1. В теории чисел для деления нацело и остатка от деления часто используются следующие обозначения:
$$a = bq + r,$$
где $a \in \mathbb{Z}$ — делимое, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — делитель, $q \in \mathbb{Z}$ — неполное частное (результат деления нацело), а $r \in \{0, \dots, b-1\}$ — остаток от деления.

   Найти частное q и остаток r при делении числа a на число b, если:

   a) $a = 431$, $b = -77$; b) $a = n^2 + n + 2$, $b = n - 1$; c) $a = 2^{100} - 1$, $b = 2^7 - 1$.

2. Заметим, что на каждом шаге алгоритма Евклида ($(a, b) = (b, a \bmod b)$) новые значения в скобках $(\_, \_)$ зависят от старых значений линейно, с целыми коэффициентами:
$$b = 0 \cdot a + 1 \cdot b;$$
$$a \bmod b = 1 \cdot a + (-(a \operatorname{div} b)) \cdot b.$$
Но тогда и на самом последнем шаге ($(x, 0) = x$) искомый НОД выражается линейной функцией с целыми коэффициентами от исходных аргументов a, b. Алгоритм поиска этих коэффициентов называется **расширенным алгоритмом Евклида**.

   Другими словами, расширенный алгоритм Евклида кроме (a, b) находит такие $u, v \in \mathbb{Z}$, что
$$(a, b) = au + bv.$$
Используя расширенный алгоритм Евклида, найдите такие u, v, что
$$(270, -84) = 270 \cdot u - 84 \cdot v.$$

3. Решите уравнение $36x - 43y = 12$ в целых числах.

4. Существует ли решение уравнения $6x + 10y + 15z = 29$

   (a) в целых числах?

   (b) в натуральных числах?

5. Выразите $(13a + 8b, 5a + 3b)$ через (a, b), где $a, b \in \mathbb{N}$.

6. Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}$ таковы, что $a \mid bc$ и $(a, b) = 1$. Докажите, что $a \mid c$.

1. Сколько различных делителей у числа $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^3$?
2. Допустим, число $a > 1$ делится на 2, но не на 4. Докажите, что тогда у a поровну положительных четных и нечетных делителей.
3. Пусть число $p > 3$ простое. Тогда $24 \mid (p^2 - 1)$.
4. Докажите, что дробь $\dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$ несократима при любом целом $n > 0$.
5. Решите уравнение $19x + 22y = -21$ в целых числах.
6. Докажите, что $(ac, b) = (a, b)$, если b и c взаимно просты.
7. Докажите, что любую денежную сумму больше семи тугриков можно представить монетами по 3 и по 5 тугриков (монеты доступны в неограниченном количестве; не обязательно использовать монеты обоих номиналов; долги для представления сумм не допускаются).