Taylorreihenentwicklung um eine Ruhelage (\underline{x}^*) linearisiert. Die nichtlinearen Restglieder $\underline{R}(\Delta \underline{x}^2, \Delta \underline{u}^2)$ werden zu Null angenommen. Durch die Linearisierung wird das Systemverhalten für kleine Änderungen um die Ruhelage kontrollierbar. Nachfolgend ist die Taylorreihenentwicklung für Linearisierung aufgeführt:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}^* + \Delta \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}^* + \Delta \underline{x}, \underline{u}^* + \Delta \underline{u}) \\ &= \underline{f}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{u} + \underline{R}(\Delta \underline{x}^2, \Delta \underline{u}^2)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Durch die Annahme über das Verhalten der nichtlinearen Restglieder folgt die Struktur des linearen Zustandsraummodells dargestellt in Gleichung 3.9.

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\underline{x}} &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{u} \\ \Delta \underline{y} &= \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{x} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial u_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{u}\end{aligned}\quad (3.9)$$

Um das linearisierte Zustandsraummodell zu erhalten, werden die einzelnen Gleichungen des nichtlinearen Zustandsraummodells aus Gleichung 3.7 nach den Zuständen x_1 bis x_4 , sowie dem Eingang V_m partiell abgeleitet und die Ruhelage \underline{x}^* eingesetzt. Dabei werden sowohl die Ruhelage des hängenden Pendels (untere Ruhelage) und die des stehenden Pendels (obere Ruhelage) betrachtet. In Gleichung 3.10 dargestellt ist die untere Ruhelage, mit Hilfe derer das lineare Zustandsraummodell für das hängende Pendel bestimmt werden kann. Anhand dessen kann das lineare Zustandsraummodell in Simulink mit dem nichtlinearen Zustandsraummodell im nachfolgenden Abschnitt (Abschnitt 4) verglichen werden.

$$\underline{x}_1^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.10)$$

Die Regelung, welche in Abschnitt 7 entworfen wird soll dafür sorgen, dass das Pendel in der oberen Ruhelage verweilt. Diese wird beschrieben durch:

$$\underline{x}_2^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.11)$$

Die allgemeine Form des **linearen Zustandsraummodells** lautet:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C} \cdot \underline{x} + \underline{D} \cdot \underline{u}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Wendet man nun die Linearisierungsvorschrift aus Gleichung 3.9 unter Nutzung der Ruhelagen an, so erhält man das konkrete linearisierte Zustandsraummodell für das System. In Gleichung 3.13 ist das linearisierte Zustandsraummodell für die obere Ruhelage und in Gleichung 3.14 das für die untere Ruhelage dargestellt.

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -50.9760 & -1.2328 & 0 & 0.1960 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 50.9760 & 1.2328 & 0 & -11.3323 \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9548 \\ 0 \\ 113.0101 \end{bmatrix} \cdot V_m \\ \Delta \underline{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \underline{0} \cdot V_m\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 50.9760 & -1.2328 & 0 & 0.1960 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -50.9760 & 1.2328 & 0 & -11.3323 \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9548 \\ 0 \\ 113.0101 \end{bmatrix} \cdot V_m \\ \Delta \underline{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \underline{0} \cdot V_m\end{aligned}\quad (3.14)$$

4 Vergleich lineares/nichtlineares System

In Abbildung 4.1 ist die Übersicht der notwendigen Simulationsstruktur dargestellt. Aus der Übersicht geht hervor, dass beide Systeme unterschiedliche Eingänge besitzen und somit ein direkter Vergleich ohne entsprechende Berücksichtigung der Linearisierungsvorschriften unmöglich ist. Das linearisierte Modell verwendet als Eingang im Gegensatz zum nichtlinearen Modell eine Differenz Δu . Die Strukturen des nichtlinearen und des linearen Modells sind zur Information in Abbildung 4.2 und Abbildung 4.3 visualisiert.

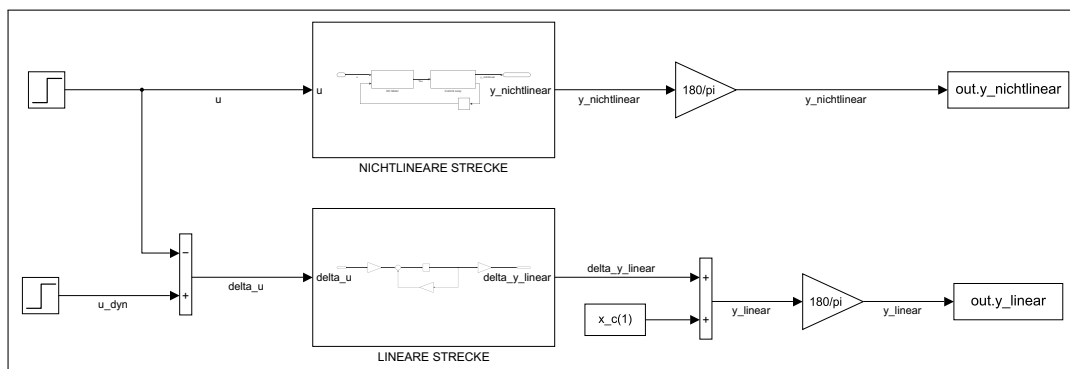


Abb. 4.1: Übersicht der Simulationsstruktur

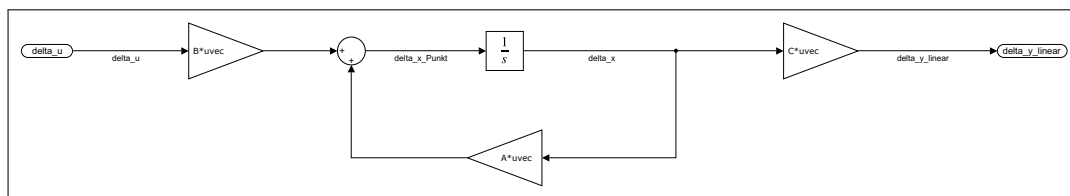


Abb. 4.2: Nichtlineare Strecke

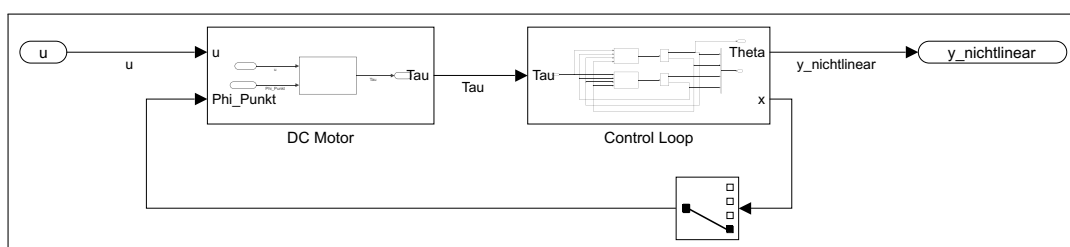


Abb. 4.3: Lineare Strecke

Um das lineare mit dem nichtlinearen Modell zu vergleichen, werden gemäß Abschnitt 3 zu den Zuständen $\Delta \underline{x}$ die Ruhelagen \underline{x}^* aus Gleichung 3.10 addiert. Aus der Abbildung 4.4 und Abbildung 4.5 geht hervor, dass die implementierten Systeme für kleine Abweichungen von der Ruhelage mit steigender Zeit „t“ selbiges Verhalten aufweisen.

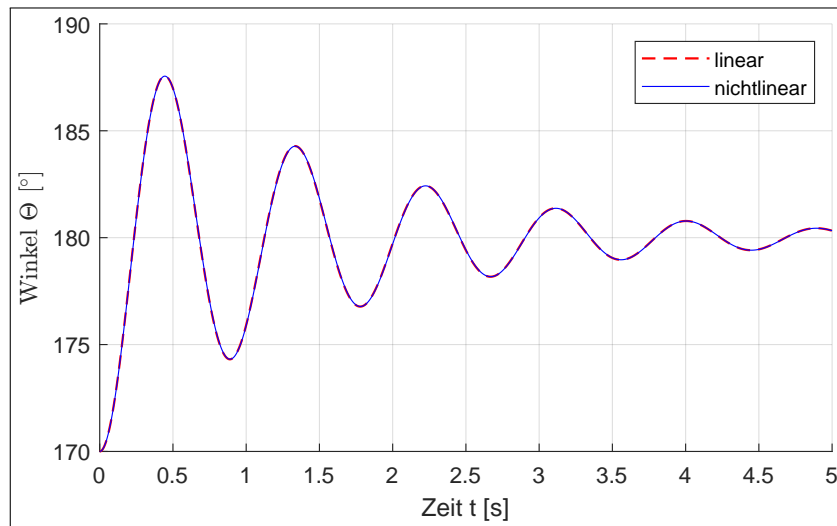


Abb. 4.4: Vergleich der Pendelwinkel θ bei -10° Anfangsauslenkung zur Ruhelage

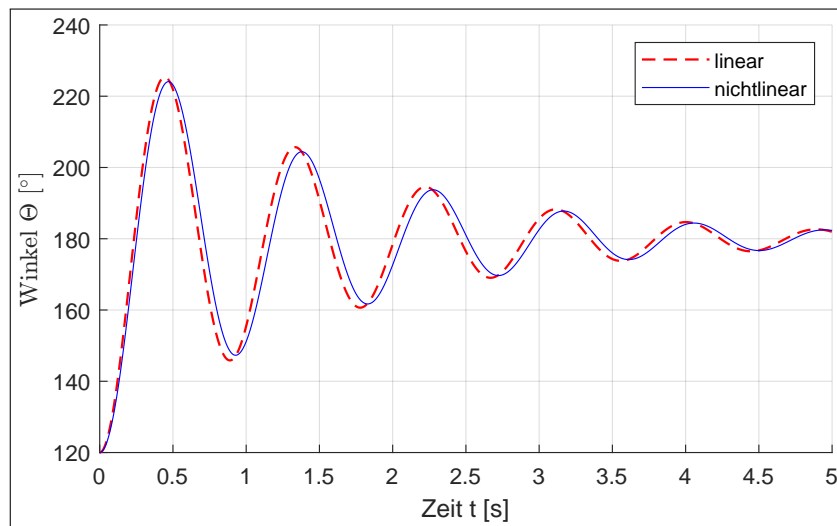


Abb. 4.5: Vergleich der Pendelwinkel θ bei -60° Anfangsauslenkung zur Ruhelage

5 Sensitivitätsanalyse der Modellparameter

6 Aufschwingen des Schwungrad-Pendels

7 Zustandsregler

Der nachfolgende Zustandsregler basiert auf einer **einfachen Zustandsrückführung**, d.h. Änderungen innerhalb des Systems werden auf die vorher definierte Ruhelage ausgeregelt.

7.1 Reglerentwurf

7.1.1 Nachweis der Steuerbarkeit

Zur Implementierung einer Reglerstruktur wird vorausgesetzt, dass das System steuerbar ist. Die vollständige Steuerbarkeit ist gegeben, wenn unter Berücksichtigung der Eingangsgröße $\underline{u}(t)$ das System von jedem beliebigen Anfangszustand \underline{x}_0 in jeden beliebigen Endzustand \underline{x}_e überführt werden kann. Der Nachweis erfolgt über die Auswertung der **Steuerbarkeitsmatrix** \underline{Q}_s . Zur Berechnung werden die Systemmatrix \underline{A} und die Eingangsmatrix \underline{B} benötigt (Gleichung 7.1).

$$\underline{Q}_s = \begin{pmatrix} \underline{B} & \underline{A} \cdot \underline{B} & \dots & \underline{A}^{(n-1)} \cdot \underline{B} \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Bei **SISO**- oder **SIMO**-Systemen folgt eine quadratische Matrix, d.h. die **Bedingung** für die Steuerbarkeit lautet:

$$\det(\underline{Q}_s) \neq 0.$$

Sofern ein **MISO**- oder **MIMO**-System vorliegt, muss der **Rang** gleich n bzw. m sein. Die Variablen n und m geben die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen und Spalten wieder. Falls

$$\begin{aligned} n &> m : \\ \text{rank}(\underline{Q}_s) &= m \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} n &< m : \\ \text{rank}(\underline{Q}_s) &= n \end{aligned}$$

gilt, ist das System steuerbar.

Durch **Anwendung** der Vorschrift aus Gleichung 7.1 folgt die Steuerbarkeitsmatrix des inversen Pendels in der instabilen Ruhelage zu:

$$\underline{Q}_s = \begin{bmatrix} 0 & -1.9548 & 24.5620 & -381.4330 \\ -1.9548 & 24.5620 & -381.4330 & 4.5979 \cdot 10^3 \\ 0 & 113.0101 & -1.2831 \cdot 10^3 & 1.4670 \cdot 10^4 \\ 113.0101 & -1.2831 \cdot 10^3 & 1.4670 \cdot 10^4 & -1.6797 \cdot 10^5 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix ist quadratisch. Die **Determinante** folgt zu:

$$\det(\underline{Q}_s) \approx 12.24 \cdot 10^7. \quad (7.2)$$

Das implementierte System ist **steuerbar**.

7.1.2 Reglergesetz

Das allgemeine **Reglergesetz** für die Zustandsrückführung ist nachfolgend gezeigt. Die Systemstruktur kann der Abbildung 7.1 entnommen werden. Gleichungen zur Berechnung der Matrix K folgen in Unterunterabschnitt 7.1.3.

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \cdot \underline{x}(t) \quad (7.3)$$

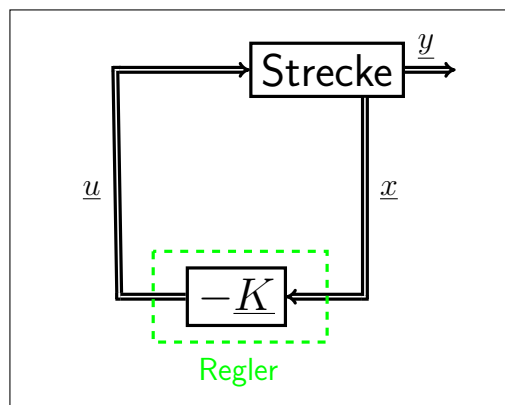


Abb. 7.1: Systemstruktur mit einfacher Zustandsrückführung

7.1.3 Lineare Matrixungleichungen

Die Berechnung der Reglermatrix K wird mit **quadratischen Ljapunov-Funktionen** und der **exponentiellen Stabilität** motiviert. Im ersten Schritt werden die Polstellenregionen lediglich durch die Vorgabe einer Decay-Rate α eingeschränkt. Die **Linearen Matrixungleichungen (LMI)** sind in Gleichung 7.4 dargestellt. Zur Visualisierung der Einschränkungen dient Abbildung 7.2. Das Lösen der LMI's, insbesondere der Gleichung 7.5 erfolgt mithilfe der Matlab-Toolbox **Robust-Control-Toolbox** (Linear Matrix Inequalities).

$$\underline{0} > \underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{X} \cdot \underline{A}^T - \underline{B} \cdot \underline{M} - \underline{M}^T \cdot \underline{B}^T + 2 \cdot \alpha \cdot \underline{X} \quad (7.4)$$

$$\underline{X} > \underline{0}$$

mit

$$\underline{K} = \underline{M} \cdot \underline{X}^{-1} \quad (7.5)$$

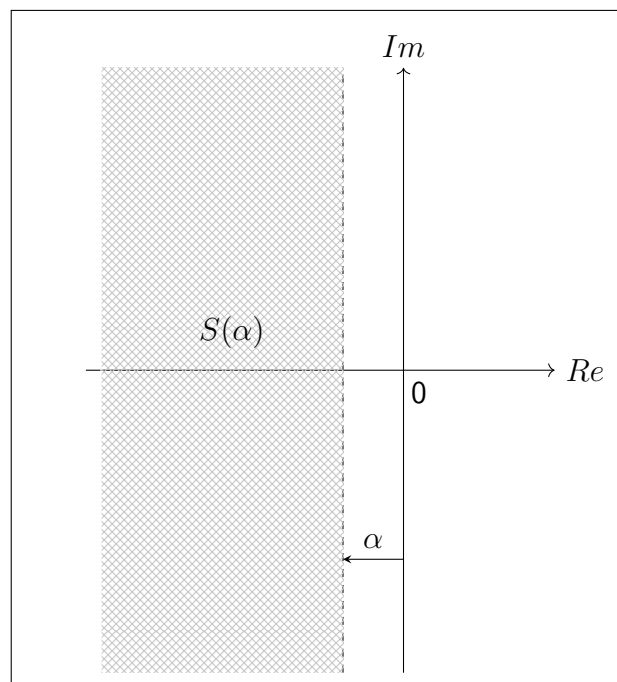


Abb. 7.2: Einschränkung der Polregion bei exponentieller Stabilität zu $S(\alpha)$

Sofern die Einschränkung mittels Decay-Rate nicht ausreicht, um die Voraussetzungen aus

Abschnitt 1 zu erreichen, werden zusätzliche LMI's eingeführt, welche weitere Einschränkungen mittels Kegel und Halbkreis vornehmen (Gleichung 7.6 und Abbildung 7.3).

$$\begin{aligned}
 \underline{0} &> \underline{AX} + \underline{XA}^T - \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T + 2\alpha \underline{X} \\
 \underline{0} &> \begin{pmatrix} (\underline{AX} + \underline{XA}^T - \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T) \sin \theta & (\underline{AX} - \underline{XA}^T - \underline{BM} + \underline{M}^T \underline{B}^T) \cos \theta \\ (\underline{XA}^T - \underline{AX} + \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T) \cos \theta & (\underline{AX} + \underline{XA}^T - \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T) \sin \theta \end{pmatrix} \\
 \underline{0} &> \begin{pmatrix} -r \underline{X} & \underline{AX} - \underline{BM} \\ \underline{XA}^T - \underline{M}^T \underline{B}^T & -r \underline{X} \end{pmatrix} \\
 \underline{X} &> \underline{0}
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

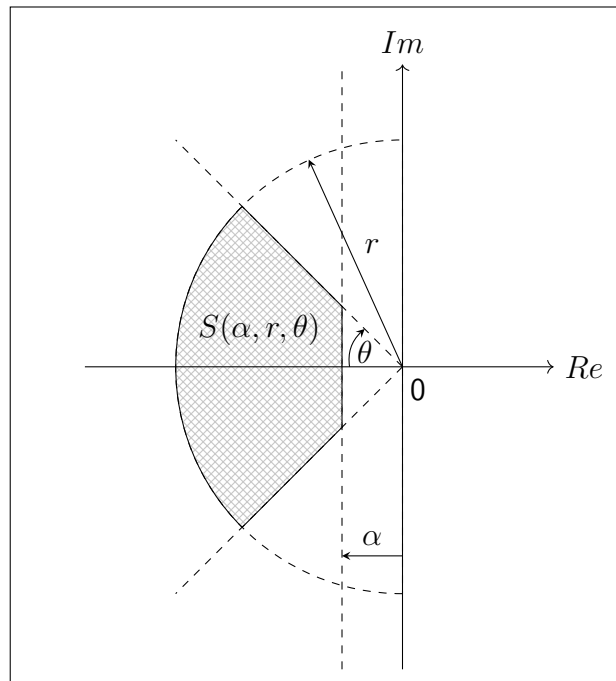


Abb. 7.3: Einschränkung der Polregion bei Erweiterung der LMI zu $S(\alpha, r, \theta)$

7.2 Reglervalidierung am linearen Modell

Um eine geeignete Reglerstruktur zu entwerfen, werden zuerst die **Polstellen der Systemmatrix A** bestimmt und grafisch dargestellt (Abbildung 7.4). Aus der Abbildung geht hervor, dass zwei der vier rein reellen Polstellen instabil sind, da diese einen Realteil größer oder gleich Null aufweisen. Dies hat ein instabiles Systemverhalten zur Folge.

$$\text{eig}(\underline{A}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.5169 \\ -7.5606 \\ -11.5214 \end{bmatrix}$$

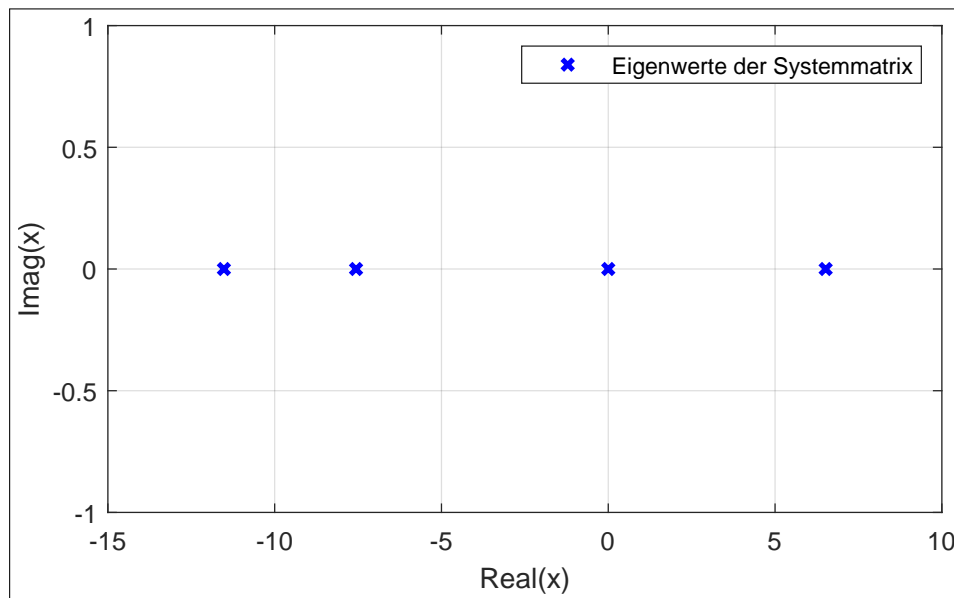


Abb. 7.4: Polstellen der Systemmatrix

Der zu entwerfende Regler muss in der Lage sein, die maximal zulässige Eingangsspannung von $V_{m,Max} = 20V$ auszureizen, jedoch nicht zu überschreiten, um größtmögliche Winkeländerungen von der definierten instabilen Ruhelage ausgleichen zu können. Die Simulationen werden mithilfe der Matlab-Erweiterung **Simulink** durchgeführt. Die Reglerstruktur ist in Abbildung 7.5 dargestellt. Das linearisierte Zustandsraummodell verwendet gemäß Definition Delta-Größen, welche bei der Anwendung des linearen Reglers am nichtlinearen Modell berücksichtigt werden müssen. Da die entstehende K-Matrix eine Größe von (1×4) besitzt, wird fortan die Vektorschreibweise k bevorzugt.

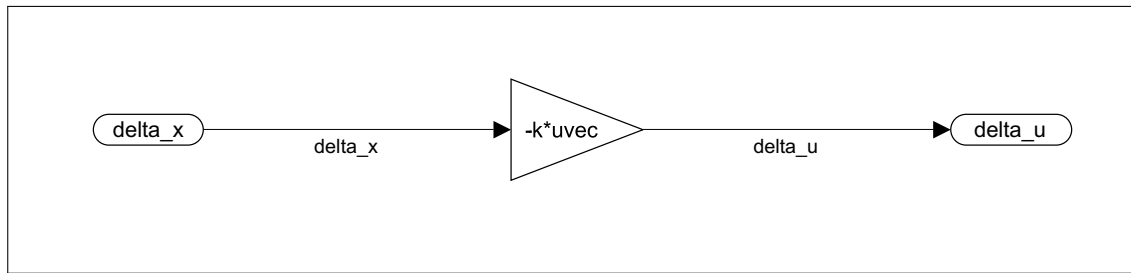


Abb. 7.5: Simulink-Reglerstruktur

Im ersten Versuch wird nur die Decay-Rate α variiert (vgl. Abbildung 7.2). Der Startwinkel des Pendels wird von 15° solange verringert, bis der Maximalwert der anliegenden Eingangsspannung $V_m \leq 20V$ erreicht. Zur Übersicht der Ergebnisse dient Tabelle 7.1.

Anfangsauslenkung Pendel [°]	Kriterium	α				
		1.0	0.5	0.3	0.1	0.05
15	$V_{m,Max}$ [V]	39.107	31.983	29.184	26.471	27.351
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	-	-
14	$V_{m,Max}$ [V]	36.500	29.851	27.238	24.706	25.528
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	-	-
13	$V_{m,Max}$ [V]	33.893	27.719	25.293	22.941	23.704
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	-	-
12	$V_{m,Max}$ [V]	31.286	25.587	23.347	21.177	21.881
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	-	-
11	$V_{m,Max}$ [V]	28.679	23.454	21.401	19.412	20.057
	$V_{m,Max} \leq 20V$	-	-	-	X	-

Tab. 7.1: Auswertung der Eingangsspannung V_m für unterschiedliche Anfangsauslenkungen des Pendels bei Vorgabe einer Decay-Rate α [X - erfüllt, - - nicht erfüllt]

Aus der Tabelle geht hervor, dass erst bei einem Anfangswinkel von 11° und $\alpha = 0.1$ die Spannung V_m unter $20V$ sinkt. Mithilfe der erweiterten LMI's wird nun versucht, ein größeren Startwinkel zu ermöglichen und weiterhin die Constraints einzuhalten. Dafür wird die Anfangsauslenkung des Pendels erneut, von 15° startend, verringert. Zusätzlich erfolgt eine Variation des Kegelwinkels Θ zwischen 10° und 60° . Der Radius r des Halbkreises variiert zwischen 11 und 15 (vgl. Abbildung 7.3). Die Decay-Rate α nimmt die bereits

betrachteten Werte an. In der Tabelle 7.2 und Tabelle 7.3 sind die relevanten Ergebnisse dargestellt. Die vollständigen Tabellen liegen dem digitalen Anhang bei.

α	$\Theta [^\circ]$	r	$V_{m,Max} [V]$	kleinste Spannung
1.00	10	12	21.056	-
1.00	20	11	21.146	-
1.00	30	12	21.169	-
1.00	40	11	21.282	-
1.00	50	11	21.391	-
1.00	60	12	21.604	-
0.50	10	13	20.713	-
0.50	20	13	20.719	-
0.50	30	13	20.751	-
0.50	40	13	20.947	-
0.50	50	13	20.986	-
0.50	60	12	21.265	-
0.30	10	14	20.519	-
0.30	20	13	20.590	-
0.30	30	13	20.620	-
0.30	40	13	20.722	-
0.30	50	13	20.926	-
0.30	60	15	21.083	-
0.10	10	15	20.294	-
0.10	20	14	20.398	-
0.10	30	14	20.442	-
0.10	40	14	20.598	-
0.10	50	13	20.777	-
0.10	60	14	20.972	-
0.05	10	15	20.256	X
0.05	20	14	20.377	-
0.05	30	14	20.420	-
0.05	40	14	20.537	-
0.05	50	13	20.819	-
0.05	60	14	20.945	-

Tab. 7.2: Auswertung der Eingangsspannung V_m für den **Anfangswinkel 15°** des Pendels bei Vorgabe einer Decay-Rate α , Kegelwinkel Θ und Radius r [X - erfüllt, - - nicht erfüllt]

α	$\Theta [^\circ]$	r	$V_{m,Max} [V]$	größte Spannung
1.00	10	13	19.912	-
1.00	20	13	19.966	-
1.00	30	11	19.771	-
1.00	40	12	19.886	-
1.00	50	11	19.965	-
1.00	60	12	20.164	-
0.50	10	12	19.498	-
0.50	20	11	19.685	-
0.50	30	11	19.786	-
0.50	40	11	19.880	-
0.50	50	14	19.997	X
0.50	60	13	19.926	-
0.30	10	12	19.824	-
0.30	20	11	19.953	-
0.30	30	15	19.954	-
0.30	40	15	19.672	-
0.30	50	11	19.990	-
0.30	60	12	19.832	-
0.10	10	13	19.326	-
0.10	20	12	19.489	-
0.10	30	12	19.436	-
0.10	40	12	19.621	-
0.10	50	11	19.904	-
0.10	60	15	19.803	-
0.05	10	13	19.244	-
0.05	20	12	19.528	-
0.05	30	12	19.528	-
0.05	40	12	19.636	-
0.05	50	15	19.752	-
0.05	60	15	19.793	-

Tab. 7.3: Auswertung der Eingangsspannung V_m für den **Anfangswinkel 14°** des Pendels bei Vorgabe einer Decay-Rate α , Kegelwinkel Θ und Radius r [X - erfüllt, - - nicht erfüllt]

Bei einem Anfangswinkel von 15° wird die Eingangsspannung nicht kleiner als 20V (Tabelle 7.2). Eine Verringerung auf 14° führt zu einem akzeptablen Ergebnis (Tabelle 7.3). Die

maximale Spannung beträgt $V_{m,Max} \approx 19.997V$. Die eingestellten Parameter folgen zu:

$$\alpha = 0.50; \quad \Theta = 50^\circ; \quad r = 14. \quad (7.7)$$

Bei den gewählten Parametern und der Berücksichtigung bei der Berechnung der LMI's resultieren die Werte des k-Vektors.

$$\underline{k} = [-75.7055 \quad -9.6779 \quad -0.0154 \quad -0.1327] \quad (7.8)$$

Die Polstellen des geschlossenen Regelkreises sind nachfolgend aufgelistet und im Vergleich zu den Polstellen der Systemmatrix in Abbildung 7.6 dargestellt.

$$eig(\underline{A} - \underline{b} \cdot \underline{k}) = \begin{bmatrix} -6.3199 + j0.3236 \\ -6.3199 - j0.3236 \\ -3.1548 + j0.0000 \\ -0.6905 + j0.0000 \end{bmatrix}$$

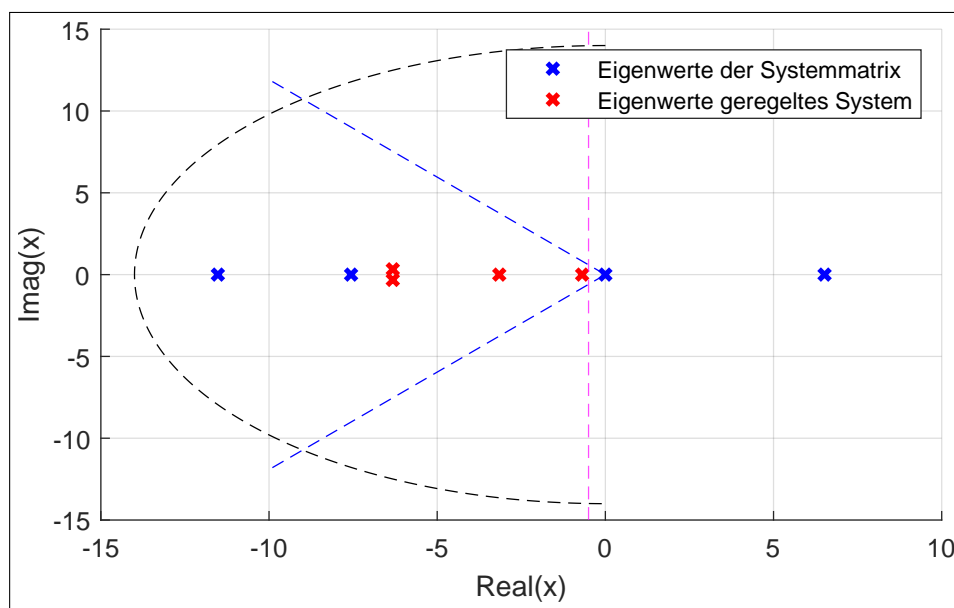


Abb. 7.6: Vergleich der Polstellenlagen der Systemmatrix A und des geschlossenen Regelkreises

Der geschlossene Regelkreis weist nur Polstellen mit einem Realteil kleiner Null auf. Folglich ist das System stabil. In Abbildung 7.7 sind der Kurvenverlauf des Pendelwinkels Θ , als auch der des Schwungradwinkels φ dargestellt. Aus den Kurvenverläufen wird geschlussfolgert, dass die implementierte Reglerstruktur das Pendel in die instabile Ruhelage zurückregelt. Die maximale Eingangsspannung von 20V wird dabei nicht überschritten. Die eingangs gesetzten Regelziele gelten als erfüllt.

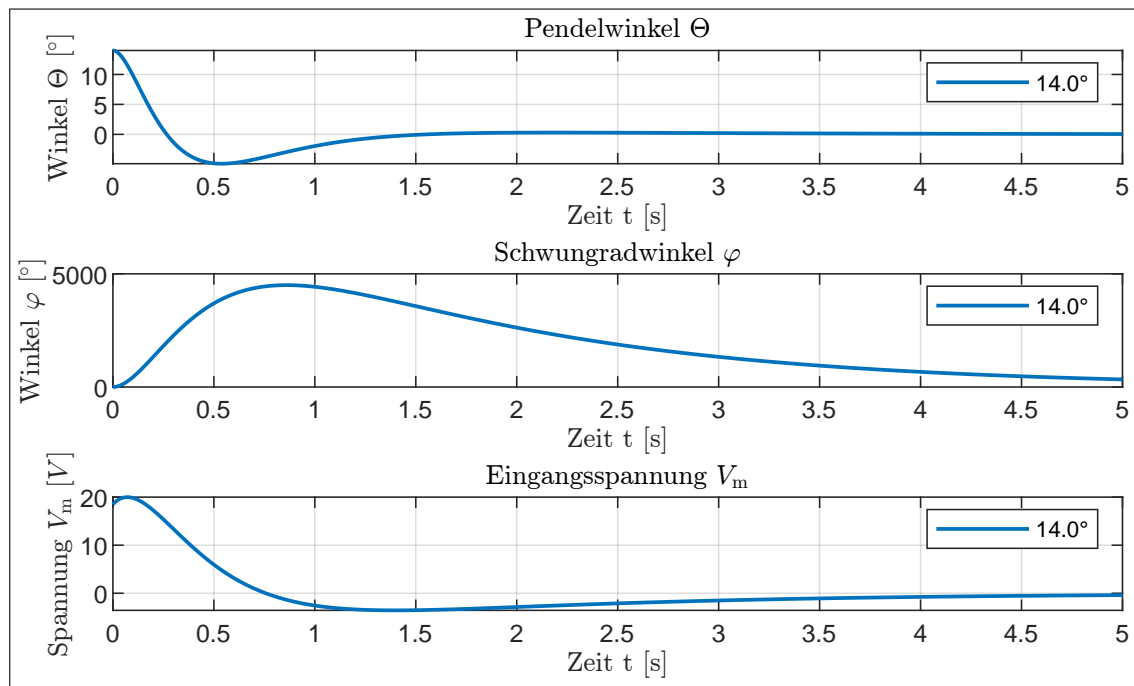


Abb. 7.7: Relevante Kurvenverläufe zur Validierung des Reglers

7.3 Regleranwendung am nichtlinearen Modell

Bei der Anwendung des linearen Reglers am nichtlinearen Modell werden die erweiterten LMI-Parameter aus Gleichung 7.7 angesetzt, d.h. der k -Vektor aus Gleichung 7.8 gilt. Die relevanten Kurvenverläufe sind in Abbildung 7.8 dargestellt. Diese ähneln den Kurvenverläufen aus Abbildung 7.7. Die maximale Eingangsspannung des nichtlinearen Modells ist: $V_{m,Max} \approx 19.924V$. Die vorgegebenen Constrains sind eingehalten. Der lineare Regler ist in der Lage, das instabile nichtlineare System für Auslenkungen bis 14° zu stabilisieren.

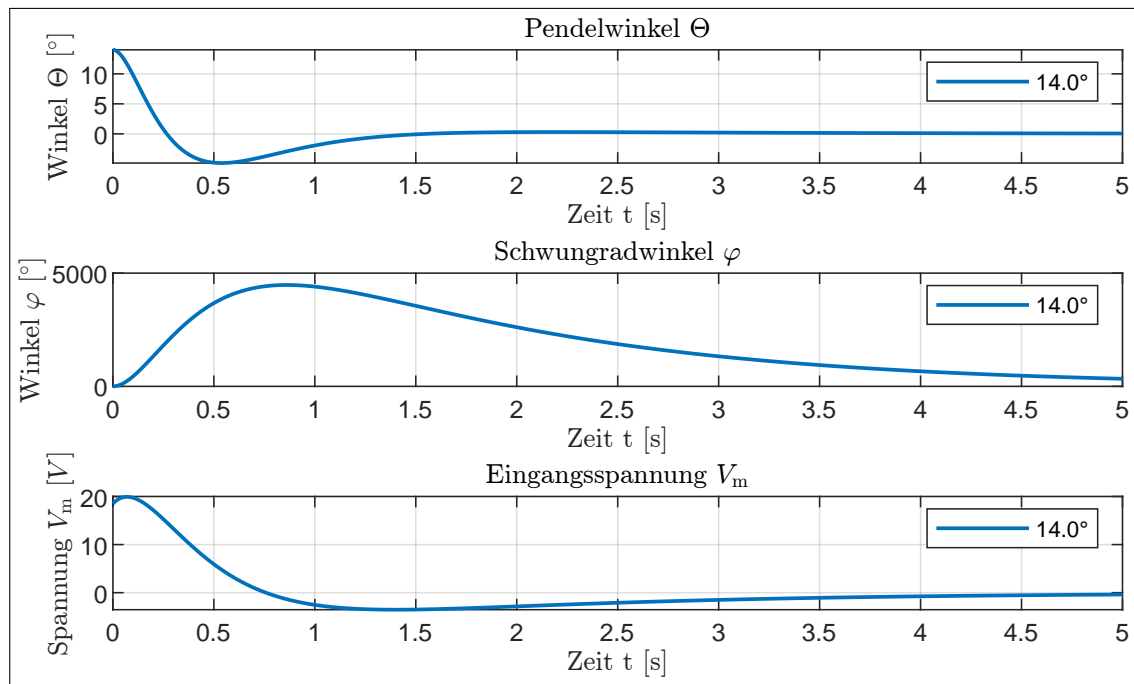


Abb. 7.8: Relevante Kurvenverläufe zur Anwendung des Reglers

8 Beobachterentwurf

9 Ausblick

Literaturverzeichnis

- [1] HTW-Logo auf dem Deckblatt
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Logo_HTW_Berlin.svg
Stand: 17.08.2018 um 14:49 Uhr

- [2] HTW-Logo in der Kopfzeile
<http://tonkollektiv-htw.de/>
Stand: 17.08.2018 um 14:53 Uhr