№ 1–4

Векторные под-ва, Span, базис.

V – вект. пр-во над F

$U \subset V$, U – подпр-во, то U – вектор. под-cтво

говорят, что U замкнуто относительно операции $+$ и ум-ия на скаляр →

если
(1) $0 \in U$
(2) $\forall x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$
(3) $\forall x \in U, \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha \cdot x \in U$

означает, что $U \neq \varnothing$.

(1) следует из (2) & (3)

- Если $x \in U \Rightarrow 0 \cdot x \in U$, но $0 \cdot x = \mathbb{0} \Rightarrow 0 \in U$.

или

- Если $x \in U \Rightarrow -x \in U \Rightarrow x + (-x) \in U$

$$\Downarrow$$
$$0 \in U.$$

Но это всё верно если $U \neq \varnothing$.
поэтому лучше требовать (1)
т.к. без (1) $\varnothing$ – будет подпространство

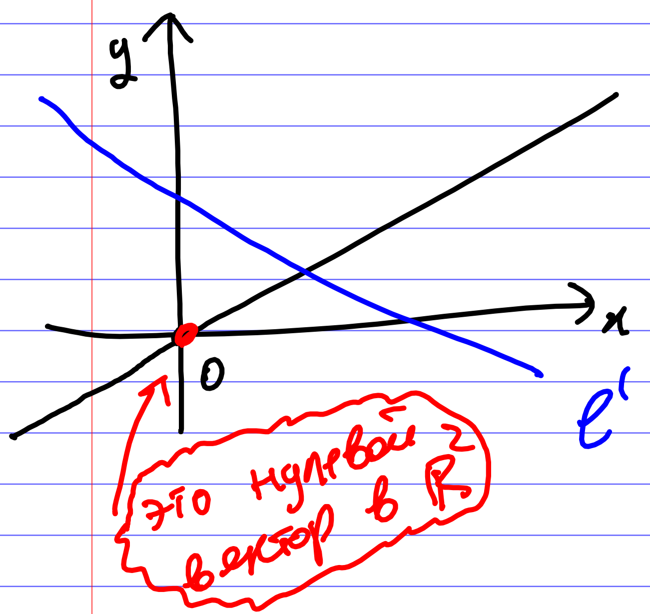
А мы этого не хотим!

$\varnothing$ – не подпространство

В любом век. пр. V всегда есть два несобственных подпр-ва $\{0\}$ и V.

Ⓘ $V = \mathbb{R}^2$ (= плоскость)

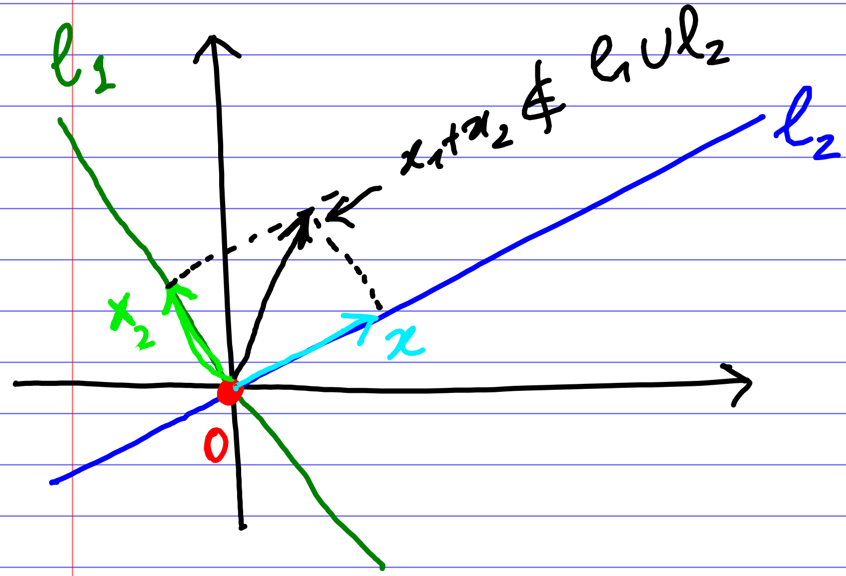
КАКИЕ ТАМ под-ва?



(1) Если $0 \in l$
$\Rightarrow l$ - под-во.

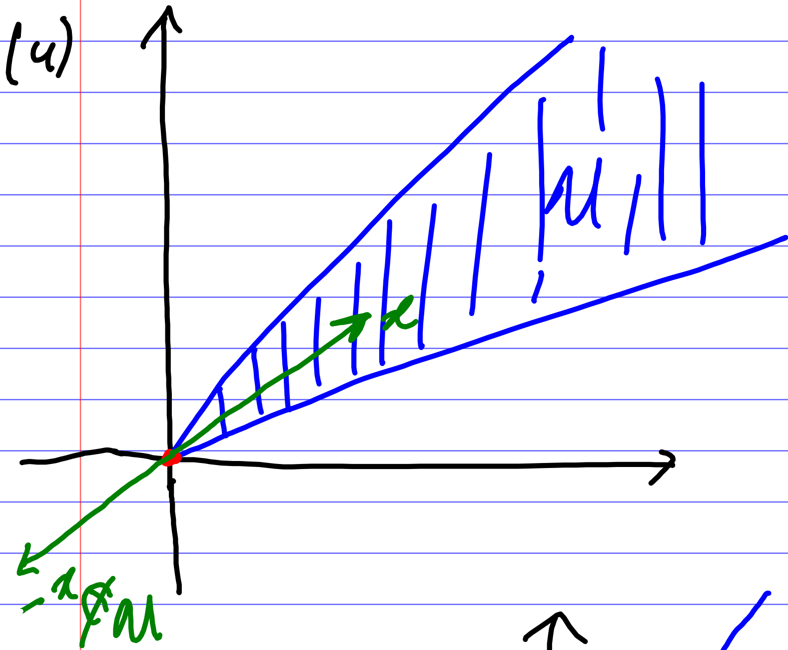
(2) l' — не под-во
т.к $0 \notin l'$

(3) $U = l_1 \cup l_2$
$l_1 \nparallel l_2$
но U - не под-во
т.к $x+y \notin l_1 \cup l_2$
$x \in l_1$, $y \in l_2$



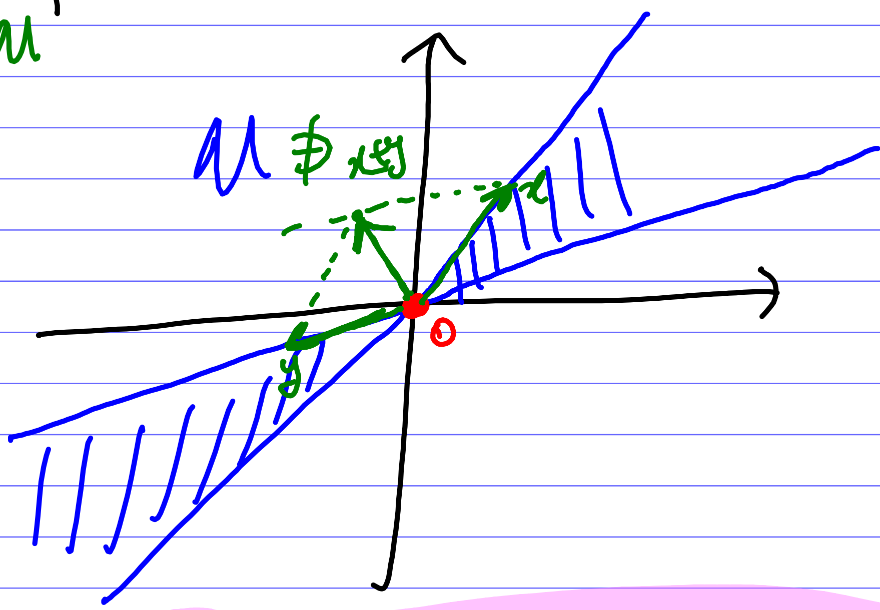
$\Rightarrow U$ - не подпрост-во

(4)



U - не подпр-во, т.к. $\forall x \in U \Rightarrow -x \notin U$.

(5)



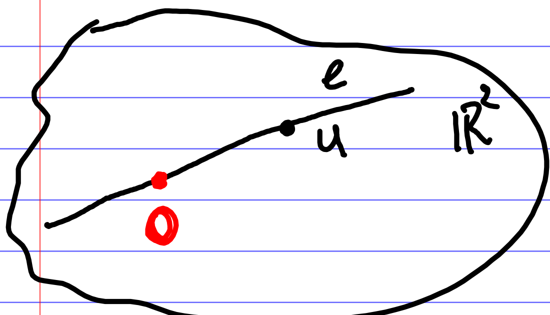
U тоже не будет под-вом, т.к. $x+y \notin U$.

А какие там (в $\mathbb{R}^2$) подпространства?

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ под-во

$\Rightarrow 0 \in U \Rightarrow$ либо $U = \{0\}$

либо $\exists\, u \neq 0,\ u \in U$.



$\Downarrow$

$\lambda u \in U,\ \forall \lambda \in F$

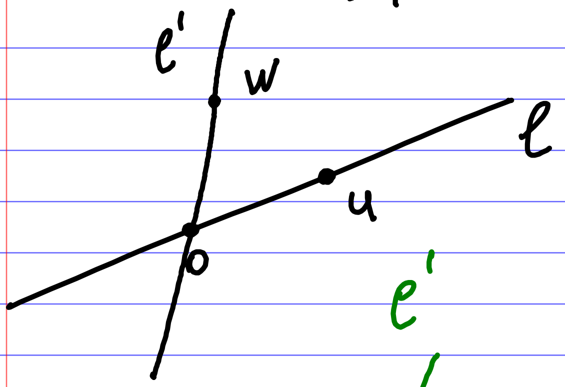
$\Rightarrow \ell \in U$

ℓ - прямая, $\ell \ni 0, u$.

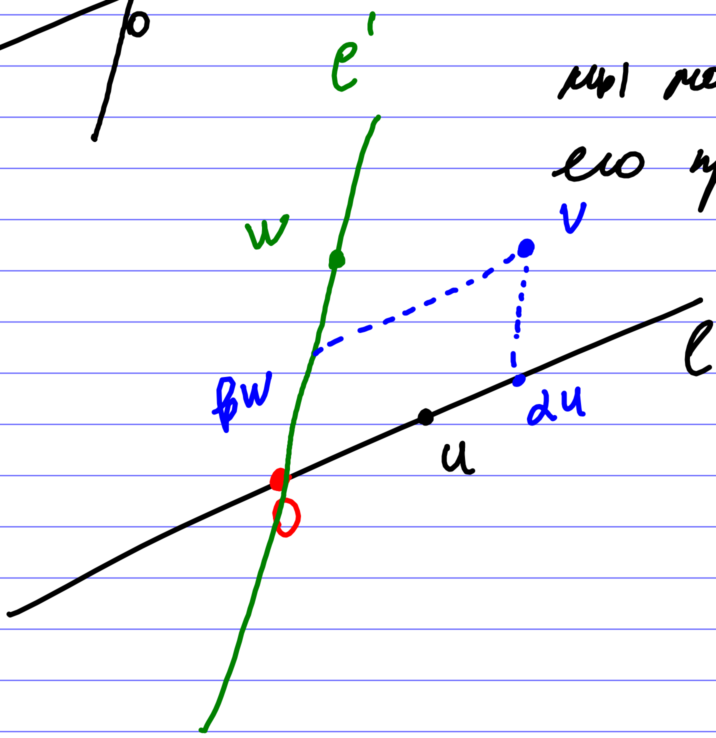
⇒ Если $\mathcal{U} = \ell$ ⇒ $\mathcal{U}$ – под-во

Если $\mathcal{U} \neq \ell$ ⇒ $w \notin \ell$. ⇒ $\ell' \subset \mathcal{U}$.

⇒ $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$.



Действительно, $\forall\, v \in \mathbb{R}^2$ мы можем рассмотреть его проекции на ℓ и ℓ'



$\Rightarrow v = \alpha u + \beta w$

$\Downarrow$

$\mathcal{U} \supseteq \mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$

Вывод: подпространства в $\mathbb{R}^2$ это

размерность

0 ↔ (1) $\{0\} \cong \mathbb{R}^0$

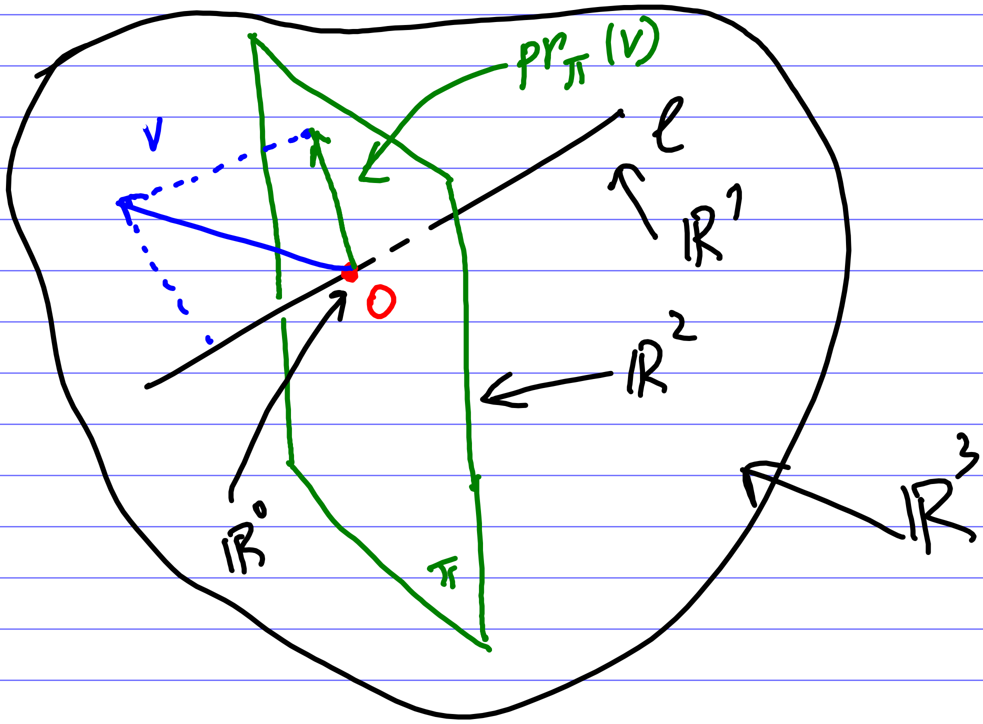
1 ↔ (2) прямая $\ni 0 \cong \mathbb{R}^1$

2 ↔ (3) $\mathbb{R}^2$

Тогда все под-ва в $\mathbb{R}^3$ (аналогично) это $\{0\} = \mathbb{R}^0$, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

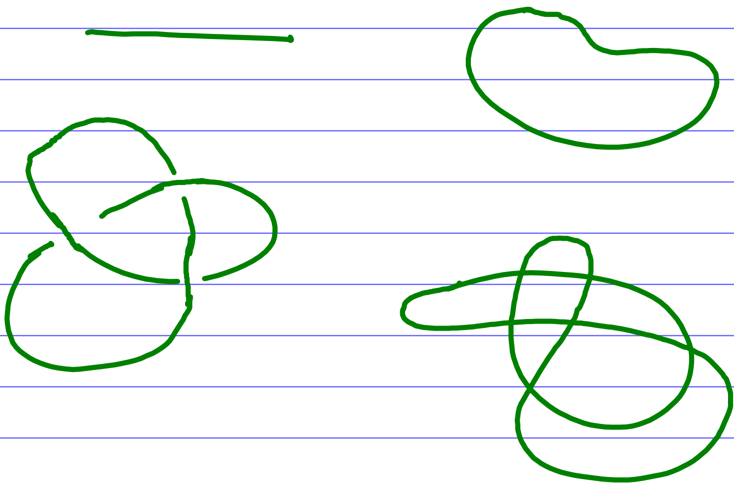
прямая через 0

плоскость через 0

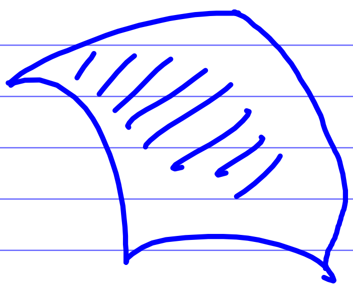


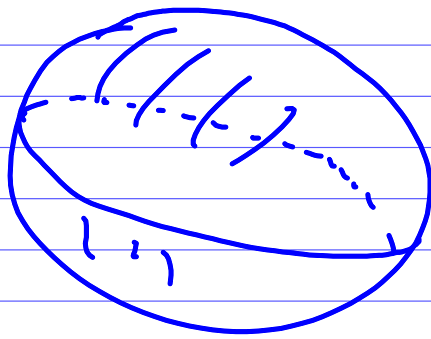
Размерность это число независимых "направлений"

$\dim = 1$.



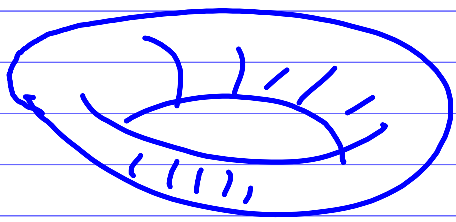
$\dim = 2$





S^2

поверхности



$S^1 \times S^1$

Основной пример это F^n.

Два способа задания в F^n.

(1) $\mathcal{U} = \{x \in F^n : Ax = 0, \ A \in Mat_{m\times n}(F)\}$

(2) $\mathcal{U} = Span_F(S) = \langle S \rangle$ – линейная оболочка

(говорят, что $\mathcal{U}$ натянуто на S)

$$Span_F(S) := \{\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n}, \ v_i \in S, \alpha_i \in F\}$$

линейная комбинация векторов v_i, с коэфф. α_i

Утв

С помощью этих двух способов можно получить <u>любое</u> под-во в F^n

<u>Задача принадлежности вектора подпространству</u>

Дано: $v \in F^n$, $U \subseteq F^n$, U – под-во

Выяснить: $v \in U$?

(1) Если U задано первым способом.

т.е., $U = \{x \in F^n : Ax = 0\}$.

$\Rightarrow v \in U \Leftrightarrow Av = 0$.

(2) Если U задано способом 2.

$U = \langle a_1, \dots a_k \rangle$

$\Rightarrow$ если $v \in U \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k : v = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$

$\Rightarrow V = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$, где $A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k)$

и если $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ решаем систему

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

относительно $(\alpha_1, \dots \alpha_k)$

т.е. $V \in U \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = V$ имеет решение.

Пример $a_1 = (3,4,2)$, $a_2 = (6,8,7)$, $b = (9,12,\lambda)$

при каких λ, $b \in \langle a_1, a_2 \rangle$?

Решение

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & \lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & \lambda - 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ – такая система всегда имеет решение.

$\Rightarrow \forall \lambda$, $b \in U$.

3 # БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ

V — вект. пр-во, $V \supseteq S$ — набор векторов (нек. векторы могут повторяться)

S — базис если 1) S — л. незав.

2) $\mathrm{Span}_F(S) = V$

$\Updownarrow$

$\forall v \in V$ единств. образом представим в виде

$v = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k$

$\dim(V) < \infty \iff$ в V есть конечный базис.

У нас почти всегда $V = F^n$, $S = \mathbb{e}$ — стандар. базис

$\mathbb{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)^T$.

ФАКТ:

V — конечномерно $\Rightarrow$ все базисы имеют одно и тоже число векторов и это число = размерность.

• Пусть $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1 = x_n \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$

W – под-во? Если да, то найти его базис и размерность W.

Решение

W можно представить как множество решений линейной системы

$$\{ x_1 - x_n = 0$$

$\Rightarrow$ W – подпространство.

Так как $W \subseteq \mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{R}^n$ есть стандартный базис $\mathbb{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

то любой вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ в $\mathbb{R}^n$ можно записать так:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{= e_n}$$

$\Rightarrow\ X = X_1 e_1 + X_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

В частности, любой вектор из W можно тоже так расписать. НО! Любой вектор из W имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_1 \end{pmatrix}$

Итак, берём <u>любой</u> вектор w из W, и получаем:

$$w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{n-1} e_{n-1} + x_1 e_n$$

$$= x_1 e_1 + x_1 e_n + x_2 e_2 + \dots + x_{n-1} e_{n-1}$$

$$= x_1 (e_1 + e_n) + x_2 e_2 + \dots + x_{n-1} e_{n-1}.$$

$\Rightarrow$ любой вектор $w \in W$ представляется в виде

$$x_1 (e_1 + e_n) + x_2 e_2 + \dots + x_{n-1} e_{n-1}$$

$$\Rightarrow\ W = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} (e_1 + e_n, e_2, \dots, e_{n-1})$$

Проверим векторы $e_1 + e_n, e_2, \dots, e_{n-1}$ на линейную зависимость

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ такие, что $\lambda_1 (e_1 + e_n) + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1} = 0$

т.к., $e_1 + e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то получаем:

$$\lambda_1 (e_1 + e_n) + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\0\\\vdots\\0\\\lambda_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\lambda_2\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\\lambda_{n-1}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_{n-1}\\\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ \dots,\ \lambda_{n-1}=0$$

$\Rightarrow$ Если $\lambda_1(e_1+e_n)+\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_{n-1}e_{n-1}=0$

то $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_{n-1}=0$

$\Rightarrow$ векторы $e_1+e_n, e_2, \dots, e_{n-1}$ — линейно НЕЗАВИСИМЫ!

А так как $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(e_1+e_n, e_2, \dots, e_{n-1})=W$

$\Rightarrow \{e_1+e_n, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ — базис для W

тут

Число векторов в базисе $= n-1$

$\Longrightarrow \dim(W)=n-1$ (т.е., размерность пространства $= n-1$)

И. В. ПРОСКУРЯКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ