Звёздочкой обозначены сложные и не обязательные к решению задачи.

1. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ верно:

   a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$;

   b) $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

2. Докажите, что для любых множеств $A$, $B$, $C$ выполняются равенства

   a) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

   b) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

   c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

   d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет использован и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.

4. Про множества $A_1, \ldots, A_6$ известно, что $A_i \setminus A_j = \varnothing$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant 6$. Докажите, что $(A_3 \cup A_4 \cup A_5) \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_6) = \varnothing$.

5. На доске написаны $N$ цифр — нули и единицы в любой комбинации. Разрешается выполнять два действия:

   - заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);
   - заменять цифру, стоящую после первой единицы.

   Докажите, что за конечное число шагов можно получить любую желаемую последовательность длины $N$.

* a) Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка $1 \times 1$, возможно разрезать на уголки из трёх клеток $1 \times 1$.

   b) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

* На краю пустыни, представляющей собой луч прямой, стоит машина и бесконечный резервуар бензина. С полным баком машина может проехать 100 км. В любой точке пустыни можно слить часть бензина из бака и оставить его там на хранение, причём хранимое количество не ограничено. Докажите, что можно проехать сколь угодно далеко вглубь пустыни.

* Докажите, что для любых множеств $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ верно:

$$(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2).$$

1. Для любого целого положительного $n$ докажите равенство:

$$0 \cdot n + 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \ldots + (n-1) \cdot 1 + n \cdot 0 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

2. В некоторой стране лишь конечно много городов, причем любые два различных города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что есть город, из которого можно добраться в любой другой по имеющимся дорогам.

3. Верно ли, что для любых множеств $A$, $B$ и $C$ выполнено

   a) $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = B \setminus C$?

   b) $((A \setminus B) \setminus C) \setminus D = A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$?

   c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$?

   d) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$?

4. Докажите, что для любых множеств $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ выполнено равенство:

$$(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap \ldots \cap (A_n \setminus B_n).$$

5. Про множества $A$, $B$, $C$ известно, что $A \cup B \subseteq C \setminus (A \cap B)$. Верно ли, что тогда $A \cap B = \varnothing$?