Построение кубического сплайна

```
> restart;
n := 10 :
grid := Array(1 ..(n + 1), i -> (i - 1)/n) :
```

```
> gamma_1 := 0 :
gamma_(n + 1) := 0 :
h := Array(1 ..n, i->(grid[i + 1] - grid[i])) :
y := Array(1 ..(n + 1), i ->f(grid[i])) :
```

```
> initMatrix := proc(i, j)
    if (i = 1 and j = 1) then return 1;
    elif (i = (n + 1) and j = (n + 1)) then return 1;
    elif (i = j ) then return 2·(h[i - 1] + h[i]);
    elif (abs(i-j) = 1 and i ≠ 1 and i ≠ n + 1) then return h[min(i, j)];
    else return 0;
    end if;
end proc:
```

```
> initVector := proc(i)
   if (i = 1) then return gamma_1
   elif (i = (n + 1)) then return gamma_(n + 1)
   else return 6((y[i + 1] - y[i])/h[i] - (y[i] - y[i - 1])/h[i])
   end if;
end proc:
```

```
> with(LinearAlgebra) :
A := Matrix(n + 1, n + 1, initMatrix ) :
b := Vector(n + 1, initVector) :
gamma_sol := LinearSolve(A, b) :
K1 := Array(1 ..n, i->(y[i]/h[i] - gamma_sol[i]·h[i]/6)) :
K2 := Array(1 ..n, i->(y[i + 1]/h[i] - gamma_sol[i + 1]·h[i]/6)) :
```

```
> S := Array(1 ..n, i->(x->gamma_sol[i]·(grid[i + 1] - x)^3/(6·h[i])
      + gamma_sol[i + 1]·(x - grid[i])^3/(6·h[i]) + K1[i]·(grid[i + 1] - x) +
K2[i]·(x - grid[i]))) :
```

```
> cubicSplineInterp := proc(x)
 local i;
 for i from 1 to n do
```

```
    if (grid[i] ≤ x and x ≤ grid[i + 1]) then
      return S[i](x);
    end if;
  end do;
end proc:
```

```
>
```

> # Построение интерполяции B-сплайнами:

```
> n := 10 :
```

$$grid := Array\left(1..(n+1),\ i \rightarrow \frac{i-1}{n}\right):$$

```
> EPS := 10^(-12) :
> getX := proc(i)
  if (i > n + 1) then return grid[n + 1] + (i − n)·EPS
  elif (i < 1) then return grid[1] + (1− i) ·EPS
  else return grid[i]
  end if;
end proc:
> getC :=proc(j)
  local x_0 := getX(j + 1);
```

$$\textbf{local}\ x\_1 := \frac{getX(j+1) + getX(j+2)}{2};$$

```
  local x_2 := getX(j + 2);
```

$$\textbf{return}\ \frac{-f(x\_0) + 4\cdot f(x\_1) - f(x\_2)}{2};$$

```
 end proc:
> B :=proc(j, d, x)
  if (d = 0) then return piecewise(getX(j) ≤ x and x < getX(j + 1), 1, 0)(x)
```

$$\textbf{else return}\ \frac{x - getX(j)}{getX(j+d) - getX(j)}\cdot B(j, d-1, x) + \frac{getX(j+1+d) - x}{getX(j+1+d) - getX(j+1)}\cdot B(j+1, d-1, x)$$

```
  end if;
end proc:
> BSplineInterp := proc(x)
  local i;
  local k;
  for i from 1 to n do
    if (getX(i) ≤ x and x ≤ getX(i + 1)) then
      return add(B(k, 2, x)·getC(k) , k = (i − 2) ..i);
    end if;
  end do;
 end proc:
>
> Функции для подсчета ошибки :
calculateError := proc(actual, expected)
```

```
local check_grid := Array(1..(10·n + 1), i → (i − 1)/(10·n));
local max_error := 0;
local i;
for i from 1 to (10·n + 1) do
  max_error := max(max_error, abs(actual(check_grid(i)) − expected(check_grid(i))));
end do;
return max_error;
end proc:
```

> # **Пример(0)**
Сравним получившуюся интерполяцию кубическими сплайнами с готовым решением Maple:

```
> f := x→sqrt(x);
yVals := Array(1..(n + 1), i →f(grid[i])) :
```

$$f := x \mapsto \sqrt{x} \quad \mathbf{(1)}$$

```
> with(Student[NumericalAnalysis]) :
points := [seq([grid[i], yVals[i]], i=1..(n + 1))]:
mapleCubicInterp := MakeFunction(expand(Interpolant( CubicSpline(points, independentvar
   =x))), x) :
print(Ошибка получившейся интерполяции);
err_01 := calculateError(cubicSplineInterp, f) :
evalf(err_01, 2);
print(Ошибка решения Maple) ;
err_02 := calculateError(mapleCubicInterp, f) :
evalf(err_02, 2);
```

Ошибка получившейся интерполяции

0.069

Ошибка решения Maple

0.068 **(2)**

> # Получили примерно одинаковые значения, что свидетельствует о правильности написанного алгоритма.

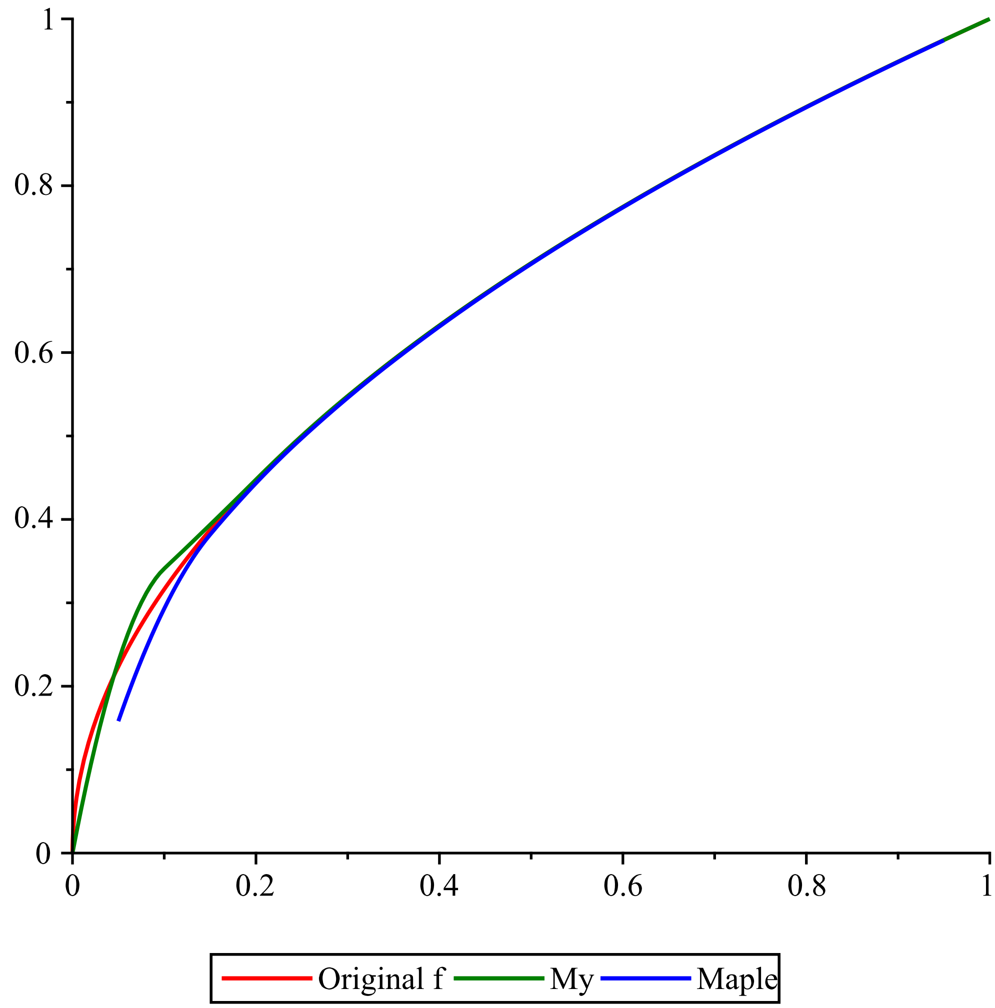
> # **Пример(1)**
Теперь сравним получившуюся интерполяцию B-сплайнами с готовым решением Maple:

```
> f := x→sqrt(x);
yVals := Array(1..(n + 1), i →f(grid[i])) :
```

$$f := x \mapsto \sqrt{x} \quad \mathbf{(3)}$$

```
> with(CurveFitting) :
points := [seq([grid[i], yVals[i]], i=1..(n + 1))]:
mapleBSplineInterp := BSplineCurve(points, x, order=3) :
```

```
plot([f, BSplineInterp, mapleBSplineInterp], 0..1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend
    = ["Original f", "My", "Maple"]);
```



> # Здесь мы видим, что как и у моего, так и у сплайна из пакета Maple появляютя неточности на левом конце отрезка. Также можно заметить, что мой сплайн построился полностью на отрезке, так как при посторении я доопределял его точками за границами отрезка, у которых абсциссы менялись с шагом EPS, а значения были равны значению функции на левом конце отрезка. В то же время сплайн из Maple "не достроен" рядом с концами отрезка, так как не было данных для доопределения.

> # ***Пример*(2) :**

В книге "С. П. Шарого "Курс вычислительных методов" в разделе про сплайны была упомянута функция Рунге, для которой при интерполяции полиномами наблюдается эффект осциляций. А также было отметечено, что "последовательность интерполяционных кубических сплайнов на равномерной сетке узлов всегда сходится к интерполируемой непрерывной функции". Значит, что ошибка при интерполяции

кубическими сплайнами для этой функции будет меньше. Давайте это проверим. Так как мы работаем на отрезке $[0, 1]$, немного видоизменим функцию:

```
> f := x -> 1/(1 + 25·(0.5 - x)^2);
  yVals := Array(1..(n + 1), i -> f(grid[i])) :
```

$$f := x \mapsto \frac{1}{1 + 25\cdot(0.5 - x)^2} \tag{4}$$

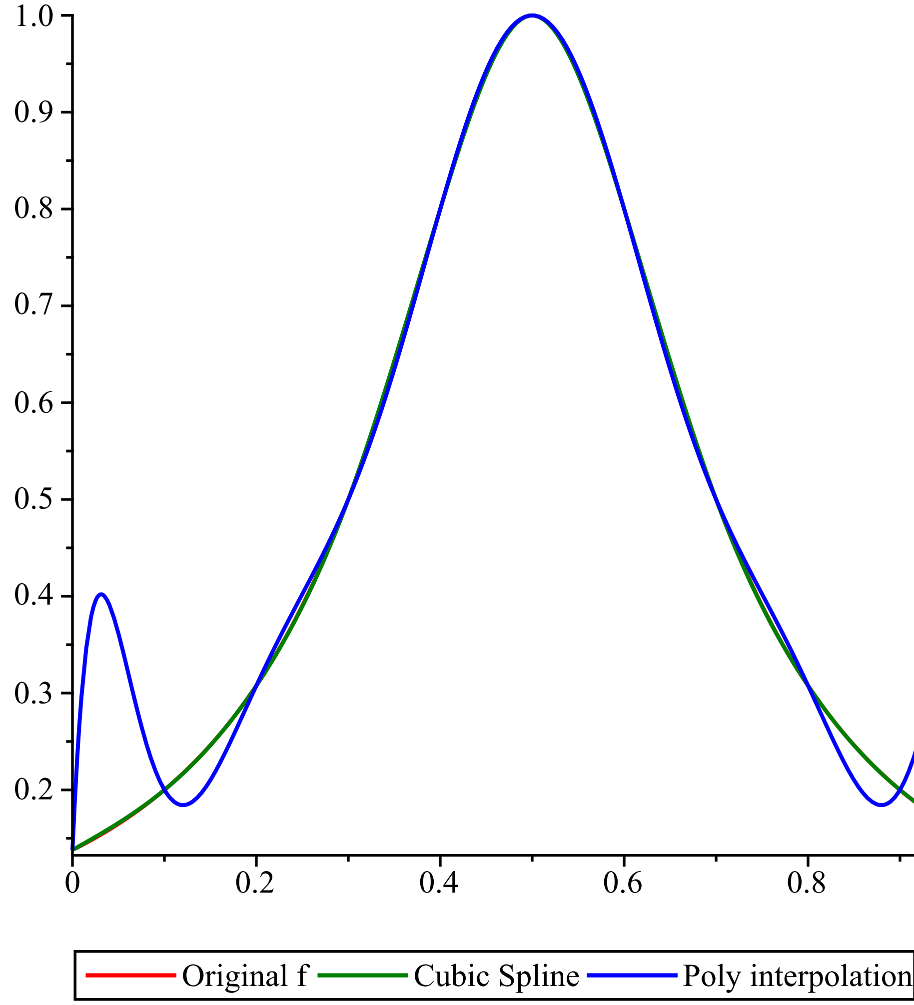
```
> # Найдём максимальную ошибку при интерполяции кубическими сплайнами:
> err_1 := calculateError(cubicSplineInterp, f) :
  evalf(err_1, 1);
```

$$0.003 \tag{5}$$

```
> # Для получения интерполяции полиномами будем использовать стандартные
      средства Maple. Найдем максимальную ошибку:
> with(CurveFitting) :
  polyInterpolation := x -> PolynomialInterpolation(grid, yVals, x) :
  err_2 := calculateError(polyInterpolation, f) :
  evalf(err_2, 2);
```

$$0.25 \tag{6}$$

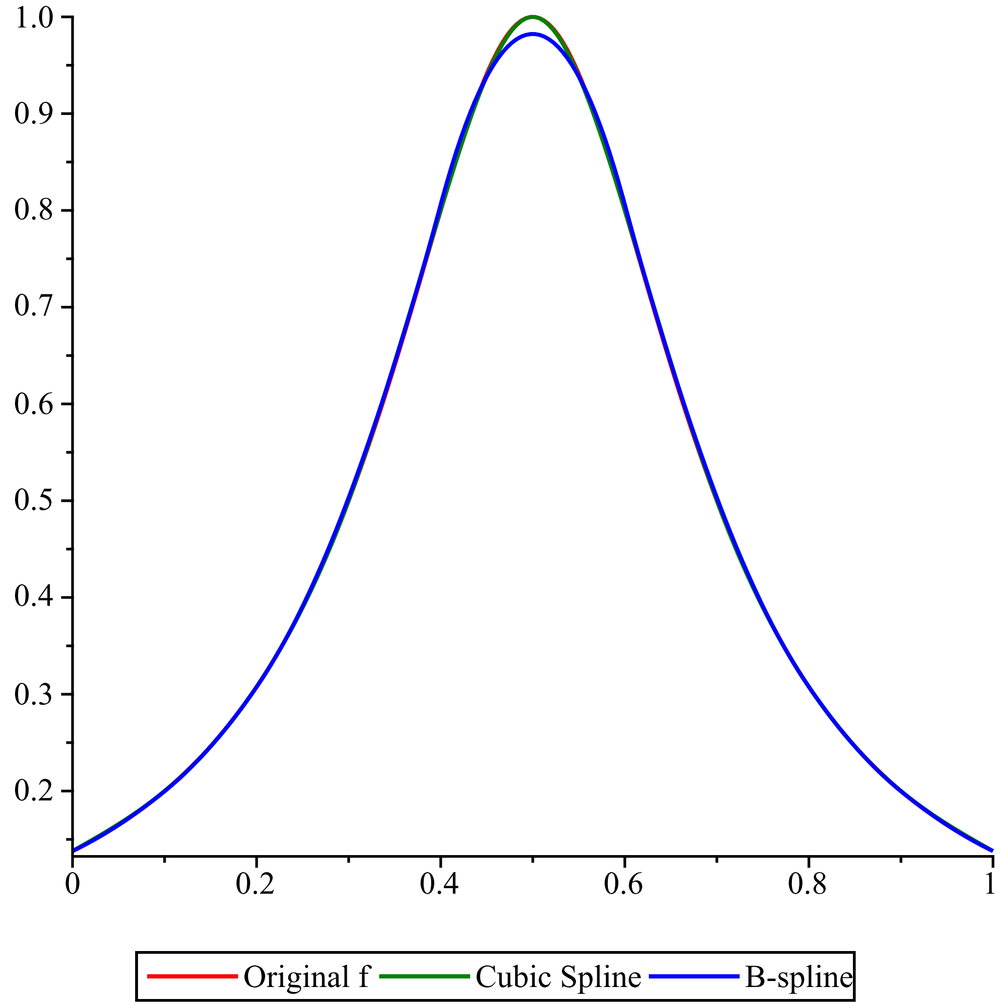
```
> # Мы видим, что ошибка отличается больше чем в 82 раза. Пронаблюдаем
      теперь это на графике:
> plot([f, cubicSplineInterp, polyInterpolation], 0..1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend
      = ["Original f", "Cubic Spline", "Poly interpolation"]);
```



>

> # Таким образом, мы показали, что интерполяция кубическими сплайнами благодаря своим свойствам позволила избежать эффекта осциляций на концах отрезка. Теперь посмотрим, как с этой задачей справится B-spline:

> *plot*([*f*, *cubicSplineInterp* , *BSplineInterp*], 0 ..1, *color* = ["Red", "Green", "Blue"], *legend* = ["Original f", "Cubic Spline", "B-spline"]);



>

Оригинальную функцию на графике не видно, так как ее очень хорошо приближает кубический сплайн (ошибка 0.003).

>

> # У B − Spline не появляется эффектов осциляций на концах, он также лучше справляется с задачей, чем интерполяция полиномами, но при этом ошибка больше, чем у кубического сплайна, примерно в 6 раз:

> $err\_3 := calculateError(BSplineInterp, f)$:
$evalf(err\_3, 2)$

$$0.018 \tag{7}$$

> # Правда эту оценку нельзя считать полностью точной, так как наша погрешность составляет O(h^2), где h = 0.1 в нашем случае
. Но на графике можно пронаблюдать, в каком месте B − Spline ошибается.

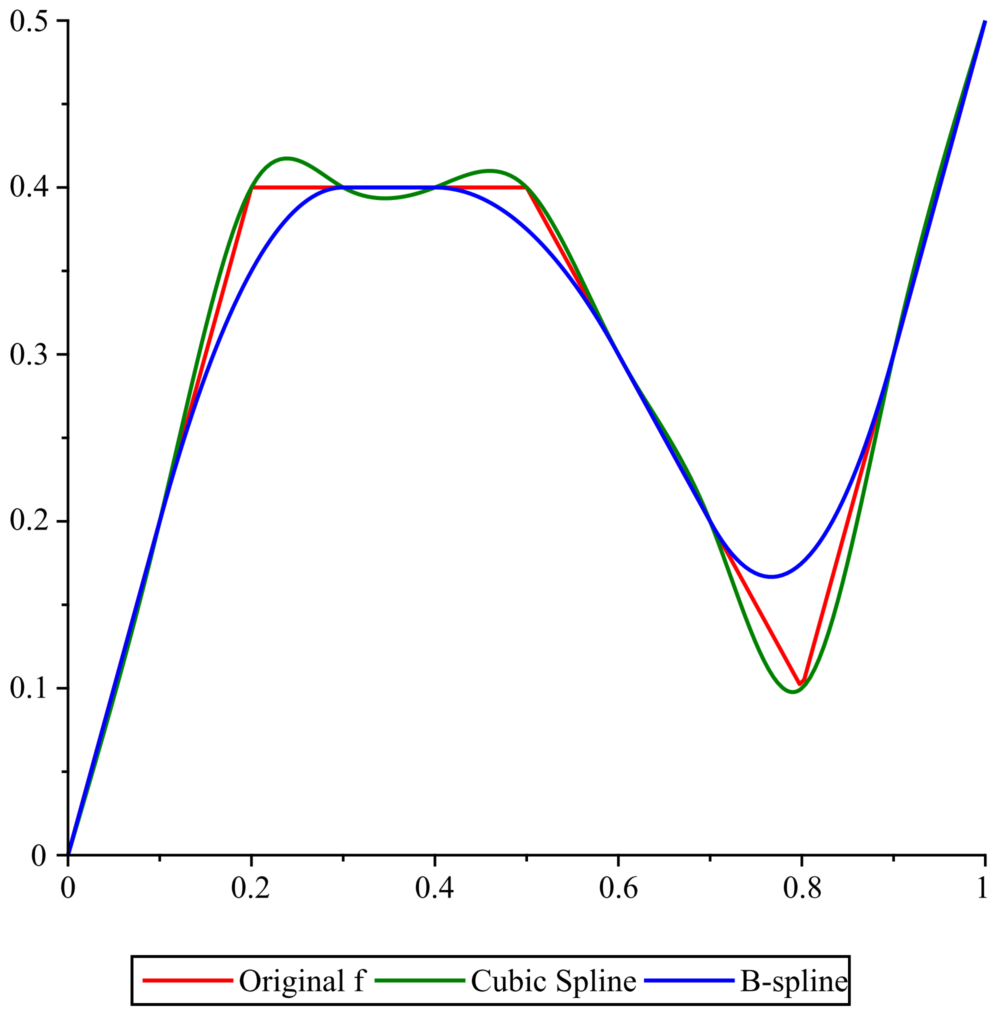
> # **Пример(3)** :

> # Посмотрим на пример из книги Tom Lyche and Knut Mørken, "Spline Methods".

> # В разделе 5.2.2 "Numerical solution and examples" есть пример, который показывает, что кубические сплайны плохо приближают кусочно-линейные функции с острыми углами. Давайте его повторим, а также протестируем B-Сплайны.

```
> f := x→piecewise(x < 0.2, 2 x, 0.2 ≤ x < 0.5 , 0.4, 0.5 ≤ x < 0.8 , 0.9 − x, 2·(x − 0.75));
yVals := Array(1 ..(n + 1) , i →f(grid[i])) :
plot([f, cubicSplineInterp , BSplineInterp ], 0 ..1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend
    = ["Original f", "Cubic Spline", "B-spline"]);
```

$$f := x \mapsto \begin{cases} 2\cdot x & x < 0.2 \\ 0.4 & 0.2 \le x < 0.5 \\ 0.9 - x & 0.5 \le x < 0.8 \\ 2\cdot x - 1.50 & \text{otherwise} \end{cases}$$




```
>  # BSpline хуже справился с задачей. Ошибка получилась в три раза больше:
print(Ошибка кубического сплайна);
err_01 := calculateError(cubicSplineInterp, f ) :
evalf(err_01, 2);
```

```
print(Ошибка BSpline) ;
err_02 := calculateError(BSplineInterp, f ) :
evalf(err_02, 2);
```

Ошибка кубического сплайна

0.026

Ошибка BSpline

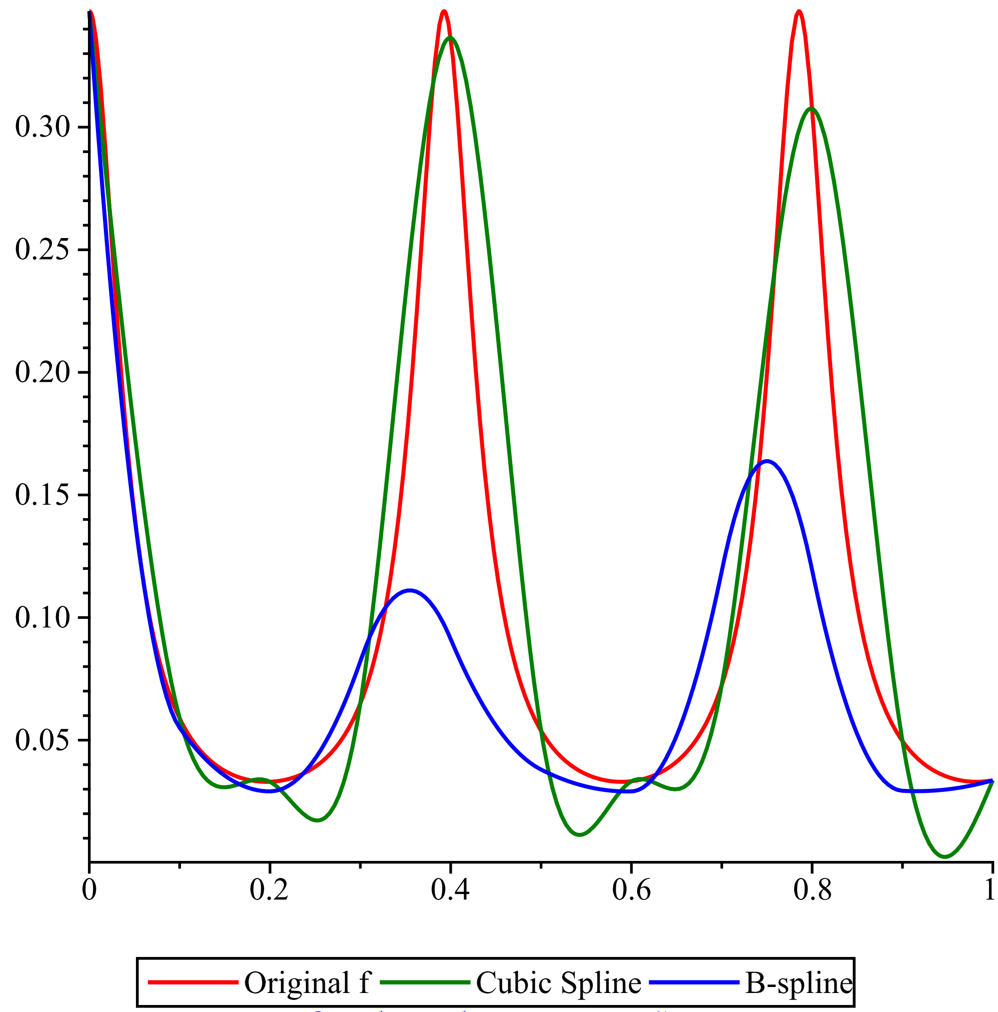
0.075 **(8)**

\> # Еще один пример, взятый из статьи Н. Н. Калиткин, Н. М. Шляхов, Интерполяция Всплайнами, Матем. моделирование, 2002, том 14, номер 4, 109–120. Авторы проводили анализ интерполяции В-сплайнами различных степеней. Возьмем пример, на котором проводились измерения, немного преобразовав его. Функция сходна по свойствам с известным тестом Рунге, а также она периодическая. Функцию Рунге мы уже расмموтрели, поэтому добавим больше колебаний:

```
> varEps := 0.21 :
f := x→ sqrt(varEps(2 + varEps)) / (2·Pi·(1 + varEps − cos(16·x))) ;
yVals := Array(1 ..(n + 1) , i →f (grid[i])) :
plot( [ f, cubicSplineInterp , BSplineInterp ], 0 ..1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend
    = ["Original f", "Cubic Spline", "B-spline"]);

print(Ошибка кубического сплайна);
err_1 := calculateError(cubicSplineInterp, f ) :
evalf(err_1, 2);
print(Ошибка BSpline) ;
 err_2 := calculateError(BSplineInterp, f ) :
evalf(err_2, 2);
```

$$f := x \mapsto \frac{\sqrt{varEps(2 + varEps)}}{2\cdot\pi\cdot(1 + varEps - \cos(16\cdot x))}$$



Ошибка кубического сплайна

0.11

Ошибка BSpline

0.25 **(9)**

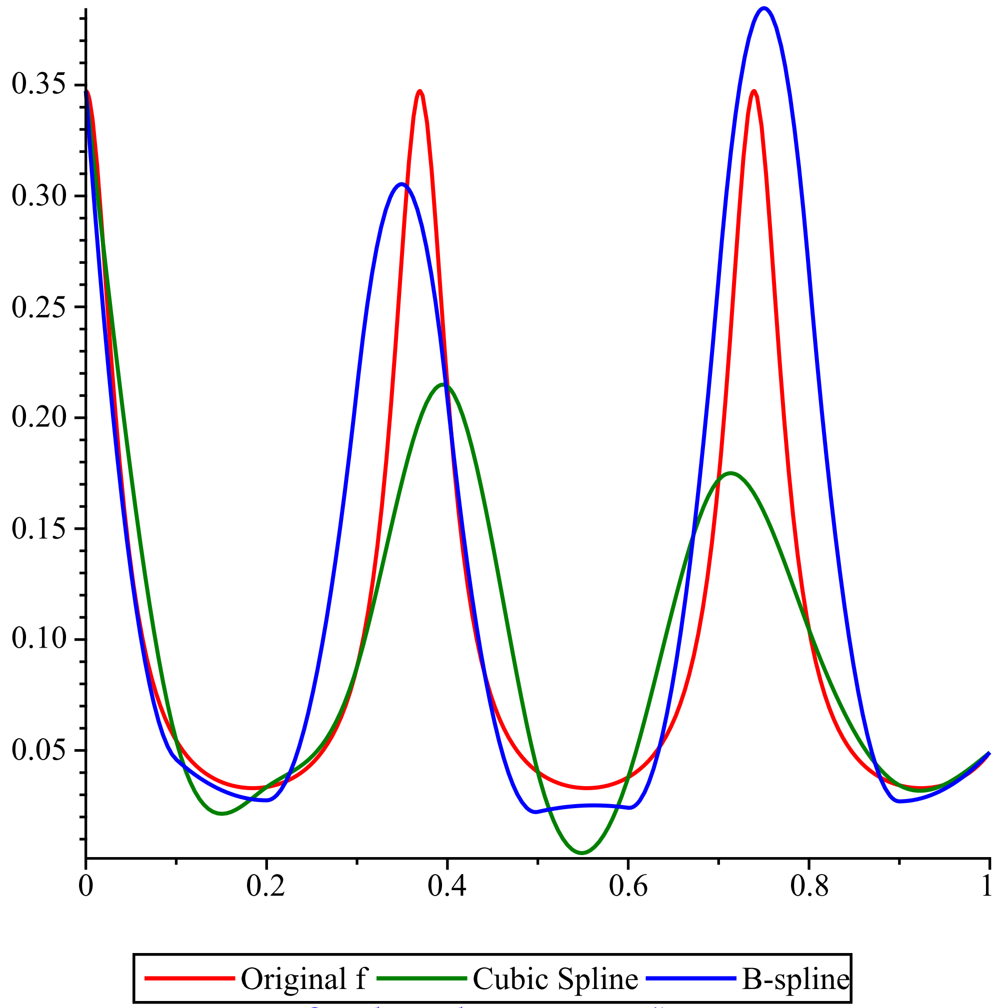
> \# Коэффициент 16 перед x в косинусе был взят нарочно, чтобы продемонстрировать, что сплайны плохо справляются с приближением функций, у которых резко меняется значение в переделах одного отрезка сетки. Например, это отрезки [0.3, 0.4], [0.7, 0.8] . Причем был получен достаточно интересный результат. Сейчас мы видим, что кубический сплайн интерполирует лучше, ошибка меньше в 2 раза . А теперь поменяем коэффициент в косинусе и немного видоизменим кривую :

> $f := x \rightarrow \frac{\mathrm{sqrt}(varEps(2 + varEps))}{2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot (1 + varEps - \cos(17 \cdot x))}$;

```
yVals := Array(1 ..(n + 1) , i →f(grid[i])) :
plot([f, cubicSplineInterp , BSplineInterp ], 0 ..1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend
    = ["Original f", "Cubic Spline", "B-spline"]);
print(Ошибка кубического сплайна);
err_1 := calculateError(cubicSplineInterp, f ) :
```

evalf(*err_1*, 2);
print(*Ошибка BSpline*) ;
err_2 := calculateError(*BSplineInterp*, f) :
evalf(err_2, 2);

$$f := x \mapsto \frac{\sqrt{varEps(2 + varEps)}}{2 \cdot \pi \cdot (1 + varEps - \cos(17 \cdot x))}$$



Ошибка кубического сплайна

0.19

Ошибка BSpline

0.19 **(10)**

\> # Приближаемая кривая изменилась несильно, мы увеличили коэффициент на 1, немного сжав график по горизонтали. Хоть мы и получили одинаковые значения ошибки, взглянув на график, мы видим, что форму лучше передает B-Сплайн.

\> # Из этого примера можно сделать вывод, что для функций, у которых сильно меняется значение в пределах одного отрезка сетки (в данном примере в 5 -6 раз) аппроксимация разными видами сплайнов имеет большую ошибку(в данном случае около 50% от наибольшего значения функции на отрезке).

Также мы видим, что при таких условиях разные виды сплайнов работают непредсказуемо. Плюс еще можно сделать вывод, что если приоритетной целью интерполяции стоит сохранение формы приближаемой функции, то максимум абсолютного значения ошибки может быть не лучшей метрикой.

>