1. Стараясь не прибегать к таблицам истинности, докажите следующие эквивалентности:

$$p \wedge q \vee p \wedge r \equiv p \wedge (q \vee r) \qquad \neg p \vee q \equiv p \to q$$
$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee q \wedge r \qquad \neg q \to \neg p \equiv p \to q$$
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p \qquad p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$$

2. Стараясь не прибегать к таблицам истинности, докажите, что следующие логические высказывания являются тавтологиями:

$$p \to p \qquad p \wedge (p \to q) \to q \qquad (p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

3. Не пользуясь таблицами истинности, упростите высказывания:

$$(q \vee r) \vee (p \wedge (\neg r)) \qquad (p \vee r) \vee \neg(\neg p \to \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$$

4. Запишите с помощью известных Вам логических связок высказывание: «истинны более половины высказываний p,q,r».

5. Найдите ошибки в следующих **«Решениях»** и предложите свои (правильные).

   (a) Можно ли число 197 представить в виде суммы двух натуральных чисел с равной суммой цифр?

   «Решение». Нельзя. Пусть $197 = \overline{xyz} + \overline{ab}$ (понятно, что нельзя получить 197, складывая два трёхзначных числа, а 98 и 99 не обладают требуемым свойством). Тогда

   $$197 = 100x + 10(y + a) + (z + b),$$

   откуда получаем, что $x = 1$, $y + a = 9$, $z + b = 7$. Значит, одно из чисел y и a нечётно, а другое чётно. Аналогично для чисел z и b. Если суммы цифр слагаемых равны, то $x + y + z = a + b$, то есть $x + y + z - a - b = 0$. Но алгебраическая сумма трёх нечётных и двух чётных чисел не может быть равна нулю. Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

   (b) За круглым столом собралось 12 человек, каждый из которых — либо рыцарь, либо лжец. Каждый их них сказал: «Оба моих соседа — лжецы». Сколько лжецов было за столом?

   «Решение». 6 лжецов. Все сидящие за столом не могли быть лжецами, так как тогда для каждого из них высказывание было бы верным. Значит, за столом был хотя бы один рыцарь. Его правый сосед — лжец, так как рыцарь сказал правду. Правый сосед лжеца — рыцарь, так как лжец солгал. Правый сосед этого рыцаря — лжец, и так далее. Таким образом, рыцари и лжецы сидят через одного, следовательно, лжецов было 6.

   (c) Рассматриваются «слова» длины 100, составленные только из букв A, B и C. Каких «слов» больше: тех, в которых каждый из фрагментов AB и AC встречается чётное число раз, или тех, в которых каждый из таких фрагментов встречается нечётное число раз?

   «Решение». Поровну. Рассмотрим «слово», в котором оба фрагмента встречаются нечётное число раз. Заменим в нём первый из фрагментов на другой (AB на AC или наоборот). Получим слово, у которого оба фрагмента встречаются чётное число раз. Это соответствие является взаимнооднозначным, поэтому «слов» обоих видов одинаковое количество.

1. Запишите с помощью ¬,∧,∨ высказывания, заданные таблицами истинности:

a)

p	q	A
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

b)

p	q	r	B
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

c)

p	q	r	C
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

2. Пусть целые числа x,y,z,w таковы, что $x+y+z=w$. Введём следующие высказывания:

   A: число w чётное;

   B: ровно одно из чисел x,y,z чётное;

   C: все числа x,y,z чётные.

   Докажите, что $A \equiv (B \vee C)$.

3. Докажите, что следующие высказывания являются тавтологиями, либо найдите случаи, при которых они истинны.

   a) $((p \to q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$

   b) $p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to (p_4 \to p_5)))$

   c) $(p \wedge (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to (p \wedge r))$

   d) $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \to q) \to (p \to r))$

4. Найдите ошибки в следующем **«Ответе»** и **«Решении»** и предложите правильные.

   На острове живут два племени: рыцари и лжецы (каждый знает, кто из какого племени). 100 жителей встали в круг. Каждый из них ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Лжец ли ваш правый сосед?». Ответов «Да» оказалось столько же, сколько лжецов. Какое наибольшее количество лжецов могло быть в круге?

   «Ответ»: 50 лжецов.

   «Решение»: *Оценка.* По кругу чередуются группы из подряд стоящих лжецов и рыцарей. Ответ «Да» возникает только в парах лжец–рыцарь или рыцарь–лжец на стыке групп. Количество пар равно количеству ответов «Да», что по условию равно количеству лжецов. Значит, каждый лжец входит ровно в одну пару, пары не пересекаются, и поэтому их не более пятидесяти.

   Пример. Чередуются рядом стоящие пары лжецов и рыцарей. «Да» ответили все, чей сосед справа из другого племени.