№ 1-1.

Тема: линейные системы, геометр. интерп-ия, элементарные преобразования.

На лекции мы не успели док-ть почему элементарные преобразования над линейной системой не меняют мн-во решений.

Схема док-ва:

Пусть дана линейная система:

$$\begin{cases} L_1(x) = b_1 \\ \vdots \\ L_m(x) = b_m \end{cases}$$

где $L_1(x) := a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$L_m(x) := a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

Далее, пусть $Y_1 := \{ L_1(x) = b_1 \}$ - ур-ие № 1

$\vdots$

$Y_m := \{ L_m(x) = b_m \}$ - ур-ие № m

Пусть $S = (s_1, \dots, s_n)$ — решение этой системы.

$\Rightarrow \forall\ Y_i, Y_j$, S - решение для Y_i, Y_j

$\Rightarrow S$ - решение для $Y_i + Y_j$.

Пусть $S = (s_1, \dots, s_n)$ - решение для $Y_i + Y_j$ и Y_i

$\Rightarrow S$ - решение для $(Y_1 + Y_2) - Y_1$ которое $= Y_2$

Вывод: S - решение для $Y_i, Y_j \Leftrightarrow S$ - решение для Y_i и $Y_i + Y_j$.

1) Решить систему

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение: Составим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}\right)$$

Наша цель привести её к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

- В нашей матрице целесообразно тогда поменять местами первую и вторую строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4+(-2)\cdot 2 & -8+(-2)\cdot(-3) & 12+(-2)\cdot 2 & 1+(-2)\cdot 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь осталось занулить это используя вторую строку, т.к., если прибавить первую строку, то левый 0 заменится на число.

• Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2+2\cdot 1 & 8+2\cdot(-4) & -1+2\cdot 8 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Запишем полученную систему по этой матрице:

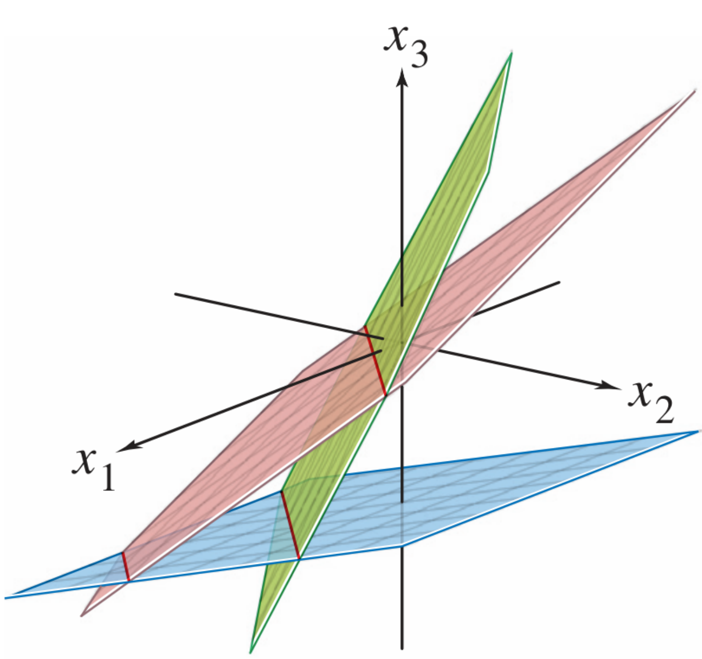
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 8 \\ 0 = 15 \end{cases}$$

Последнее равенство это короткая запись ур-ия

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 15$$

но у такого ур-ия нет решений, т.к $0 \neq 15$.

Ответ: исходная система решений не имеет.



Здесь указаны плоскости соответствующие уравнениям системы

Видно что все три плоскости не пересекаются

$\Rightarrow$ система решений не имеет.

2) Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 12 \\ x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4 \\ 5x_3 - x_4 = 7 \\ x_3 + 3x_4 = -5 \end{cases}$$

Решение расширенная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right) \cdot(-5)$$

так проще с 1 чем с 5.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5+(-5)\cdot 1 & -1+(-5)\cdot 3 & -5+(-5)\cdot 7 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -40 \end{array}\right)$$

Таким образом, мы получили систему:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 12 \\ x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_3 + 3x_4 = 7 \\ -16x_4 = -40 \end{cases} \Rightarrow \underline{x_4 = 2.5}$$

подставляем, получаем:
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 20 = 12 \\ x_2 - 7x_3 + 5 = -4 \\ x_3 + 7.5 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{x_3 = -0.5.}$$

Подставляем и получаем: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 1 = 12 - 20 \\ x_2 - 3.5 = -4 - 5 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -8 + 1 = -7 \\ x_2 = -9 + 3.5 = -5.5 \end{cases}$$

т.е., $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -7 \\ x_2 = -5.5 \end{cases} \Rightarrow \underline{x_2 = -5.5}$

$\Rightarrow x_1 + 4\cdot(-5.5) = -7 \Rightarrow x_1 = -7 + 22 = 15.$

$$\boxed{\text{Ответ: } x_1 = 15,\ x_2 = -5.5,\ x_3 = -0.5,\ x_4 = 2.5.}$$

3) При каких h, k, система будет иметь решение?

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h \\ -6x_1 + 3x_2 = k \end{cases}$$

Решение: Имеем: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & h \\ -6 & 3 & k \end{array}\right) \cdot 3 +$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & h \\ -6 + 2\cdot 3 & 3 + (-1)\cdot 3 & k + 3h \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & h \\ 0 & 0 & k+3h \end{array}\right)$$

Получим систему: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h \\ 0x_1 + 0x_2 = k + 3h \end{cases}$

$\Rightarrow$ система не будет иметь решение, если $k + 3h \neq 0$.

Пусть $k+3h=0$, т.е., $k=-3h$, и мы тогда получаем:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 = h + x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{h+x_2}{2}$$

т.е., если $x_2 = a \in \mathbb{R}$ – любое число, то $x_1 = \frac{1}{2}(h+a)$.

Ответ: система имеет решение, если $k=-3h$, и её решение это мн-во $x_1 = \frac{1}{2}(h+a)$, $x_2 = a$, где $a \in \mathbb{R}$ – любое число.

4) Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = -3 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \cdot(2) + \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2+2\cdot 1 & 3+2\cdot 0 & 2+2\cdot 0 & 1+2\cdot(-2) & 5+2\cdot(-3) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot 3 \\ \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -2 \end{array}\right) -$$

можно было и так $\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$ +

потому что с целыми числами проще чем с дробями

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :6 \\ \\ :(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) -$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Мы получили ступенчатый вид.
Запишем тепер соответствующую систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = -3 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 2x_4 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = 1 - 3x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 2x_4 \\ x_2 = -(1 - 3x_4) \\ x_3 = 1 - 3x_4 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Пусть $x_4 = a \in \mathbb{R}$ – произвольное число, тогда получаем:

Ответ: общее решение $S = (-3 + 2a, -1 + 3a, 1 - 3a, a)$

где a – произвольное число,

т.е., $x_1 = -3 + 2a$
$x_2 = -1 + 3a$
$x_3 = 1 - 3a$
$x_4 = a$