Построение кубического сплайна :

```
> restart;
  n := 10 :
  grid := Array(1..(n + 1), i -> (i - 1)/n) :
> gamma_1 := 0 :
  gamma_(n + 1) := 0 :
  h := Array(1..n, i->(grid[i + 1] - grid[i])) :
  y := Array(1..(n + 1) , i ->f(grid[i])) :
> initMatrix := proc(i, j)
    if (i = 1 and j = 1) then return 1;
    elif (i = (n + 1) and j = (n + 1)) then return 1;
    elif (i = j ) then return 2·(h[i - 1] + h[i]);
    elif (abs(i-j) = 1 and i ≠ 1 and i ≠ n + 1) then return h[min(i, j)];
    else return 0;
    end if;
  end proc:

> initVector :=proc(i)
    if (i = 1) then return gamma_1
    elif (i = (n + 1)) then return gamma_(n + 1)
    else return 6((y[i + 1] - y[i])/h[i] - (y[i] - y[i - 1])/h[i])
    end if;
  end proc:
> with(LinearAlgebra) :
  A := Matrix(n + 1, n + 1, initMatrix ) :
  b := Vector(n + 1, initVector) :
  gamma_sol := LinearSolve(A, b) :
  K1 := Array(1..n, i->(y[i]/h[i] - gamma_sol[i]·h[i]/6)) :
  K2 := Array(1..n, i->(y[i + 1]/h[i] - gamma_sol[i + 1]·h[i]/6)) :

> S := Array(1..n, i->(x->gamma_sol[i]·(grid[i + 1] - x)^3/(6·h[i])
        + gamma_sol[i + 1]·(x - grid[i])^3/(6·h[i]) + K1[i]·(grid[i + 1] - x) +
  K2[i]·(x - grid[i]))) :
> cubicSplineInterp := proc(x)
  local i;
  for i from 1 to n do
```

```
    if (grid[i] ≤ x and x ≤ grid[i + 1]) then
      return S[i](x);
    end if;
  end do;
end proc:
```

>

>

>

> Построение интерполяции B − сплайнами :

> $n := 10$:

$grid := Array\left(1..(n+1),\ i \to \frac{i-1}{n}\right)$:

> $EPS := 10^{-12}$:

```
> getX := proc(i)
    if (i > n + 1) then return grid[n + 1] + (i − n)·EPS
    elif (i < 1) then return grid[1] + (1 − i) ·EPS
    else return grid[i]
    end if;
  end proc:
```

> getC :=proc(j)
  local $x\_0 := getX(j+1)$;
  local $x\_1 := \frac{getX(j+1) + getX(j+2)}{2}$;
  local $x\_2 := getX(j+2)$;
  return $\frac{-f(x\_0) + 4 \cdot f(x\_1) - f(x\_2)}{2}$;
 end proc:

> B :=proc(j, d, x)
  if $(d = 0)$ then return piecewise($getX(j) \le x$ and $x < getX(j+1)$, 1, 0)(x)
  else return $\frac{x - getX(j)}{getX(j+d) - getX(j)} \cdot B(j, d-1, x) + \frac{getX(j+1+d) - x}{getX(j+1+d) - getX(j+1)} \cdot B(j+1, d-1, x)$
  end if;
 end proc:

```
> BSplineInterp := proc(x)
    local i;
    local k;
    for i from 1 to n do
      if (getX(i) ≤ x and x ≤ getX(i + 1)) then
        return add(B(k, 2, x)·getC(k), k = (i − 2)..i);
      end if;
    end do;
  end proc:
```

>

> *Функции для подсчета ошибки* :

```
calculateError := proc(actual, expected)
  local check_grid := Array(1..(10·n + 1), i → (i − 1)/(10·n));
  local max_error := 0;
  local i;
  for i from 1 to (10·n + 1) do
    max_error := max(max_error, abs(actual(check_grid(i)) − expected(check_grid(i))));
  end do;
  return max_error;
end proc:
```

> Пример(0) :
Сравним получившуюся интерполяцию кубическими сплайнами с готовым решением Maple :

```
> f := x→sqrt(x);
yVals := Array(1..(n + 1), i →f(grid[i])) :
```

$$f := x \mapsto \sqrt{x} \quad (1)$$

```
> with(Student[NumericalAnalysis]) :
points := [seq([grid[i], yVals[i]], i = 1..(n + 1))] :
mapleCubicInterp := MakeFunction(expand(Interpolant( CubicSpline(points, independentvar
    = x))), x) :
print(Ошибка получившейся интерполяции );
err_01 := calculateError(cubicSplineInterp, f ) :
evalf(err_01, 2);
print(Ошибка решения Maple) ;
err_02 := calculateError(mapleCubicInterp, f ) :
evalf(err_02, 2);
```

Ошибка получившейся интерполяции

0.069

Ошибка решения Maple

0.068 **(2)**

> # Получили примерно одинаковые значения, что свидетельствует о правильности написанного алгоритма.

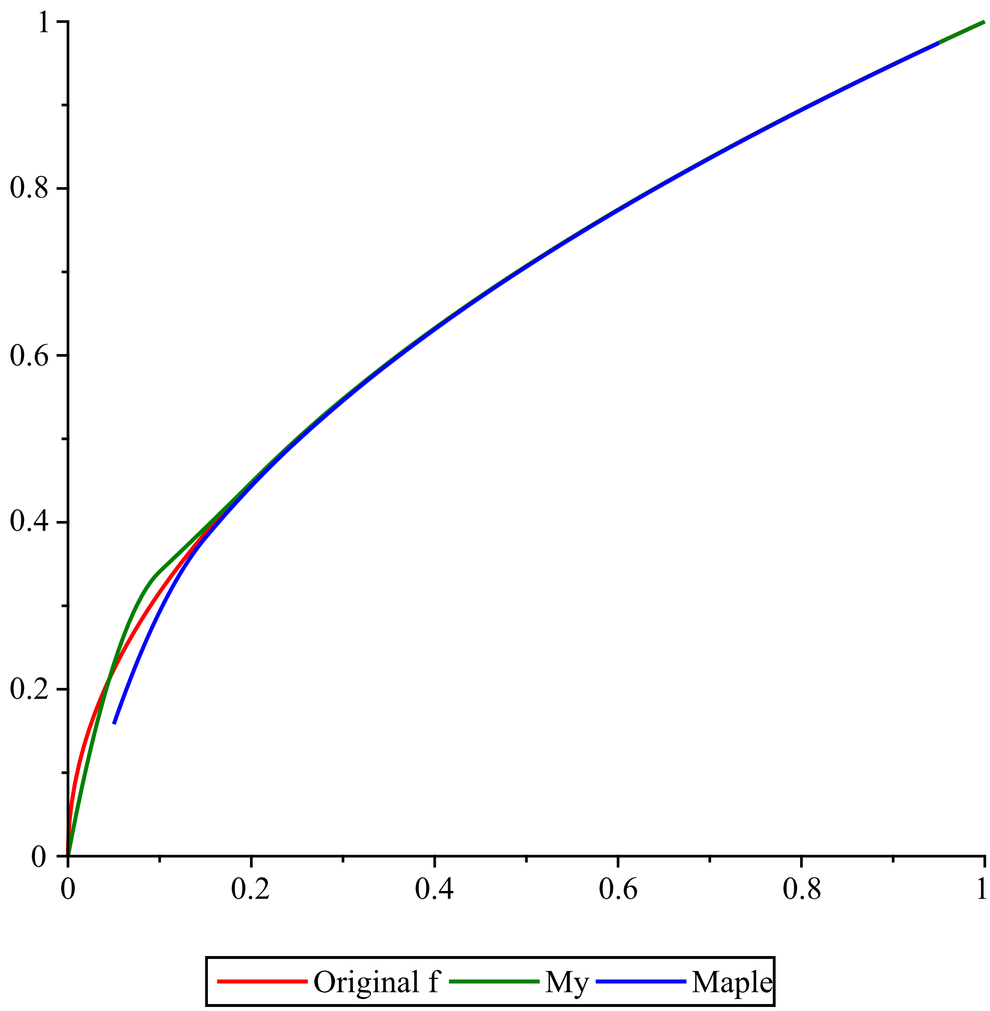
> # **Пример(1)**
Теперь сравним получившуюся интерполяцию В −сплайнами с готовым решением Maple :

```
> f := x→sqrt(x);
yVals := Array(1..(n + 1), i →f(grid[i])) :
```

$$f := x \mapsto \sqrt{x} \quad (3)$$

```
> with(CurveFitting) :
```

```
points := [seq([grid[i], yVals[i]], i = 1..(n + 1))]:
mapleBSplineInterp := BSplineCurve(points, x, order = 3):
plot([f, BSplineInterp, mapleBSplineInterp], 0..1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend
    = ["Original f", "My", "Maple"]);
```



> \# Здесь мы видим, что как и у моего, так и у сплайна из пакета Maple появляютя неточности на левом конце отрезка. Также можно заметить, что мой сплайн построился полностью на отрезке, так как при посторении я доопределял его точками за границами отрезка с шагом EPS и значениями функции на левом конце отрезка. В то же время сплайн из Maple "не достроен" рядом с концами отрезка, так как не было данных для доопределения.

> \# ***Пример*(2) :**

В книге "С. П. Шарого "Курс вычислительных методов" в разделе про сплайны была упомянута функция Рунге, для которой при интерполяции полиномами наблюдается эффект осциляций. А также было отметечено,

что "последовательность интерполяционных кубических сплайнов на равномерной сетке узлов всегда сходится к интерполируемой непрерывной функции".
Значит,
что ошибка при интерполяции кубическими сплайнами для этой функции будет меньше. Давайте это проверим. Так как мы работаем на отрезке $[0, 1]$, немного видоизменим функцию:

```
> f := x → 1/(1 + 25·(0.5 − x)^2);
  yVals := Array(1..(n + 1), i → f(grid[i])) :
```

$$f := x \mapsto \frac{1}{1 + 25 \cdot (0.5 - x)^2} \tag{4}$$

> # *Найдём максимальную ошибку при интерполяции кубическими сплайнами:*

```
> err_1 := calculateError(cubicSplineInterp, f) :
  evalf(err_1, 1);
```

$$0.003 \tag{5}$$

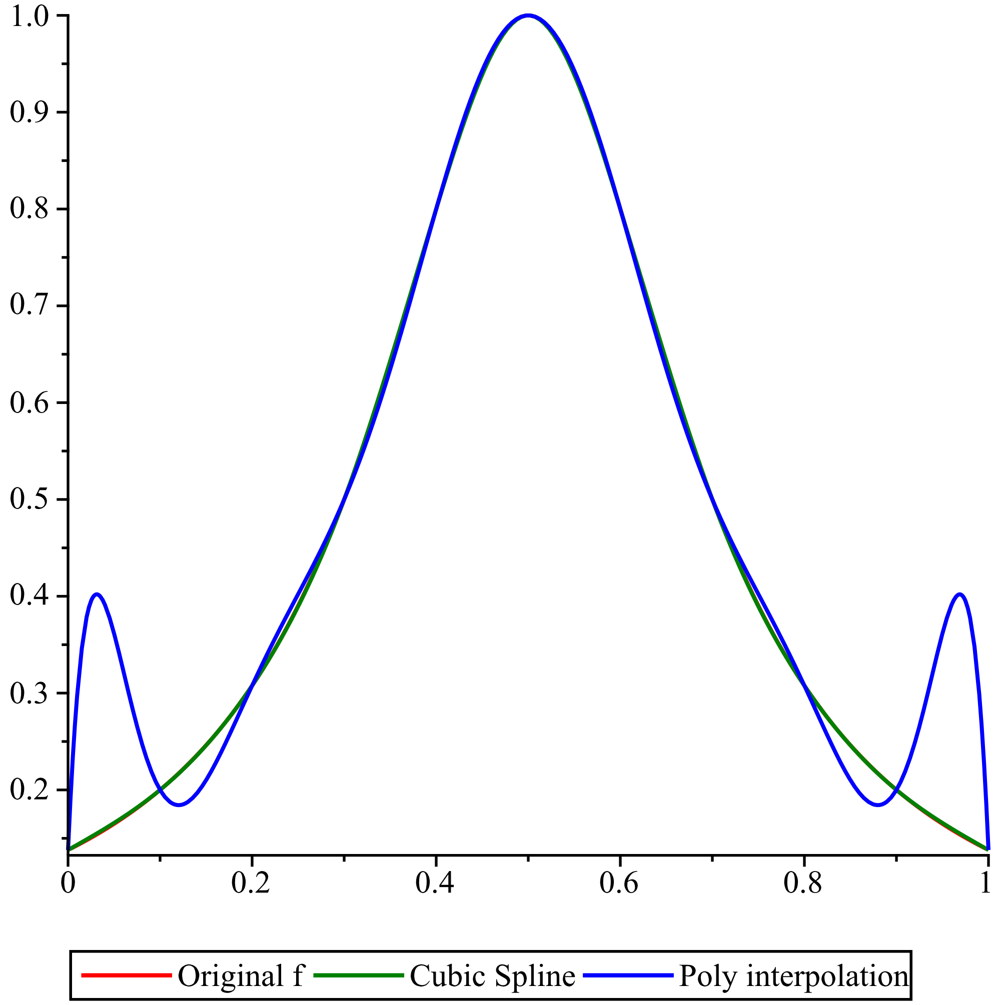
> # *Для получения интерполяции полиномами будем использовать стандартные средства Maple. Найдем максимальную ошибку:*

```
> with(CurveFitting) :
  polyInterpolation := x→PolynomialInterpolation(grid, yVals, x) :
  err_2 := calculateError(polyInterpolation, f) :
  evalf(err_2, 2);
```

$$0.25 \tag{6}$$

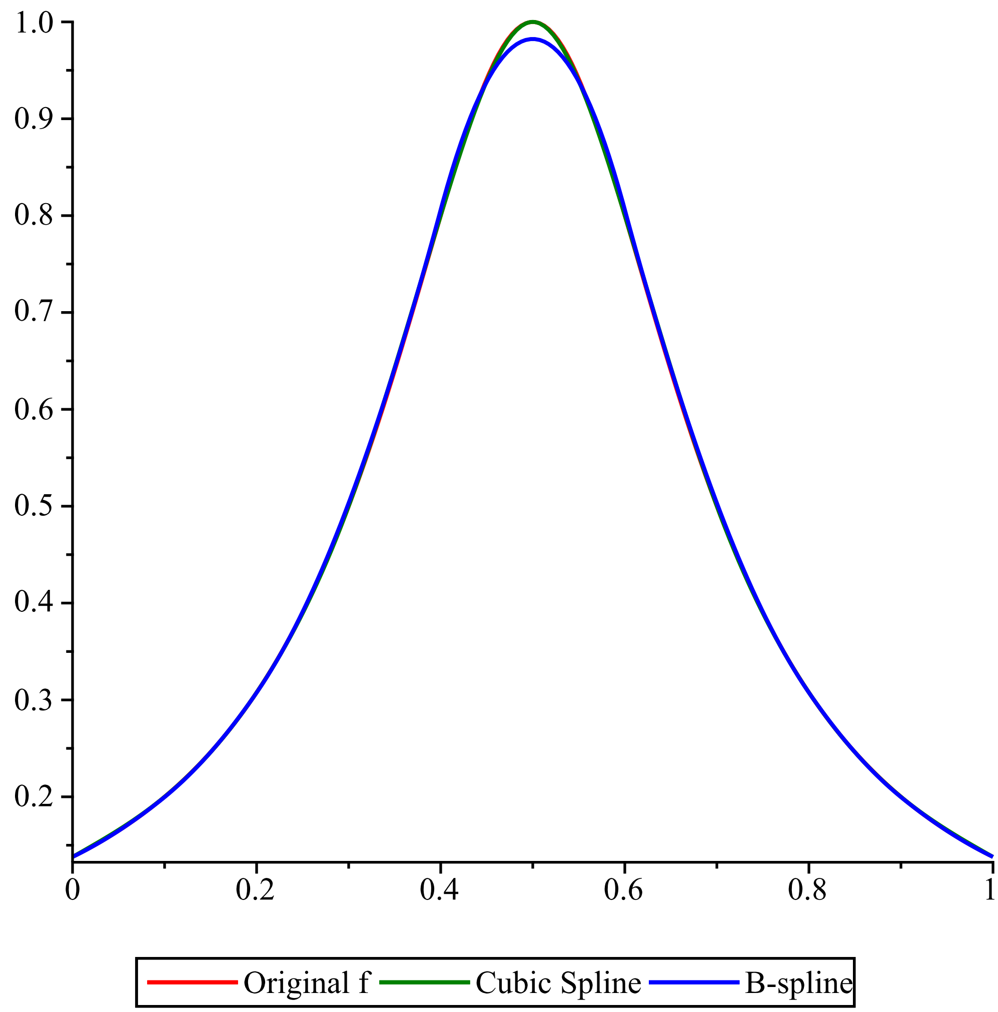
> # *Мы видим, что ошибка отличается больше чем в 82 раза. Пронаблюдаем теперь это на графике:*

```
> plot([f, cubicSplineInterp, polyInterpolation], 0..1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend
      = ["Original f", "Cubic Spline", "Poly interpolation"]);
```



> *# Таким образом, мы показали, что интерполяция кубическими сплайнами благодаря своим свойствам позволила избежать эффекта осциляций на концах отрезка. Теперь посмотрим, как с этой задачей справится B−spline:*

```
> plot([f, cubicSplineInterp, BSplineInterp], 0..1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend
    = ["Original f", "Cubic Spline", "B-spline"]);
```



> # ,
(0.003)
У BSpline же не появляется эффектов осциляций на концах,
он также лучше справляется с задачей,
чем интерполяция полиномами, но при этом ошибка больше,
чем у кубического сплайна, примерно в 6 раз :

```
> err_3 := calculateError(BSplineInterp, f) :
evalf(err_3, 2)
```

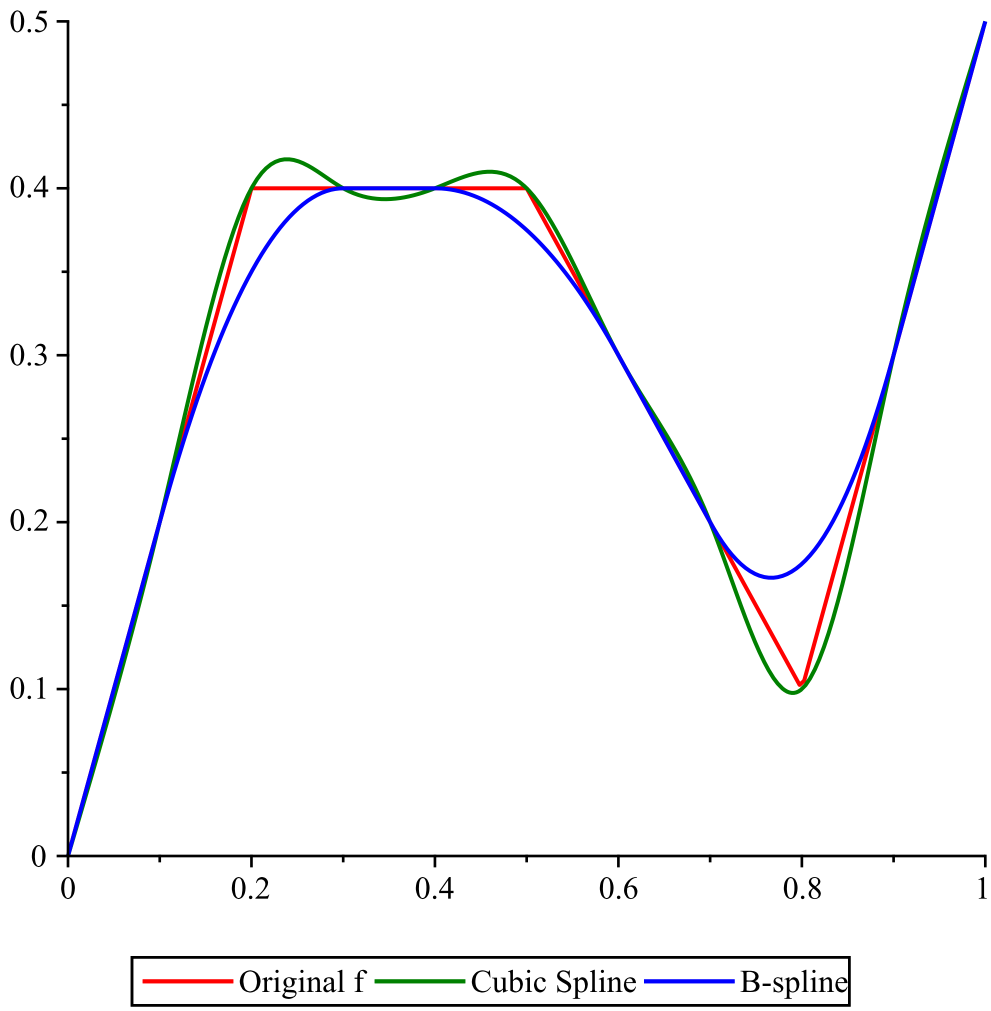
$$0.018 \tag{7}$$

> *# Правда эту оценку нельзя считать полностью точной, так как наша погрешность составляет O(h^2), где h = 0.1 в нашем случае. Но на графике можно пронаблюдать, в каком месте BSpline ошибается.*

> \# **Пример(3) :**
Tom Lyche and Knut Mørken, "Spline Methods". 5.2.2 "Numerical solution and examples" ,
,
\- . ,
B - .

> $f := x \to piecewise(x < 0.2, 2\,x, 0.2 \le x < 0.5, 0.4, 0.5 \le x < 0.8, 0.9 - x, 2\cdot(x - 0.75));$
> $plot([f, cubicSplineInterp, BSplineInterp], 0..1, color = ["Red", "Green", "Blue"], legend = ["Original f", "Cubic Spline", "B-spline"]);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} 2\cdot x & x < 0.2 \\ 0.4 & 0.2 \le x < 0.5 \\ 0.9 - x & 0.5 \le x < 0.8 \\ 2\cdot x - 1.50 & otherwise \end{cases}$$



>

BSpline хуже справился с задачей. Ошибка получилась в три раза больше:

```
print(Ошибка кубического сплайна);
err_01 := calculateError(cubicSplineInterp, f ) :
evalf(err_01, 2);
print(Ошибка BSpline) ;
err_02 := calculateError(BSplineInterp, f ) :
evalf(err_02, 2);
```

Ошибка кубического сплайна

0.026

Ошибка BSpline

0.075 **(8)**

\>