



Hochschule für Technik  
und Wirtschaft Berlin

*University of Applied Sciences*

# Schwungrad Pendel: Modellbildung/Simulation (M2)

Name:	Matrikelnummer:
Milan Larsen	581929
Sebastian Richter	572906
Cyrill Schmiedehausen	545698
Aaron Zielstorff	567183

Fachbereich:	FB1
Studiengang:	M. Elektrotechnik
Fachsemester:	2. FS
Fach:	M2 Modellbildung/Simulation
Dozent:	Prof. Dr.-Ing. Steffen Borchers
Abgabe am:	30. September 2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung und Versuchsaufbau</b>	<b>6</b>
<b>2 Modellierung des Schwungrad-Pendels</b>	<b>8</b>
2.1 Modellierung des Gleichstrommotors . . . . .	8
2.2 Modellierung des Schwungrad-Pendels . . . . .	9
2.2.1 Lagrange Ansatz . . . . .	9
2.2.2 Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen . . . . .	9
2.2.3 Generalisierte Koordinaten . . . . .	10
2.2.4 Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie . . . . .	10
2.2.5 Herleitung der Bewegungsgleichungen . . . . .	11
<b>3 Zustandsraumdarstellung</b>	<b>12</b>
3.1 Nichtlineares Zustandsraummodell . . . . .	12
3.2 Lineares Zustandsraummodell . . . . .	13
<b>4 Vergleich lineares/nichtlineares System</b>	<b>16</b>
<b>5 Sensitivitätsanalyse der Modellparameter</b>	<b>18</b>
5.1 Lokale und globale Sensitivitätsanalyse . . . . .	18
5.2 Parameter . . . . .	19
<b>6 Globale Sensitivitätsanalyse nach Monte Carlo Methode</b>	<b>32</b>
<b>7 Aufschwingen des Schwungrad-Pendels</b>	<b>40</b>
<b>8 Zustandsregler</b>	<b>44</b>
8.1 Reglerentwurf . . . . .	44
8.1.1 Nachweis der Steuerbarkeit . . . . .	44
8.1.2 Reglertypen . . . . .	45
8.1.3 Lineare Matrixungleichungen . . . . .	46
8.2 Reglervalidierung am linearen Modell . . . . .	48
8.3 Regleranwendung am nichtlinearen Modell . . . . .	53
<b>9 Beobachterentwurf</b>	<b>55</b>
<b>10 Fazit und Ausblick</b>	<b>59</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>60</b>

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Modellskizze des Versuchs . . . . .	7
2.1	Ersatzschaltbild Gleichstrommotor . . . . .	8
4.1	Übersicht der Simulationsstruktur . . . . .	16
4.2	Lineare Strecke . . . . .	16
4.3	Nichtlineare Strecke . . . . .	16
4.4	Vergleich der Pendelwinkel $\theta$ - kleine Auslenkung . . . . .	17
4.5	Vergleich der Pendelwinkel $\theta$ - große Auslenkung . . . . .	17
5.1	Modellantwort auf Eingangssprung der Motorspannung . . . . .	21
a	Schwungrad Geschwindigkeit . . . . .	21
b	Schwungrad Beschleunigung . . . . .	21
c	Pendel Beschleunigung . . . . .	21
d	Motor Moment . . . . .	21
e	Pendel Geschwindigkeit . . . . .	21
f	Pendel Winkel . . . . .	21
5.2	Modellantwort auf Varianz des Parameters: $l2$ . . . . .	23
a	Schwungrad Geschwindigkeit . . . . .	23
b	Schwungrad Beschleunigung . . . . .	23
c	Pendel Beschleunigung . . . . .	23
d	Motor Moment . . . . .	23
e	Pendel Geschwindigkeit . . . . .	23
f	Pendel Winkel . . . . .	23
5.3	Modellantwort auf Varianz des Parameters: $J2$ . . . . .	25
a	Schwungrad Geschwindigkeit . . . . .	25
b	Schwungrad Beschleunigung . . . . .	25
c	Pendel Beschleunigung . . . . .	25
d	Motor Moment . . . . .	25
e	Pendel Geschwindigkeit . . . . .	25
f	Pendel Winkel . . . . .	25
5.4	Modellantwort auf Varianz des Parameters: $M2$ . . . . .	26
a	Schwungrad Geschwindigkeit . . . . .	26
b	Schwungrad Beschleunigung . . . . .	26
c	Pendel Beschleunigung . . . . .	26
d	Motor Moment . . . . .	26
e	Pendel Geschwindigkeit . . . . .	26
f	Pendel Winkel . . . . .	26
5.5	Modellantwort auf Varianz des Parameters: $C1$ . . . . .	28
a	Schwungrad Geschwindigkeit . . . . .	28

b	Schwungrad Beschleunigung . . . . .	28
c	Pendel Beschleunigung . . . . .	28
d	Motor Moment . . . . .	28
e	Pendel Geschwindigkeit . . . . .	28
f	Pendel Winkel . . . . .	28
5.6	Modellantwort auf Varianz des Parameters: $C_2$ . . . . .	29
a	Schwungrad Geschwindigkeit . . . . .	29
b	Schwungrad Beschleunigung . . . . .	29
c	Pendel Beschleunigung . . . . .	29
d	Motor Moment . . . . .	29
e	Pendel Geschwindigkeit . . . . .	29
f	Pendel Winkel . . . . .	29
6.1	Scatterplot über alle Parameter . . . . .	33
6.2	Scatterplots über die maximale Schwungradgeschwindigkeit . . . . .	34
a	Korrelation Motorspannung $V_m$ . . . . .	34
b	Korrelation Reibung $C_2$ . . . . .	34
6.3	Scatterplots über die Einschwingzeit der Schwungradgeschwindigkeit . . . . .	34
a	Korrelation Reibung $C_2$ . . . . .	34
b	Korrelation Trägheitsmoment $J_2$ . . . . .	34
6.4	Korrelation Trägheitsmoment $J_2$ . . . . .	35
6.5	Scatterplot über die maximale Schwungradbeschleunigung . . . . .	35
6.6	Scatterplots über die Einschwingzeit der Schwungradbeschleunigung . . . . .	35
a	Korrelation Reibung $C_2$ . . . . .	35
b	Korrelation Trägheitsmoment $J_2$ . . . . .	35
6.7	Scatterplots über die maximale Pendelauslenkung . . . . .	36
a	Korrelation Motorspannung $V_m$ . . . . .	36
b	Korrelation Trägheitsmoment $J_2$ . . . . .	36
c	Korrelation Länge $l_2$ . . . . .	36
6.8	Korrelation Reibung $C_1$ . . . . .	36
6.9	Scatterplot über die Pendeleinschwingzeit . . . . .	36
6.10	Korrelation Trägheitsmoment $J_2$ . . . . .	37
6.11	Scatterplot über die maximale Pendelgeschwindigkeit . . . . .	37
6.12	Korrelation Trägheitsmoment $J_2$ . . . . .	38
6.13	Scatterplot über die maximale Pendelbeschleunigung . . . . .	38
6.14	Korrelation Motorspannung $V_m$ . . . . .	39
6.15	Scatterplot über das maximale Motormoment . . . . .	39
6.16	Scatterplots über die Einschwingzeit des Motormoments . . . . .	39
a	Korrelation Reibung $C_2$ . . . . .	39
b	Korrelation Trägheitsmoment $J_2$ . . . . .	39

7.1	Aufschwung-Reglerstruktur . . . . .	40
7.2	Aufschwung-Regelung . . . . .	41
7.3	Aufschwung-Steuerungsstruktur . . . . .	42
7.4	Aufschwung-Steuerung . . . . .	42
7.5	Signal-Anpassung für den Regler . . . . .	43
7.6	Umschalt-Steuerung . . . . .	43
8.1	Systemstruktur mit einfacher Zustandsrückführung . . . . .	45
8.2	Einschränkung der Polregion bei exponentieller Stabilität . . . . .	46
8.3	Einschränkung der Polregion bei Erweiterung der LMI . . . . .	47
8.4	Polstellen der Systemmatrix . . . . .	48
8.5	Simulink-Reglerstruktur . . . . .	49
8.6	Polstellenlagen der Systemmatrix und des geschlossenen Regelkreises . . . . .	52
8.7	Relevante Kurvenverläufe zur Validierung des Reglers . . . . .	53
8.8	Relevante Kurvenverläufe zur Anwendung des Reglers . . . . .	54
9.1	Beobachter-Reglerstruktur . . . . .	56
9.2	Beobachter-Abweichung . . . . .	58

## Tabellenverzeichnis

1.1	Modellparameter des Schwungrad-Pendels . . . . .	6
6.1	Varianz der Modellparameter des Schwungrad-Pendels . . . . .	32
8.1	Auswertung von $V_m$ für unterschiedliche Anfangsauslenkungen . . . . .	49
8.2	Auswertung von $V_m$ bei einem Anfangswinkel von $15^\circ$ . . . . .	50
8.3	Auswertung von $V_m$ bei einem Anfangswinkel von $14^\circ$ . . . . .	51

# 1 Einführung und Versuchsaufbau

Inhalt dieser Belegarbeit ist die Modellierung eines inversen Pendels, welches über ein Schwungrad regelungstechnisch in der aufrechten Position stabil gehalten werden soll.

Diese Arbeit geht dabei im ersten Abschnitt auf den **Versuchsaufbau** und die **Modellierung** des Pendels ein. Es schließt sich eine **Sensitivitäts- und Parameteranalyse** an, über welche der Einfluss bestimmter Modellgrößen auf das Verhalten des Systems untersucht wird.

Nachdem das Modell aufgestellt und auf seine Eigenschaften analysiert wurde, folgt die Implementierung als Simulation in Matlab/Simulink. Dafür soll zunächst das **Aufschwingen des Pendels** umgesetzt werden. Kann das Pendel bis in einen bestimmten Bereich um die obere Ruhelage bewegt werden, übernimmt ein **einfacher Zustandsregler**, welcher ebenfalls in dieser Arbeit entworfen wird.

Abschließend wird ein **Beobachter** umgesetzt, über welchen die nicht messbaren Zustände des Systems rekonstruiert werden können, um den Regler am realen Versuch in Betrieb zu nehmen.

Nachfolgend findet sich die Darstellung der Modellparameter/Konstanten zur Modellierung des Schwungrad-Pendels (siehe Tabelle 1.1).

Symbol	Parameter	Wert/Einheit
$\theta$	Winkel des Pendels	rad
$\varphi$	Winkel des Schwungrades	rad
$J_1$	Trägheitsmoment des Pendels (+ Motorstator)	$0.01186 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_2$	Trägheitsmoment des Rads (+ Motorrotor)	$0.0005711 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_1$	Reibungsfaktor des Pendels	$0.04 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
$c_2$	Reibungsfaktor des Rads	$0.0001 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
$m_1$	Masse des Pendels und Stators	0.826 kg
$m_2$	Masse des Rads und Rotors	0.583 kg
$l_1$	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Pendels	0.1053 m
$l_2$	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Rads	0.14 m
$K_b$	Back-End-Konstante	$0.0987 \frac{\text{V}}{\text{rad}}$
$K_t$	Motor-Drehmoment-Konstante	$0.0987 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}}$
$R_a$	Widerstand der Ankerwicklung	1.5562 $\Omega$

Tab. 1.1: Modellparameter des Schwungrad-Pendels

Ziel der Arbeit soll es sein, anhand von Beispielparametern eine effektive Regelung umzusetzen, welche später bei der Übernahme auf einen realen Versuchsaufbau einfach adaptiert

werden kann. Dazu ist es wichtig, ein gutes Modell umzusetzen und den Einfluss der verschiedenen Modell- und Regelparameter auf das Verhalten des Systems zu kennen.

Abbildung 1.1 zeigt den modellhaften Versuchsaufbau. Das System besteht aus einem Pendel und einem Schwungrad. Das Pendel kann frei um die 0z-Achse rotieren, die senkrecht zur Oxy-Ebene steht. Das Schwungrad wird durch einen Gleichstrommotor angetrieben und dreht sich um eine Achse parallel zur 0z-Achse. Das Pendel kann durch die Reaktionskraft ausbalanciert werden, die durch das Schwungrad erzeugt wird.

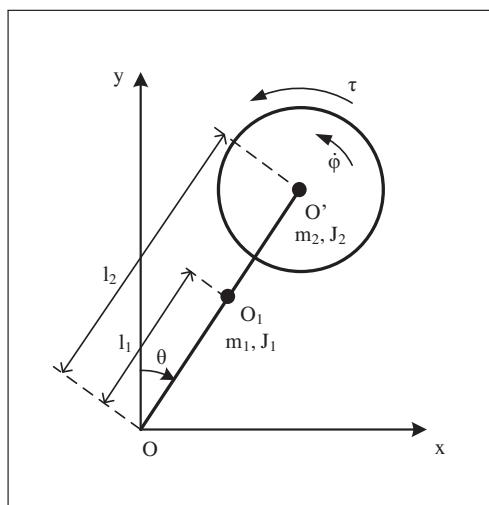


Abb. 1.1: Modellskizze des Schwungrad-Pendel-Versuchs inklusive relevanter Modellparameter

Weiterhin gelten folgende Voraussetzungen für das System:

- Das Pendel ist frei gelagert.
- Der Motor (Gleichstrommaschine) ist spannungsgeregt (bei  $V_{m,\text{Max}} = 20 \text{ V}$ ).
- Der Winkel ( $\theta$ ) des Pendels und der Winkel ( $\varphi$ ) des Schwungrades werden gemessen.

Es sind folgende Einschränkungen ermittelt/festgelegt worden:

- Das Aufschwingen soll über eine schnelle Steuerung umgesetzt werden.
- Es soll ein Zustandsregler mit vier Zuständen ( $x_1$  bis  $x_4$ ) verwendet werden für die Regelung um die Ruhelage.
- Für die Ermittlung der Winkelgeschwindigkeiten ( $\dot{\theta}$  und  $\dot{\varphi}$ ) ist die Rekonstruktion über einen Beobachter notwendig.

## 2 Modellierung des Schwungrad-Pendels

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Modellierung des Schwungrad-Pendels inklusive des treibenden Gleichstrommotors.

### 2.1 Modellierung des Gleichstrommotors

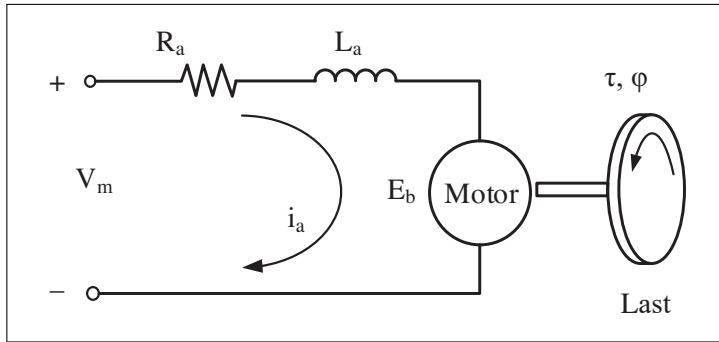


Abb. 2.1: Ersatzschaltbild des Gleichstrommotors am Schwungrad-Pendel

Abbildung 2.1 zeigt das Ersatzschaltbild des Gleichstrommotors am Schwungrad-Pendel. Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz ergibt folgende Gleichung:

$$V_m = i_a \cdot R_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + E_b \quad (2.1)$$

Die gegenelektromotorische Kraft (EMK) hängt von der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  und der Gegen-EMK-Konstante  $K_b$  wie folgt ab:

$$E_b = K_b \cdot \dot{\varphi} \quad (2.2)$$

Wird angenommen, dass die Wirkung der Induktivität um ein Vielfaches kleiner ist, als die Wirkung der Resistanz ( $L_a \ll R_a$ ), kann die Gleichung 2.1 zur Berechnung des Stromes umgestellt werden und Gleichung 2.3 folgt.

$$i_a = \frac{V_m - K_b \cdot \dot{\varphi}}{R_a} \quad (2.3)$$

Das Motordrehmoment  $\tau$  ist mit dem Ankerstrom  $i_a$  durch eine Motordrehmomentkonstante  $K_t$  verbunden. Die Modellgleichung des Gleichstrommotors ergibt sich somit zu:

$$\boxed{\tau = K_t \cdot i_a = K_t \cdot \frac{V_m - K_b \cdot \dot{\varphi}}{R_a}} \quad (2.4)$$

## 2.2 Modellierung des Schwungrad-Pendels

Zur Modellierung des Pendels wurde der Langrange-Ansatz gewählt, um die Bewegungsgleichungen des Pendels herzuleiten.

### 2.2.1 Lagrange Ansatz

Die nachfolgende Gleichung zeigt den **Lagrange Ansatz** unter Berücksichtigung der **dissipativen Funktion**. Diese besagt in Erweiterung zu der Lagrange-Formulierung, dass Energie in einem Vorgang in Wärme umgewandelt wird. Mit Hilfe der dissipativen Funktion können **Reibungsverluste** bei der Energiemethode nach Lagrange berücksichtigt werden.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen

In Abbildung 1.1 sind zwei Teilchen bzw. Massepunkte im  $\mathbb{R}^2$  zu erkennen. Zum Einen die des Pendels und zum Anderen die des Schwungrades. Somit gilt grundsätzlich:

- 2 Punkte: 4 Freiheitsgrade (FHG)

Das Schwungrad-Pendel besitzt jedoch auch zwei Zwangsbedingungen, die wie folgt formuliert werden können:

- Das Pendel kann nur um die 0z-Achse rotieren:  

$$z = 0$$
- Die Masse  $m_2$  ist über des Pendel mit dem Aufhängepunkt 0 gekoppelt:  

$$(y_{m_1} - y_{m_2})^2 + (x_{m_1} - x_{m_2})^2 = l_2^2$$

Beide Zwangsbedingungen sind holonom-skleronom, da sie als Gleichungen zwischen zwei Koordinaten angegeben werden können und nicht von der Zeit abhängig sind. Somit bleiben am Ende noch zwei Freiheitsgrade (FHG) übrig.

### 2.2.3 Generalisierte Koordinaten

Aus den verbliebenen Freiheitsgraden werden die generalisierten Koordinaten abgeleitet. Dabei gilt grundsätzlich folgender Zusammenhang im  $\mathbb{R}^2$ :

$$S = 2 \cdot n - k \quad (2.6)$$

mit  $S$  als Anzahl der Freiheitsgrade und somit auch der Anzahl der generalisierten Koordinaten,  $n$  der Anzahl der Teilchen und  $k$  der Anzahl der holonomen Zwangsbedingungen. Die beiden Generalisierten Koordinaten sind somit:

- $q_1 = \theta$
- $q_2 = \varphi$

### 2.2.4 Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie

Für die Lagrange-Formulierung werden die kinetische und die potentielle Energie des Systems benötigt. Die kinetische Energie setzt sich aus der translatorischen kinetischen Energie  $E_{\text{kin,trans}}$  und der rotatorischen kinetischen Energie  $E_{\text{kin,rot}}$  zusammen. Die Gleichungen sind nachfolgend aufgestellt.

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,trans}} &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (l_1 \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (l_2 \cdot \dot{\theta})^2 \\ E_{\text{kin,rot}} &= \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die gesamte **kinetische Energie des Systems** ist somit:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}} \\ E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_2^2 + J_1 + J_2) \cdot \dot{\theta}^2 + J_2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Der Ursprung der potentiellen Energie liegt bei Null. Somit ergibt sich die **potentielle Energie des Systems** zu:

$$E_{\text{pot}} = (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_2) \cdot g \cdot \cos(\theta) \quad (2.9)$$

### 2.2.5 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Die **Lagrange-Funktion**  $L$  wird aus der Differenz der kinetischen Energie aus Gleichung 2.8 und der potentiellen Energie aus Gleichung 2.9 berechnet.

$$\boxed{L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}}$$

$$L = \frac{1}{2} \left( m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2 \right) \dot{\theta}^2 + J_2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos(\theta)$$

(2.10)

Die **dissipative Energie**  $D$  ist:

$$\boxed{D = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot \dot{\varphi}^2} \quad (2.11)$$

Zieht man nun den Ansatz aus Gleichung 2.5 heran und wendet diesen für die generalisierte Koordinate  $\theta$  an, so erhält man die **Bewegungsgleichung des Schwungrades**:

$$\boxed{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2) \ddot{\theta} + J_2 \ddot{\varphi} + c_1 \dot{\theta} - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta) = 0} \quad (2.12)$$

Ebenfalls wird der gleiche Ansatz für die generalisierte Koordinate  $\varphi$  angewendet:

$$J_2 \cdot (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + c_2 \cdot \dot{\varphi} = \tau \quad (2.13)$$

Setzt man nun Gleichung 2.4 in Gleichung 2.13 ein, erhält man die **Bewegungsgleichung des Pendels**:

$$\boxed{J_2 \cdot (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + c_2 \cdot \dot{\varphi} = K_t \cdot i_a = K_t \cdot \frac{V_m - K_b \cdot \dot{\varphi}}{R_a}} \quad (2.14)$$

### 3 Zustandsraumdarstellung

Um das Verhalten mittels mathematischer Beziehungen zu veranschaulichen, wird die **Zustandsraumdarstellung** verwendet. Der **Systemeingang** wird festgelegt mit

$$\underline{u} = V_m, \quad (3.1)$$

wobei  $V_m$  die Eingangsspannung des Gleichstrommotors aus Gleichung 2.1 ist. Die **Systemzustände** des Schwungrad-Pendels sind:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Nach zeitlicher Ableitung des Zustandsvektors ergibt sich der **Vektor der Zustandsänderung** zu:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Die **Ausgänge des Systems** ergeben sich zu

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

#### 3.1 Nichtlineares Zustandsraummodell

Zum Aufstellen des nichtlinearen Zustandsraummodells werden die Gleichung 2.12 und Gleichung 2.14 nach den höchsten Ableitungen von  $\ddot{\varphi}$  und  $\ddot{\theta}$  umgestellt.

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a} - c_2 \dot{\varphi} - J_2 \cdot \ddot{\theta}}{J_2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-J_2 \ddot{\varphi} - c_1 \dot{\theta} + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Beide Gleichungen sind über die Winkelbeschleunigung des Schwungrades  $\ddot{\varphi}$  und die des Pendels  $\ddot{\theta}$  miteinander verkoppelt. Durch das gegenseitige ineinander Einsetzen werden die Abhängigkeiten eliminiert.

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a} - c_2 \dot{\varphi} - J_2 \cdot \left( \frac{-J_2 \ddot{\varphi} - c_1 \dot{\theta} + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2} \right)}{J_2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{-J_2 \left( \frac{K_t \frac{V_m - K_b \dot{\varphi}}{R_a} - c_2 \dot{\varphi} - J_2 \ddot{\theta}}{J_2} \right) - c_1 \dot{\theta} + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(\theta)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 3.1, 3.2 und 3.3, durch das Einsetzen in Gleichung 3.6 und dem Zusammenfassen und Umstellen nach  $\ddot{\varphi}$  bzw.  $\ddot{\theta}$  folgt das **nichtlineare Zustandsraummodell**.

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{K_t \frac{V_m - K_b \cdot x_4}{R_a} - c_2 \cdot x_4 - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(x_1) + c_1 \cdot x_2}{J_2} \\ \frac{1 - \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2}{J_2}}{x_4} \\ \frac{(m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin(x_1) - c_1 \cdot x_2 - (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2) \cdot \frac{K_t \frac{V_m - K_b \cdot x_4}{R_a}}{J_2}}{J_2} \\ \frac{1 - \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2}{J_2}}{x_4} \end{bmatrix}\quad (3.7)$$

## 3.2 Lineares Zustandsraummodell

Das Verhalten des nichtlinearen Systems ist für große Änderungen des Eingangssignals nicht vorhersehbar. Um dennoch Aussagen über das Systemverhalten treffen zu können, wird das nichtlineare Zustandsraummodell mithilfe der Taylorreihenentwicklung um eine Ruhelage ( $\underline{x}^*$ ) linearisiert. Die nichtlinearen Restglieder  $R(\Delta \underline{x}^2, \Delta \underline{u}^2)$  werden zu Null angenommen. Durch die Linearisierung wird das Systemverhalten für kleine Änderungen um die Ruhelage kontrollierbar. Nachfolgend ist die Taylorreihenentwicklung für Linearisierung aufgeführt:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}^* + \Delta \dot{\underline{x}} &= f(\underline{x}^* + \Delta \underline{x}, \underline{u}^* + \Delta \underline{u}) \\ &= f(\underline{x}^*, \underline{u}^*) + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{x} + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{u} + R(\Delta \underline{x}^2, \Delta \underline{u}^2)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Durch die Annahme über das Verhalten der nichtlinearen Restglieder folgt die Struktur des linearen Zustandsraummodells dargestellt in Gleichung 3.9.

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{x} + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{u} \\ \Delta \underline{y} &= \left[ \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{x} + \left[ \frac{\partial h_i}{\partial u_j} \right]_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \cdot \Delta \underline{u}\end{aligned}\quad (3.9)$$

Um das linearisierte Zustandsraummodell zu erhalten, werden die einzelnen Gleichungen des nichtlinearen Zustandsraummodells aus Gleichung 3.7 nach den Zuständen  $x_1$  bis  $x_4$ , sowie dem Eingang  $V_m$  partiell abgeleitet und die Ruhelage  $\underline{x}^*$  eingesetzt. Dabei werden sowohl die Ruhelage des hängenden Pendels (untere Ruhelage) und die des stehenden Pendels (obere Ruhelage) betrachtet. In Gleichung 3.10 dargestellt ist die untere Ruhelage, mit Hilfe derer das lineare Zustandsraummodell für das hängende Pendel bestimmt werden kann. Anhand dessen kann das lineare Zustandsraummodell in Simulink mit dem nichtlinearen Zustandsraummodell im nachfolgenden Abschnitt (Abschnitt 4) verglichen werden.

$$\underline{x}_1^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Die Regelung, welche in Abschnitt 8 entworfen wird soll dafür sorgen, dass das Pendel in der oberen Ruhelage verweilt. Diese wird beschrieben durch:

$$\underline{x}_2^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Die allgemeine Form des **linearen Zustandsraummodells** lautet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \\ y &= \underline{C} \cdot \underline{x} + \underline{D} \cdot \underline{u}\end{aligned}$$

(3.12)

Wendet man nun die Linearisierungsvorschrift aus Gleichung 3.9 unter Nutzung der Ruhelagen an, so erhält man das konkrete linearisierte Zustandsraummodell für das System. In Gleichung 3.13 ist das linearisierte Zustandsraummodell für die obere Ruhelage und in Gleichung 3.14 das für die untere Ruhelage dargestellt.

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -50.9760 & -1.2328 & 0 & 0.1960 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 50.9760 & 1.2328 & 0 & -11.3323 \end{bmatrix} \cdot \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9548 \\ 0 \\ 113.0101 \end{bmatrix} \cdot V_m \\ \Delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta x + 0 \cdot V_m\end{aligned}} \quad (3.13)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 50.9760 & -1.2328 & 0 & 0.1960 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -50.9760 & 1.2328 & 0 & -11.3323 \end{bmatrix} \cdot \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9548 \\ 0 \\ 113.0101 \end{bmatrix} \cdot V_m \\ \Delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta x + 0 \cdot V_m\end{aligned}} \quad (3.14)$$

## 4 Vergleich lineares/nichtlineares System

In Abbildung 4.1 ist die Übersicht der notwendigen Simulationsstruktur dargestellt. Aus der Übersicht geht hervor, dass beide Systeme unterschiedliche Eingänge besitzen und somit ein direkter Vergleich ohne entsprechende Berücksichtigung der Linearisierungsvorschriften unmöglich ist. Das linearisierte Modell verwendet als Eingang im Gegensatz zum nichtlinearen Modell eine Differenz  $\Delta u$ . Die Strukturen des nichtlinearen und des linearen Modells sind zur Information in Abbildung 4.2 und Abbildung 4.3 visualisiert.

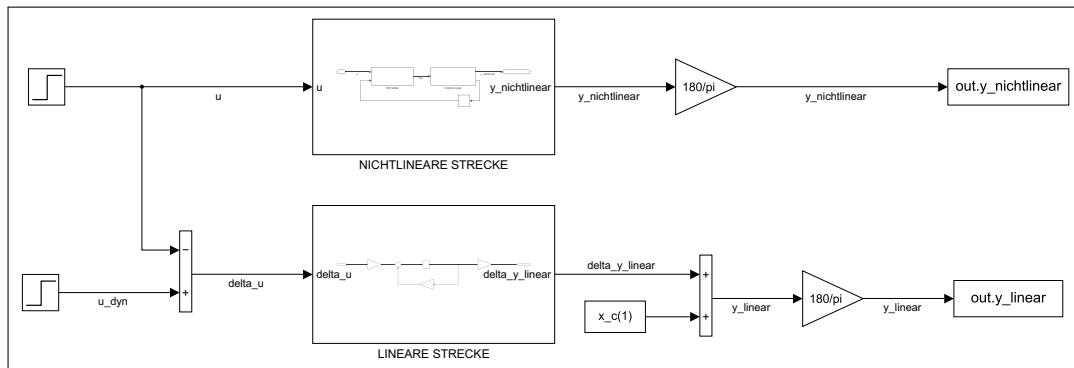


Abb. 4.1: Übersicht der Simulationsstruktur

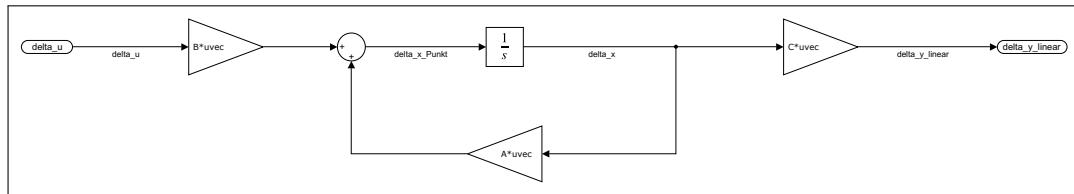


Abb. 4.2: Lineare Strecke

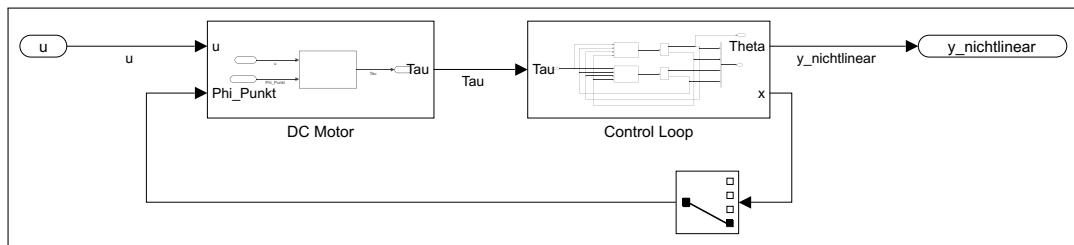


Abb. 4.3: Nichtlineare Strecke

Um das lineare mit dem nichtlinearen Modell zu vergleichen, werden gemäß Abschnitt 3 zu den Zuständen  $\Delta \underline{x}$  die Ruhelagen  $\underline{x}^*$  aus Gleichung 3.10 addiert. Aus der Abbildung 4.4 und Abbildung 4.5 geht hervor, dass die implementierten Systeme für kleine Abweichungen von der unteren Ruhelage mit steigender Zeit "t" selbiges Verhalten aufweisen.

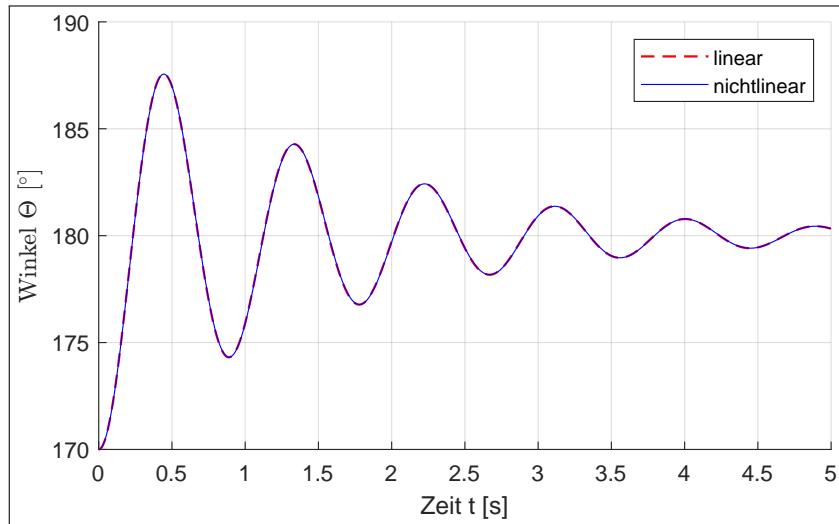


Abb. 4.4: Vergleich der Pendelwinkel  $\theta$  bei  $-10^\circ$  Anfangsauslenkung zur unteren Ruhelage

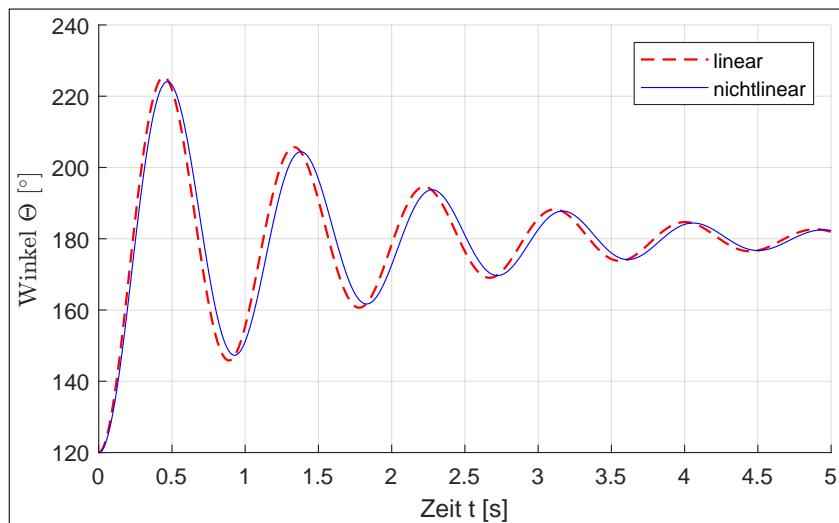


Abb. 4.5: Vergleich der Pendelwinkel  $\theta$  bei  $-60^\circ$  Anfangsauslenkung zur unteren Ruhelage

## 5 Sensitivitätsanalyse der Modellparameter

In diesem Abschnitt wird eine Parameter- und Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Es wird dabei die Auswirkung von der Varianz von bestimmten Modellparametern auf die Varianz der Ausgangsparameter untersucht.

Ziel der Sensitivitätsanalyse ist es, wichtige Parameter zu identifizieren und daraus eine Optimierung der Parameter zu ermitteln.

Das Ergebnis der Sensitivitätsanalyse dient zum weiteren Verständnis des mathematischen Modells bzw. dem zugrundeliegenden Simulationsmodell.

### 5.1 Lokale und globale Sensitivitätsanalyse

Die verschiedenen Verfahren zur Sensitivitätsanalyse lassen sich in drei Kategorien einteilen: Lokale, globale Sensitivitätsanalyse und der sogenannten Screening-Methode.

Bei der lokalen Sensitivitätsanalyse wird für bestimmte Werte der Ausgangsgrößen der Einfluss der Eingangsgrößen untersucht. Dabei wird immer ein Parameter variiert und die restlichen konstant gehalten (One-At-a-Time-Methode, OAT). Die Sensitivitätsanalyse wird so für jeden Parameter einzeln durchgeführt und abschließend kann die spezifische Sensitivität der einzelnen Parameter ermittelt werden. Mathematisch entspricht dies den partiellen Ableitungen der Parameter bezüglich der Ausgangsgrößen

#### One-factor-at-a-time ( $\pm 20\%$ , $\pm 1\sigma$ )

$$\text{sensitivity} = \frac{\Delta Y}{\Delta X_i} \quad \text{Für jeden Parameter } X_i, i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

- Nur lokale Variation um Arbeitspunkt
- keine Korrelation zwischen Parametern
- Standardabweichung benötigt Annahme zur Distribution und überspannt nicht den gesamten Wertebereich

#### Ausdruck als Partielle-Ableitung

$$\text{sensitivity} = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \quad (5.2)$$

Für die analytische Lösung wird ein lineares Modell benötigt. Die Linearisierung wurde zwar in Kap. 8.1.3 für dieses Modell durchgeführt, jedoch soll im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter darauf eingegangen werden.

## Globale Sensitivitätsanalyse

Bei der globalen Sensitivitätsanalyse wird, im Gegensatz zur lokalen Sensitivitätsanalyse, nicht nur ein Parameter variiert, sondern alle Parameter gleichzeitig. Dies macht es möglich, auch Abhängigkeiten unter den Parametern zu berücksichtigen.

Ebenso werden die Parameter nicht nur über einen kleinen lokalen Bereich verändert, sondern über den gesamten Definitionsbereich. Dieser ist bei physikalischen Modellen meist nicht bekannt, sodass hierfür eine statistische Verteilung der Parameter angenommen werden muss. Dennoch sollte die Verteilung so gewählt werden, dass sie den tatsächlichen physikalisch möglichen Verteilungen möglichst nahekommt.

Allerdings ist die globale Sensitivitätsanalyse sehr aufwendig und kann nur für kleine Modelle durchgeführt werden.

**Monte Carlo Methode:** Die Monte Carlo Methode ist eine statistische Methode, die zur Lösung von Problemen mit mehreren Variablen eingesetzt wird. Sie generiert einen zufälligen Parameterraum und berechnet für diesen die Ausgangsgrößen. Die so entstehenden Scatterplots können dann zur einfachen grafischen Analyse der Parameter verwendet werden.

## 5.2 Parameter

Aus den gesamten Modellparametern des Schwungradpendels (1.1) werden folgende Parameter untersucht:

- $C_1, C_2$
- $J_1, J_2$
- $m_1, m_2$
- $l_1, l_2$
- $V_m$

Es wird dabei die Auswirkung der Varianz genannter Parameter auf folgende Modellgrößen untersucht:

- Schwungrad Geschwindigkeit:  $\dot{\varphi}$
- Schwungrad Beschleunigung:  $\ddot{\varphi}$
- Pendel Winkel:  $\Theta$
- Pendel Geschwindigkeit:  $\dot{\Theta}$

- Pendel Beschleunigung:  $\ddot{\Theta}$
- Motor Moment:  $\tau$

## Modellantwort auf Eingangssprung

Um ein besseres Verständnis des Modells zu erlangen, wird die Antwort wichtiger Parameter auf einen Sprung der Motorspannung  $V_m$  betrachtet. Zugrundeliegend ist das in 3.1 entwickelte Simulink-Modell.

Der Eingangssprung der Motorspannung erfolgt in den Größen:  $V_m = 5\text{ V}, 10\text{ V}, 15\text{ V}, 20\text{ V}$ . Das Pendel befindet sich dabei in Ruhelage ( $\Theta = 180^\circ$ ). Ein Eingangssprung führt zu einem Moment an der Motorwelle, welches das Schwungrad und das Pendel in Bewegung versetzt.

In Abb. 5.1a ist zu erkennen, dass der stabile Zustand der Endgeschwindigkeit des Schwungrades ungefähr zur selben Zeit ( $t = 0.5\text{ s}$ ) erreicht wird. Die dabei erreichte Endgeschwindigkeit ist direkt abhängig von der angelegten Motorspannung  $V_m$ .

Das Maximum des Motormomentes hängt dabei ebenso von der Höhe der angelegten Motorspannung  $V_m$  ab (Abb. 5.1d). Das Moment erzeugt dabei eine Beschleunigung des Schwungrades (Abb. 5.1b), die ebenso durch das Moment in Abhängigkeit zur Höhe des angelegten Motorstroms steht.

Das Pendel wird durch das Moment in Bewegung versetzt und schwingt in Eigenfrequenz (Abb. 5.1f). Die Amplitude der Pendelbewegung ist dabei abhängig von der Höhe der angelegten Motorspannung  $V_m$ .

Die Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.1e) hat ihren Nulldurchgang beim maximaler Amplitude des Pendelwinkels (Abb. 5.1d), wobei die maximale Pendelgeschwindigkeit bei  $\tau = 180^\circ$  erreicht wird.

Nach Erreichen der Endgeschwindigkeit des Schwungrades, geht die Beschleunigung gegen null und das Motormoment gleicht dem Reibungsmoment (Abb. 5.1d). Das Pendel ist ab diesen Moment nur noch durch die Gravitation beeinflusst und schwingt so lange bis es in die Ruheposition zurückkehrt.

## Einfluss der Länge des Pendels zum Massezentrum des Schwungrades ( $l2$ )

Die Länge von der Aufhängung des Pendels bis zum Masseschwerpunkt des Schwungrades ( $l2$ ) ist ein weiterer Parameter, er im Folgenden untersucht wird. In den Simulationen (Abb. 5.2) wurde der Parameter  $l2$  von  $0.1\text{ m}$  bis  $1.5\text{ m}$  variiert. Die Motorspannung wird dabei auf  $10\text{ V}$  gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

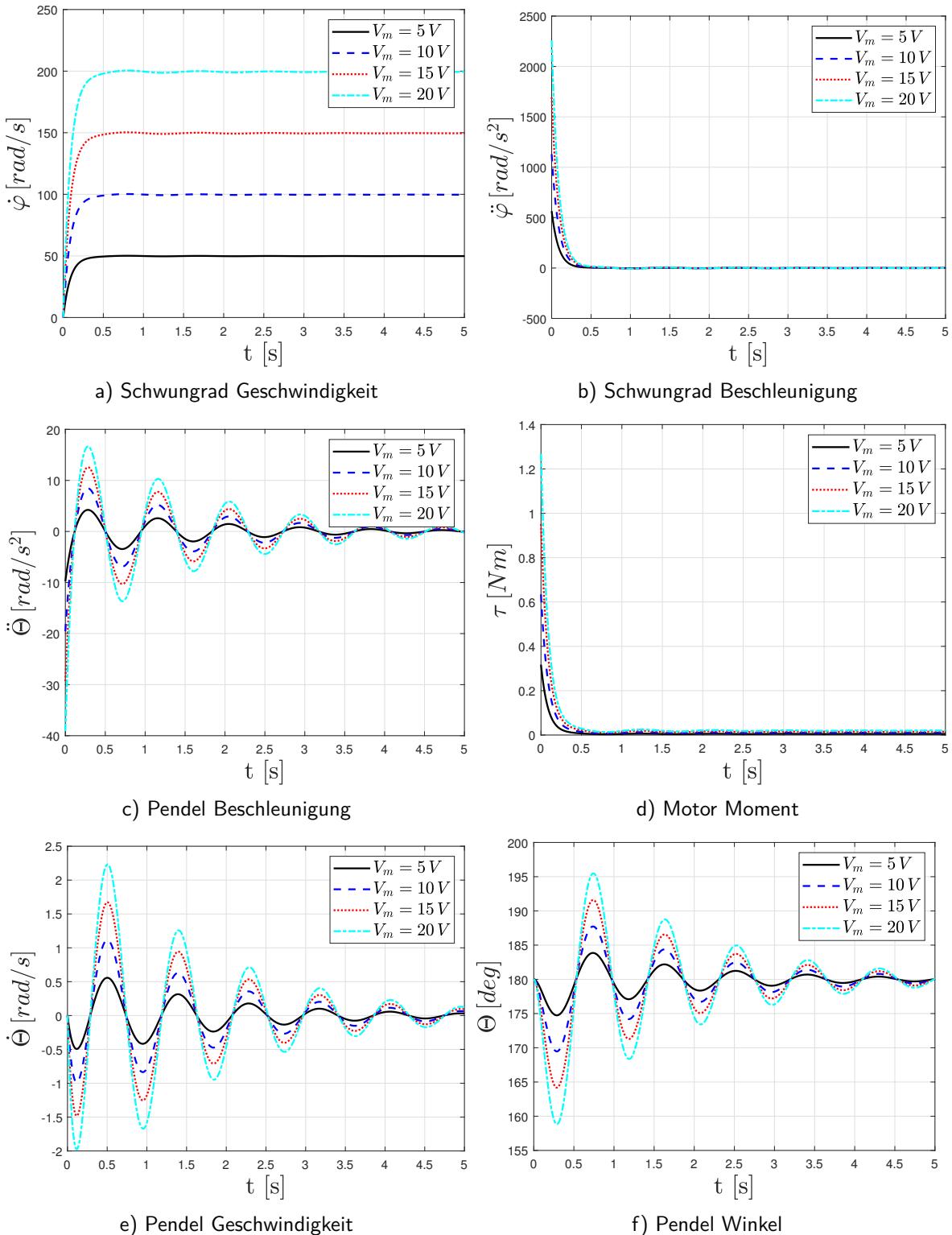


Abb. 5.1: Modellantwort auf Eingangssprung der Motorspannung

Abbildung 5.2a, 5.2a, 5.2d zeigen keine Abweichung, was zeigt, dass der Parameter  $l2$  keinen Einfluss auf die Modellgrößen  $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \tau$  hat. Es ist jedoch ein Einfluss auf die Parameter  $\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$  (Abb. 5.2f 5.2e 5.2c) zu erkennen.

Bei kleinerer Länge  $l2$  erhöht sich die Amplitude des Winkels  $\Theta$  sowie dessen Geschwindigkeit  $\dot{\Theta}$  und Beschleunigung  $\ddot{\Theta}$ .

Ebenso ist zu erkennen, dass sich die Eigenfrequenz, mit der das Pendel schwingt, verändert. Je größer die Länge  $l2$  ist, desto größeres Moment muss aufgebracht werden, um die gleiche Winkelauslenkung  $\Theta$  zu erreichen. Daraus folgt, dass größere Pendellängen die Winkelantwort des Modells verschlechtern.

### Einfluss des Trägheitsmoments des Schwungrads ( $J2$ )

Der Einfluss des Trägheitsmoments des Schwungrades ( $J2$ ), auf die Modellparameter wird in den Simulationen (Abb. 5.3) untersucht. Der Parameter  $J2$  wird dabei von  $0.0005 \text{ kgm}^2$  bis  $0.008 \text{ kgm}^2$  variiert. Die Motorspannung wird dabei auf  $10 \text{ V}$  gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

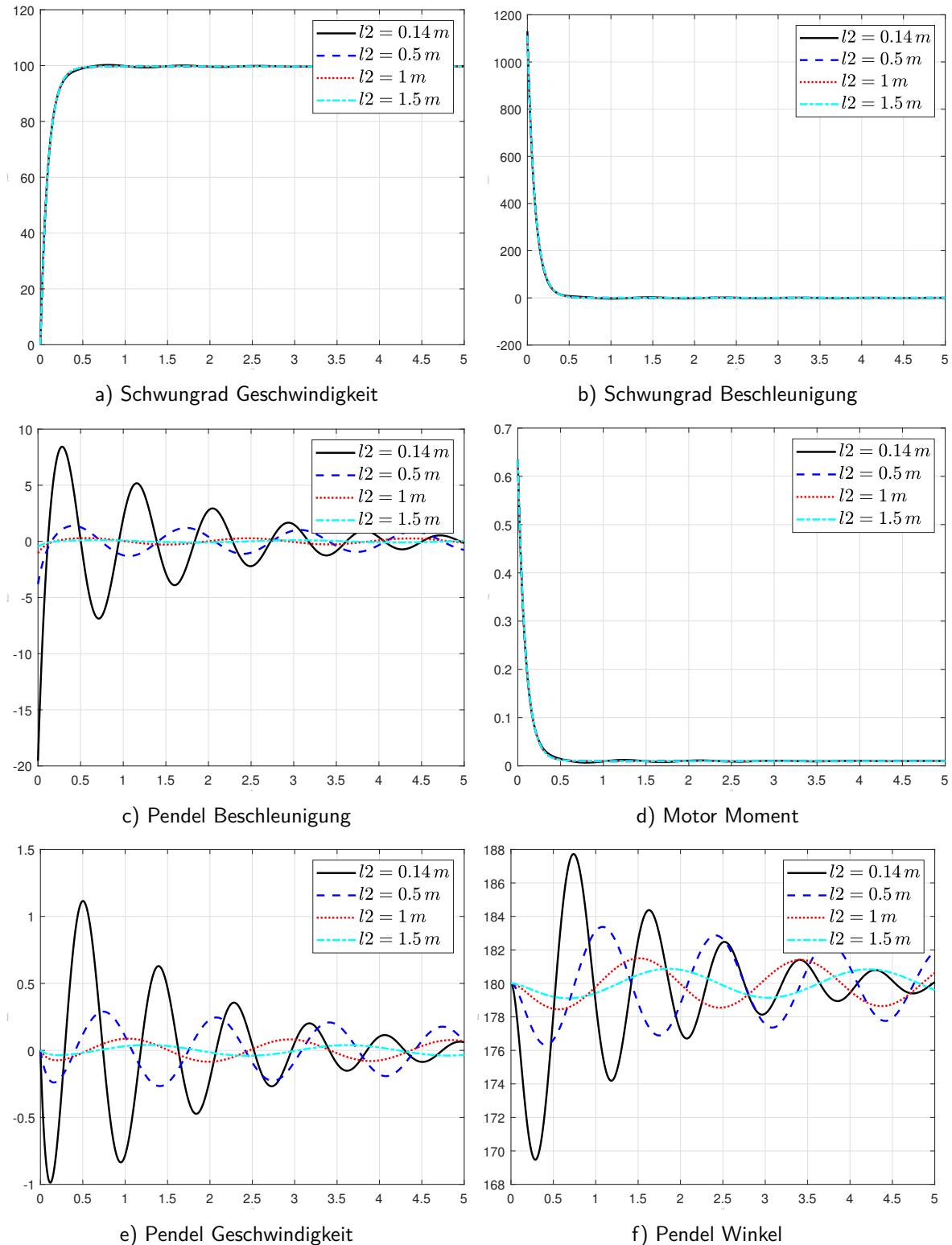


Abb. 5.2: Modellantwort auf Varianz des Parameters:  $l_2$

Die stationäre Endgeschwindigkeit des Schwungrades, wird durch den Parameter  $J2$  stark beeinflusst (Abb. 5.3a). Bei erhöhter Trägheit des Schwungrades erhöht sich die Anstiegszeit, bis ein eingeschwungener Zustand erreicht wird. Der Wert konvergiert allerdings bei allen Werten von  $J2$  gegen die gleiche Endgeschwindigkeit.

Die Beschleunigung des Schwungrades wird ebenfalls stark beeinflusst (Abb. 5.3b). Hierbei ist zu erkennen, dass ein erhöhtes Trägheitsmoment die maximale Beschleunigung bei  $t \approx 0\text{ s}$  verringert. Ebenso wird der stationäre Zustand später erreicht und mit weiterer Erhöhung des Parameters ist ein Schwingen der Beschleunigung zu erkennen.

Das maximale Motormoment (Abb. 5.3d) ist bei allen Werten von  $J2$  gleich, benötigt aber bei größeren Werten von  $J2$  länger, um den stationären Zustand zu erreichen.

Dadurch, dass das Moment bei erhöhtem Trägheitsmoment länger anliegt, wird auch eine größere Kraft auf das Pendel ausgeübt (Abb. 5.3c).

In Abb. 5.3f ist zu erkennen, dass ein größerer Winkelausschlag des Pendels erreicht wurde. Dies ist ebenso der Fall bei der Pendelbeschleunigung (Abb. 5.3c) und der Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.3e).

Das Trägheitsmoment des Schwungrades  $J2$  hat also einen positiven Einfluss auf die Winkelantwort des Modells.

## **Einfluss der Masse des Schwungrads ( $m2$ )**

Der Einfluss der Masse des Schwungrades ( $m2$ ), auf die Modellparameter wird in den Simulationen (Abb. 5.4) untersucht. Der Parameter  $J2$  wird dabei von  $0.01\text{ kg}$  bis  $1.5\text{ kg}$  variiert. Die Motorspannung wird dabei auf  $10\text{ V}$  gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

In den Simulationen ist zu erkennen, dass die Schwungradgeschwindigkeit (5.4a), die Schwungradbeschleunigung (5.4b) und das Motormoment (5.4d) durch den Parameter  $m2$  nicht beeinflusst werden.

Die Masse des Schwungrads hat also auf die gehaltenen Größen keinen Einfluss.

Der Winkel des Pendels (Abb. 5.4f) verringert sich mit Erhöhung der Masse  $m2$ . Dies ist auch bei der Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.4e) und der Pendelbeschleunigung (Abb. 5.4c) zu erkennen.

Dies liegt an der, durch die zusätzliche Masse, erhöhten Gewichtskraft, die auf das Pendel wirkt.

Ebenso wird die Dämpfung der Schwingung verändert und die Schwingungsdauer verlängert

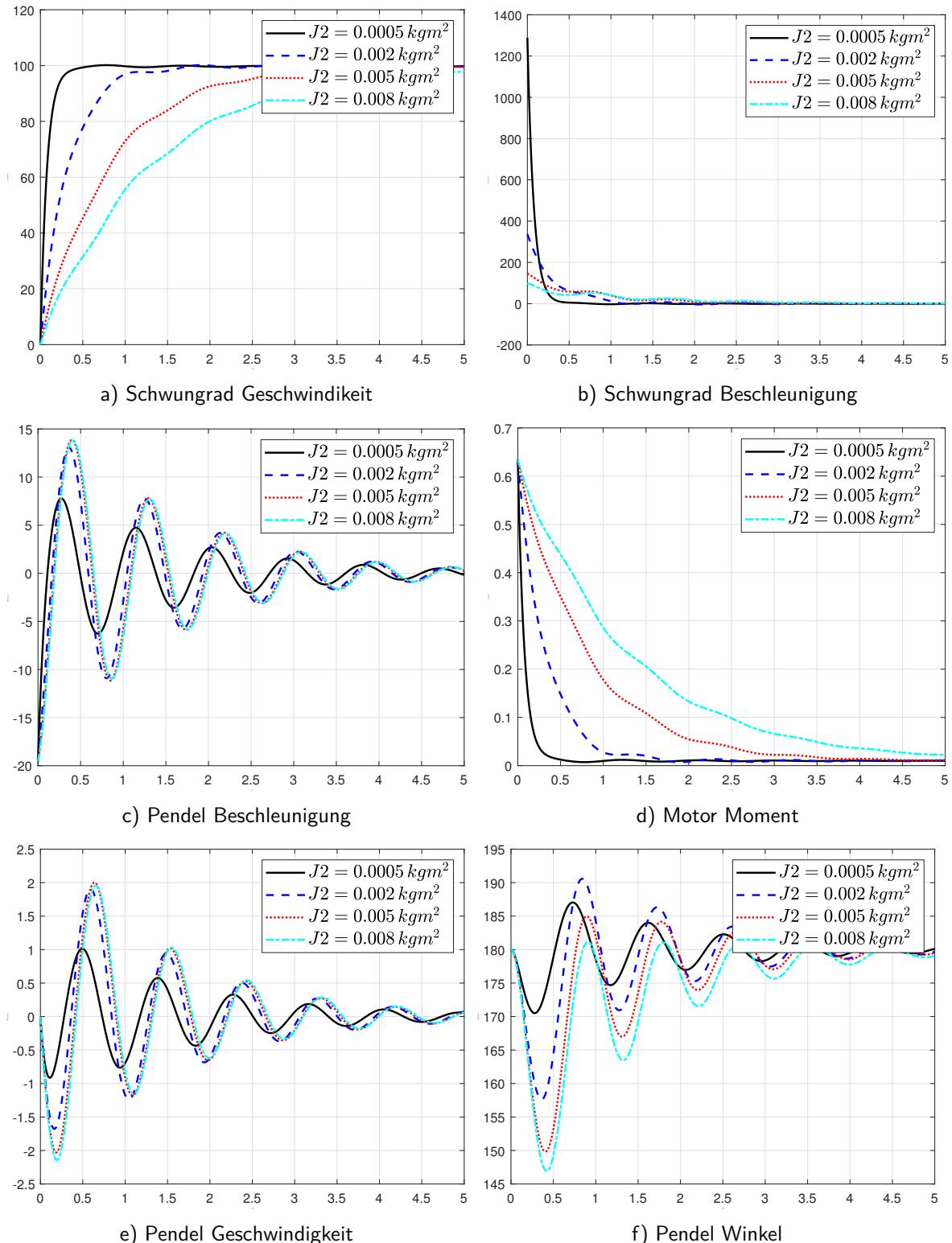


Abb. 5.3: Modellantwort auf Varianz des Parameters:  $J_2$

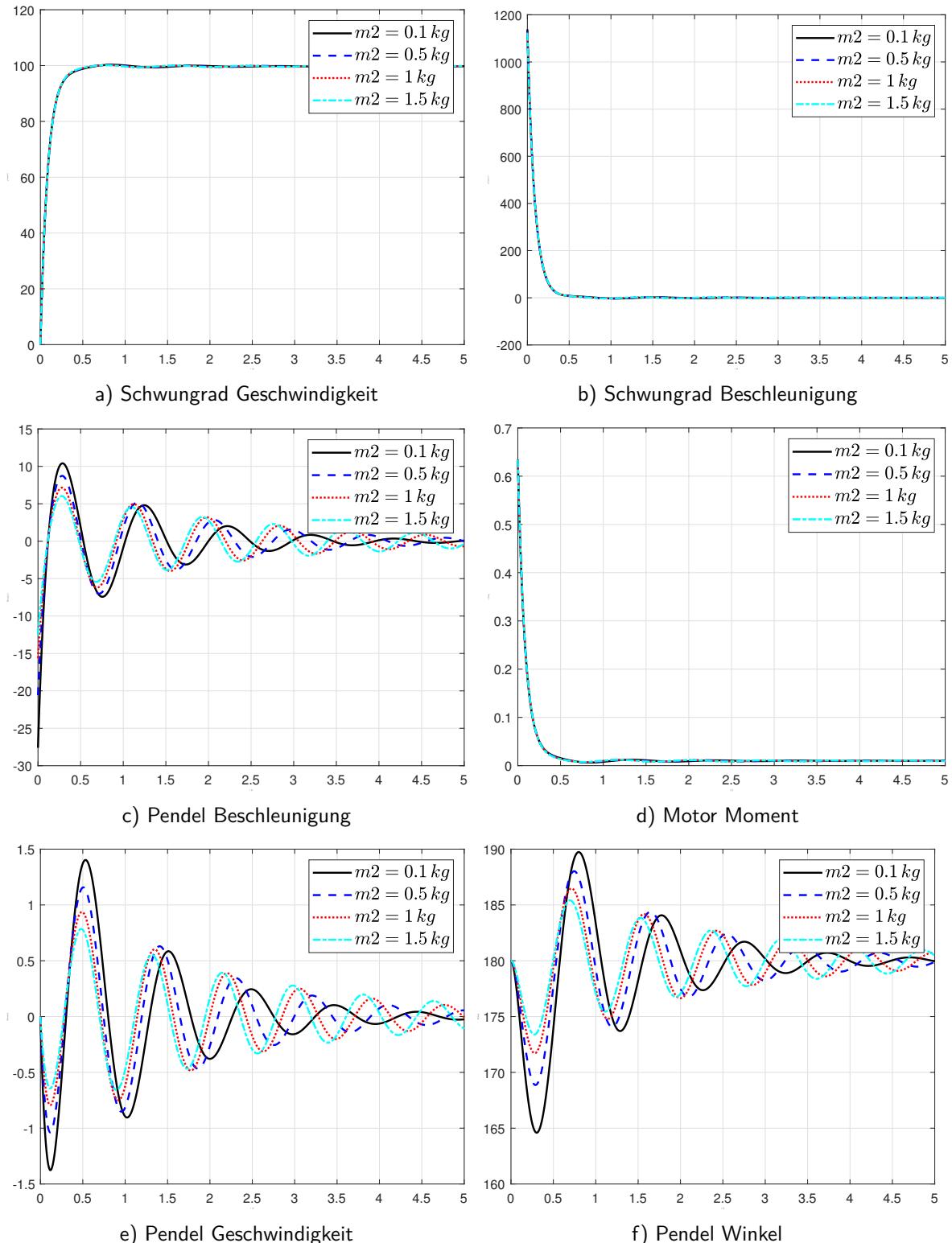


Abb. 5.4: Modellantwort auf Varianz des Parameters:  $M2$

sich.

Die Erhöhung des Parameters  $m2$  trägt also zu einer Verschlechterung der Modellantwort bei.

## **Einfluss der Reibung des Pendels ( $C1$ )**

Der Einfluss der Reibung des Pendels ( $C1$ ), auf die Modellparameter wird in den Simulationen (Abb. 5.5) untersucht. Der Parameter  $C1$  wird dabei von  $0.01 \text{ N m s rad}^{-1}$  bis  $1.5 \text{ newtonms/rad}$  variiert. Die Motorspannung wird dabei auf  $10 \text{ V}$  gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

Die Schwungradgeschwindigkeit (Abb. 5.5a) und die Schwungradbeschleunigung (Abb. 5.5b) werden durch den Parameter  $C1$  nicht beeinflusst.

Ebenso wird das Motormoment (5.5d) durch die Reibung des Pendels nicht beeinflusst.

In der Pendelauslenkung (Abb. 5.5d) ist der Einfluss der Reibung deutlich zu erkennen. Je höher der Reibungskoeffizient, desto kleiner wird die Pendelauslenkung.

Ebenso wird, wie zu erwarten, die Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.5e) und die Pendelbeschleunigung (Abb. 5.5c) durch die Reibung des Pendels gedämpft.

Daraus lässt sich schließen, dass ein Teil des Momentes benötigt wird, um die Reibung zu überkommen.

Die Erhöhung des Parameters  $C1$  trägt also zu einer Verschlechterung der Modellantwort bei.

## **Einfluss der Reibung des Schwungrades ( $C2$ )**

Der Einfluss der Reibung des Schwungrades ( $C2$ ) auf die Modellparameter wird in den Simulationen (Abb. 5.6) untersucht. Der Parameter  $C2$  wird dabei von  $0.0001 \text{ N m s rad}^{-1}$  bis  $0.1 \text{ N m s rad}^{-1}$  variiert. Die Motorspannung wird dabei auf  $10 \text{ V}$  gesetzt und die anderen Parameter werden ebenfalls auf die Standardwerte in Tab. 1.1 festgelegt.

Die Schwungradgeschwindigkeit (Abb. 5.6a) wird durch die Reibung des Schwungrades stark beeinflusst. Je höher der Reibungskoeffizient, desto kleiner wird die maximale Schwungradgeschwindigkeit.

Die Reibung wirkt ebenfalls dämpfend auf Schwingung in der Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit erreicht bei höher Reibung schneller ihren stabilen Endwert.

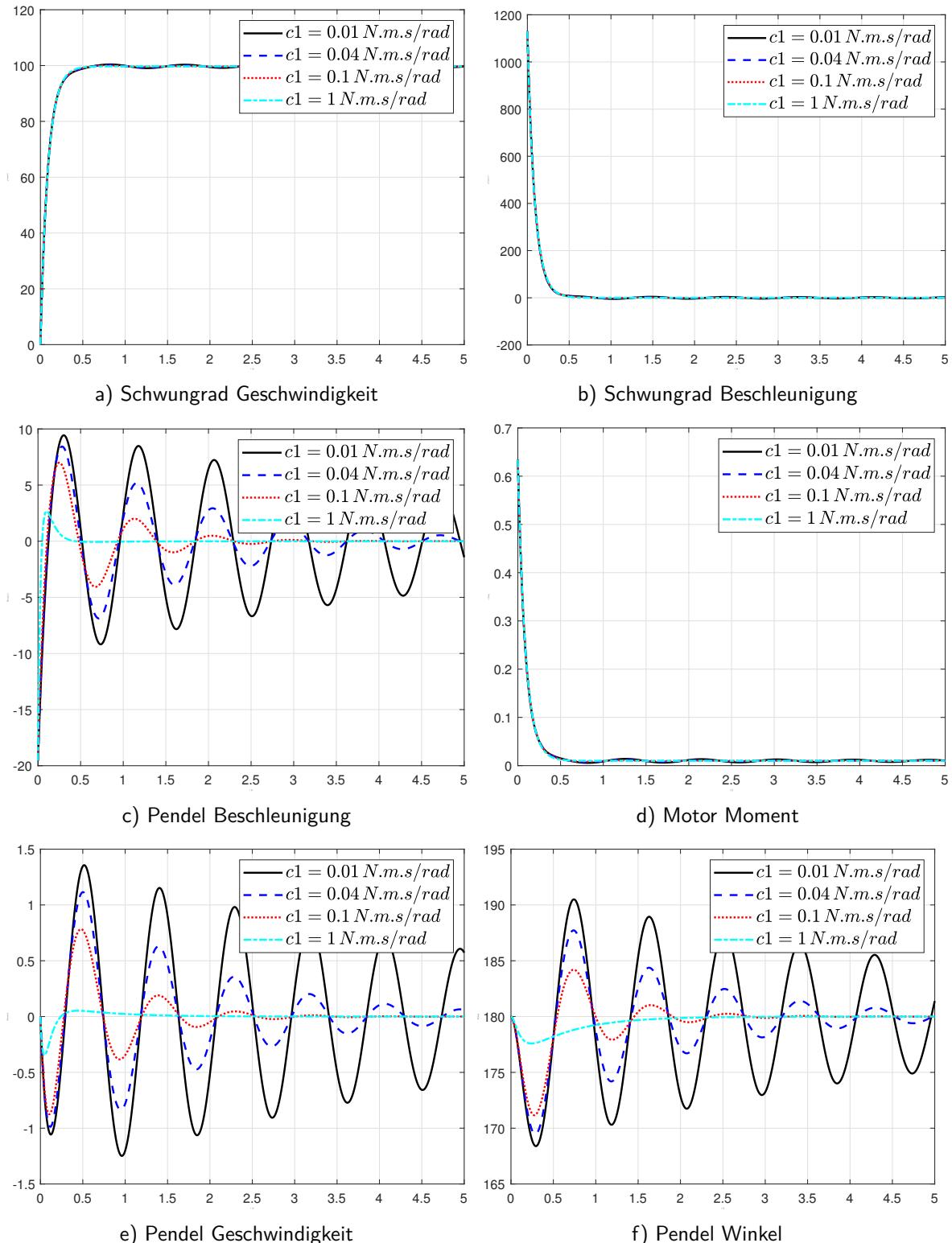


Abb. 5.5: Modellantwort auf Varianz des Parameters:  $C1$

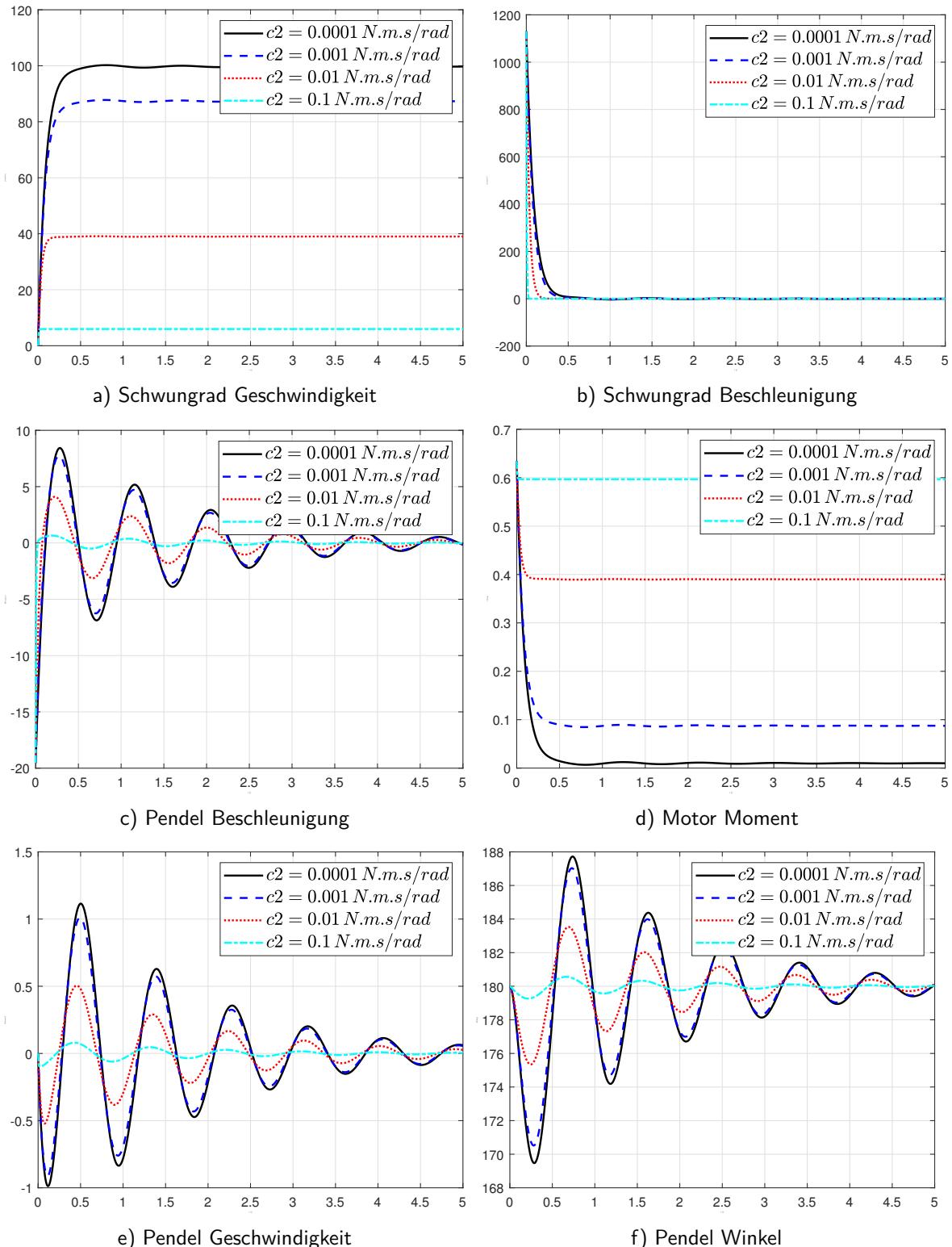


Abb. 5.6: Modellantwort auf Varianz des Parameters:  $C2$

Die Schwungradbeschleunigung (Abb. 5.6b) wird ebenfalls durch die Reibung beeinflusst. Die maximale Beschleunigung um  $t \approx 0\text{ s}$  ist unabhängig von  $C2$ , jedoch fällt sie schneller ab, je höher der Reibungskoeffizient ist.

Dadurch wird auch das Motormoment (Abb. 5.6d) beeinflusst. Je höher der Reibungskoeffizient, desto mehr Moment muss der Motor im stabilen Zustand aufbringen, um die Reibung zu überwinden.

Infolgedessen stellt sich ein konstantes Motormoment ein.

Das nun fehlende Motormoment macht sich auch in der Pendelgeschwindigkeit (Abb. 5.6e), der Pendelbeschleunigung (5.6c) und dem Pendelwinkel (Abb. 5.6f) bemerkbar.

Je höher der Reibungskoeffizient  $C2$  desto geringer die Amplituden. Die Eigenfrequenz wird nicht beeinflusst.

Damit ist der Reibungskoeffizient  $C2$  ein wichtiger Parameter, der alle wichtigen Modellgrößen beeinflusst.

## Überblick wichtiger Parameter und deren beeinflusste Modellgrößen

Im Folgenden wird ein Überblick über die wichtigsten Parameter und deren beeinflussten Modellgrößen gegeben.

Dabei handelt es sich um keine gewichtete Liste, sondern nur ein Überblick aus den Parametern, die speziellen Modellgrößen Beeinflussen.

- Schwungradgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ 
  - $V_m$
  - $J_2$
  - $C_2$
- Schwungradbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$ 
  - $V_m$
  - $J_2$
  - $C_2$
- Pendelbeschleunigung  $\ddot{\Theta}$ 
  - $V_m$
  - $l_2$
  - $J_2$
  - $m_2$
  - $C_1$
  - $C_2$
- Pendelwinkel  $\Theta$ 
  - $V_m$
  - $l_2$
  - $J_2$
  - $m_2$
  - $C_1$
  - $C_2$
- Motormoment  $\tau$ 
  - $V_m$
  - $J_2$
  - $C_2$

Besonders wichtige Parameter sind:

- Länge des Pendels zum Massenschwerpunkt  $l_2$
- Trägheitsmoment des Schwungrades  $J_2$
- Reibung des Schwungrades  $C_2$

All diese Parameter beeinflussen die wichtigsten Modellgrößen wie Pendelgeschwindigkeit, Pendelbeschleunigung und Pendelwinkel.

## 6 Globale Sensitivitätsanalyse nach Monte Carlo Methode

Bei der globale Sensitivitätsanalyse mit der Monte Carlo Methode werden die Parameter in einem bestimmten Bereich zufällig gewählt und die Modellgrößen berechnet.

Da es sich um eine Vielzahl von Parameter und Modellgrößen handelt, müssen viele Simulationen durchgeführt werden.

Symbol	Parameter	Varianz der Parameter
$J_1$	Trägheitsmoment des Pendels (+ Motorstator)	0.01 kg · m <sup>2</sup> bis 0.1 kg · m <sup>2</sup>
$J_2$	Trägheitsmoment des Rads (+ Motorrotor)	0.0001 kg · m <sup>2</sup> bis 0.001 kg · m <sup>2</sup>
$c_1$	Reibungsfaktor des Pendels	0.04 $\frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$ bis 0.4 $\frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
$c_2$	Reibungsfaktor des Rads	0.0001 $\frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$ bis 0.001 $\frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
$m_1$	Masse des Pendels und Stators	0.8 kg bis 8 kg
$m_2$	Masse des Rads und Rotors	0.5 kg bis 5 kg
$l_1$	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Pendels	0.1 m bis 1 m
$l_2$	Länge vom Ursprung bis Schwerpunkt des Rads	5 V bis 20 V
$V_m$	Motorspannung	0.1 m bis 1 m

Tab. 6.1: Varianz der Modellparameter des Schwungrad-Pendels

Über die in Tab. 6.1 aufgeführten Parameter wird eine Monte Carlo Simulation mit jeweils 1000 Zufallswerten pro Parameter durchgeführt.

Die Ergebnisse werden als Scatterplots dargestellt.

Betrachtet man die Simulation über den gesamten Parameterraum (Abb. 6.1), können einige eindeutige Korrelationen erkannt werden. Bei Scatterplots ohne deutliche Korrelation lässt sich keine Beeinflussung der Modellgrößen durch den gegebenen Parameter feststellen.

### Schwungradgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$

$\dot{\varphi}_{\max}$ :

Bei der maximalen Schwungradgeschwindigkeit gibt es zwei Parameter, die die Modellgröße signifikant beeinflussen.

Dabei handelt es sich um die Motorspannung  $V_m$  (Abb. 6.2a) und die Reibung des Schwungrades  $C_2$  (Abb. 6.2b). Mit der definierten Varianz hat die Motorspannung einen größeren Einfluss, ist aber in Abhängigkeit von der Reibung des Schwungrades.

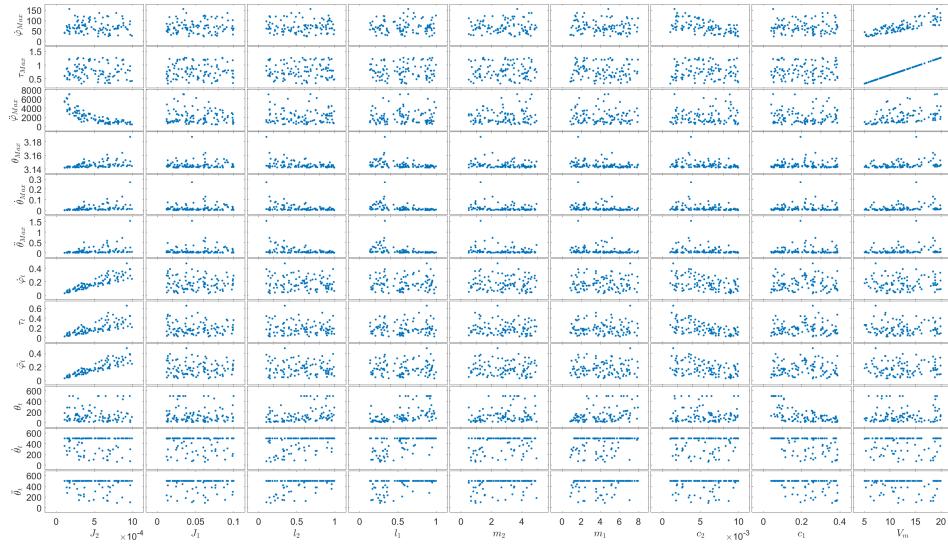


Abb. 6.1: Scatterplot über alle Parameter

### $\dot{\varphi}$ Settling Time:

Bei der Settling Time gibt es zwei Parameter, die eine Korrelation erkennen lassen. Das Trägheitsmoment des Schwungrades  $J_2$  (Abb. 6.3b) ist positiv und die Reibung des Schwungrades  $C_2$  (Abb. 6.3a) negativ mit der Einschwingzeit korreliert.

### Schwungradbeschleunigung $\ddot{\varphi}$

#### $\ddot{\varphi}$ max:

Bei der maximalen Schwungradbeschleunigung gibt es eine deutliche Korrelation. Das Trägheitsmoment des Schwungrades  $J_2$  (Abb. 6.4) ist negativ mit der maximalen Schwungradbeschleunigung korreliert.

#### $\ddot{\varphi}$ Settling Time:

Es gibt eine deutliche positive Korrelation zwischen dem Trägheitsmoment des Schwungrades  $J_2$  und der Einschwingzeit der Schwungradbeschleunigung (Abb. 6.6b).

Eine leicht negative Korrelation gibt es zwischen der Reibung des Schwungrades  $C_2$  und der Einschwingzeit der Schwungradbeschleunigung (Abb. 6.6a).

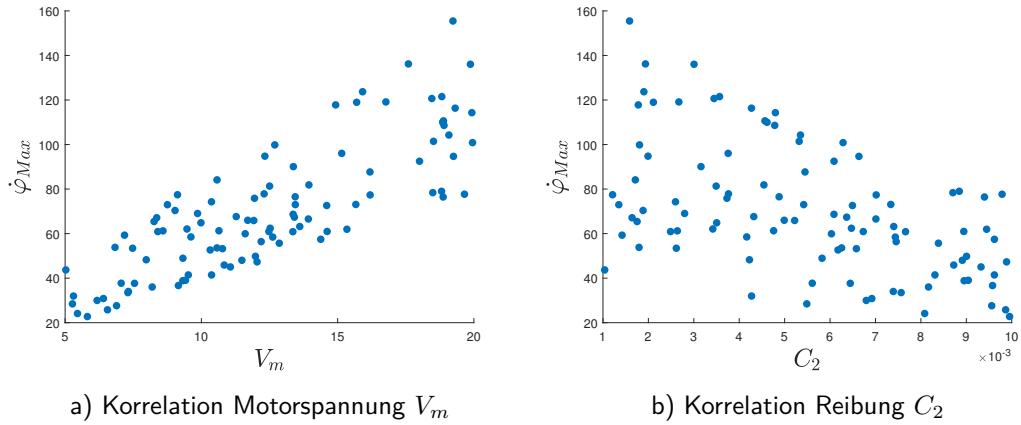


Abb. 6.2: Scatterplots über die maximale Schwungradgeschwindigkeit

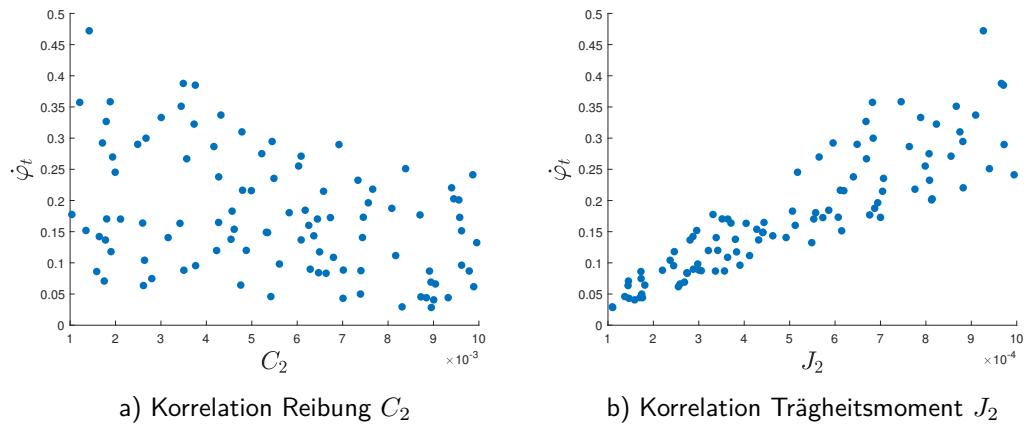


Abb. 6.3: Scatterplots über die Einschwingzeit der Schwungradgeschwindigkeit

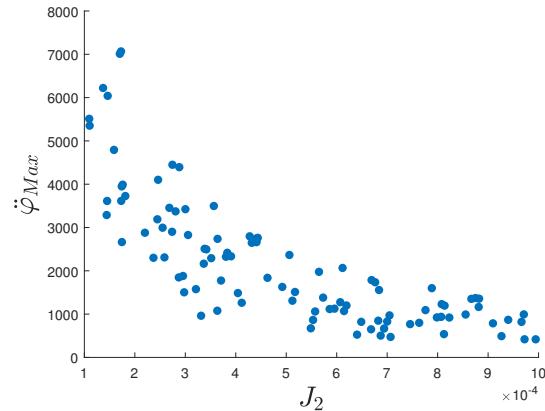


Abb. 6.4: Korrelation Trägheitsmoment  $J_2$

Abb. 6.5: Scatterplot über die maximale Schwungradbeschleunigung

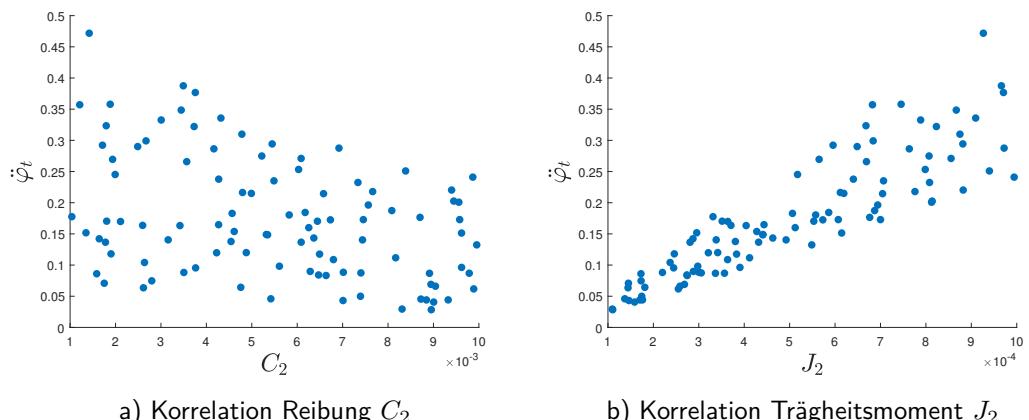


Abb. 6.6: Scatterplots über die Einschwingzeit der Schwungradbeschleunigung

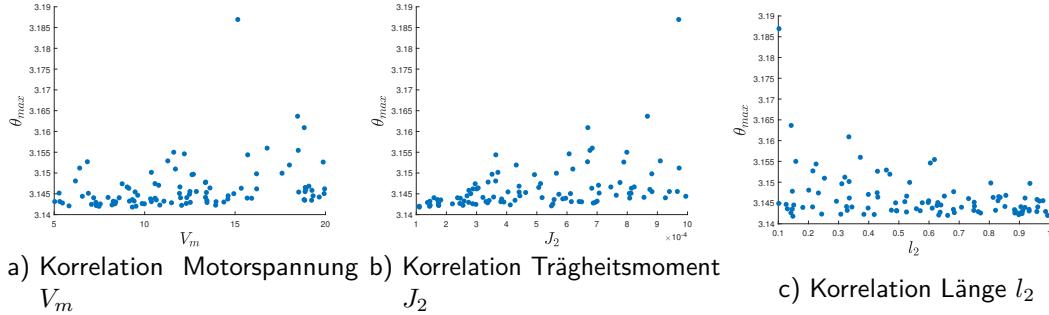


Abb. 6.7: Scatterplots über die maximale Pendelauslenkung

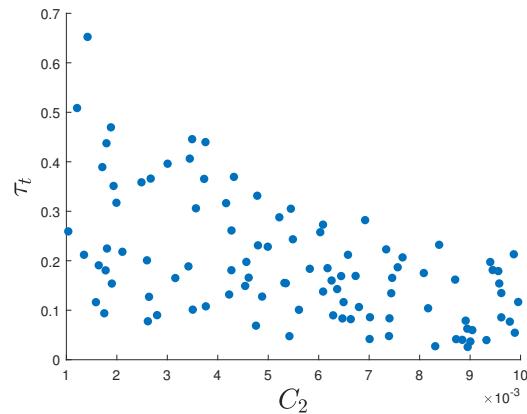


Abb. 6.8: Korrelation Reibung  $C_1$

Abb. 6.9: Scatterplot über die Pendeleinschwingzeit

## Pendelauslenkung $\Theta$

### $\Theta$ max:

Das Trägheitsmoment des Schwungrades  $J_2$  (Abb. 6.7b) sowie die Motorspannung  $V_m$  (Abb. 6.7a) sind positiv mit der maximalen Pendelauslenkung korreliert.

Die Länge  $l_2$  ist negativ mit der maximalen Pendelauslenkung korreliert (Abb. 6.7c).

### $\Theta$ Settling Time:

Bei der Pendeleinschwingzeit gibt es den negativ korrierten Parameter „Reibung des Pendels  $C_1$ “,

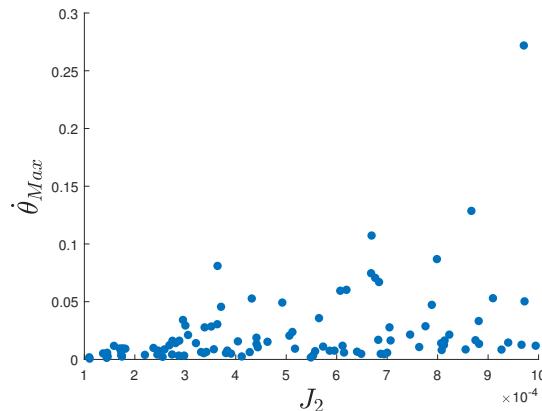
Abb. 6.10: Korrelation Trägheitsmoment  $J_2$ 

Abb. 6.11: Scatterplot über die maximale Pendelgeschwindigkeit

### Pendelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$

#### $\dot{\theta}_{max}$ :

Es besteht eine positive Korrelation zwischen der maximalen Pendelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmoment des Schwungrades  $J_2$  (Abb. 6.10).

#### $\dot{\theta}$ Settling Time:

Es lässt sich keine klare Korrelation erkennen.

### Pendelbeschleunigung $\ddot{\theta}$

#### $\ddot{\theta}_{max}$ :

Es besteht eine positive Korrelation zwischen der maximalen Pendelbeschleunigung und dem Trägheitsmoment des Schwungrades  $J_2$  (Abb. 6.12).

#### $\ddot{\theta}$ Settling Time:

Es lässt sich keine klare Korrelation erkennen.

### Motormoment $\tau$

#### $\tau$ max:

Das maximale Motormoment ist positiv mit der Motorspannung  $V_m$  (Abb. 6.14) korreliert.

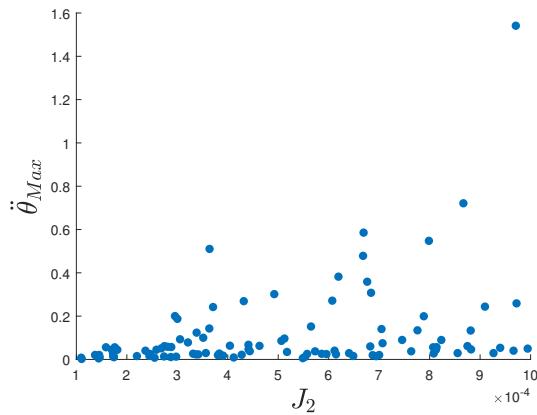
Abb. 6.12: Korrelation Trägheitsmoment  $J_2$ 

Abb. 6.13: Scatterplot über die maximale Pendelbeschleunigung

### $\tau$ Settling Time:

Es besteht eine deutliche positive Korrelation zwischen dem Trägheitsmoment des Schwungrades  $J_2$  (Abb. 6.16b) sowie eine negative Korrelation zwischen dem Reibungsfaktor  $C_2$  (Abb. 6.16a) und der Einschwingzeit des Motormoments.

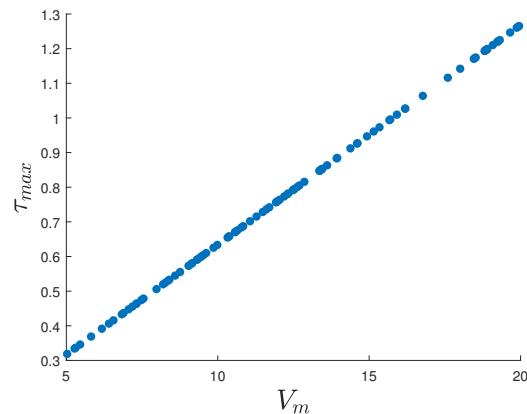


Abb. 6.14: Korrelation Motorspannung  $V_m$

Abb. 6.15: Scatterplot über das maximale Motormoment

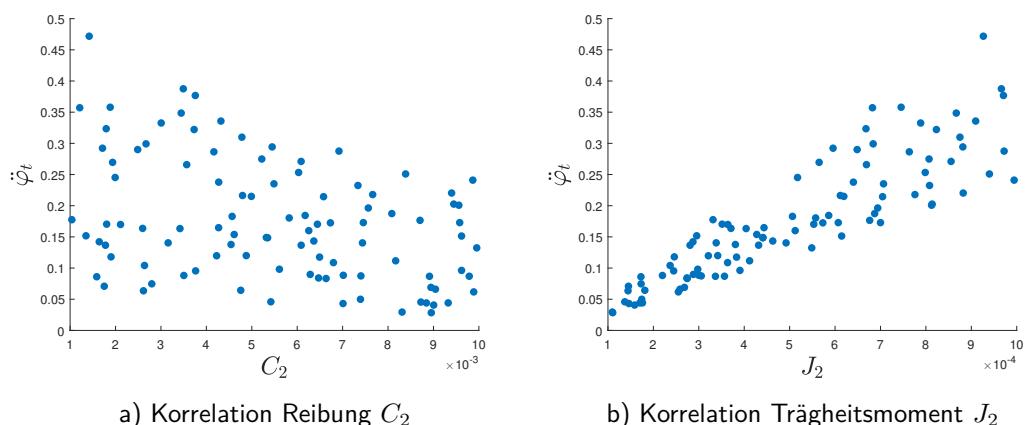


Abb. 6.16: Scatterplots über die Einschwingzeit des Motormoments

## 7 Aufschwingen des Schwungrad-Pendels

Ziel der Aufschwungsteuerung ist, das Pendel in die obere Ruhelage zu befördern. Dazu gibt es mehrere Ansätze. Ein 1996 bei K. J. Åström und K. Furuta [3] beschriebener Ansatz ist, die Energie des Pendels zu betrachten. Im Kern werden die potentielle und kinetische Energie addiert und über einen Gain verstärkt, bis das Energieniveau dem der oberen Ruhelage des Pendels entspricht.

$$u = \text{sat}(k \cdot (E + E_0)) \cdot \text{sign}(\dot{\theta} \cdot \cos \theta) \quad (7.1)$$

Wobei  $k$  ein Gain-Faktor ist, der bei größeren Abweichungen der Pendel-Energie effektiv durch die Ausgangsbegrenzung zu einem Zweipunkt-Regler wird, dessen Vorzeichen von dem zweiten cos-Term bestimmt wird.

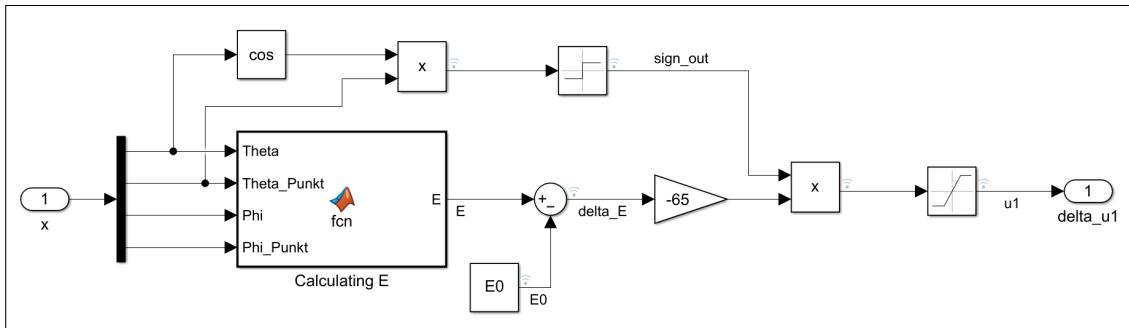


Abb. 7.1: Aufschwung-Reglerstruktur

Charmant an dieser Variante ist, dass das Energieniveau schon vor der oberen Ruhelage erreicht ist und die Energie-Zufuhr des Aktuators gestoppt wird. Die verbleibende kinetische Energie wandelt sich dann zu potentiellen Energie; während das Pendel mit dem restlichen Schwing in die obere Ruhelage läuft. Dadurch kommt das Pendel sehr ruhig in der oberen Ruhelage an und es wird ein Überschwingen vermieden. Zur Implementierung wurden die in Abschnitt 2 aufgestellten Energie-Gleichungen nach Lagrange genutzt – wobei die kinetische Energie des Rades in der Summe nicht berücksichtigt wird, da das den Aktuator und die Regelgröße darstellt.

$$E = E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{pot}} \quad (7.2)$$

Mit dieser Regelung war ein nahezu perfektes Aufschwingen möglich, bei dem der Regler nach dem Umschalten in den meisten Fällen nur noch im Bereich von 5V gegensteuern musste, um das Pendel auf der oberen Ruheposition zu halten.

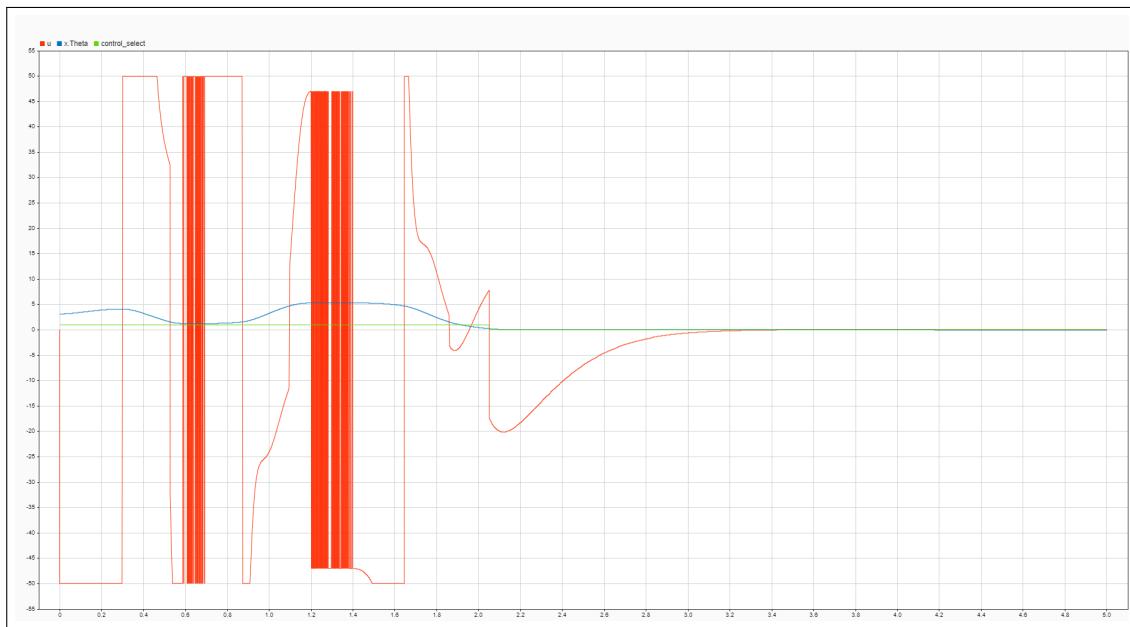


Abb. 7.2: Aufschwung-Regelung

Da in diesem Projekt aber nicht alle Zustandsvariablen gemessen werden können und stattdessen mittels einem Beobachter rekonstruiert werden sollen [vgl.: Abschnitt 9] und dieser Beobachter nur in der Nähe des Linearisierungs-Punktes fehlerarm arbeitet, ist die oben beschriebene Aufschwung-Regelung nicht mit dem Beobachter zu verwenden. Daher ist in diesem Projekt ein zweiter Ansatz implementiert, welcher lediglich die aktuelle Winkelposition auswertet und wenn der aktuell gemessene Winkel kleiner als der in dem letzten Schleifen-Durchlauf ist, die Richtung des Schwungrades ändert. Schwingt das Pendel nun in einen Bereich von  $\pm 14^\circ$  wird auf den Regler umgeschaltet.

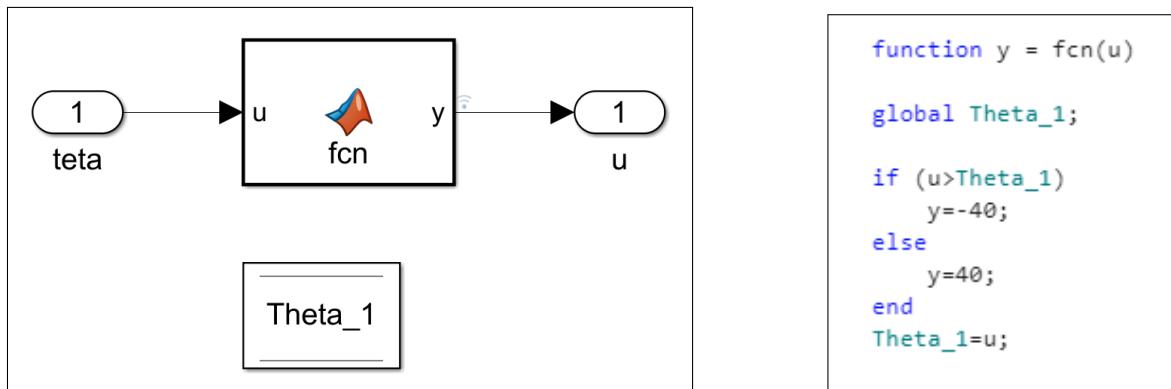


Abb. 7.3: Aufschwung-Steuerungsstruktur

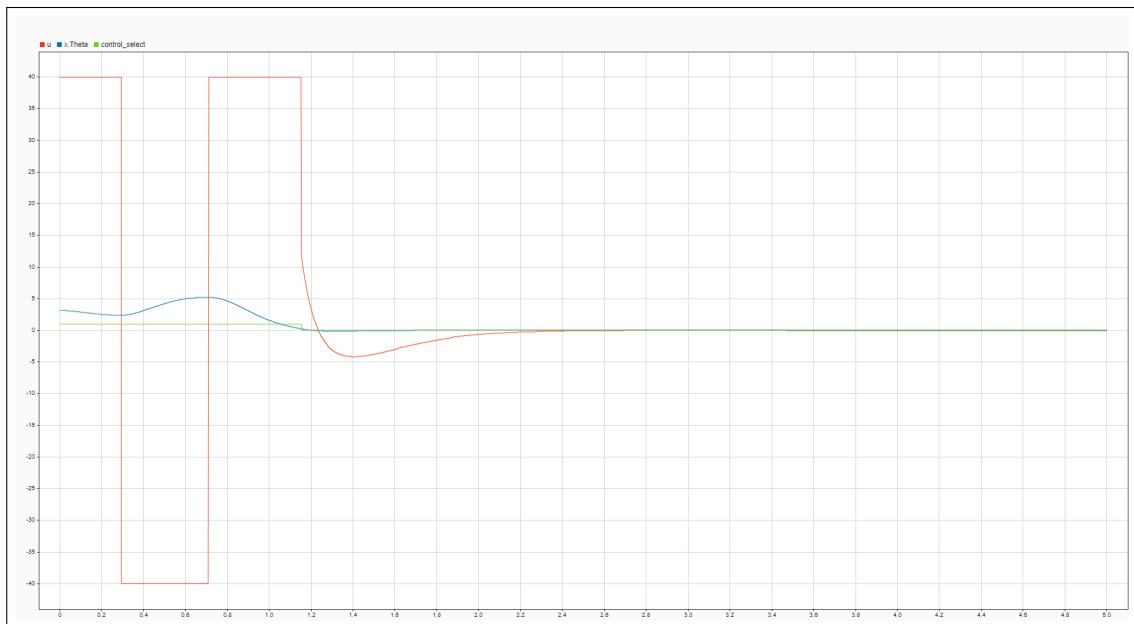


Abb. 7.4: Aufschwung-Steuerung

Bei beiden Implementierungen werden die Winkel so angepasst, dass sie nur in einem Bereich von 0 bis  $2\pi$  für die Aufschwung-Steuerung respektive  $-\pi$  bis  $+\pi$  für den Regler liegen. Für die Aufschwung-Steuerung liegt die Unstetigkeits-Stelle in der oberen Ruhelage und für den Regler in der unteren Ruhelage. Durch die Umschaltung zwischen den beiden Regelungen erreichen die Regler niemals die Unstetigkeit während sie aktiv sind.

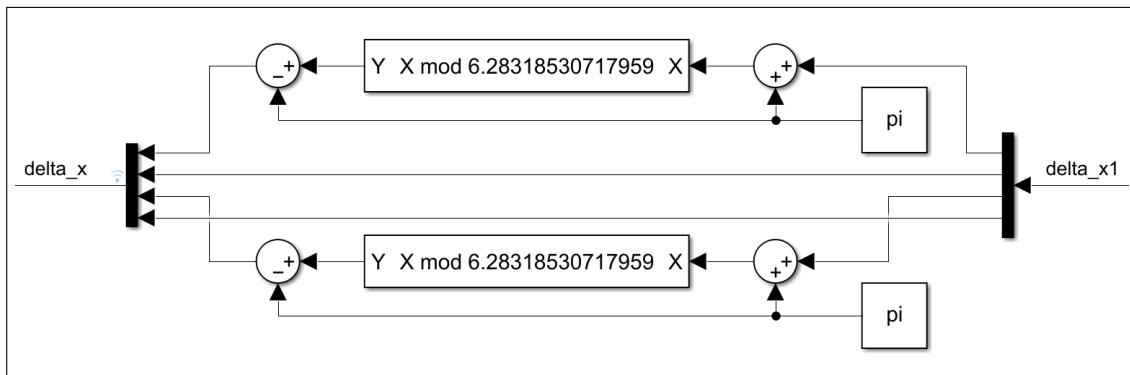


Abb. 7.5: Signal-Anpassung für den Regler

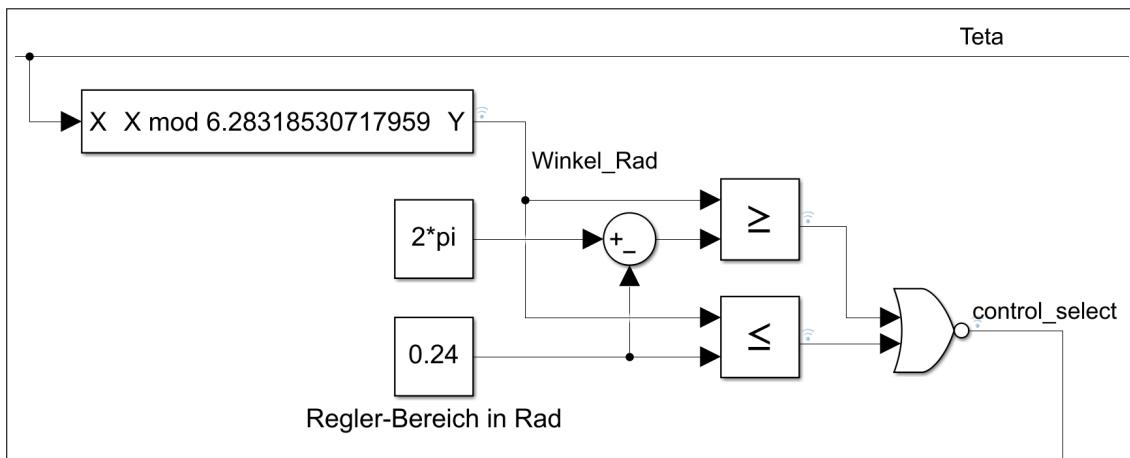


Abb. 7.6: Umschalt-Steuerung

Es zeigte sich bei den Simulationen, dass eine maximale Motor-Spannung von 20V nicht ausreicht, um einen ausreichenden Drehmoment zu erzeugen, welcher das Pendel aufschwingen kann. Es werden bei diesem Modell mit diesem Motor mindestens 40V benötigt um das Pendel aus der unteren in die obere Ruhelage zu bewegen.

## 8 Zustandsregler

Der nachfolgende Zustandsregler basiert auf einer **einfachen Zustandsrückführung**, d.h. Änderungen innerhalb des Systems werden auf die vorher definierte Ruhelage ausgeregelt.

### 8.1 Reglerentwurf

#### 8.1.1 Nachweis der Steuerbarkeit

Zur Implementierung einer Reglerstruktur wird vorausgesetzt, dass das System steuerbar ist. Die vollständige Steuerbarkeit ist gegeben, wenn unter Berücksichtigung der Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$  das System von jedem beliebigen Anfangszustand  $\underline{x}_0$  in jeden beliebigen Endzustand  $\underline{x}_e$  überführt werden kann. Der Nachweis erfolgt über die Auswertung der **Steuerbarkeitsmatrix**  $\underline{Q}_s$ . Zur Berechnung werden die Systemmatrix  $A$  und die Eingangsmatrix  $B$  benötigt (Gleichung 8.1).

$$\underline{Q}_s = \begin{pmatrix} B & A \cdot B & \dots & A^{(n-1)} \cdot B \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Bei **SISO**- oder **SIMO**-Systemen folgt eine quadratische Matrix, d.h. die **Bedingung** für die Steuerbarkeit lautet:

$$\det(\underline{Q}_s) \neq 0.$$

Sofern ein **MISO**- oder **MIMO**-System vorliegt, muss der **Rang** gleich  $n$  bzw.  $m$  sein. Die Variablen  $n$  und  $m$  geben die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen und Spalten wieder. Falls

$$\begin{aligned} n &> m : \\ \text{rank}(\underline{Q}_s) &= m \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} n &< m : \\ \text{rank}(\underline{Q}_s) &= n \end{aligned}$$

gilt, ist das System steuerbar.

Durch **Anwendung** der Vorschrift aus Gleichung 8.1 folgt die Steuerbarkeitsmatrix des inversen Pendels in der instabilen Ruhelage zu:

$$\underline{Q}_s = \begin{bmatrix} 0 & -1.9548 & 24.5620 & -381.4330 \\ -1.9548 & 24.5620 & -381.4330 & 4.5979 \cdot 10^3 \\ 0 & 113.0101 & -1.2831 \cdot 10^3 & 1.4670 \cdot 10^4 \\ 113.0101 & -1.2831 \cdot 10^3 & 1.4670 \cdot 10^4 & -1.6797 \cdot 10^5 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix ist quadratisch. Die **Determinante** folgt zu:

$$\det(\underline{Q}_s) \approx 12.24 \cdot 10^7. \quad (8.2)$$

Das implementierte System ist **steuerbar**.

### 8.1.2 Reglertypen

Das allgemeine **Reglertypen** für die Zustandsrückführung ist nachfolgend gezeigt. Die Systemstruktur kann der Abbildung 8.1 entnommen werden. Gleichungen zur Berechnung der Matrix  $K$  folgen in Unterabschnitt 8.1.3.

$$\underline{u}(t) = -\underline{K} \cdot \underline{x}(t) \quad (8.3)$$

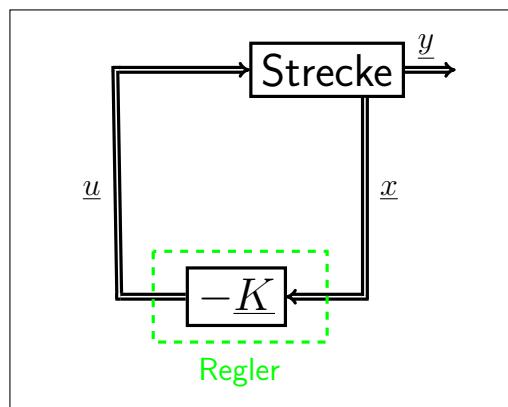


Abb. 8.1: Systemstruktur mit einfacher Zustandsrückführung

### 8.1.3 Lineare Matrixungleichungen

Die Berechnung der Reglermatrix K wird mit **quadratischen Ljapunov-Funktionen** und der **exponentiellen Stabilität** motiviert. Im ersten Schritt werden die Polstellenregionen lediglich durch die Vorgabe einer Decay-Rate  $\alpha$  eingeschränkt. Die **Linearen Matrixungleichungen (LMI)** sind in Gleichung 8.4 dargestellt. Zur Visualisierung der Einschränkungen dient Abbildung 8.2. Das Lösen der LMI's, insbesondere der Gleichung 8.5 erfolgt mithilfe der Matlab-Toolbox **Robust-Control-Toolbox** (Linear Matrix Inequalities).

$$\begin{aligned} 0 &> \underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{X} \cdot \underline{A}^T - \underline{B} \cdot \underline{M} - \underline{M}^T \cdot \underline{B}^T + 2 \cdot \alpha \cdot \underline{X} \\ \underline{X} &> 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

mit

$$K = M \cdot X^{-1} \quad (8.5)$$

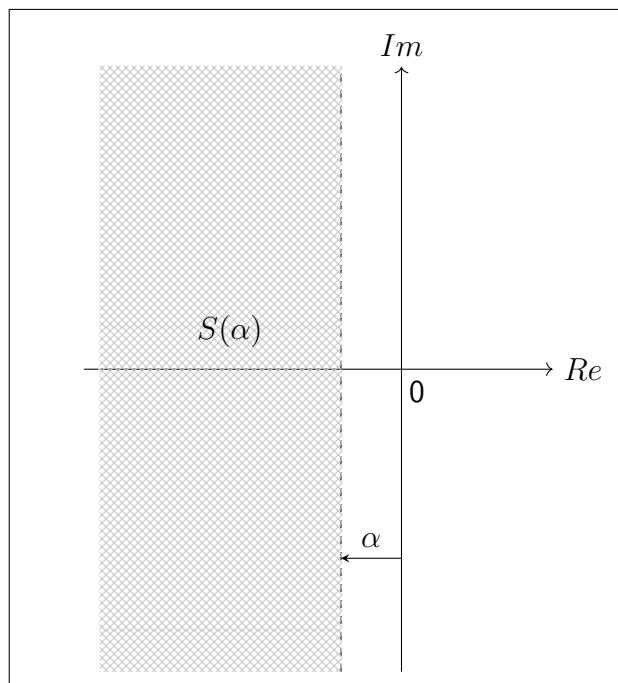


Abb. 8.2: Einschränkung der Polregion bei exponentieller Stabilität zu  $S(\alpha)$

Sofern die Einschränkung mittels Decay-Rate nicht ausreicht, um die Voraussetzungen aus

Abschnitt 1 zu erreichen, werden zusätzliche LMI's eingeführt, welche weitere Einschränkungen mittels Kegel und Halbkreis vornehmen (Gleichung 8.6 und Abbildung 8.3).

$$\begin{aligned}
 0 &> \underline{AX} + \underline{XA}^T - \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T + 2\alpha \underline{X} \\
 0 &> \begin{pmatrix} (\underline{AX} + \underline{XA}^T - \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T) \sin \theta & (\underline{AX} - \underline{XA}^T - \underline{BM} + \underline{M}^T \underline{B}^T) \cos \theta \\ (\underline{XA}^T - \underline{AX} + \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T) \cos \theta & (\underline{AX} + \underline{XA}^T - \underline{BM} - \underline{M}^T \underline{B}^T) \sin \theta \end{pmatrix} \\
 0 &> \begin{pmatrix} -r \underline{X} & \underline{AX} - \underline{BM} \\ \underline{XA}^T - \underline{M}^T \underline{B}^T & -r \underline{X} \end{pmatrix} \\
 \underline{X} &> 0
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

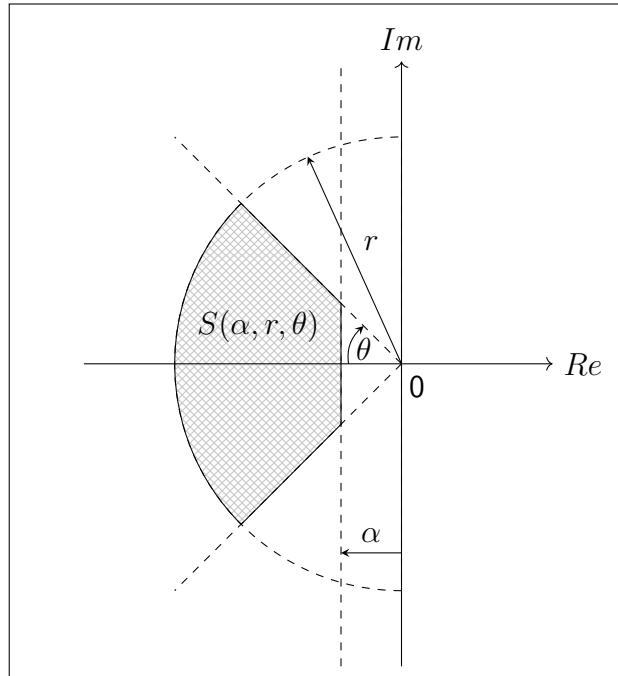


Abb. 8.3: Einschränkung der Polregion bei Erweiterung der LMI zu  $S(\alpha, r, \theta)$

## 8.2 Reglervalidierung am linearen Modell

Um eine geeignete Reglerstruktur zu entwerfen, werden zuerst die **Polstellen der Systemmatrix A** bestimmt und grafisch dargestellt (Abbildung 8.4). Aus der Abbildung geht hervor, dass zwei der vier rein reellen Polstellen instabil sind, da diese eine Realteil größer oder gleich Null aufweisen. Dies hat ein instabiles Systemverhalten zur Folge.

$$eig(\underline{A}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.5169 \\ -7.5606 \\ -11.5214 \end{bmatrix}$$

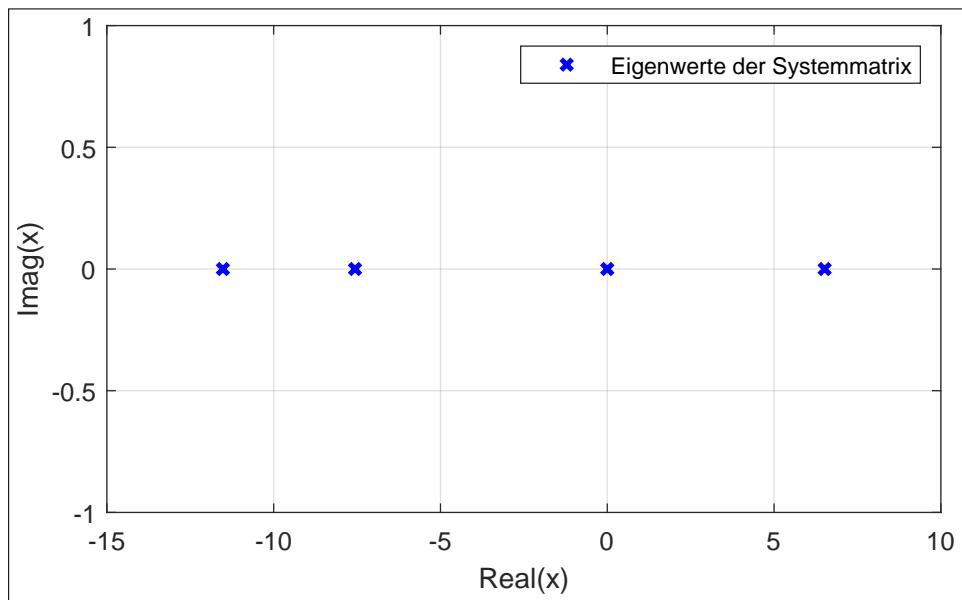


Abb. 8.4: Polstellen der Systemmatrix

Der zu entwerfender Regler muss in der Lage sein, die maximal zulässige Eingangsspannung von  $V_{m,Max} = 20V$  auszureißen, jedoch nicht zu überschreiten, um größtmögliche Winkeländerungen von der definierten instabilen Ruhelage ausgleichen zu können. Die Simulationen werden mithilfe der Matlab-Erweiterung **Simulink** durchgeführt. Die Reglerstruktur ist in Abbildung 8.5 dargestellt. Das linearisierte Zustandsraummodell verwendet gemäß Definition Delta-Größen, welche bei der Anwendung des linearen Reglers am nichtlinearen Modell berücksichtigt werden müssen. Da die entstehende K-Matrix eine Größe von  $(1 \times 4)$  besitzt, wird fortan die Vektorschreibweise  $k$  bevorzugt.

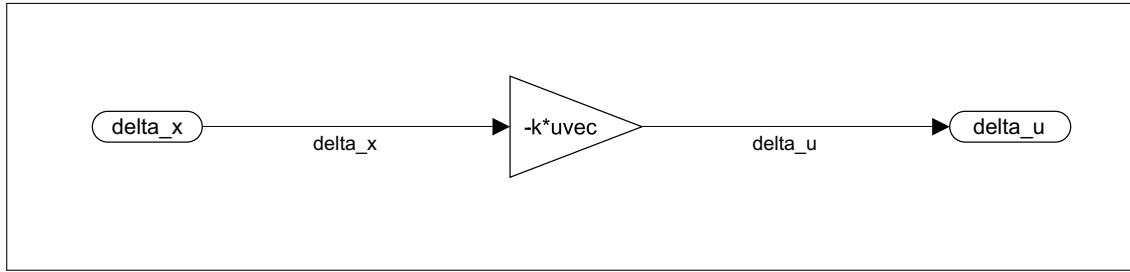


Abb. 8.5: Simulink-Reglerstruktur

Im ersten Versuch wird nur die Decay-Rate  $\alpha$  variiert (vgl. Abbildung 8.2). Der Startwinkel des Pendels wird von  $15^\circ$  solange verringert, bis der Maximalwert der anliegenden Eingangsspannung  $V_m \leq 20V$  erreicht. Zur Übersicht der Ergebnisse dient Tabelle 8.1.

<b>Anfangsauslenkung Pendel [°]</b>	<b>Kriterium</b>	$\alpha$				
		<b>1.0</b>	<b>0.5</b>	<b>0.3</b>	<b>0.1</b>	<b>0.05</b>
15	$V_{m,\text{Max}} [\text{V}]$	39.107	31.983	29.184	26.471	27.351
	$V_{m,\text{Max}} \leq 20\text{V}$	-	-	-	-	-
14	$V_{m,\text{Max}} [\text{V}]$	36.500	29.851	27.238	24.706	25.528
	$V_{m,\text{Max}} \leq 20\text{V}$	-	-	-	-	-
13	$V_{m,\text{Max}} [\text{V}]$	33.893	27.719	25.293	22.941	23.704
	$V_{m,\text{Max}} \leq 20\text{V}$	-	-	-	-	-
12	$V_{m,\text{Max}} [\text{V}]$	31.286	25.587	23.347	21.177	21.881
	$V_{m,\text{Max}} \leq 20\text{V}$	-	-	-	-	-
11	$V_{m,\text{Max}} [\text{V}]$	28.679	23.454	21.401	19.412	20.057
	$V_{m,\text{Max}} \leq 20\text{V}$	-	-	-	X	-

Tab. 8.1: Auswertung der Eingangsspannung  $V_m$  für unterschiedliche Anfangsauslenkungen des Pendels bei Vorgabe einer Decay-Rate  $\alpha$  [X - erfüllt, - - nicht erfüllt]

Aus der Tabelle geht hervor, dass erst bei einem Anfangswinkel von  $11^\circ$  und  $\alpha = 0.1$  die Spannung  $V_m$  unter 20V sinkt. Mithilfe der erweiterten LMI's wird nun versucht, ein größeren Startwinkel zu ermöglichen und weiterhin die Constraints einzuhalten. Dafür wird die Anfangsauslenkung des Pendels erneut, von  $15^\circ$  startend, verringert. Zusätzlich erfolgt eine Variation des Kegelwinkels  $\Theta$  zwischen  $10^\circ$  und  $60^\circ$ . Der Radius  $r$  des Halbkreises variiert zwischen 11 und 15 (vgl. Abbildung 8.3). Die Decay-Rate  $\alpha$  nimmt die bereits

betrachteten Werte an. In der Tabelle 8.2 und Tabelle 8.3 sind die relevanten Ergebnisse dargestellt. Die vollständigen Tabellen liegen dem digitalen Anhang bei.

$\alpha$	$\Theta [^\circ]$	r	$V_{m,\text{Max}} [\text{V}]$	kleinste Spannung
1.00	10	12	21.056	-
1.00	20	11	21.146	-
1.00	30	12	21.169	-
1.00	40	11	21.282	-
1.00	50	11	21.391	-
1.00	60	12	21.604	-
0.50	10	13	20.713	-
0.50	20	13	20.719	-
0.50	30	13	20.751	-
0.50	40	13	20.947	-
0.50	50	13	20.986	-
0.50	60	12	21.265	-
0.30	10	14	20.519	-
0.30	20	13	20.590	-
0.30	30	13	20.620	-
0.30	40	13	20.722	-
0.30	50	13	20.926	-
0.30	60	15	21.083	-
0.10	10	15	20.294	-
0.10	20	14	20.398	-
0.10	30	14	20.442	-
0.10	40	14	20.598	-
0.10	50	13	20.777	-
0.10	60	14	20.972	-
0.05	10	15	20.256	X
0.05	20	14	20.377	-
0.05	30	14	20.420	-
0.05	40	14	20.537	-
0.05	50	13	20.819	-
0.05	60	14	20.945	-

Tab. 8.2: Auswertung der Eingangsspannung  $V_m$  für den **Anfangswinkel  $15^\circ$**  des Pendels bei Vorgabe einer Decay-Rate  $\alpha$ , Kegelwinkel  $\Theta$  und Radius r [X - erfüllt, - - nicht erfüllt]

$\alpha$	$\Theta [^\circ]$	$r$	$V_{m,\text{Max}} [\text{V}]$	größte Spannung
1.00	10	13	19.912	-
1.00	20	13	19.966	-
1.00	30	11	19.771	-
1.00	40	12	19.886	-
1.00	50	11	19.965	-
1.00	60	12	20.164	-
0.50	10	12	19.498	-
0.50	20	11	19.685	-
0.50	30	11	19.786	-
0.50	40	11	19.880	-
0.50	50	14	19.997	X
0.50	60	13	19.926	-
0.30	10	12	19.824	-
0.30	20	11	19.953	-
0.30	30	15	19.954	-
0.30	40	15	19.672	-
0.30	50	11	19.990	-
0.30	60	12	19.832	-
0.10	10	13	19.326	-
0.10	20	12	19.489	-
0.10	30	12	19.436	-
0.10	40	12	19.621	-
0.10	50	11	19.904	-
0.10	60	15	19.803	-
0.05	10	13	19.244	-
0.05	20	12	19.528	-
0.05	30	12	19.528	-
0.05	40	12	19.636	-
0.05	50	15	19.752	-
0.05	60	15	19.793	-

Tab. 8.3: Auswertung der Eingangsspannung  $V_m$  für den **Anfangswinkel  $14^\circ$**  des Pendels bei Vorgabe einer Decay-Rate  $\alpha$ , Kegelwinkel  $\Theta$  und Radius  $r$  [**X** - erfüllt, - - nicht erfüllt]

Bei einem Anfangswinkel von  $15^\circ$  wird die Eingangsspannung nicht kleiner als 20V (Tabelle 8.2). Eine Verringerung auf  $14^\circ$  führt zu einem akzeptablen Ergebnis (Tabelle 8.3). Die

maximale Spannung beträgt  $V_{m,Max} \approx 19.997V$ . Die eingestellten Parameter folgen zu:

$$\alpha = 0.50; \quad \Theta = 50^\circ; \quad r = 14. \quad (8.7)$$

Bei den gewählten Parametern und der Berücksichtigung bei der Berechnung der LMI's resultieren die Werte des k-Vektors.

$$\underline{k} = [-75.7055 \quad -9.6779 \quad -0.0154 \quad -0.1327] \quad (8.8)$$

Die Polstellen des geschlossenen Regelkreises sind nachfolgend aufgelistet und im Vergleich zu den Polstellen der Systemmatrix in Abbildung 8.6 dargestellt.

$$eig(\underline{A} - \underline{b} \cdot \underline{k}) = \begin{bmatrix} -6.3199 + j0.3236 \\ -6.3199 - j0.3236 \\ -3.1548 + j0.0000 \\ -0.6905 + j0.0000 \end{bmatrix}$$

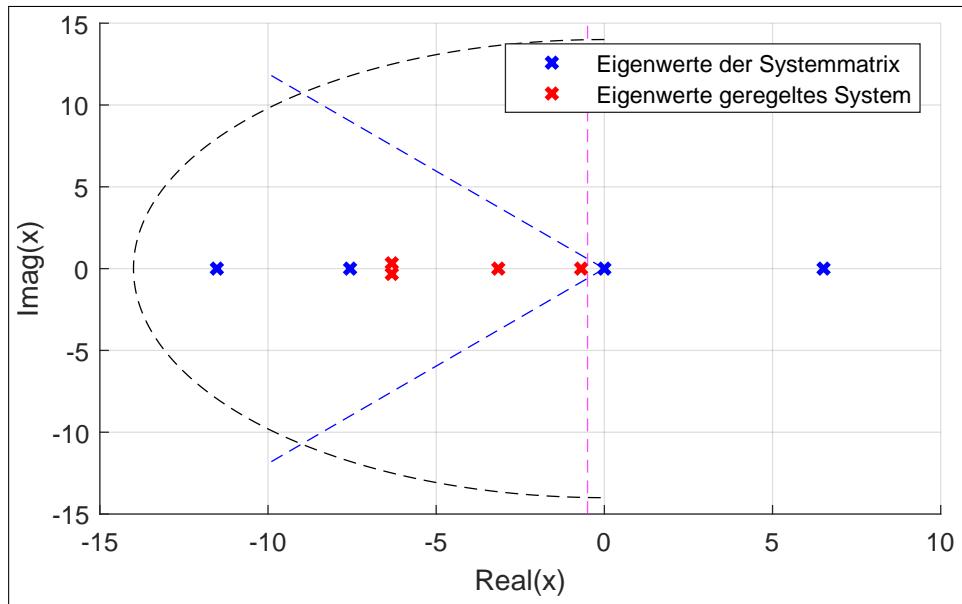


Abb. 8.6: Vergleich der Polstellenlagen der Systemmatrix A und des geschlossenen Regelkreises

Der geschlossene Regelkreis weist nur Polstellen mit einem Realteil kleiner Null auf. Folglich ist das System stabil. In Abbildung 8.7 sind der Kurvenverlauf des Pendelwinkels  $\Theta$ , als auch der des Schwungradwinkels  $\varphi$  dargestellt. Aus den Kurvenverläufen wird geschlussfolgert, dass die implementierte Reglerstruktur das Pendel in die instabile Ruhelage zurückregelt. Die maximale Eingangsspannung von 20V wird dabei nicht überschritten. Die eingangs gesetzten Regelziele gelten als erfüllt.

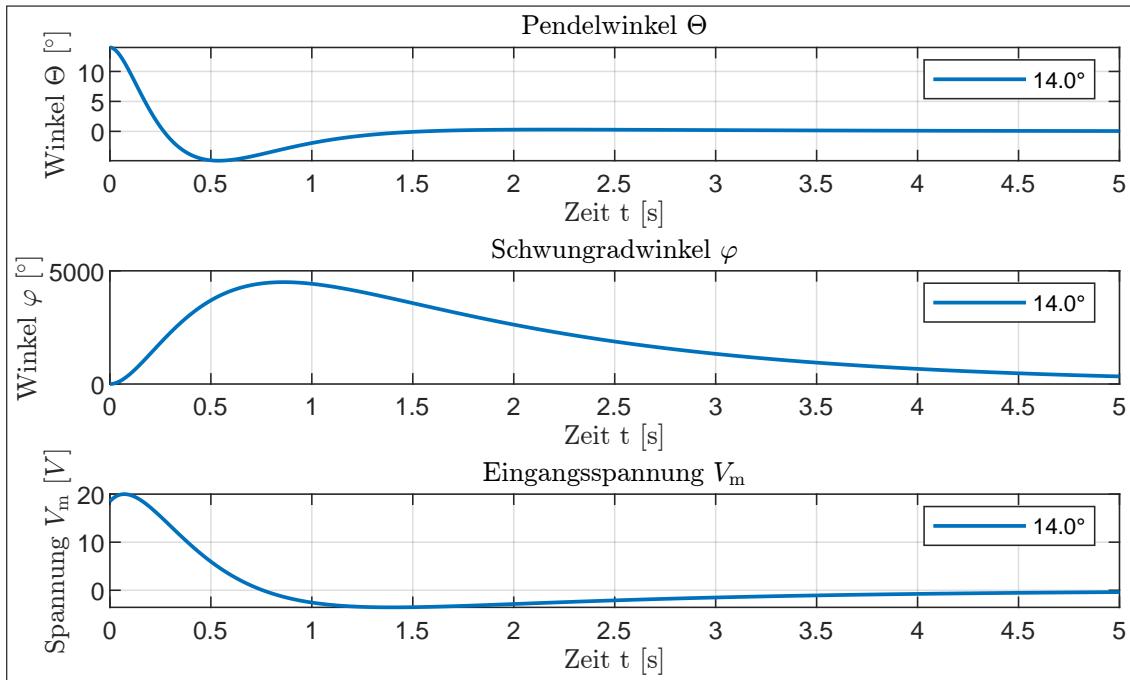


Abb. 8.7: Relevante Kurvenverläufe zur Validierung des Reglers

### 8.3 Regleranwendung am nichtlinearen Modell

Bei der Anwendung des linearen Reglers am nichtlinearen Modell werden die erweiterten LMI-Parameter aus Gleichung 8.7 angesetzt, d.h. der  $k$ -Vektor aus Gleichung 8.8 gilt. Die relevanten Kurvenverläufe sind in Abbildung 8.8 dargestellt. Diese ähneln den Kurvenverläufen aus Abbildung 8.7. Die maximale Eingangsspannung des nichtlinearen Modells ist:  $V_{m,\text{Max}} \approx 19.924V$ . Die vorgegebenen Constraints sind eingehalten. Der lineare Regler ist in der Lage, das instabile nichtlineare System für Auslenkungen bis  $14^\circ$  zu stabilisieren.

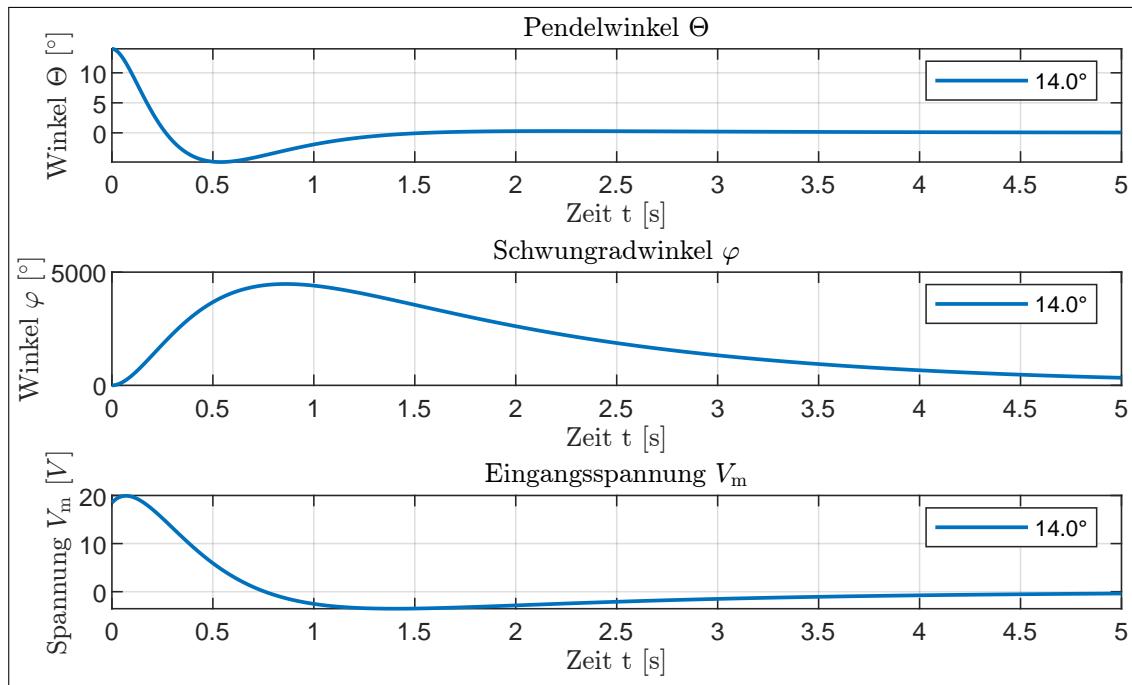


Abb. 8.8: Relevante Kurvenverläufe zur Anwendung des Reglers

## 9 Beobachterentwurf

Die Grund-Idee hinter dem Observer (Beobachter) ist, dass wenn innere Zustände des Systems nicht messtechnisch erfasst werden können, ein Modell des Systems „parallel“ mitläuft, aus dem dann die inneren Zustände bekannt sind und diese für eine Regelung genutzt werden können. Damit das Modell und das physikalische System nicht auseinander drifteten, werden die Abweichungen zwischen dem physikalischen Modell und dem Observer-Modell verglichen und dieser Fehler von einem Regler im Observer, der auf die inneren Zustände wirkt, zu null ausgeregelt. Das setzt zwei Dinge voraus:

- Das Modell des Observers muss hinreichend exakt sein, dass der Regelfehler nicht zu groß wird.
- Der Regler des Observers muss schneller als der Regler sein, der auf die physikalische Strecke wirkt, da er in gewisser Weise einen inneren Regelkreis einer kaskadierten Reglerstruktur darstellt und sich die Regler sonst gegenseitig aufschwingen.

In diesem Projekt soll ein Luenberger-Beobachter verwendet werden. Die Matrix der Reglerkoeffizienten des Observers werden mit  $L$  bezeichnet. Der Beobachter hat die in Abbildung 9.1 gezeigte Struktur.

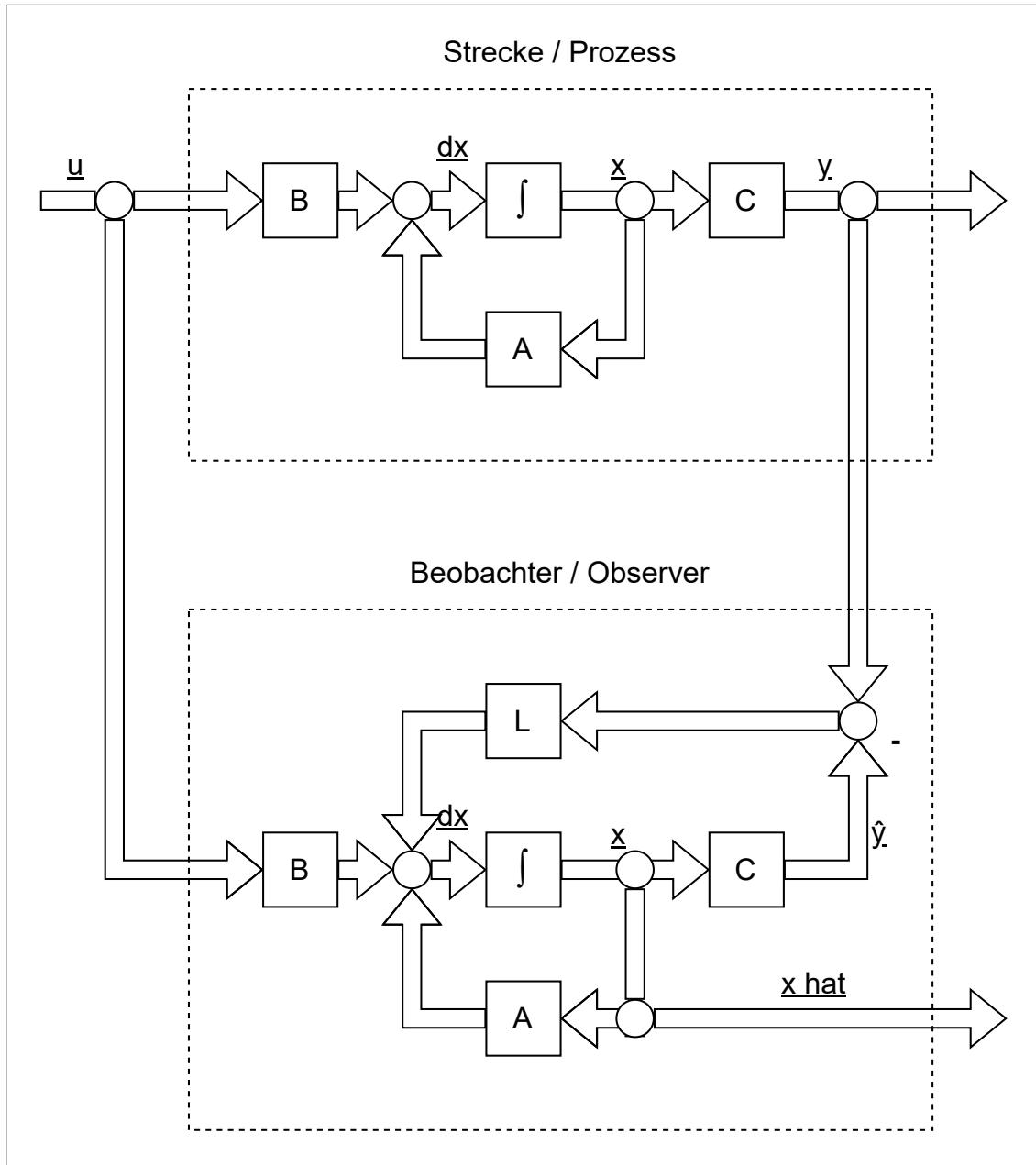


Abb. 9.1: Struktur des Luenberger Beobachter

Der Observer hat in unserem Fall zwei Eingänge und vier Ausgänge. Damit handelt es sich um ein MIMO (Multi-Input, Multi-Output) System. Dadurch ist ein Regler Entwurf nach Ackermann nicht mehr möglich. Deshalb soll hier auf einen Regler Entwurf mittels

LMI (vgl. Unterunterabschnitt 8.1.3) zurückgegriffen werden. Dabei werden keine konkreten Wunschpolstellen mehr vorgegeben, sondern ein Bereich, in dem die Polstellen liegen sollen. In unserem Fall soll dieser Bereich durch ein Alpha definiert sein, was gewisser Weise eine Schranke darstellt, hinter der die Polstellen liegen sollen. Damit der Observer funktionieren kann, muss dieser steuerbar sein. Dies wird wieder, wie schon beim Ackermann-Regler-Entwurf mit der Steuerbarkeits-Matrix  $\underline{Q}_s$  überprüft. Diese berechnet sich in diesem Fall zu:

$$\underline{Q}_s = \begin{pmatrix} \underline{C}_{\text{Obs}} \\ \underline{C}_{\text{Obs}} \cdot \underline{A} \\ \dots \\ \underline{C}_{\text{Obs}} \cdot \underline{A}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

$$\text{rank}(\underline{Q}_s) = n \quad (9.2)$$

Falls Gleichung 9.2 gilt, ist der Observer steuerbar. Wobei  $n$  hier die Anzahl der linear unabhängigen Spalten bezeichnet.

Anschließend werden wieder die Wunschpolstellen als ein Vielfaches (in unserem Fall dem zweifachen) der Polstellen des geschlossenen Regelkreises als Alphawerte ermittelt und als Alpha für den LMI-Entwurf verwendet. Das garantiert, dass die Polstellen des geschlossenen Regelkreises mit den ermittelten Regler Koeffizienten in dem Pol-Nullstellen-Diagramm links der Polstellen des Reglers der Strecke liegen. Die Grundidee eines LMI-Entwurfs für den Regler wurde in Unterunterabschnitt 8.1.3 bereits erläutert. Der Beobachter wird analog dazu entworfen, wobei statt einem System der Form  $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$  ein System der Form  $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot (-k \cdot \underline{x})$  eingesetzt (also für  $\underline{u} = -k \cdot \underline{x}$  eingesetzt), ergibt sich bei geforderte exponentielle Stabilität eine nicht lineare Matrizen Ungleichung. Daher werden neue Variablen eingeführt mit  $\underline{M} = k \cdot \underline{X}$  und  $\underline{P} = \underline{X}^{-1}$ . Damit ergibt sich die LMI zu:

$$\begin{aligned} 0 &> \underline{X} \cdot \underline{A}^T + \underline{A} \cdot \underline{X} - \underline{M}^T \cdot \underline{B}^T - \underline{B} \cdot \underline{M} + 2 \cdot \alpha \cdot \underline{X} \\ \underline{X} &> 0 \end{aligned} \quad (9.3)$$

Damit ermittelt sich  $k$  zu  $k = \underline{M} \cdot \underline{X}^{-1}$ . Da das Modell des Beobachters die Form

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \cdot \underline{e} - \underline{L} \cdot (\underline{x} - \dot{\underline{x}}) \\ \dot{\underline{e}} &= \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} \end{aligned} \quad (9.4)$$

hat, ergibt sich analog zum Regler Entwurf folgende LMI, wobei die neue Variable  $\underline{N} = \underline{P} \cdot \underline{L}$  eingeführt wurde, wodurch sich  $\underline{L}$  zu  $\underline{L} = \underline{P}^{-1} \cdot \underline{N}$  ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &> \underline{A}^T \cdot \underline{P} + \underline{P} \cdot \underline{A} - \underline{N} \cdot \underline{C} - \underline{C}^T \cdot \underline{N} + 2 \cdot \alpha \cdot \underline{P} \\ \underline{P} &> 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

Damit haben wir nun die LMI, die die Verstärkungsfaktoren unserer Rückführungs-Matrix beschreibt. In Abbildung 9.2 ist neben dem Aktuator-Eingang  $u$  und dem Signal der Umschaltsteuerung die Abweichungsfehler des Beobachters für die vier internen Systemzustände zu sehen. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Beobachter nur in der Nähe des Linearisierungspunktes zu gebrauchen ist (vgl. Abschnitt 7).

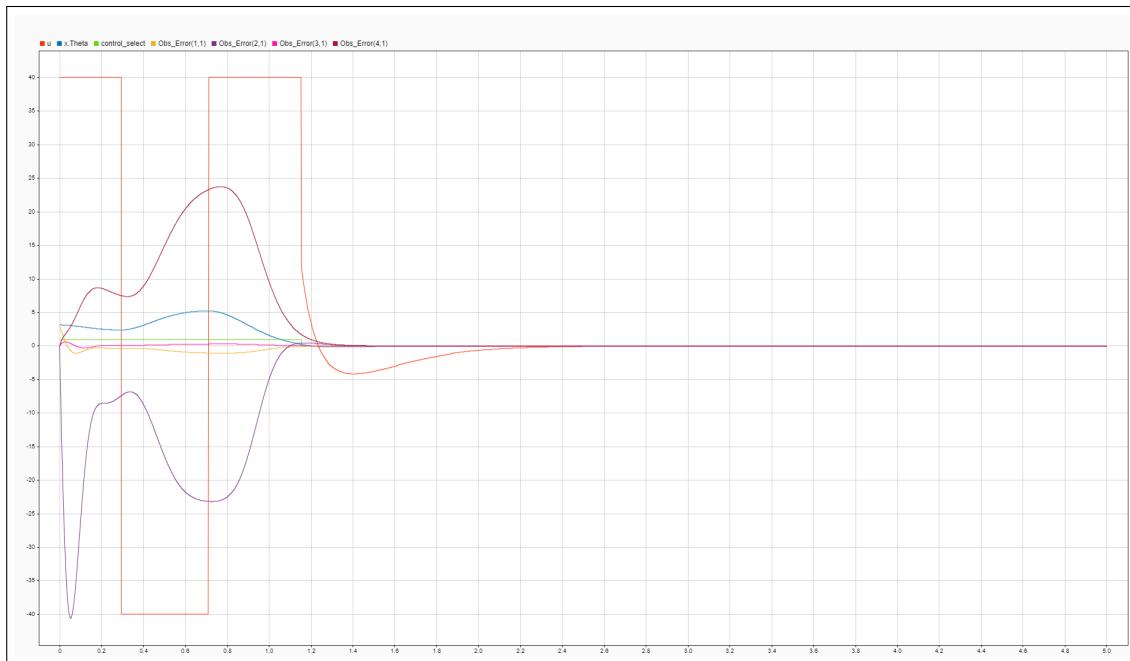


Abb. 9.2: Fehler des Luenberger Beobachter

## 10 Fazit und Ausblick

Im Umfang dieser Arbeit wurde ein mathematisches Modell des Schwungradpendels, sowie der ihn treibende DC Motor, und dessen Parameter aufgestellt (2). Dabei wurde ein Lagrange Ansatz gewählt und eine Bewegungsgleichung hergeleitet. Die so entstandene Differenzialgleichung wurde anschließend in den Zustandsraum überführt (3).

Durch eine anschließende Linearisierung des Zustandsraummodells und dessen Verifizierung (4), konnte eine gute Steuerbarkeit und Simulierbarkeit erreicht werden.

Die nachfolgende Sensitivitätsanalyse bestimmte die wichtigsten Parameter und deren Einfluss auf die Modellantwort. Dadurch konnten Erkenntnisse hinsichtlich möglicher Optimierungen, sowie dem allgemeinen Verhalten des Systems gewonnen werden (5).

Anschließend wurden eine Methode zum Aufschwingen des Pendels erarbeitet und mithilfe von Simulationen bestätigt (7).

Der nachfolgend entwickelte Zustandsregler, der das Pendel in seiner auf geschwungenen Lage stabil hält, wurde zunächst theoretisch entwickelt und dann dessen Funktion, durch Simulationen am linearen Modell bestätigt (8.1)

Durch den nun folgenden Beobachterentwurf, wird die Implementierung der Regelung für den realen Aufbau vereinfacht, indem schwierig messbare Zustandsgrößen rekonstruiert werden.

Im Falle einer zukünftigen Implementierung auf einem physikalischen Modellversuch, verbleibt die in dieser Arbeit behandelten Komponente über Soft- und Hardware zu implementieren und an die realen, physikalischen Gegebenheiten des Modells anzupassen und eventuelle Optimierungen durchzuführen.

## Literaturverzeichnis

- [1] HTW-Logo auf dem Deckblatt  
[https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Logo\\_HTW\\_Berlin.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Logo_HTW_Berlin.svg)  
Stand: 17.08.2018 um 14:49 Uhr
- [2] HTW-Logo in der Kopfzeile  
<http://tonkollektiv-htw.de/>  
Stand: 17.08.2018 um 14:53 Uhr
- [3] K. J. Åström and K. Furuta, SWINGING UP A PENDULUM BY ENERGY CONTROL  
[https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)57951-3](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)57951-3)  
Stand: 21.09.2022 um 15:19 Uhr