1. Найдите обратное к 74 по модулю 47.
2. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $n \mid m$, то $a \equiv b \pmod{n}$.
3. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{n}$, то $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ \text{НОК}(m, n))$.
4. Решите систему сравнений:
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5}; \\ x \equiv 4 \pmod{7}. \end{cases}$$
5. Найдите остаток от деления:

   a) $4^{18} + 5^{17}$ на 3; b) $2^{2^{2021}} - 1$ на 17; c) $8^{900}$ на 29; d) $\sum_{k=0}^{104} 10^k$ на 107.
6. Докажите, что при любом $a \in \mathbb{Z}$ число $a^{73} - a$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$.
7. Укажите такое $N$, что существует ровно 8 вычетов по модулю $N$, обратных самим себе. (Другими словами, сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{N}$ имеет ровно 8 решений в вычетах по модулю $N$).

1. Найдите две последние цифры числа $99^{1000}$.

2. Найдите обратное к числу 53 по модулю 42.

3. Один из вариантов криптоалгоритма RSA таков. Выбирают два (больших) различных простых числа $p$ и $q$, для которых вычисляют $n = pq$ и $m = (p-1)(q-1)$; затем фиксируют некоторое $e \in \{2, \dots, m-2\}$ такое, что $(e, m) = 1$, и находят число $d$ со свойством $ed \equiv 1 \pmod{m}$. Пара $(e, n)$ является ключом зашифровывания и публикуется, а пара $(d, n)$ — это ключ расшифровывания, который держат в секрете.

   Всякий, зная публичный ключ, может зашифровать некоторое сообщение (открытый текст представляют в виде числа $P \in \{1, \dots, n-1\}$), получая шифротекст $C = P^e \bmod n$. Адресат сообщения, знающий секретный ключ, расшифровывает открытый текст $P' = C^d \bmod n$. Докажите, что:

   (a) по данным $e$ и $m$ всегда можно найти число $d \in \{2, \dots, m-2\}$, причем для этого есть алгоритм, лучший (это не нужно доказывать) полного перебора;

   (b) расшифровка корректна, то есть $P' = P$ для любого открытого текста $P$.

4. При каких целых $n$ число $a_n = n^2 + 3n + 1$ делится на 55?

5. Докажите, что если число $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + e^{10} + f^{10}$ кратно 11, то $abcdef$ делится на $11^6$.

6. Найдите остаток от деления ${}^{2020}3$ (3 в степени 3 в степени 3... 2020 раз) на 46.