

Формальная логика. Метод математической индукции.*

1. Определите, является ли утверждение всегда истинным

$$(\neg Q \ \& \ (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow \neg P$$

2. Даны следующие утверждения и предикаты $(x, y \in \mathbb{R})$:

- A : Все деревья высокие;
- $B(x) : x + 5 = 10$;
- $C(x, y) : x^2 \leq y$;
- $E(x; y) : x^2 + y^2 = 0$.

Среди следующих утверждений укажите истинные:

- | | |
|---|---|
| (a) A ; | (g) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow A$; |
| (b) $C(x, -1)$; | (h) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow E(x; y)$; |
| (c) $A \wedge B(5)$; | (i) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \wedge E(x; y)$; |
| (d) $A \Rightarrow B(10)$; | (j) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : E(x; y) \Rightarrow C(x; y)$; |
| (e) $\forall x \in \mathbb{R} : B(x)$; | (k) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow C(x; y)$; |
| (f) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : C(x; y)$; | (l) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow B(y)$. |

3. Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$. Какие из следующих утверждений верны?

- | | |
|---|---|
| (a) $\forall x \forall y \exists z : xy^2 < z$; | (c) $\exists z \forall x \exists y : xy^2 = z$; |
| (b) $\forall x \forall z \exists y : xy^2 \leq z$; | (d) $\forall z \exists x \forall y : xy^2 \leq z$; |

4. Записать отрицание к утверждению, не используя знак отрицания. Что верно: утверждение или его отрицание?

- | | |
|---|--------------------------------------|
| (a) $\forall x : x^2 > 0$; | (c) $\exists x : x^2 < 0$; |
| (b) $\forall x \exists y : x^2 > y^2$; | (d) $\exists x \forall y : xy > 0$; |

5. Какие из следующих утверждений верны?

- (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 2 \Rightarrow |x| > 2$;
- (b) $\forall x \in \mathbb{R} : x < 2 \Rightarrow |x| < 2$;
- (c) $\forall x \forall y \exists z : (y > x) \Rightarrow (y > z) \wedge (z > x)$;
- (d) $\forall \varepsilon \forall x : |x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 9| < 10\varepsilon$.

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. Докажите, что для любого натурального $n \geq 5$ верно: $3^{n-1} > 2n^2 - n$.

8. Последовательность c_n задана рекуррентно:

$$c_1 = 6, \quad c_{n+1} = 2c_n - 3n + 2.$$

Докажите, что $c_n = 2^n + 3n + 1$.

* - при составлении листка использованы материалы Ильи Щурова из открытых источников.

Домашнее задание

1. Являются ли утверждения логически эквивалентными?

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \quad \text{и} \quad (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$$

2. Записать отрицания ко всем утверждениям задачи 3, не используя знак отрицания.

3. Какие из следующих утверждений верны?

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 1 \Rightarrow |x| < 4;$

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 3| > 1 \Rightarrow |x| > 4;$

(c) $\forall \varepsilon \forall x : |x - 3| < \min(\varepsilon; 1) \Rightarrow |x^2 - 9| < 10\varepsilon;$

(d) $\forall \varepsilon \exists \delta \forall x : (\delta > 0) \wedge (|x - 3| < \delta) \wedge (\varepsilon > 0) \Rightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon.$

4. Последовательность a_n задана рекуррентно:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}.$$

Докажите, что $a_n = 2^{n-1} + 1$.

5. Доказать, что при каждом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что высказывание всегда истинно

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

2. Среди следующих утверждений, построенных из предикатов из задачи 2, укажите истинные:

- | | |
|---|--|
| (a) $B(5)$; | (g) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : \neg C(x; y)$; |
| (b) $A \vee B(5)$; | (h) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow E(x; y)$; |
| (c) $A \Rightarrow B(5)$; | (i) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : C(x; y) \Rightarrow E(x; y)$; |
| (d) $A \wedge B(10)$; | (j) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : (C(x; y) \wedge E(x; y)) \Rightarrow \neg B(x)$; |
| (e) $\neg C(3; 4)$; | (k) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow B(y)$; |
| (f) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : C(x; y)$; | (l) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow B(y)$. |

3. Доказать, что при каждом натуральном n справедливо неравенство

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n.$$

4. Доказать, что при каждом натуральном n выражение $2n^3 + 3n^2 + 7n$ делится на 6.
5. Доказать, что при каждом натуральном n выражение $7^n + 12n + 17$ делится на 18.
6. Докажите неравенство для всех натуральных n : $4^n > 7n - 5$.
7. Докажите неравенство для всех натуральных n : $4^n \geq n^2 + 3^n$.
8. Доказать, что при каждом натуральном n справедливо равенство

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

9. Доказать, что при каждом натуральном n справедливо равенство

$$1 + \frac{7}{3} + \frac{13}{9} + \dots + \frac{6n - 5}{3^{n-1}} = \frac{2 \cdot 3^n - 3n - 2}{3^{n-1}}.$$