Построение кубического сплайна :

```
> restart;
  n := 10 :
  grid := Array(1..(n + 1), i -> (i - 1)/n) :
> gamma_1 := 0 :
  gamma_(n + 1) := 0 :
  h := Array(1..n, i->(grid[i + 1] - grid[i])) :
  y := Array(1..(n + 1), i ->f(grid[i])) :
> initMatrix := proc(i, j)
    if (i = 1 and j = 1) then return 1;
    elif (i = (n + 1) and j = (n + 1)) then return 1;
    elif (i = j ) then return 2·(h[i - 1] + h[i]);
    elif (abs(i-j) = 1 and i ≠ 1 and i ≠ n + 1) then return h[min(i, j)];
     else return 0;
    end if;
  end proc:

> initVector :=proc(i)
   if (i = 1) then return gamma_1
   elif (i = (n + 1)) then return gamma_(n + 1)
   else return 6((y[i + 1] - y[i])/h[i] - (y[i] - y[i - 1])/h[i])
   end if;
  end proc:
> with(LinearAlgebra) :
  A := Matrix(n + 1, n + 1, initMatrix) :
  b := Vector(n + 1, initVector) :
  gamma_sol := LinearSolve(A, b) :
  K1 := Array(1..n, i->(y[i]/h[i] - gamma_sol[i]·h[i]/6)) :
  K2 := Array(1..n, i->(y[i + 1]/h[i] - gamma_sol[i + 1]·h[i]/6)) :

> S := Array(1..n, i->(x-> gamma_sol[i]·(grid[i + 1] - x)^3/(6·h[i])
       + gamma_sol[i + 1]·(x - grid[i])^3/(6·h[i]) + K1[i]·(grid[i + 1] - x) +
   K2[i]·(x - grid[i]))) :
> cubicSplineInterp := proc(x)
   local i;
   for i from 1 to n do
    if (grid[i] ≤ x and x ≤ grid[i + 1]) then
      return S[i](x);
```

```
    end if;
  end do;
end proc:
>
>
>
```

> Построение интерполяции B − сплайнами :

```
> n := 10 :
  grid := Array(1 ..(n + 1), i -> (i - 1)/n) :
> EPS := 10^(-12) :
> getX := proc(i)
    if (i > n + 1) then return grid[n + 1] + (i - n)·EPS
    elif (i < 1) then return grid[1] + (1 - i)·EPS
    else return grid[i]
    end if;
  end proc:
> getC := proc(j)
    local x_0 := getX(j + 1);
    local x_1 := (getX(j + 1) + getX(j + 2))/2;
    local x_2 := getX(j + 2);
    return (-f(x_0) + 4·f(x_1) - f(x_2))/2;
  end proc:
> B := proc(j, d, x)
    if (d = 0) then return piecewise(getX(j) <= x and x < getX(j + 1), 1, 0)(x)
    else return (x - getX(j))/(getX(j + d) - getX(j))·B(j, d - 1, x) + (getX(j + 1 + d) - x)/(getX(j + 1 + d) - getX(j + 1))·B(j
        + 1, d - 1, x)
    end if;
  end proc:
> BSplineApprox := proc(x)
    local i;
    local k;
    for i from 1 to n do
      if (getX(i) <= x and x <= getX(i + 1)) then
        return add(B(k, 2, x)·getC(k), k = (i - 2) ..i);
      end if;
    end do;
  end proc:
>
> Функции для подсчета ошибки :
  calculateError := proc(actual, expected)
```

```
local check_grid := Array(1..(10·n + 1), i → (i − 1)/(10·n));
local max_error := 0;
local i;
for i from 1 to (10·n + 1) do
  max_error := max(max_error, abs(actual(check_grid(i)) − expected(check_grid(i))));
end do;
return max_error;
end proc:
```

(0)

Maple:

```
> f := x→sqrt(x);
  yVals := Array(1..(n + 1), i →f(grid[i])) :
```

$$f := x \mapsto \sqrt{x} \qquad (1)$$

```
> with(Student[NumericalAnalysis]) :
  points := [seq([grid[i], yVals[i]], i=1..(n + 1))] :
  mapleCubicInterp := MakeFunction(expand(Interpolant( CubicSpline(points, independentvar
      =x))), x) :
  print(Ошибка получившейся интерполяции);
  err_01 := calculateError(cubicSplineInterp, f) :
  evalf(err_01, 2);
  print(Ошибка решения Maple) ;
  err_02 := calculateError(mapleCubicInterp, f) :
  evalf(err_02, 2);
```

Ошибка получившейся интерполяции

0.069

Ошибка решения Maple

0.068 (2)

,

.

```
>
```

Пример(1) :

В книге "С. П. Шарого "Курс вычислительных методов" в разделе про сплайны была упомянута функция Рунге, для которой при интерполяции полиномами наблюдается эффект осциляций. А также было отметечено, что "последовательность интерполяционных кубических сплайнов на равномерной сетке узлов всегда сходится к интерполируемой непрерывной функции".

Значит, что ошибка при интерполяции кубическими сплайнами для этой функции будет меньше . Давайте это проверим. Так как мы работаем на отрезке $[0, 1]$, немного видоизменим функцию :

> $f := x \rightarrow \frac{1}{1 + 25 \cdot (0.5 - x)^2}$;
$yVals := Array(1 .. (n+1),\ i \rightarrow f(grid[i]))$:

$$f := x \mapsto \frac{1}{1 + 25 \cdot (0.5 - x)^2} \qquad (3)$$

Найдём максимальную ошибку при интерполяции кубическими сплайнами :

> $err\_1 := calculateError(cubicSplineInterp, f)$:
$evalf(err\_1, 1)$;

$$0.003 \qquad (4)$$

M a p l e .

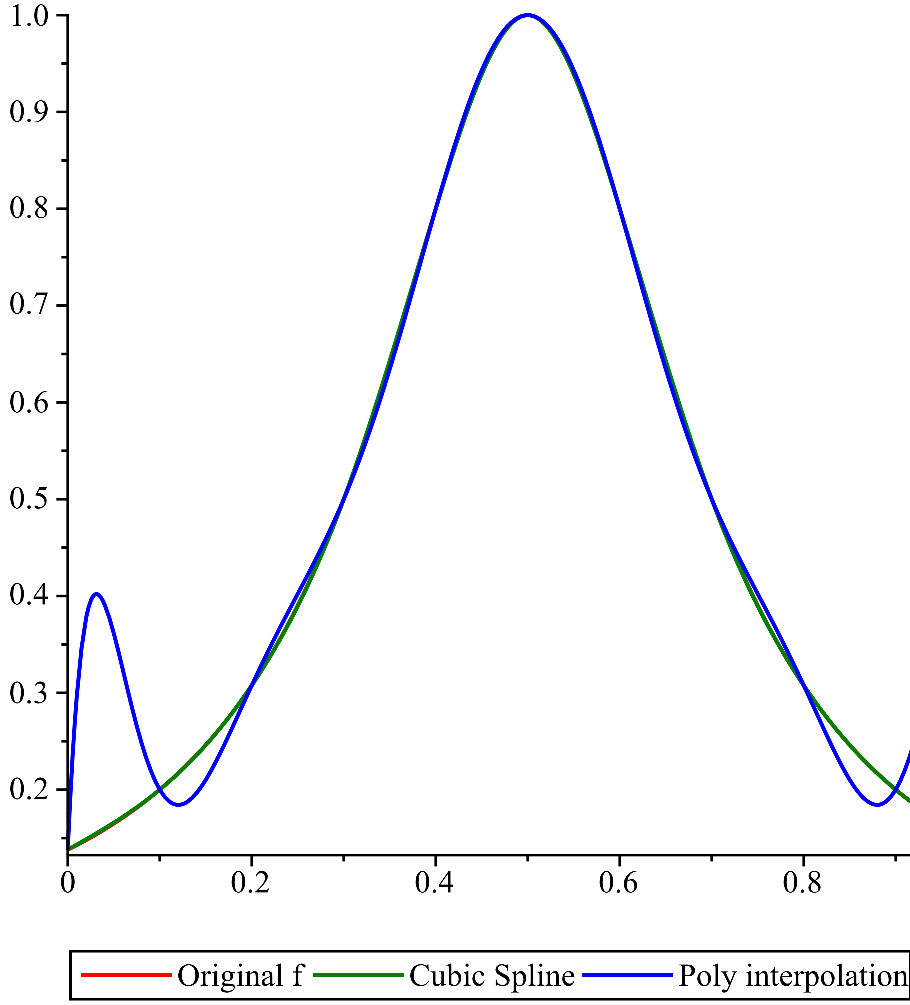
:

> $with(CurveFitting)$:
$polyInterpolation := x \rightarrow PolynomialInterpolation(grid, yVals, x)$:
$err\_2 := calculateError(polyInterpolation, f)$:
$evalf(err\_2, 2)$;

$$0.25 \qquad (5)$$

, 8 2 . :

> $plot([f, cubicSplineInterp, polyInterpolation], 0 .. 1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend = ["Original f", "Cubic Spline", "Poly interpolation"])$;



1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Original f
Cubic Spline
Poly interpolation

, ,

.

>

>

>