Бином Ньютона. Последовательность.

1. Найти слагаемое, получающееся при разложении
$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$$
и содержащее x^3.

2. Доказать равенство
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$
алгебраически и комбинаторно.

3. Найти коэффициент слагаемого многочлена $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8.

4. Показать, что последовательность a_n ограничена (т.е. ограничена и сверху и снизу) тогда и только тогда, когда
$$\exists C>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}: \quad |a_n|<C.$$

5. Доказать ограниченность последовательности $a_n=\frac{2n^2-1}{2+n^2}$.

6. Доказать неограниченность последовательности $b_n=n^2-n$.

7. Исследовать на монотонность последовательность $a_n=\frac{5^n}{n!}$.

8. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентно
$$x_1=a, \quad x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$$
возрастает при $a=0$, убывает при $a=4$.

9. Исследовать на монотонность последовательность $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Домашнее задание

1. Найти коэффициент многочлена $(1+2x-3x^2)^4$ при x^3 и x^4.

2. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию:

   a) $\forall m\ \exists n:\ x_m\neq x_n$;

   b) $\exists N\ \forall n>N:\ x_n<x_N$;

   c) $\exists N_1\ \forall n>N_1: x_{N_1}>x_n$ и $\exists N_2\ \forall n>N_2: x_{N_2}<x_n$;

   d) $\exists N\ \forall n>N\ \forall m>n:\ x_n<x_m$;

   e) $\forall n\ \exists m>n\ \exists k>n:\ x_m<x_n<x_k$.

3. Доказать ограниченность последовательности
$$a)\quad a_n=\frac{n^2+4n+8}{(n+1)^2}, \qquad b)\quad a_n=\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}.$$

4. Доказать неограниченность последовательности
$$a)\quad a_n=\frac{n^3}{n^2+1}, \qquad b)\quad a_n=\sqrt{n^2+(-1)^n\cdot\sqrt{n^3}}-n.$$

5. Доказать, что последовательность монотонна, начиная с некоторого номера (указать номер!)
$$a)\quad a_n=\frac{3n+4}{n+2}, \qquad b)\quad a_n=\frac{(3n+1)^2}{3^n}.$$

6. Пусть $x_1=2$, $x_{n+1}=0,5\cdot x_n^2-1,\ n\in\mathbb{N}$.

   a) Доказать, что последовательность ограничена.

   b) Доказать, что подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ данной последовательности монотонны, начиная с некоторого номера.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти коэффициент многочлена

   a) $(1-x+x^2)^3$ при x^3;

   b) $(1+x^2+x^3)^7$ при x^{11}.

2. Найти члены разложения, являющиеся целыми числами

$$a) \quad (\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5, \qquad b) \quad (\sqrt{5}-\sqrt{2})^8.$$

3. Доказать ограниченность последовательности

$$a) \quad a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad b) \quad a_n = \frac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-1)},$$

$$c) \quad a_n = n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}).$$

4. Доказать неограниченность последовательности

$$a) \quad a_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}, \qquad b) \quad a_n = \frac{n-n^4}{(n+2)^3},$$

$$c) \quad a_n = \sqrt{n^4+n^3+1}-\sqrt{n^4-n^3+1}.$$

5. Доказать, что последовательность монотонна, начиная с некоторого номера (указать номер!)

$$a) \quad a_n = \frac{n^2+24}{n+1}, \qquad b) \quad a_n = \frac{n^3}{2^n}.$$

6. Пусть $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 0,5 \cdot x_n^2 - 1, \ n \in \mathbb{N}$.

   a) Доказать, что последовательность ограничена снизу, но не ограничена сверху.

   b) Возрастает

7. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{2+x_n^2}{2x_n}$ убывает.