Определение предела последовательности

1. Пусть K — множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1,\ K_2,\ldots,K_8$ — множества всех последовательностей, удовлетворяющих соответственно условиям:

   1) $\exists\varepsilon>0\ \exists N\ \exists n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   2) $\exists\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   3) $\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   4) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \exists n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   5) $\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \forall n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   6) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   7) $\forall\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   8) $\forall\varepsilon>0\ \forall N\ \forall n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;

   Какие из следующих включений верны: a) $K_6\subset K_2$; b) $K_2\subset K_6$; c) $K_7\subset K_2$; d) $K_8\subset K$; e) $K\subset K_8$;

2. Доказать по определению сходимости

$$a)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=0;\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+4n+3}=3\quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

3. Доказать, что последовательности расходятся

$$a)\ x_n=(-1)^n,\quad b)\ b_n=n^2;\quad c)\ c_n=\sin n;$$

4. Найти пределы последовательностей.
   (a) $a_n=q^n,\quad q\in\mathbb{R}$;
   (b) $a_n=\sqrt[n]{a},\quad a>0$;
   (c) $a_n=\sqrt[n]{n}$;
   (d) $a_n=\frac{n^2}{2^n}$, + обощить результат;
   (e) $a_n=\frac{2^n}{n!}$, + обобщить результат;
   (f) $a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, + обощить результат.

Программная инженерия, ФКН НИУ ВШЭ *Математический анализ, 2024-25*

Определение предела последовательности

1. Пусть K — множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1,\ K_2,\ldots,K_8$ — множества всех последовательностей, удовлетворяющих соответственно условиям:

   1) $\exists\varepsilon>0\ \exists N\ \exists n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   2) $\exists\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   3) $\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   4) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \exists n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   5) $\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \forall n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   6) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   7) $\forall\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;
   8) $\forall\varepsilon>0\ \forall N\ \forall n\geqslant N:\ |x_n|<\varepsilon$;

   Какие из следующих включений верны: a) $K_6\subset K_2$; b) $K_2\subset K_6$; c) $K_7\subset K_2$; d) $K_8\subset K$; e) $K\subset K_8$;

2. Доказать по определению сходимости

$$a)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=0;\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+4n+3}=3\quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

3. Доказать, что последовательности расходятся

$$a)\ x_n=(-1)^n,\quad b)\ b_n=n^2;\quad c)\ c_n=\sin n;$$

4. Найти пределы последовательностей.
   (a) $a_n=q^n,\quad q\in\mathbb{R}$;
   (b) $a_n=\sqrt[n]{a},\quad a>0$;
   (c) $a_n=\sqrt[n]{n}$;
   (d) $a_n=\frac{n^2}{2^n}$, + обощить результат;
   (e) $a_n=\frac{2^n}{n!}$, + обобщить результат;
   (f) $a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, + обощить результат.