Homework. II

1. Напоминание

Пусть $\mathbf{V}$ – некоторое непустое множество, элементы которого мы будем называть векторами, хотя их природа может быть произвольной. Предположим, что любым векторам $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ как-то сопоставлен третий вектор, обозначаемый символом $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и называемый суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Кроме, того, предположим, что любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ и любому вектору $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ как-то сопоствлен новый вектор, обозначаемый символом $\lambda\mathbf{a}$ и называемый произведением вектора $\mathbf{a}$ на число λ. Если при этом выполенены следующие свойства, то множество $\mathbf{V}$ называется векторным (=линейным) пространством.

(1) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$, для любых $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{V}$.
(2) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$.
(3) Существует такой вектор, называемый нулевым вектором, $\mathbf{o} \in \mathbf{V}$, что $\mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$, для любого $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$.
(4) Для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ существует такой вектор $-\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, что $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.
(5) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$.
(6) $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$.
(7) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ для любых векторов $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$.
(8) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$.

Чтобы не создалось путаницы, мы операцию суммы для векторов обозначим через $\oplus$, а умножение на скаляр через $\odot$.

Тогда определение векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ примет вид

Векторное пространство это множество $V \neq \varnothing$ на котором есть две операции

$$\oplus : V \times V \to V, \qquad \odot : \mathbb{R} \times V \to V,$$

для которых верны следующие условия

(1) $\mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c}$, для любых $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{V}$.
(2) $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}$, для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$.
(3) Существует такой вектор, называемый нулевым вектором, $\mathbf{o} \in \mathbf{V}$, что $\mathbf{o} \oplus \mathbf{a} = \mathbf{a}$, для любого $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$.
(4) Для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ существует такой вектор $-\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, что $\mathbf{a} \oplus (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.
(5) $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{a} = \alpha \odot \mathbf{a} \oplus \beta \odot \mathbf{a}$ для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, здесь $\alpha + \beta$ это обычное сложение чисел в $\mathbb{R}$
(6) $(\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{a} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{a})$ для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, здесь $\alpha \cdot \beta$ – обычное умножение чисел в $\mathbb{R}$.
(7) $\alpha \odot (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) = \alpha \odot \mathbf{a} \oplus \alpha \odot \mathbf{b}$ для любых векторов $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$.
(8) $1 \odot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$.

2. ДЗ #1.2

(1) В результате эксперимента были получены следующие данные

x	1	2	4	5	7
$f(x)$	0.5	10	0.8	-2	3

Найдите полином четвёртой степени $p(x)$ который принимает те же значения что и $f(x)$ и постройте его график, показав, что данные точки на нём лежать. Нужно использовать `https://matrixcalc.org/ru/` для решения системы, а для построения графика это `https://www.geogebra.org/`.

(2) Что будет если потребовать в предыдущей задаче чтобы степень у полинома была 3? Проведите исследование используя вышеупомянутые ресурсы и свои знания.

(3) Определить будет ли заданное множество V с операциями $\oplus, \odot$,

$$\oplus : V \times V \to V, \qquad \odot : \mathbb{R} \times V \to V,$$

векторным пространством?

Если нет, то укажите какие именно аксиомы не выполнены. Если не оговорено противное, то операции $+$ и $\cdot$ являться обычным сложением и умножением соответственно, а также мы полагаем что основное поле $F = \mathbb{R}$.

(a)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R},\ b = 3 \cdot a + 1 \right\}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \end{pmatrix}$$

(b)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ b \end{pmatrix}$$

(c)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$V = \mathbb{R}, \qquad \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} := \mathbf{a} - \mathbf{b}, \qquad \lambda \odot \mathbf{a} := \lambda \cdot \mathbf{a}.$$

(e)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + x + 5 \\ b + y - 7 \\ c + z + 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a + 5(\lambda - 1) \\ \lambda \cdot b - 4(\lambda - 1) \\ \lambda \cdot c + \lambda - 1 \end{pmatrix}$$