Optiomoinnin harjoitustyö, aihe 4

Aarre Urtamo

Huhtikuu 2024

Sisällys

1 Optimointiongelman kuvaus

Tietokonenäyttöjen valmistaja tuo markkinoille kaksi uutta mallia: 24-malli vähittäishintaan 339 e ja 27-malli vähittäishintaan 339 e. Näytöistä koituvat kustannukset ovat 24-mallin osalta 195 e/näyttö ja 27-mallin osalta 225 e/näyttö. Lisäksi kiinteitä kustannuksia on 400000 e.

Koska näyttömarkkinoilla on kova kilpailu, myytyjen näyttöjen lukumäärä vaikuttaa myyntihintoihin. Valmistaja arvioi, että kummankin näytön myyntihinta tippuu yhdellä sentillä vähittäishinnasta, jokaista saman mallin myytyä näyttöä kohden. Lisäksi kahden eri mallin myynnit ovat riippuvaisia toisistaan ja valmistaja arvioi, että 24-mallin vähittäishinta tippuu 0.3 sentillä jokaista myytyä 27-mallia kohden ja 24-mallin vähittäishinta tippuu 0.4 sentillä jokaista myytyä 24-mallia kohti.

Kuinka paljon kumpaakin mallia kannattaa valmistaa, jotta voitto maksimoituu? Oletetaan, että kaikki valmistetut näytöt myydään.

Miten tilanne muuttuu, kun valmistaja ottaa huomioon rajallisen valmistuskapasiteetin: 24-mallia voidaan korkeintaan valmistaa 5000 kappaletta ja 27-mallia korkeintaan 8000 kappaletta. Yhteensä voidaan valmistaa korkeintaan 10000 näyttöä.

2 Alustus

Olkoon $x_1 =$ "24-mallin valmistusmäärä" ja $x_2 =$ "27-mallin" valmistusmäärä". Merkitään vektoriarvoisesti:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Tällöin mallin 24 myyntihinta on $339 - 10^{-2}x_1 - 3 \cdot 10^{-3}x_2$ ja mallin 27 myyntihinta on $339 - 10^{-2}x_2 - 4 \cdot 10^{-3}x_1$. Mallista 24 koituvat kustannukset ovat $195x_1$ ja mallista 27 koituvat kustannukset ovat $225x_2$. Kiinteät kustannukset ovat $4 \cdot 10^5$.

Maksimoitava voittofunktio:

$$\begin{aligned} z = &(339 - 10^{-2}x_1 - 3 \cdot 10^{-3}x_2) \cdot x_1 + (339 - 10^{-2}x_2 - 4 \cdot 10^{-3}x_1) \cdot x_2 \\ &- 195x_1 - 225x_2 - 4 \cdot 10^5 \\ =& \, 339x_1 - 10^{-2}x_1^2 - 3 \cdot 10^{-3}x_1x_2 + 339x_2 - 10^{-2}x_2^2 \\ &- 4 \cdot 10^{-3}x_1x_2 - 195x_1 - 225x_2 \\ =& - 10^{-2}x_1^2 - 10^{-2}x_2^2 - 7 \cdot 10^{-3}x_1x_2 + 144x_1 + 114x_2 - 4 \cdot 10^5 \end{aligned} \tag{2}$$

Käännetään tehtävä minimointitehtäväksi kertomalla voittofunktio luvulla -1. Tällöin saadaan minimoitava funktio:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) =& - z(\mathbf{x}) \\ =& 10^{-2}x_1^2 + 10^{-2}x_2^2 + 7 \cdot 10^{-3}x_1x_2 - 144x_1 - 114x_2 + 4 \cdot 10^5 \end{aligned} \tag{3}$$

3 Optimoitavat mallit

3.1 Rajoittamaton tapaus

Kun valmistuskapasiteetti on rajoittamaton, niin voimassa on ainoastaan luonnolliset rajoitteet $x_1 \geq 0$ ja $x_2 \geq 0$. Nämä rajoitteet voidaan kirjoittaa muotoon:

$$g_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \tag{4}$$

Tällöin saadaan malli:

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) = 10^{-2}x_1^2 + 10^{-2}x_2^2 + 7 \cdot 10^{-3}x_1x_2 - 144x_1 - 114x_2 + 4 \cdot 10^5 \\ &\text{Rajoittein } g_1(\mathbf{x}) =\leq \mathbf{0} \text{ (4)} \end{aligned} \tag{5}$$

3.2 Rajoitettu tapaus

Tarkastellaan nyt tilannetta, kun otetaan huomioon mallien valmistuskapasiteetit. Mallia 24 voidaan valmistaa korkeintaan 5000 kappaletta, joten saadaan rajoite $x_1 \leq 5 \cdot 10^3$ ja mallia 27 voidaan valmistaa korkeintaan 8000 kappaletta, joten saadaan rajoite $x_2 \leq 8 \cdot 10^3$. Yhteensä malleja voidaan valmistaa 10000, joten saadaan rajoite $x_1 + x_2 \leq 10^4$. Nyt rajoitteet voidaan kirjoittaa muotoon:

$$g_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - 5 \cdot 10^3 \\ x_2 - 8 \cdot 10^3 \\ x_1 + x_2 - 10^4 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \tag{6}$$

Siis kun rajalliset valmistuskapasiteetit otetaan huomioon saadaan malli:

$$\begin{aligned} &\min\ f(\mathbf{x}) = 10^{-2}x_1^2 + 10^{-2}x_2^2 + 7 \cdot 10^{-3}x_1x_2 - 144x_1 - 114x_2 + 4 \cdot 10^5 \\ &\text{Rajoittein } g_2(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \text{ (6)} \end{aligned} \tag{7}$$

4 Optimipisteiden laadun tarkastelu

Tutkitaan minimoitavan funktion f mahdollisten optimipisteiden laatua hessen matriisin avulla.

Lasketaan hessen matriisi:

$$\mathbf{H}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-2} & 7 \cdot 10^{-3} \\ 7 \cdot 10^{-3} & 2 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Matlabin eig-funktiolla hessen matriisin ominaisarvoiksi saadaan

$$\lambda_1 = 0.013 \text{ ja } \lambda_2 = 0.027, \tag{9}$$

,

jotka ovat molemmat positiivisa. Täten hessen matriisi on positiivisesti definiitti, jolloin kaikki funktion f gradientin nollakohdat voidaan luokitella funktion f lokaaleiksi minimikohdiksi.

5 Ratkaisumenetelmä

Tehdään optimointiongelman ratkaisemiseksi matlab-funktio, joka ratkaisee epälineaarisen optiomointiongelman newton + gradientti menetelmää ja sakkomenetelmää hyödyntäen.

Funktion syötteet

1. Optimoitava funktio f numeerisena.
2. Epäyhtälörajoitteet vektoriarvoisena funktiona g muodossa $g \leq \mathbf{0}$.
3. xk alkuarvaus pystyvektorina.
4. toleranssi tol, jota pienemmäksi gradientin pituuden minimipisteessä on mentävä. Samaa toleranssia käytetään myös kun tarkastetaan tuleeko sakkokierros.

Sakkofunkion muodostamisessa hyödynnetään max funktiota, joka palauttaa arvoista $\mathbf{0}$ ja $g(\mathbf{xk})$ aina suuremman. Täten, kun ehdot ovat muotoa $g(\mathbf{xk}) \leq \mathbf{0}$, niin jos rajoite toteutuu saadaan sakoksi 0 (arvo silloin negatiivinen) ja jos ei niin $g(\mathbf{xk})^2$.

Funktiolla on kaksi erillistä lopetusehtoa. Funktio lopettaa toiminnan ja palauttaa minipisteen xk, jos iteraatioiden määrä ylittää arvon 1000 tai jos funktion f gradientti kohdassa xk on pienempi kuin annettu toleranssi tol.

Merkitään funktiota ngs (newton, gradientti, sakko). Gradientti ja hessen matriisi määritetään omien funktioidensa avulla numeerisilla aproksimaatioilla. Nimetään näitä funktioita $numGrad$ ja $hesse$.

```matlab
function [xk,ite,sakkokierros] = ngs(f,g,xk,tol)

    % Arvojen alustus
    s = 1;
    alpha = 0.5;
    beta = 0.5;
    ite = 0;
    sakkokierros  = 0;
    sakko = @(x) sum(max(0,g(x)).^2);
    P = @(x,s) f(x) + s*sakko(x);
    Pg = numGrad(P,xk,s);
    H = hesse(P,xk,s);

    while norm(Pg) > tol

        ite = ite + 1;
        % Lopetetaan, jos tulee iteraatioita täyteen tietyn verran.
        if ite > 1e+3
            break
        end

        % Suunnan valinta
        om = eig(H);
        if all(om > 0)
            d = -H\Pg;
        else
            d = -Pg;
        end

         % Viivahaku
         a=1;
         while P(xk+a*d,s) > P(xk,s)+alpha*a*Pg'*d
             a = beta*a;
         end

         % Arvojen päivitys
         xk = xk+ a*d;
         Pg = numGrad(P,xk,s);
         H = hesse(P,xk,s);

         % Rajoitteiden toteutumisen tarkastus
         if sakko(xk) > tol
             s = s*2;
             sakkokierros = sakkokierros +1;
         end
     end
 end
```

Kuva 1: ngs funktion implementaatio

```
function g = numGrad(f,x,s)
    h = 1e-3;
    n = length(x);
    g = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        xi1 = x;
        xi2 = x;
        xi1(i) = x(i)+h;
        xi2(i) = x(i)-h;
        g(i) = (f(xi1,s)-f(xi2,s))/(2*h);
    end
end


function H = hesse(f,x,s)
    h = 1e-3;
    n = length(x);
    H = zeros(n);
    d= h*eye(n);
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            H(i,j) = (...
                f(x+d(:,i)+d(:,j),s)...
                -f(x+d(:,i)-d(:,j),s)...
                -f(x-d(:,i)+d(:,j),s)...
                +f(x-d(:,i)-d(:,j),s))/(4*h^2);
        end
    end
end
```

Kuva 2: Funktioiden hesse ja numGrad implementaatiot

6 Ratkaisu

Ratkaistaan kaavojen 5 ja 7 mukaiset mallit ngs-funktiolla. Käytetään toleranssille arvoa $tol = 10^{-6}$ ja alkuarvauksena tilannetta, jossa kumpakaan näyttöä ei valmisteta ollenkaan. Saadaan alkuarvauspiste:

$$\mathbf{xk} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

```
% Minimoitava funktio.
f = @(x) 1e-2*x(1).^2+1e-2*x(2).^2+7*1e-3*x(1).*x(2)...
    -144*x(1)-114*x(2)+4*1e5;

% Alkuarvaus
x0 = [0,0]';

% Toleranssi
tol = 1e-6;

% Rajoittamaton
g1 = @(x) -[x(1);x(2)];
[x_min1,ite1,sakkokierrokset1] = ngs(f,g1,x0,tol);

% Rajoitettu
g2 = @(x) [x(1)-5*1e+3;...
          x(2)-8*1e+3;...
          x(1)+x(2)-10^4;...
          -x(1);...
          -x(2)];
[x_min2,ite2,sakkokierrokset2] = ngs(f,g2,x0,tol);
```

Kuva 3: Funktiokutsu

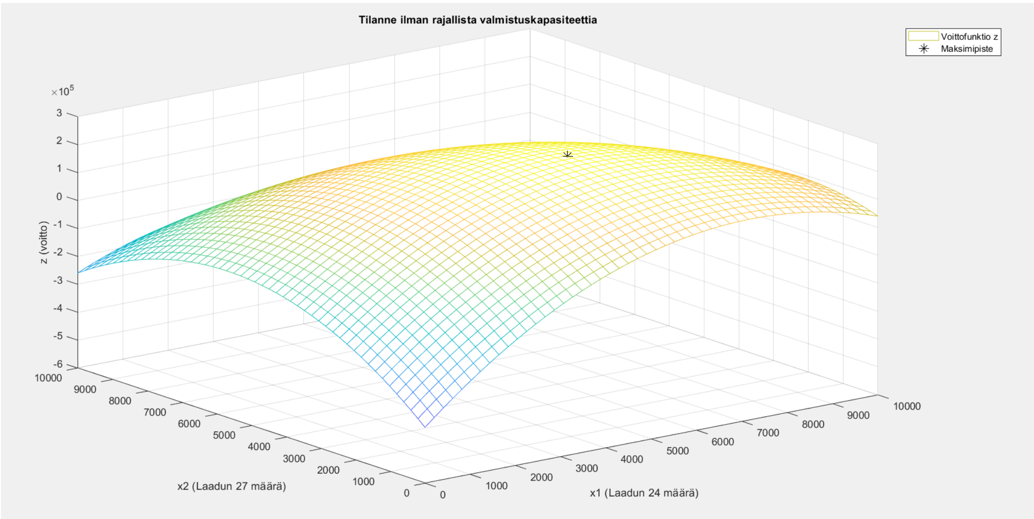
6.1 Rajoittamaton tapaus

Rajoittamattomalla valmistuskapasiteetilla saadaan minimipiste:

$$\mathbf{x}_{\text{min1}} = \begin{bmatrix} 5931.592... \\ 3623.942... \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5932 \\ 3624 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Funktio tekee 2 iteraatiota ja sakkokierroksia ei tule yhtään. Funktion toiminta katkeaa koska löydetään piste, jossa gradientti on toleranssia pienempi. Tämä löydetty likiarvo funktion f gradientin nollakohdalle on funktion f minimikohta, koska aijemmin osoitettiin, että funktion f hessen matriisi on positiivisesti definiitti.

Kuvassa 4 tilannetta on havainnollistettu graafiesti piirtämällä alkuperäisen maksimoitavan funktion z kuvaajalle löydetty optimipiste. Piste näkyy kuvassa tällöin maksimipisteenä.



Kuva 4: Graafinen ratkaisu rajoittamattomalla valmistuskapasiteetilla

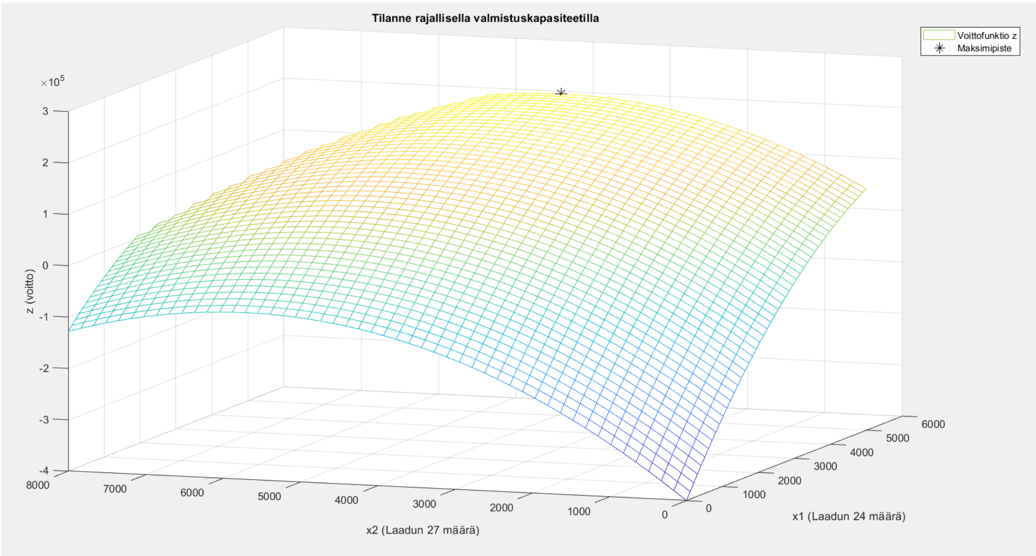
6.2 Rajoitettu tapaus

Rajallisen valmistuskapasiteetin tapauksessa saadaan minimipiste:

$$\mathbf{x}_{\text{min1}} = \begin{bmatrix} 5000.000... \\ 3949.999... \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5000 \\ 3950 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Funktio tekee 1001 iteraatiota, eli funktion toiminta katkeaa, kun iteraatioiden kiintiö on tullut täyteen. Gradientti ei siis mene nollaksi löydetyssä minimipisteessä, vaan kyseessä on sallitun alueen reunapiste. Iteraatioista 14 kappaletta on sakkokierroksia.

Tilannetta on havainnollistettuu graafisena ratkaisuna kuvassa 5, jossa löydetty optimipiste on piirretty alkuperäisen maksimoitavan funktion z kuvaajalle. Tällöin piste näkyy kuvaajalla maksimipisteenä.



Kuva 5: Graafinen ratkaisu rajoitetulla valmistuskapasiteetilla

7 Ratkaisun tulkinta

7.1 Tapaus rajoittamattomalla valmistuskapasiteetilla

Rajoittamattoman valmistuskapasiteetin tapauksessa ratkaisuksi saadaan, että 24-mallia valmistetaan noin 5932 kappaletta ja 27-mallia noin 3624 kappaletta.

Kun kumpaakin mallia voidaan valmistaa rajaton määrä, lopulta hintojen pienentyessä mallien kustannukset muuttuvat myyntihintoja suuremmiksi. Näin tapahtuisi, jos valmistusmääriä vielä kasvattettasiin löydetyistä optimiarvoista. Tämä voidaan nähdä kuvasta 4, jossa optimipisteessä olevalta huipulta tultaisiin takaisin alaspäin, jos $x1$- ja $x2$-koordinaatteja kasvatettaisiin.

Rajoittamattomassa tapauksessa 24-mallia valmistetaan enemmän kuin 27-mallia. Tämä vaikuttaa loogiselta, koska myytyjen näyttöjen määrä vaikuttaa voimakkaammin 27-mallin hinnan laskemiseen kuin 24-mallin hinnan laskemiseen ja 27-mallilla on suuremmat valmistuskustannukset kuin 24-mallilla.

Nämä huomiot tukevat rajoittamattoman valmistuskapasiteetin tapauksessa löydetyn optimiratkaisun luotettavuutta.

7.2 Tapaus rajallisella valmistuskapasiteetilla

Kun otetaan huomioon rajalliset valmistuskapasiteetit ratkaisuksi saadaan, että 24-mallia valmistetaan 5000 kappaletta ja 27-mallia valmistetaan 3950 kappaletta. Molemmat saadut kappalemäärät sopivat valmistuskapasiteetin antamiin rajoituksiin.

Koska 24-mallin hinta laskee hitaammin ja kustannukset ovat pienempiä, voidaan päätellä, että 24-mallia kannattaa valmistaa niin paljon kuin vain valmistuskapasiteetti sallii. Täten on perusteltua, että saatu 24-mallin optimaalinen valmistusmäärä on sama kuin sen valmistuskapasiteetti 5000 kappaletta.

Pohditaan sitten saadun 27-mallin valmistusmäärän 3950 oikeellisuutta. Sallittua aluetta rajoittavalla suoralla $x_1 = 5000$ funktion f lauseke sievenee muotoon

$$\begin{aligned} h(x_2) = f\left(\begin{bmatrix}5000 & x_2\end{bmatrix}^T\right) =& 10^{-2} \cdot 5000^2 + 10^{-2}x_2^2 + 7 \cdot 10^{-3} \cdot 5000x_2 \\ & - 144 \cdot 5000 - 114x_2 + 4 \cdot 10^5 \\ =& 10^{-2}x_2^2 - 79x_2 + 13.7 \cdot 10^5, \end{aligned} \tag{13}$$

jonka derivaatta on

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = 2 \cdot 10^{-2}x_2 - 79 \tag{14}$$

ja derivaatan nollakohta

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 10^{-2}x_2 - 79 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3950 \tag{15}$$

Koska funktion f hessen matriisi on positiivisesti definiitti, niin toisen derivaatan testin nojalla kohta $x = 3950$ on funktion f minimikohta ja alkuperäisen voittofunktion z maksimikohta suoralla $x_1 = 5000$. Kuvasta 5 karkeasti nähdään, että jos x_2 arvoa vielä kasvatettaisiin arvosta $x = 3950$, niin funktion z arvot pienentyisivät. Siis jos 24-mallin valmistusmäärä lukitaan 5000 kappaleeseen, voitto maksimoituu, kun 27-mallia valmistetaan 3950 kappaletta.

Nämä huomiot tukevat rajoitetun valmistuskapasiteetin tapauksessa löydetyn optimiratkaisun luotettavuutta.

8 Tuotantosuunnitelma

Saadun ratkaisun perusteella voiton maksimoimiseksi kannattaa valmistaa 5932 kappaletta 24-mallia ja 3624 kappaletta 27-mallia, jos valmistuskapasiteetti ei ole rajoitettu. Jos valmistuskapasiteetti on rajallinen, voiton maksimoimiseksi kannattaa valmistaa 5000 kappaletta 24-mallia ja 3950 kappaletta 27-mallia.