Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

1. Привести примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0,\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1,\quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty,\quad d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\text{ не существует.}$$

2. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ следует ли отсюда, что
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$;
   (b) Хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ стремится к нулю.

3. Сформулировать в позитивной форме утверждения: «Последовательность не стремится к ∞» и «Последовательность не стремится к $+\infty$».

4. Верно ли утверждение?
   (a) Если последовательность не является бесконечно большой, то она ограничена.
   (b) Если последовательность не является ограниченной, то она бесконечно большая.
   (c) Если последовательность сходится не к нулю и не обращается в ноль, то она отделима от нуля.

5. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:
   (a) Сумма бесконечно большой и ограниченной - бесконечно большая.
   (b) Частное бесконечно малой и бесконечно большой - бесконечно малая.
   (c) Произведение бесконечно малой и отделимой от нуля - бесконечно малая.

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $y_n \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
   Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.

7. Найти пределы последовательностей.
   (a) $a_n = q^n, \quad q \in \mathbb{R}$;
   (b) $a_n = \sqrt[n]{a}, \quad a > 0$;
   (c) $a_n = \sqrt[n]{n}$;
   (d) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, + обощить результат;
   (e) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, + обобщить результат;

Домашнее задание

1. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одно и то же множество значений и таких, что:
   (a) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,
   (b) $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится.

2. Пусть a – некоторое вещественное число. Приведите пример последовательности $\{a_n\}$ (если такая существует), у которой:
   (a) Есть предел, равный числу a.
   (b) Есть предел равный a, но ни один из членов последовательности не равен a.
   (c) Есть предел равный a, при этом бесконечно много членов последовательности равны a и бесконечно много членов последовательности не равны a.
   (d) Число a не является пределом последовательности, при этом бесконечно много членов последовательности равны a.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что существуют натуральные p и n_0 такие, что $y_n = x_{n+p}$ (или $y_n = x_{n-p}$) для любого $n \geqslant n_0$. Доказать, что последовательность y_n сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.
   Иными словами, изменение (в частности отбрасывание или добавление) конечного числа членов сходящейся последовательности оставляет ее сходящейся к тому же пределу.

4. Доказать по определению следующие сходимости:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-11}}=0;\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2}=0\quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n}}=0.$$

5. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \qquad \exists C\ \exists n_0\ \forall n > n_0\,(y_n \leqslant C)\,.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a это $+\infty$ или $-\infty$. Про y_n :

$$\exists C\ \exists n_0\ \forall n > n_0\,(y_n \geqslant C > 0)\,.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть K — множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1,\ K_2, \ldots, K_8$ — множества последовательностей из задачи листка семинара 3.

   1) Для каких $j = 1, 2, \ldots, 8$ верно включение $K_j \subset K$.

   2) Какие из множеств K_j содержать как сходящиеся, так и расходящиеся последовательности.

   3) Какие из множеств K_j содержать неограниченные последовательности.

   4) Какому из условий 1)-8) удовлетворяет любая последовательность.

   5) Какие из множеств K_j совпадают.

2. Доказать по определению следующие сходимости:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2-2n+3} = 0; \quad b)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}} = 2.$$

3. * Пусть $x_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что

   1) $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N\ \forall n > n_0:\ x_n < x_{n_0}$

   2) $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N\ \forall n (1 \leqslant n < n_0):\ x_n > x_{n_0}$

4. Для всех сочетаний $A \circ B \circ C$, где A, C - бесконечно малая, бесконечно большая, ограниченная, отделимая от нуля, B - арифметическое действие, сформулируйте и докажите или опровергните соответствующее свойство данных величин.