№ 1-2.

1) Решить.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2\cdot x_2 + x_3 = 2 \\ 3\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = 1 \\ 4\cdot x_4 = 4 \end{cases} \quad (1)$$

главные переменные.

Решение:

- Из уравнения 4 системы (1) найдем переменную x_4:

  $4x_4=4$

  $\boldsymbol{x_4=1}$
- Из уравнения 3 системы (1) найдем переменную x_3:

  $3x_3=1-2x_4=1-2\cdot1=-1$

  $\boldsymbol{x_3=\frac{-1}{3}}$
- Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную x_2:

  $2x_2=2-x_3=2-\frac{-1}{3}=\frac{7}{3}$

  $\boldsymbol{x_2=\frac{7}{6}}$
- Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную x_1:

  $x_1=3-x_2-x_3-x_4=3-\frac{7}{6}-\frac{-1}{3}-1=\frac{7}{6}$

$\Rightarrow$ Ответ: решение $X = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 7/6 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) Решить

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2\cdot x_5 = -2 \\ 2\cdot x_2 + x_3 + 2\cdot x_4 + 2\cdot x_5 = 1 \\ 3\cdot x_3 + 2\cdot x_4 - 2\cdot x_5 = 2 \\ 4\cdot x_4 - 2\cdot x_5 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

главные переменные

свободная переменная

Решение:

- Из уравнения 4 системы (1) найдем переменную x_4:

  $4x_4=1+2x_5$

  $\boldsymbol{x_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot x_5}$
- Из уравнения 3 системы (1) найдем переменную x_3:

  $3x_3=2-2x_4+2x_5=2-2\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot x_5\right)+2x_5=\frac{3}{2}+x_5$

  $\boldsymbol{x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot x_5}$
- Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную x_2:

  $2x_2=1-x_3-2x_4-2x_5=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot x_5\right)-2\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot x_5\right)-2x_5=\frac{-10}{3}\cdot x_5$

  $\boldsymbol{x_2=\frac{-5}{3}\cdot x_5}$
- Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную x_1:

  $x_1=-2-x_2-x_3-x_4-2x_5=-2-\frac{-5}{3}\cdot x_5-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot x_5\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot x_5\right)-2x_5=\frac{-11}{4}-\frac{7}{6}\cdot x_5$

вет:

Общее решение: $X=\begin{pmatrix} \frac{-11}{4}-\frac{7}{6}\cdot x_5 \\ \frac{-5}{3}\cdot x_5 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot x_5 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$

где $x_5 \in \mathbb{R}$ – любое число.

3) Решить

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2\cdot x_6 = 1 \\ 2\cdot x_2 + x_3 + 2\cdot x_4 - x_5 + 3\cdot x_6 = 2 \\ 3\cdot x_3 + 2\cdot x_4 - x_5 + 2\cdot x_6 = 3 \\ 4\cdot x_4 - 2\cdot x_5 + x_6 = 4 \end{cases} \quad (1)$$

ГЛАВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

свободные переменные

Решение:

- Из уравнения 4 системы (1) найдем переменную x_4:
  $4x_4=4+2x_5-x_6$
  $\mathbf{x_4=1+\frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6}$
- Из уравнения 3 системы (1) найдем переменную x_3:
  $3x_3=3-2x_4+x_5-2x_6=3-2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6\right)+x_5-2x_6=1-\frac{3}{2}\cdot x_6$
  $\mathbf{x_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot x_6}$
- Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную x_2:
  $2x_2=2-x_3-2x_4+x_5-3x_6=2-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot x_6\right)-2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6\right)+x_5-3x_6=\frac{-1}{3}-2x_6$
  $\mathbf{x_2=\frac{-1}{6}-x_6}$
- Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную x_1:
  $x_1=1-x_2-x_3-x_4-x_5+2x_6=1-\left(\frac{-1}{6}-x_6\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot x_6\right)-\left(1+\frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6\right)-x_5+2x_6=\frac{-1}{6}-\frac{3}{2}\cdot x_5+\frac{15}{4}\cdot x_6$

Общее решение: $X=\begin{pmatrix} \frac{-1}{6}-\frac{3}{2}\cdot x_5+\frac{15}{4}\cdot x_6 \\ \frac{-1}{6}-x_6 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot x_6 \\ 1+\frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$

где $x_5, x_6 \in \mathbb{R}$ – произвольные числа.

4) Решить

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2\cdot x_6 = 0 \\ 2\cdot x_2 + x_3 + 2\cdot x_4 - x_5 + 3\cdot x_6 = 0 \\ 3\cdot x_3 + 2\cdot x_4 - x_5 + 2\cdot x_6 = 0 \\ 4\cdot x_4 - 2\cdot x_5 + x_6 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Такие системы называются однородными (т.е. когда после = стоит 0 везде.)

Решение:

- Из уравнения 4 системы (1) найдем переменную x_4:

  $4x_4=2x_5-x_6$

  $\boldsymbol{x_4=\frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6}$
- Из уравнения 3 системы (1) найдем переменную x_3:

  $3x_3=-2x_4+x_5-2x_6=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6\right)+x_5-2x_6=\frac{-3}{2}\cdot x_6$

  $\boldsymbol{x_3=\frac{-1}{2}\cdot x_6}$
- Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную x_2:

  $2x_2=-x_3-2x_4+x_5-3x_6=-\left(\frac{-1}{2}\cdot x_6\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6\right)+x_5-3x_6=-2x_6$

  $\boldsymbol{x_2=-x_6}$
- Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную x_1:

  $x_1=-x_2-x_3-x_4-x_5+2x_6=-\left(-x_6\right)-\frac{-1}{2}\cdot x_6-\left(\frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6\right)-x_5+2x_6=\frac{-3}{2}\cdot x_5+\frac{15}{4}\cdot x_6$

$x_6=x_6$

Общее решение: $X=\begin{pmatrix} \frac{-3}{2}\cdot x_5+\frac{15}{4}\cdot x_6 \\ -x_6 \\ \frac{-1}{2}\cdot x_6 \\ \frac{1}{2}\cdot x_5-\frac{1}{4}\cdot x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$

где $x_5, x_6 \in \mathbb{R}$ – произвольные числа.

Внимание! Последние две системы имеют одинаковые матрицы коэффициентов.

Система — **Решение**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2\cdot x_6 = 1 \\ 2\cdot x_2 + x_3 + 2\cdot x_4 - x_5 + 3\cdot x_6 = 2 \\ 3\cdot x_3 + 2\cdot x_4 - x_5 + 2\cdot x_6 = 3 \\ 4\cdot x_4 - 2\cdot x_5 + x_6 = 4 \end{cases} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} - \frac{3}{2}\cdot x_5 + \frac{15}{4}\cdot x_6 \\ \frac{-1}{6} - x_6 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot x_6 \\ 1 + \frac{1}{2}\cdot x_5 - \frac{1}{4}\cdot x_6 \\ 0 + x_5 \\ 0 + x_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2\cdot x_6 = 0 \\ 2\cdot x_2 + x_3 + 2\cdot x_4 - x_5 + 3\cdot x_6 = 0 \\ 3\cdot x_3 + 2\cdot x_4 - x_5 + 2\cdot x_6 = 0 \\ 4\cdot x_4 - 2\cdot x_5 + x_6 = 0 \end{cases} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2}\cdot x_5 + \frac{15}{4}\cdot x_6 \\ -x_6 \\ \frac{-1}{2}\cdot x_6 \\ \frac{1}{2}\cdot x_5 - \frac{1}{4}\cdot x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Видно, что эти решения связаны так:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + X_2,$$

при этом, как нетрудно убедиться, $x_1 = -1/6,\ x_2 = -1/6,\ x_3 = 1/3,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$ — решение первой системы.

Позже мы покажем, что это верно в общем случае:

Решение системы = решение однородной + какое-то решение.

Полином Лагранжа.

Пусть даны $n+1$ точек $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$, известно, что $f(x_0)=y_0, \dots, f(x_n)=y_n$, где $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Нужно предъявить полином $\mathcal{L}_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg \mathcal{L}_n(x) \le n$ такой, что $\mathcal{L}_n(x_0)=y_0, \dots, \mathcal{L}_n(x_n)=y_n$.

Пусть $\mathcal{L}_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, тогда мы получаем линейную систему:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

которую нужно относительно $a_0, \dots, a_n$, т.е. $a_0, \dots, a_n$ — неизвестные.

5) Найти полином $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, такой, что

$$p(1) = 12, \quad p(2) = 15, \quad p(3) = 16.$$

Решение Получаем систему:

$$\begin{cases} p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 12 \\ p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 15 \\ p(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 16 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_0 = 7,\ a_1 = 6,\ a_2 = -1$

$\Rightarrow$ искомый полином:

$p(x) = -x^2 + 6x + 7.$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_2 + 3\cdot x_3 = 3 \\ 2\cdot x_3 = -2 \end{cases} \quad (1)$$

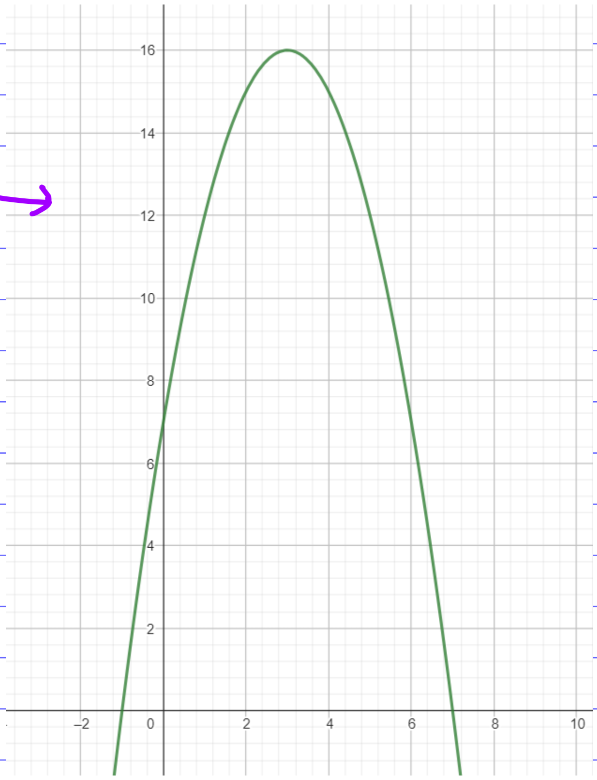
- Из уравнения 3 системы (1) найдем переменную x_3:
  $2x_3 = -2$
  $\mathbf{x_3 = -1}$
- Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную x_2:
  $x_2 = 3 - 3x_3 = 3 - 3\cdot(-1) = 6$
- Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную x_1:
  $x_1 = 12 - x_2 - x_3 = 12 - 6 - (-1) = 7$

Ответ:

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 7 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -1 \end{matrix}\right] \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = 7 \\ a_1 = 6 \\ a_2 = -1 \end{matrix}$$

Общее решение: $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

График функции $p(x) = -x^2 + 6x + 7$ показан на этом рисунке.



Мы видим, что кривая проходит через заданные точки $(1,12)$, $(2,15)$, $(3,16)$

Лагранж предложил такой полином:

$$\mathcal{L}_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x)$$

где

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \dots \frac{x-x_n}{x_0-x_n}$$

$$l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \dots \frac{x-x_n}{x_1-x_n}$$

$$l_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \dots \frac{x-x_n}{x_2-x_n}$$

$$\vdots$$

$$l_n(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_n-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_n-x_2} \dots \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.$$

5) Пусть

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, & y_0 &= f(x_0) = 1, \\ x_1 &= 2, & y_1 &= f(x_1) = 4, \\ x_2 &= 3, & y_2 &= f(x_2) = 9. \end{aligned}$$

Найдём полином степени ≤ 2 : $\mathcal{L}(1) = 1$, $\mathcal{L}(2) = 4$, $\mathcal{L}(3) = 9$.

Решение:

$$\ell_0(x) = \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3,$$

$$\ell_1(x) = \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} = -x^2 + 4x - 3,$$

$$\ell_2(x) = \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1.$$

Тогда искомый полином:

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 4 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 9 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2}$$
$$= x^2.$$

Векторные пространства:

Пусть $V \neq \emptyset$ — мн-во, $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$, тогда говорят, что V — век-ое пр-во над F если есть две операции:

1) $+ : V \times V \to V$ (= сложение векторов)

$(a, b) \mapsto a + b$

2) $\cdot : F \times V \to V$ (= умножение на число)

$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

которые удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ (*коммутативность сложения*);
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ (*ассоциативность сложения*);
3. существует такой элемент $\mathbf{0} \in V$, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V$ (*существование нейтрального элемента относительно сложения*), называемый **нулевым вектором**, или просто **нулём**, пространства V;
4. для любого $\mathbf{x} \in V$ существует такой элемент $-\mathbf{x} \in V$, что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, называемый вектором, **противоположным** вектору $\mathbf{x}$;
5. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ (*ассоциативность умножения на скаляр*);
6. $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (*унитарность: умножение на нейтральный (по умножению) элемент поля F сохраняет вектор*).
7. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ (*дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров*);
8. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ (*дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов*).

7) Пусть $V = \mathbb{R}[x] = \{$ все полиномы $a_n x^n + \dots + a_0$, $n \geq 0 \}$

тогда если $p(x), q(x) \in V$, то очевидно, что обычная сумма $p(x) + q(x)$ опять полином.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot p(x)$ тоже полином.

Проверка аксиом (1)–(8) сводится к проверки для чисел.

$\Rightarrow V$ – векторное пространство

8) Пусть $\mathcal{F}[a,b] = \{$ функции $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \}$

Пусть $f, g \in \mathcal{F}[a,b]$ тогда положим:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$$

Так как $f(x)$, $\lambda \cdot f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (1) – (8) – выполнены.

$\Rightarrow V$ – векторное пр-во

9) $\mathcal{F}_0[1,7] = \{$ функции такие, что $f(5) = 0 \}$.

Если $f, g \in \mathcal{F}_0[1,7] \Rightarrow f(5) = 0$, $g(5) = 0$

получаем: $(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow f + g \in \mathcal{F}_0[1,7]$.

Если $f \in \mathcal{F}_0[1,7] \Rightarrow f(5) = 0$,

имеем $(\lambda \cdot f)(5) = \lambda \cdot f(5) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{F}_0[1,7]$

$\Rightarrow \mathcal{F}_0[1,7]$ – векторное пространство

10) Пусть $\mathcal{F}_1[1,7] = \{ f \in \mathcal{F}[1,7] : f(5) = 1 \}$.

Тогда, если $f, g \in \mathcal{F}_1[1,7] \Rightarrow f(5) = 1,\ g(5) = 1$

$$\Rightarrow (f+g)(1) := f(1) + g(1) = 1 + 1 = 2$$

т.е., $f+g \notin \mathcal{F}_1[1,7]$

$\Rightarrow \mathcal{F}_1[1,7]$ не векторное пр-во