#3. Век-ые пр-ва и линейная зависимость

Разберём задачу из ДЗ №2.

Проведите исследование используя вышеупомянутые ресурсы и свои знания.

(3) Определить будет ли заданное множество V с операциями $\oplus, \odot$,

$$\oplus : V \times V \to V, \qquad \odot : \mathbb{R} \times V \to V,$$

векторным пространством?

Если нет, то укажите какие именно аксиомы не выполнены. Если не оговорено противное, то операции $+$ и $\cdot$ являться обычным сложением и умножением соответственно, а также мы полагаем что основное поле $F = \mathbb{R}$.

(a)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R},\ b = 3 \cdot a + 1 \right\}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \end{pmatrix}$$

(b)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ b \end{pmatrix}$$

(c)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$V = \mathbb{R}, \qquad \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} := \mathbf{a} - \mathbf{b}, \qquad \lambda \odot \mathbf{a} := \lambda \cdot \mathbf{a}.$$

(e)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + x + 5 \\ b + y - 7 \\ c + z + 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a + 5(\lambda - 1) \\ \lambda \cdot b - 4(\lambda - 1) \\ \lambda \cdot c + \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Решение: 1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R},\ b = 3a + 1 \right\}$.

пусть $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in V \Rightarrow \begin{array}{l} b = 3a + 1 \\ b' = 3a' + 1 \end{array}$

Находим $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$

$$b + b' = (3a + 1) + (3a' + 1) = 3(a + a') + 2$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \notin V$, т.к. если бы $\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix} \in V$

$\Downarrow$

$(b + b') = 3(a + a') + 1.$

$\Rightarrow$ Ответ: V — не векторное пр-во.

2) $V=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$, $\lambda\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\lambda a\\b\end{pmatrix}$

Имеем: $(-1)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$

с другой стороны, обратный вектор к $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ это $\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$

т.е. $-\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$

Тогда получаем: $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=(1+(-1))\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$

с другой стороны:

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2b\end{pmatrix}$$

Если бы V было бы векторным пр-вом, $\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2b\end{pmatrix}$ для всех $b\in\mathbb{R}$

но $b=2b\Leftrightarrow b=0$.

Ответ: V – не векторное пр-во

3) $V=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$, $\lambda\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\lambda a\\0\end{pmatrix}$

Имеем: $(-1)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=(1+(-1))\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

С другой стороны: $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-a\\b+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Если бы V – век. пр-во $\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}\Rightarrow b=0$.

но b было выбрано любым. $\Rightarrow$ Ответ: V – не век-ое пр-во.

d) $V=\mathbb{R}$, $a \oplus b := a-b$.

Имеем: $(1\oplus 2)\oplus 3 = (1-2)\oplus 3 = (-1)\oplus 3 = -1-3=-4$

$$1\oplus(2\oplus 3) = 1\oplus(2-3) = 1\oplus(-1) = 1-(-1) = 2$$

Если бы V век-ое пр-во $\Rightarrow a\oplus(b\oplus c) = (a\oplus b)\oplus c$ для всех $a,b,c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ V — не век-ое пр-во

$\boxed{\text{Линейная зависимость.}}$

Пусть V — век. пр-во над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$,

говорят, что векторы $V_1,\dots,V_n$ — линейно зависимы

если $\exists\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ не все равны 0,

$$\alpha_1V_1+\dots+\alpha_nV_n = 0.$$ это нулевой вектор в V

Если же равенство $\alpha_1V_1+\dots+\alpha_nV_n=0$ может выполнятся только когда $\alpha_1=\dots=\alpha_n$

то, $V_1,\dots,V_n$ называются линейно НЕ зависимыми

(1) $V=\mathbb{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{R}\right\}$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ - линейно зависимы?

<u>Решение</u> Пусть $V_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, видно, что

$$V_2=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2\cdot V_1$$

$$\Rightarrow V_2 = 2\cdot V_1 \Leftrightarrow V_2-2V_1 = 0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (-2)\cdot V_1+(1)\cdot V_2 = 0$$

$\Rightarrow$ в нашем случае мы нашли числа: $\alpha_1=-2$, $\alpha_2=1$ для которых верно $\alpha_1\cdot V_1+\alpha_2\cdot V_2=0$

$\Rightarrow$ Ответ: V_1, V_2 — линейно зависимы.

② Когда два вектора в $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$ линейно зависимы, а когда нет?

Решение Фиксируем вектор $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ и рассмотрим произвольный вектор $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Пусть v, u – линейно зависимы $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ не все $= 0$ такие, что $\alpha_1 \cdot v + \alpha_2 \cdot u = \mathbf{0}$

Нулевой вектор $\mathbf{0}$ в $\mathbb{R}^2$ это $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, итак имеем:

$$\alpha_1 \cdot v + \alpha_2 \cdot u = \alpha_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot a \\ \alpha_1 \cdot b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \cdot x \\ \alpha_2 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a + \alpha_2 x \\ \alpha_1 b + \alpha_2 y \end{pmatrix}$$

и так как $\alpha_1 \cdot v + \alpha_2 \cdot u = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ мы получаем: $\begin{pmatrix} \alpha_1 a + \alpha_2 x \\ \alpha_1 b + \alpha_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot x = 0 \\ \alpha_1 \cdot b + \alpha_2 \cdot y = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 \cdot x = -\alpha_1 \cdot a \\ \alpha_2 \cdot y = -\alpha_1 \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot a \\ y = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot b \end{cases}$$

Пусть $k = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \Rightarrow x = ka,\ y = kb$

$\Rightarrow$ если векторы $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – линейно зависимы

то $x = ka,\ y = kb \Rightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = kv.$

$\Rightarrow$ v и u – линейно зависимы $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : u = kv.$

т.е., когда они коллинеарны.

$\Rightarrow$ u, v – линейно не зависимы если u, v – не коллинеарны.

③ Пусть $V=\mathbb{R}^3=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right\}$, когда любые три вектора линейно зависимы?

Решение: Пусть $v_1=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}$

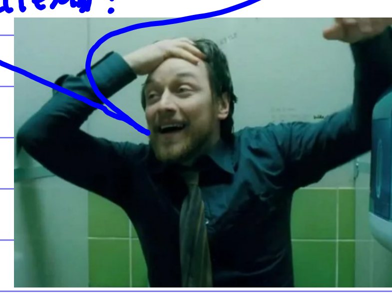
и пусть они линейно зависимы $\Rightarrow \exists\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

что $x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3=\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\quad x_1\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\\b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\\c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Это же линейные системы!



$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\\b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\\c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ векторы v_1, v_2, v_3 линейно зависимы $\Leftrightarrow$ система имеет НЕ нулевое решение!

Если же она имеет только нулевое $\Rightarrow$ векторы линейно зависимы!

Тот же вопрос про m векторов в $\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\right\}$

решается таким же образом.

I.e., если $v_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}, \dots, v_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix}$ линейно зависимы

$\Leftrightarrow$ когда система: $\begin{cases}a_{11}x_1+\dots+a_{1m}x_m=0\\\vdots\qquad\ddots\qquad\vdots\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+\dots+a_{nm}x_m=0\end{cases}$

имеет не нулевое решение, а если она имеет только нулевое решение $\Rightarrow$ векторы линейно зависимы.

(4) Пусть $V_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $V_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, V_1, V_2, V_3 – л3?

Решение Нам нужно решить систему:

$$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+1\cdot x_3=0 \\ 3x_1+6x_2+0\cdot x_3=0 \end{cases}$$

Находим: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

т.е., получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=0 \\ -3x_2-3x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-4x_3+2x_3=0 \\ x_2=-x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$$

Общее решение $X=\begin{pmatrix}2x_3\\-x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ мы получили не нулевое решение

$\Rightarrow$ эти векторы – линейно зависимы

Так как общее решение $X=x_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, то это значит, что

$$2\cdot V_1+(-1)\cdot V_2+1\cdot V_3=0$$

т.е., $\boxed{2V_1-V_2+V_3=0}$

$\Rightarrow$ любое не нулевое решение и даёт искомую линейную комбинацию.

⑤ $V = \mathbb{R}[x]$, $p_1(x) = 2x - 1$

$p_2(x) = 3x^2 - 2x + 2$,

$p_3(x) = 3x^2 + 1$

$p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ – ЛЗ ?

Решение Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\lambda_1 \cdot p_1(x) + \lambda_2 \cdot p_2(x) + \lambda_3 \cdot p_3(x) = 0$$

Здес 0 – нулевой полином, $0(x) = 0$.

Получаем:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \cdot p_1(x) = 2\lambda_1 x - \lambda_1 \\
+\ &\lambda_2 \cdot p_2(x) = 3\lambda_2 x^2 - 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 \\
&\lambda_3 \cdot p_3(x) = 3\lambda_3 x^2 + \lambda_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot p_1(x) + \lambda_2 \cdot p_2(x) + \lambda_3 \cdot p_3(x) &= 2\lambda_1 x - \lambda_1 \\
&+ 3\lambda_2 x^2 - 2\lambda_2 x + 2\lambda_2 \\
&+ 3\lambda_3 x^2 + \lambda_3 \\
&= (3\lambda_3 + 3\lambda_2)x^2 + (2\lambda_1 - 2\lambda_2)x \\
&+ (-\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)
\end{aligned}
$$

Если $\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_3 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

опять линейная система

Мы вновь получили линейную систему, которую удобнее записать так:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Решение методом Гаусса

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \times(2) \underset{L_2-(-2)\cdot L_1 \to L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \times(-1{,}5) \underset{L_3-(1{,}5)\cdot L_2 \to L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 = 0 \\ 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную x_2:

  $2x_2 = -2x_3$

  $\boldsymbol{x_2 = -x_3}$
- Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную x_1:

  $-x_1 = -2x_2 - x_3 = -2\cdot(-x_3) - x_3 = x_3$

  $\boldsymbol{x_1 = -x_3}$

Ответ:

$x_1 = -x_3$

$x_2 = -x_3$

$x_3 = x_3$

Общее решение: $X = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Это значит, что система имеет ненулевое решение

$\Rightarrow$ векторы $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — линейно зависимы.

Более того, т.к. например $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — одно из решений

$\Rightarrow (-1)\cdot p_1(x) + (-1)\cdot p_2(x) + 1\cdot p_3(x) = 0.$

т.е., $-p_1(x) - p_2(x) + p_3(x) = 0$

Проверим:

$$\begin{aligned} -p_1(x) &= -2x + 1 \\ + \quad -p_2(x) &= -3x^2 + 2x - 2 \\ p_3(x) &= 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

$-p_1(x) - p_2(x) + p_3(x) = -\cancel{2x} + \cancel{1} - \cancel{3x^2} + \cancel{2x} - \cancel{2} + \cancel{3x^2} + \cancel{1} = 0.$

Ещё это равенство можно записать так $p_1(x) = p_2(x) - p_3(x)$.

- Пусть $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ — функции,

$v = \sin(x)$, $u = \cos(x)$, они лз?

Решение. Пусть $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 v + \lambda_2 u = 0$

где $0(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Получаем: $\lambda_1 v + \lambda_2 u = \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0$

Итак, если $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0$

то это должно быть верно ДЛЯ ВСЕХ $x \in \mathbb{R}$

Поэтому пусть $x = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \sin(0) + \lambda_2 \cdot \cos(0) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

Пусть $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \lambda_2 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

Вывод: равенство $\lambda_1 \cdot \sin x + \lambda_2 \cdot \cos x = 0$

может выполнятся при любых x

если и только если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow$ Функции $\sin(x)$, $\cos(x)$ не являются линейно зависимы.

Линейные оболочки.

Определение 2.1.4. Множество состоящее из всех линейных комбинаций данных векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ называется *линейной оболочкой натянутой на векторы* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ и обозначатеся $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$.

Таким образом можно записать

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m\},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – все возможные числа из $\mathbb{R}$.

⑥ Пусть $a \in \mathbb{R}$, и $V = \mathbb{R}$, $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(a)$ – ?

Решение

По определению:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(a) := \{\alpha_1 \cdot a, \ \alpha_1 \in \mathbb{R}\}.$$

(1) $a \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 \cdot a$ может быть любым числом:

ур-ие $\alpha_1 \cdot a = b$ имеет решение $\alpha_1 = \frac{b}{a_1}$

$\Rightarrow \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(a) = \mathbb{R}.$

(2) $a = 0 \Rightarrow \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(0) = \{\alpha \cdot 0 = 0\} = \{0\}$