Algebra di Boole

Algebra di Boole

- Per poter affrontare in modo sistematico lo studio dei sistemi di calcolo, abbiamo inizialmente bisogno di un apparato teorico-formale mediante il quale lavorare sulle grandezze binarie

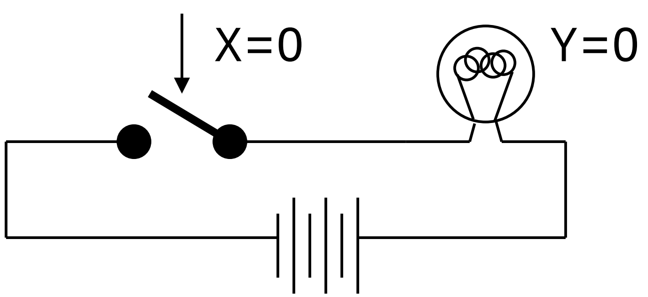
- Lo strumento formale si chiama “Algebra di Boole”
  - Introdotta nel 1874 da George Boole per fornire una rappresentazione algebrica della logica
    - per questo motivo i circuiti elettronici che lavoro su valori binari assumono il nome di circuti “logici” o porte “logiche”
  - Applicata nel 1936 da Claude Shannon allo studio delle reti di commutazione telefonica

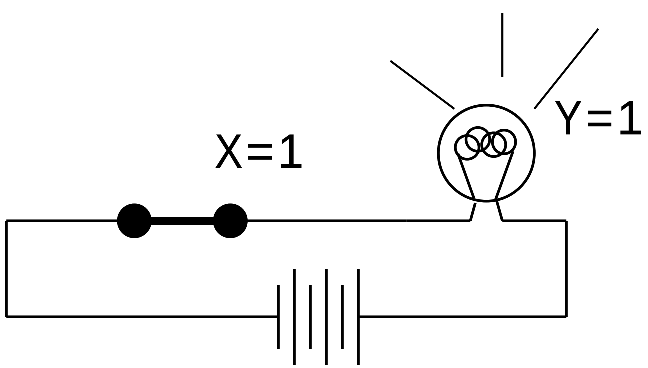
Semplice applicazione

- Variabile di controllo: X
  - due stati:
    - X=0 -> non c'e' pressione sull'interruttore
    - X=1 -> pressione sull'interruttore

- Uscita Y
  - Due stati:
    - Lampadina spenta (Y=0)
    - Lampadina accesa (Y=1)

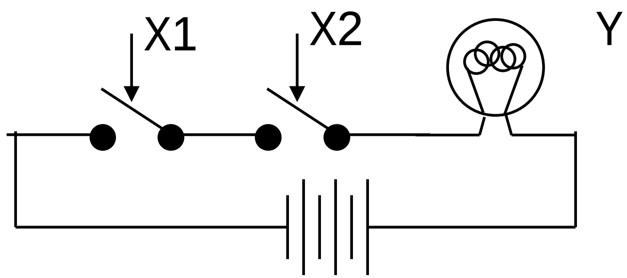
$Y = X$





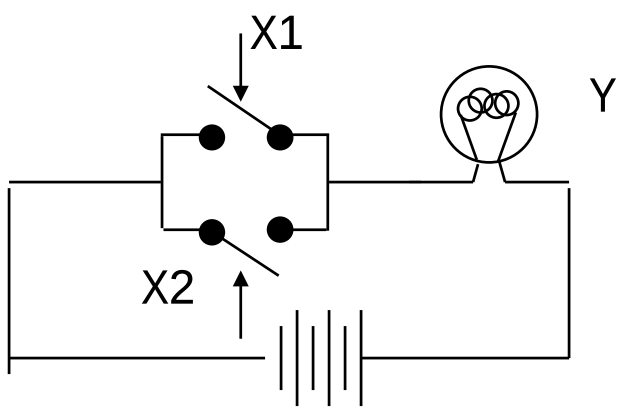
Operazioni elementari…

AND



Y $\equiv$ X1 <u>and</u> X2

OR



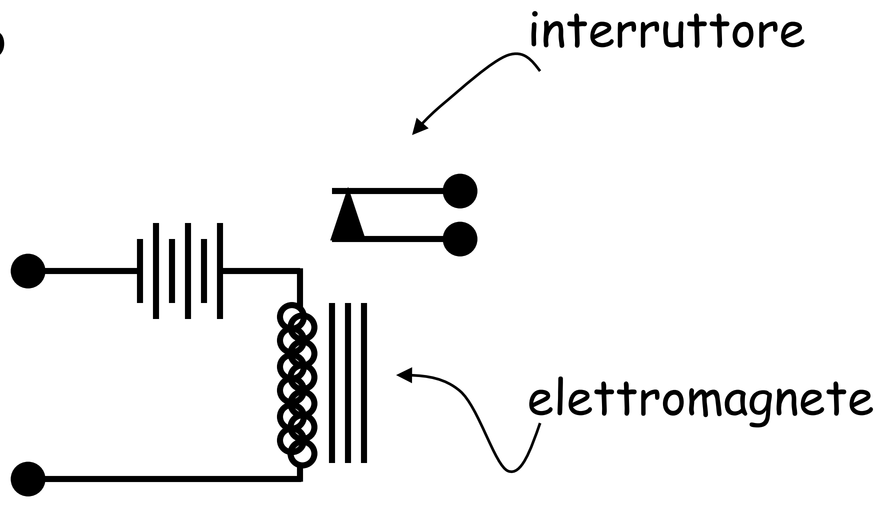
Y $\equiv$ X1 <u>or</u> X2

Dal relè...

un interruttore
comandato da un segnale elettrico

Quando la corrente fluisce
nel circuito, l'elettromagnete
attira una lamella del contatto
e l'interruttore rimane aperto

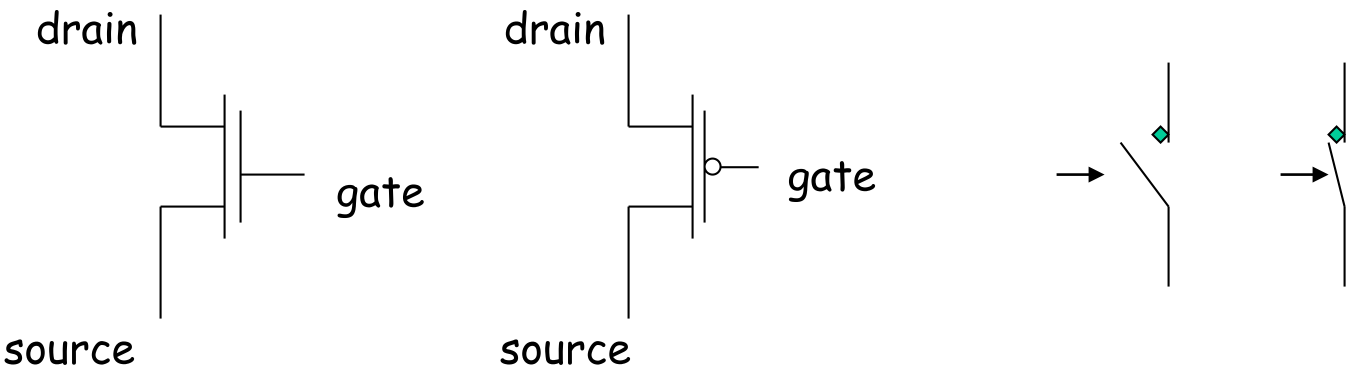
Se non circola corrente,
l'interruttore rimane chiuso



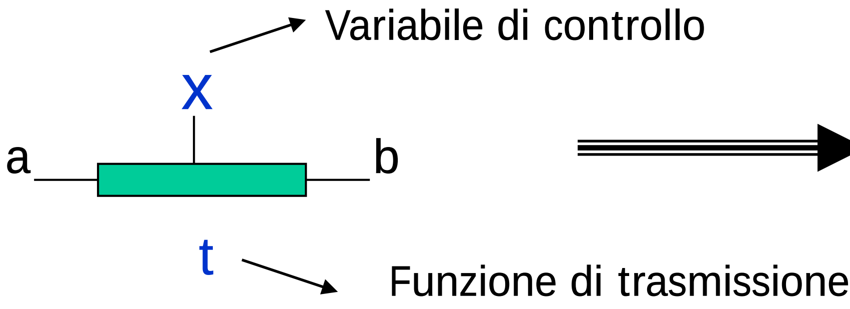
Interruttore può avere <u>due stati</u>: aperto o chiuso
La corrente nel circuito di controllo può circolare o non circolare (2 stati)

..agli interruttori CMOS

- La tecnologia MOS permette di utilizzare transistori unipolari come interruttori
- Le funzionalità sono simili a quelle del relè:
  - Funzione di trasmissione controllata mendiante un ingresso di controllo (gate)

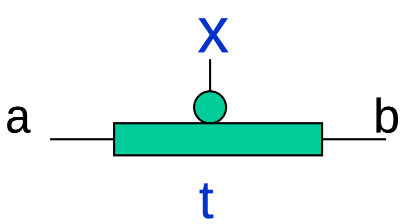


Modello per l'interruttore



x	t	stato
0	0	aperto
1	1	chiuso

Interruttore negativo

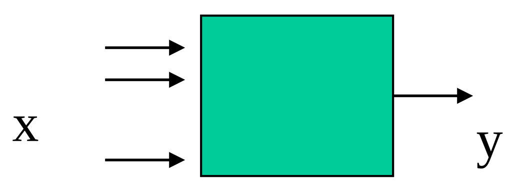


x	t	stato
0	1	chiuso
1	0	aperto

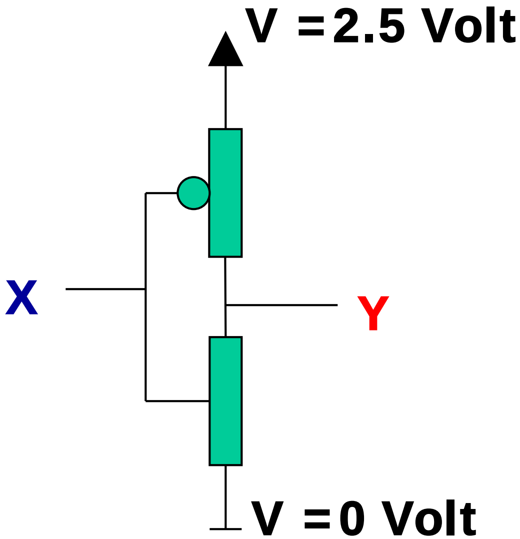
- La varibile di controllo X controlla la funzione di trasmissione, che – per convenzione - può valere 0 (interruttore aperto) oppure 1 (interruttore chiuso)

Porte logiche: modello

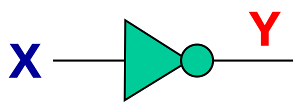
- Sono circuti digitali di base nei quali viene individuata una uscita (Y) ed uno o più ingressi (x1,..,xn)
- L'uscita dipende dal valore degli ingressi
- Si possono realizzare mediante interruttori, propagando la funzione di trasmissione in uscita



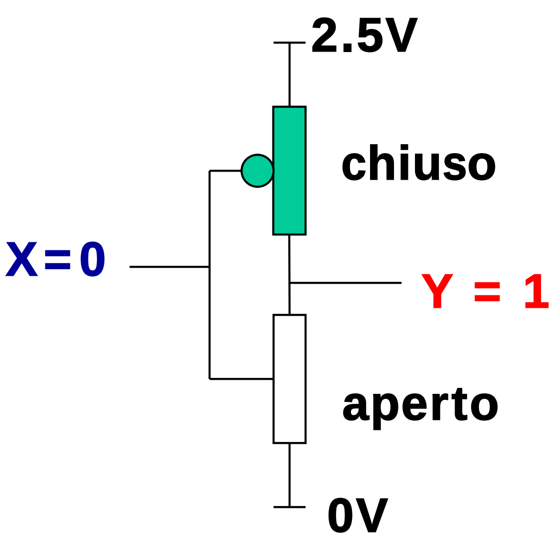
Esempio invertitore

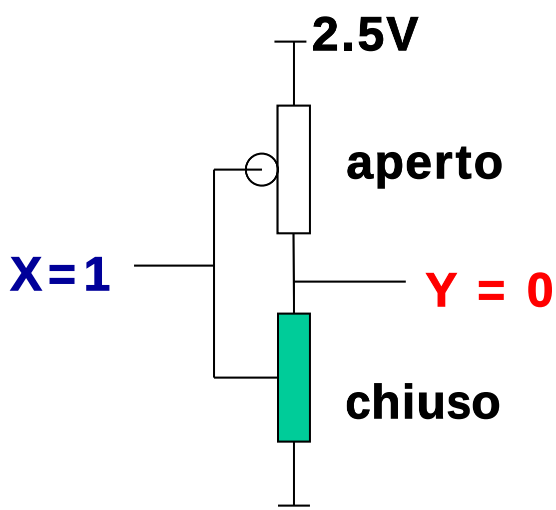


Y=0 se x=1 e viceversa



x	y
0	1
1	0





Postulati Algebra di Boole

Un insieme I e due operatori binari +,· formano un'algebra di Boole se soddisfano i seguenti assiomi (x,y,z sono elementi di I):

- $\forall\ x,y \in I\ x+y \in I;\ x\cdot y \in I$ (chiusura delle operazioni)
- $\exists\ 0 \in I \mid \forall\ x \in I,\ x+0=x$ (elemento neutro per +)
- $\exists\ 1 \in I \mid \forall\ x \in I,\ x\cdot 1=x$ (elemento neutro per ·)
- $\forall\ x,y \in I\ x+y=y+x;\ x\cdot y = y\cdot x$ (proprietà commutativa)
- $\forall\ x,y,z \in I$
  $x+(y+z)=(y+x)+z;\ \ x\cdot(y\cdot z) = (y\cdot x)\cdot z)$ (proprietà associativa)
- $\forall\ x,y,z \in I$
  $x\cdot(y+z) = (x\cdot y) + (x\cdot z);\ x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$ (proprietà distributiva)
- $\forall\ x \in I\ \exists\ \neg x \in I \mid x + \neg x = 1;\ x\cdot\neg x=0$ (esistenza dell'inverso)

Proprietà di un'algebra booleana

- Gli elementi 0,1 sono unici
- Per ogni $x \in I$, l'elemento $\neg x$ è unico

- $x+x = x$, $xx = x$ idempotenza

- $x+xy = x$, $x(x+y)=x$ assorbimento
- $x+(\neg x)y = x+y$, $x((\neg x)+y)=xy$

- $\neg(x+y) = (\neg x)(\neg y)$ De Morgan
- $\neg(xy) = (\neg x)+(\neg y)$

- $\neg(\neg x) = x$ involuzione

Algebra di commutazione

- Applicazione dell'algebra di Boole ad un insieme con due soli valori
  - Con B={0,1} sono completamente definiti i tre operatori di
    - somma logica (+), OR
    - prodotto logico (·), AND
    - negazione (-), NOT
- Applicata da C. Shannon nel 1936 per lo studio e la progettazione di sistemi a relè
- Detta anche algebra logica, da cui reti o circuiti logici

Alcuni teoremi fondamentali

- Teorema di De Morgan

$$\overline{(x+y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$$

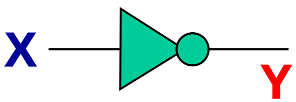
- Teorema dell'involuzione

$$\overline{\overline{x}} = x$$

- Legge di dualità (metateorema)

Ogni identità e ogni proprietà booleana resta valida se si scambianotra di loro gli operatori AND ed OR e gli elementi 0 ed 1

Porta NOT

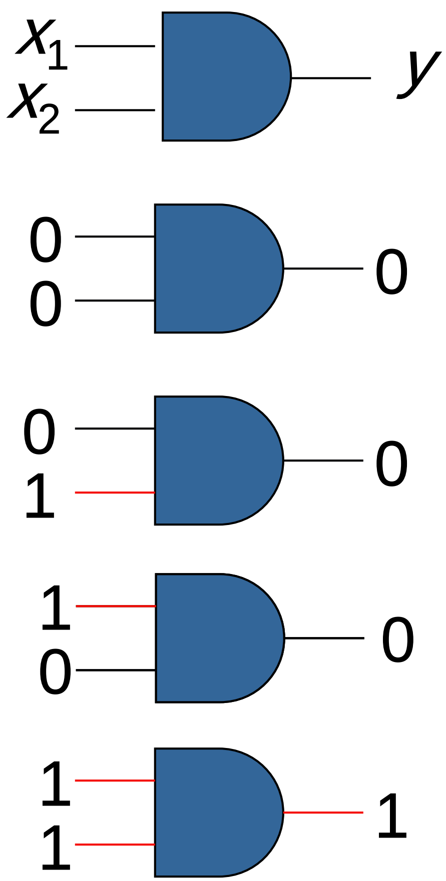


x	y
0	1
1	0

Proprietà:

$$\overline{\overline{X}}=X$$

Porta AND



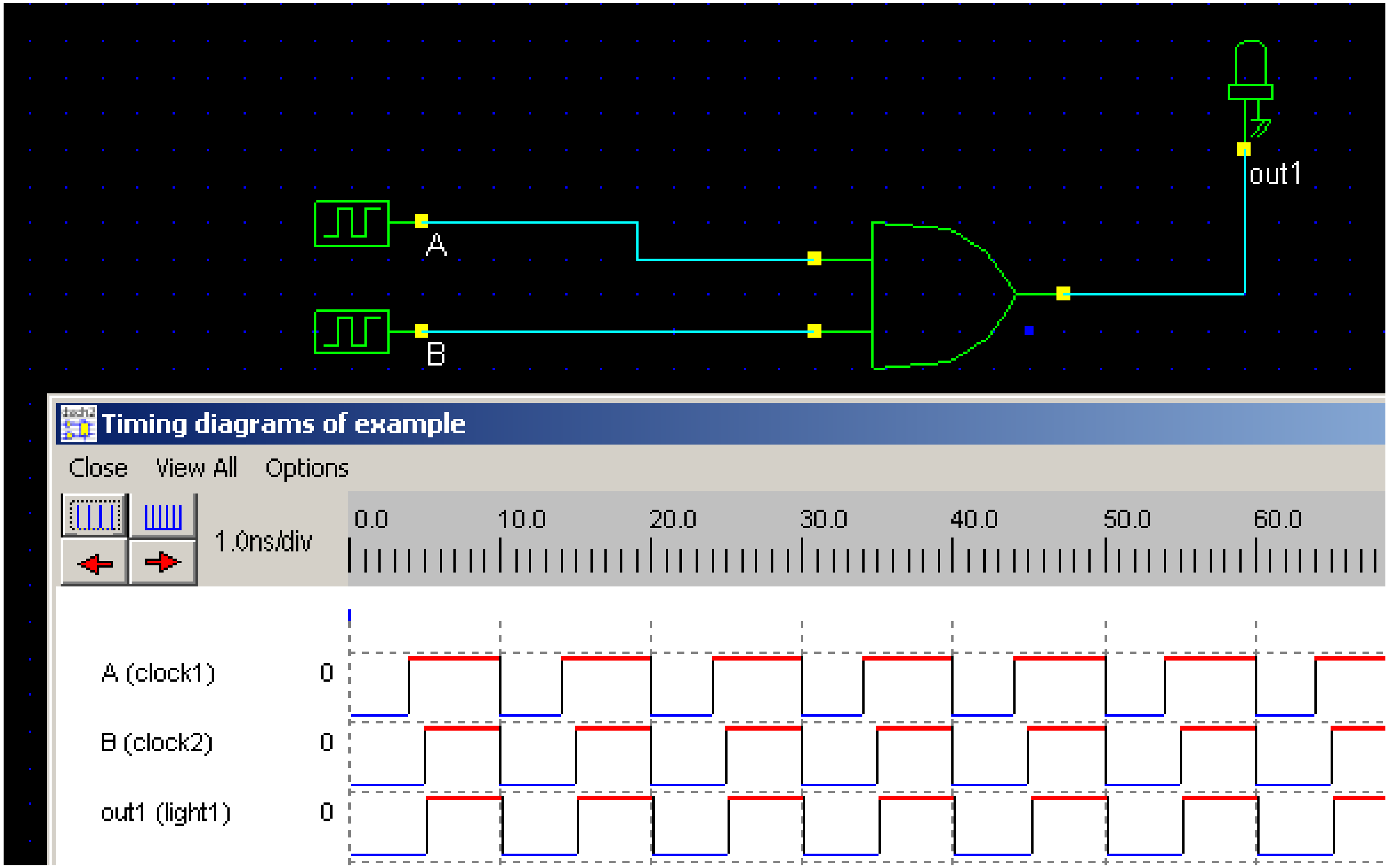
x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Proprietà:

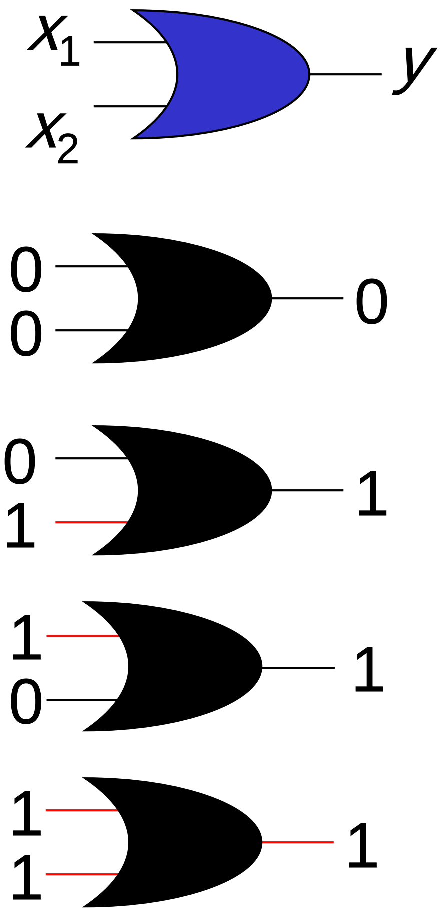
$ABC=(AB)C=A(BC)$
$AB=BA$
$AA=A$
$A1=A$
$A0=0$

$A\overline{A}=0$

Temporizzazioni porta AND



Porta OR



x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Proprietà:

$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$

$A+B=B+A$

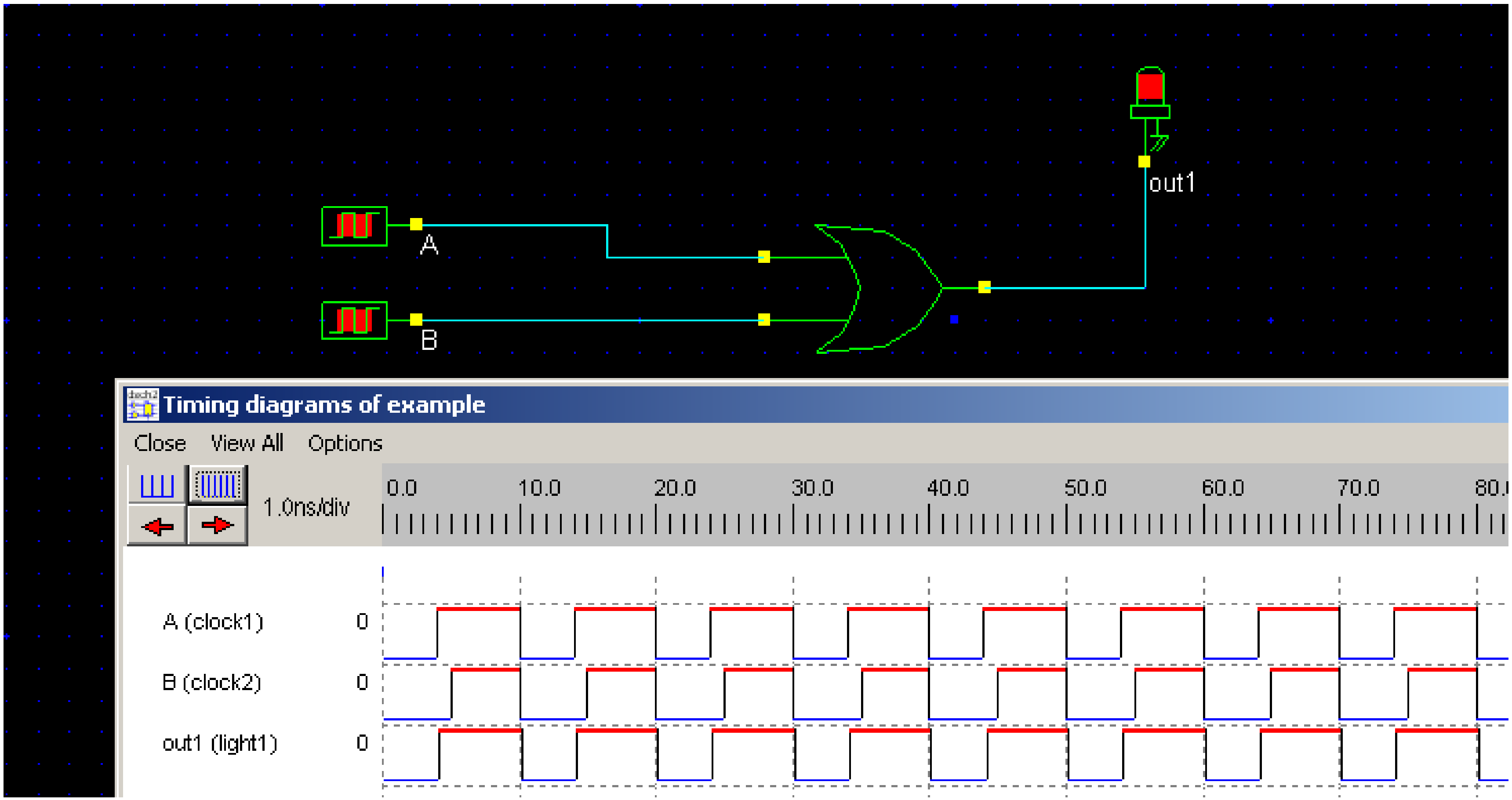
$A+A=A$

$A+1=1$

$A+0=A$

$\overline{A}+A=1$

Temporizzazioni porta OR



Variabili di commutazione

- Grandezze che possono assumere i valori 0 oppure 1
- Proprietà degli operatori (siano x,y,z variabili di commutazione)

- $x + y = y + x$ (commutatività)
- $x\,y = y\,x$

- $x + (y + z)=(x + y) + z = x + y + z$ (associatività)
- $x\,(y\,z) = (x\,y)\,z = x\,y\,z$

- $x\,(y + z)=(x\,y) + (x\,z)$ (distributività)
- $x + (y\,z)=(x + y)(x + z)$

Funzioni di commutazione

- Sia x_i una variabile di commutazione ed **X** il vettore composto da n variabili
  - $x_i \in \{0,1\}$, $\mathbf{X} \in \{0,1\}^n$
- Consideriamo le funzioni $y = f(\mathbf{X})$

$$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

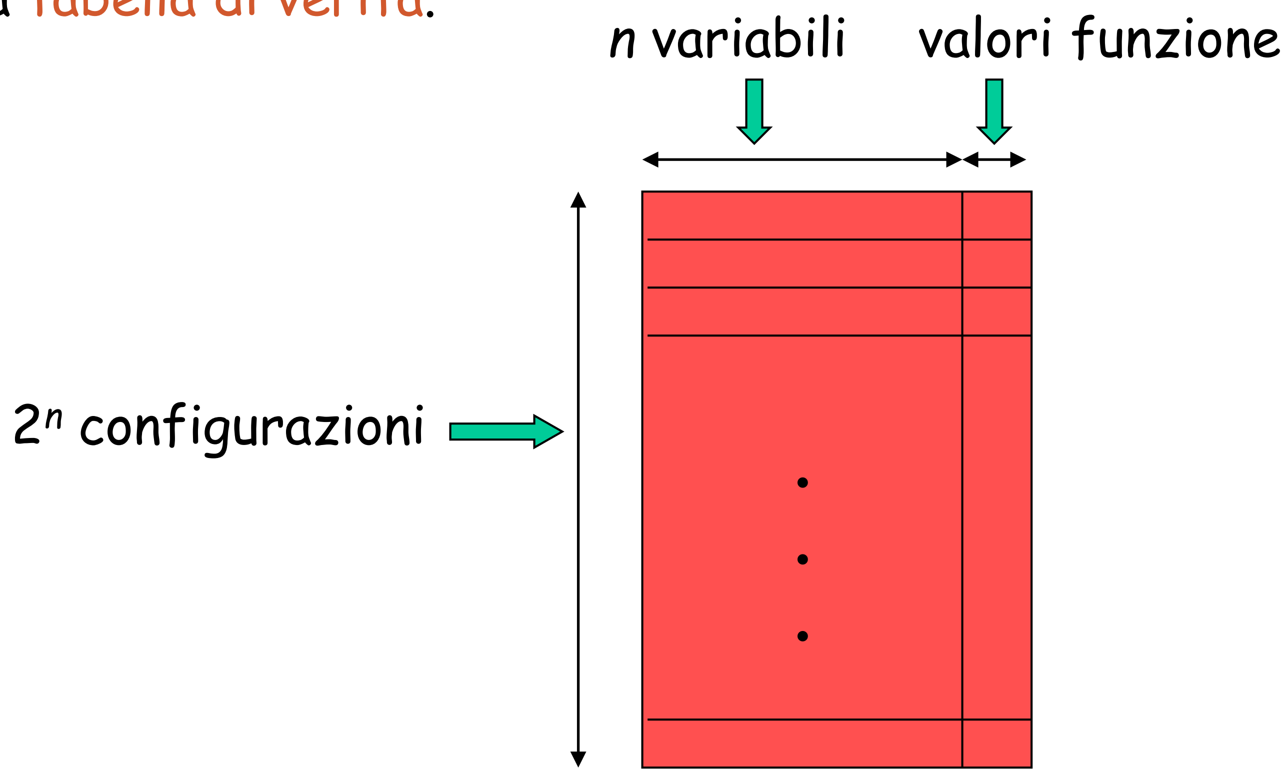
f è una funzione il cui dominio è costituito da tutte e sole le n-ple $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ed il cui codominio è l'insieme $\{0,1\}$

- Il numero di n-plue diverse è 2^n

f può essere assegnata mediante la sua **<u>tabella di verità</u>**
(il termine verità deriva dai valori TRUE/FALSE, termini usati da Boole nella sua algebra)

Tabelle di verità

Una funzione di commutazione può essere rappresentata utilizzando una tabella di verità.



x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Esempio di tabella di verità

x_3	x_2	x_1	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Funzioni unarie

x	y_0	y_1	y_2	y_3
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

y_0 : funzione 0

y_1 : negazione (NOT)

y_2 : funzione identità

y_3 : funzione 1

Funzioni binarie (due variabili)

$x_1\, x_0$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
00	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
01	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
				NOT x_1		NOT x_0			AND						OR	

Tutte le funzioni possono essere ricavate a partire dagli operatori
{NOT,AND} oppure
{NOT,OR}

Esistono operatori universali, cioè un opeartori che da soli
Possono generare qualunque funzione?

Teorema di Shannon

permette di passare dalla rappresentazione grafica ad una espressione algebrica

$$f(x_1,\dots, x_{i-1}, \mathbf{x_i}, x_{i+1}\dots,x_n) =$$

$$x_i\, f(x_1,\dots, x_{i-1},1, x_{i+1}\dots,x_n) + \neg x_i\, f(x_1,\dots, x_{i-1},0, x_{i+1}\dots,x_n)$$

$1 \leq i \leq n$

Dimostrazione (per induzione perfetta):

- Se $x_i = 0$ allora il primo termine vale 0. Poiché $\neg 0=1$, si ha $f(x_1,..,x_n) = f(x_1,.., x_{i-1},0, x_{i+1}\dots,x_n)$, che è identicamente vera perché, per ipotesi, $x_i = 0$.
- Se $x_i = 1$ allora il secondo termine vale 0. Poiché $\neg 1=0$, si ha $f(x_1,..,x_n) = f(x_1,.., x_{i-1},1, x_{i+1}\dots,x_n)$, che è identicamente vera perché, per ipotesi, $x_i = 1$.

Forma canonica Somma di Prodotti (SP)

- Applichiamo il teorema più volte …

$f(x_1,..,x_n) =$

$x_1\, f(1, x_2,..,x_n) + \neg x_1\, f(0,x_2,...,x_n) =$

$x_1\, (x_2\, f(1,1, x_3..,x_n) + \neg x_2\, f(1,0, x_3..,x_n)) + \neg x_1\, f(0,x_2,...,x_n)=$

$x_1\, x_2\, f(1,1, x_3..,x_n)+ x_1 \neg x_2\, f(1,0, x_3..,x_n) + \neg x_1\, f(0,x_2,...,x_n)=$

…..

$x_1\, x_2\, ...x_n\, f(1,1, ...,1) + x_1 \neg x_2\, ...x_n\, f(1,0,1, ...,1)+$

$x_1\, x_2\, ...\, \neg x_n\, f(1,1, ...,0) + ... + \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3\, ...\, \neg x_n\, f(0,0,0, ...,0)$

Forma SP

- 2^n termini
- Termine generico della somma:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Dove, $\alpha_i \in \{0,1\}$ e $x^1 = x$ e $x^0 = \neg x$

- $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ si chiama **mintermine** ed è il prodotto di *n* variabili dirette o negate

Forma SP

- $f(x_1,\ldots, x_n)= \sum_{k=0}^{2^{n-1}} m_k f(k)$ => $\boxed{f(x_1,\ldots, x_n)= \sum_{k|f(k)=1} m_k}$

dove:

- $\boxed{m_k = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha^i}}$ $(x^0= \neg x,\ x^1=x)$ mintermine

- $f(k)$ il valore $f(\alpha_1,\ldots, \alpha_n)$, con $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$

  tali che $\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \alpha_i\, 2^{i-1}=k$

Esempio

- $y=f(x_1,x_2,x_3)$ è 1 se e solo se il numero di variabili con valore 1 è pari

	x_3	x_2	x_1	y	
0	0	0	0	1	m_0
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	1	m_3
4	1	0	0	0	
5	1	0	1	1	m_5
6	1	1	0	1	m_6
7	1	1	1	0	

$$y = m_0+m_3+m_5+m_6 = \Sigma(0,3,5,6)$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \overline{x}_3\,\overline{x}_2\,\overline{x}_1 + \overline{x}_3 x_2 x_1 + x_3\,\overline{x}_2\,x_1 + x_3 x_2\,\overline{x}_1$$

Forma canonica prodotto di somme (PS) (non nel programma)

- Sia $f(x_1,.., x_n) = \sum_{k|f(k)=1} m_k$

- $g(x_1,.., x_n) = \sum_{k|f(k)=0} m_k$

  - g= not f.

    Infatti, g vale 0 quando f vale 1 (poiché mancano i mintermini) e viceversa

Forma canonica prodotto di somme (non nel programma)

- $\overline{\overline{f}}(x_1,\dots, x_n) = \overline{\sum_{k|f(k)=0} m_k}$

- $f(x_1,\dots, x_n) = \prod_{k|f(k)=0} \overline{m}_k \Rightarrow \boxed{f(x_1,\dots, x_n) = \prod_{k|f(k)=0} M_k}$

$$\boxed{M_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha^{i}-1}}$$

Maxtermine

Esempio (non nel programma)

- $y=f(x_1,x_2,x_3)$ è 1 se e solo se il numero di variabili con valore 1 è pari

	x_3	x_2	x_1	y	
0	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	M_1
2	0	1	0	0	M_2
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	M_4
5	1	0	1	1	
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	0	M_7

$$y = M_1+M_2+M_4+M_7$$
$$=\Pi(1,2,4,7)$$

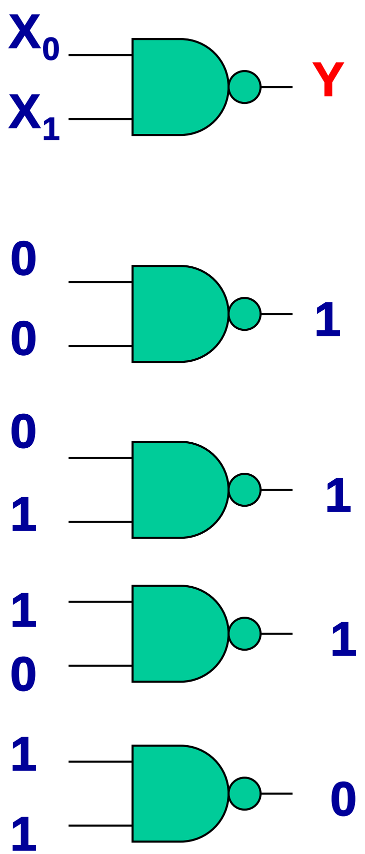
$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_3+x_2+\overline{x}_1)\cdot(x_3+\overline{x}_2+x_1)\cdot(\overline{x}_3+x_2+x_1)\cdot(\overline{x}_3+\overline{x}_2+\overline{x}_1)$$

Esempio, n=3 variabili

A	B	C	minterm	maxterm
0	0	0	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$M_0 = A + B + C$
0	0	1	$m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,C$	$M_1 = A + B + \overline{C}$
0	1	0	$m_2 = \overline{A}\,B\,\overline{C}$	$M_2 = A + \overline{B} + C$
0	1	1	$m_3 = \overline{A}\,B\,C$	$M_3 = A + \overline{B} + \overline{C}$
1	0	0	$m_4 = A\,\overline{B}\,\overline{C}$	$M_4 = \overline{A} + B + C$
1	0	1	$m_5 = A\,\overline{B}\,C$	$M_5 = \overline{A} + B + \overline{C}$
1	1	0	$m_6 = A\,B\,\overline{C}$	$M_6 = \overline{A} + \overline{B} + C$
1	1	1	$m_7 = A\,B\,C$	$M_7 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Porta NAND

$$x / y = \overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$$



Proprietà:

A/B = B/A
A/1= ¬A
A/0=1
A/¬A=1

Non è associativo

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Operatore NAND (NOT-AND)

- Operatore universale (può generare l'algebra di Boole)

$$(x/y)/(x/y) = \overline{\overline{xy}} = xy$$ Prodotto logico

$$(x/x)/(y/y) = \overline{x}/\overline{y} = x + y$$ Somma logica

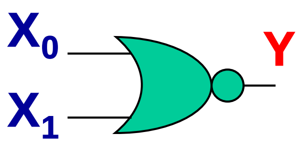
$x/x = \overline{x}$ Negazione

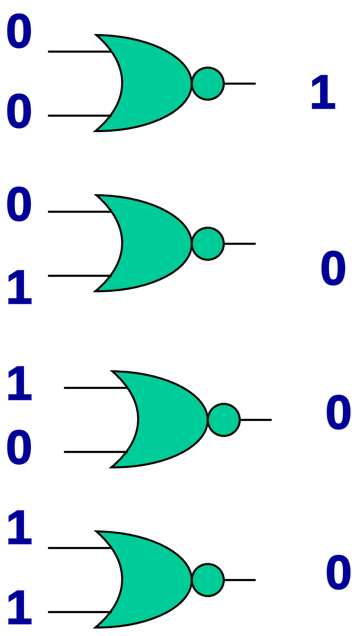
$x/\overline{x} = 1$ Generazione della costante 1

$1/1 = 0$ Generazione della costante 0

Porta NOR

$$x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{x}\ \overline{y}$$





Proprietà:

A↓B = B↓A
A↓1 = 0
A↓0 = ¬A
A↓¬A = 0

Non è associativo

Operatore universale

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Operatore NOR (NOT-OR)

- Operatore universale (può generare l'algebra di boole)

$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = x + y$ Somma logica

$(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = x\,y$ Prodotto logico

$x \downarrow x = \overline{x}$ Negazione

$x \downarrow \overline{x} = 0$ Generazione della costante 0

$0 \downarrow 0 = 1$ Generazione della costante 1

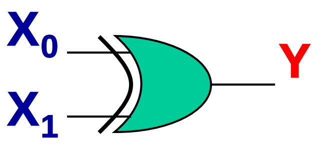
Operatore XOR

- or esclusivo, detto anche "somma modulo 2" o "anticoincidenza", indicato col simbolo ⊕

$$x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y = (x+y)(\bar{x}+\bar{y})$$

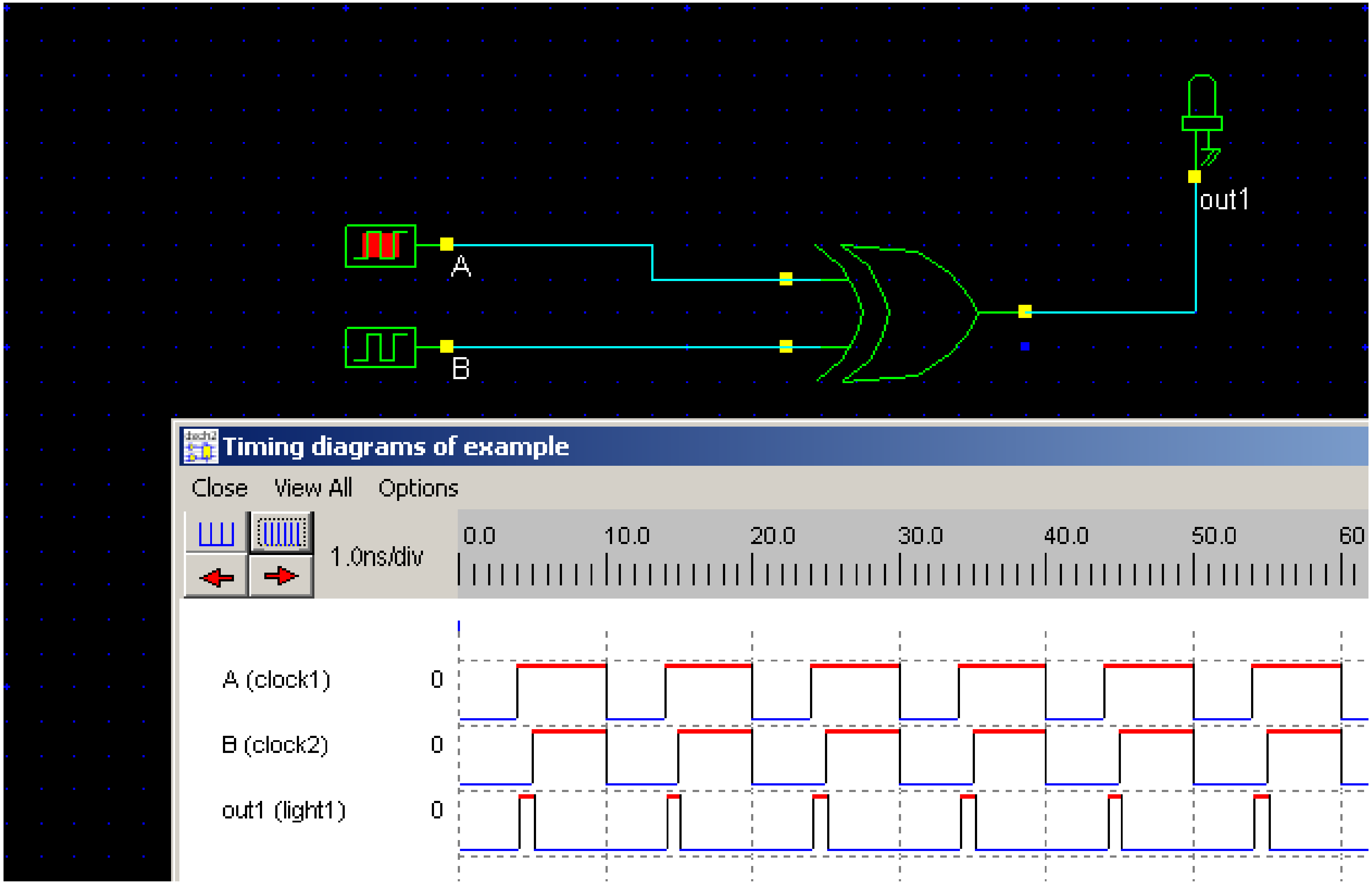
X_1	X_2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- $x \oplus y = y \oplus x$ (proprietà commutativa)
- $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (associativa)
- $x \oplus 1 = \neg x$
- $x \oplus 0 = x$
- $x \oplus x = 0$
- $x \oplus \neg x = 1$



Non è un operatore universale

Temporizzazioni porta XOR



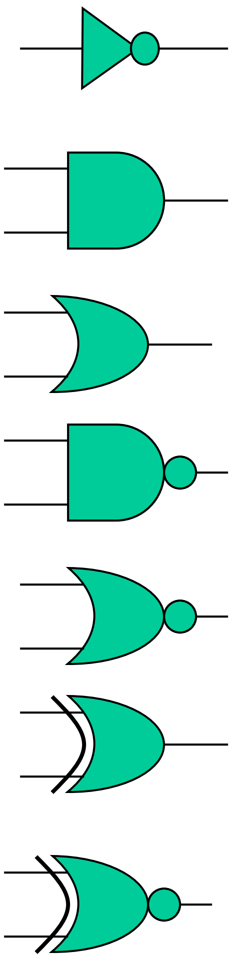
Funzione di disparità

- L'operatore $\oplus$ applicato a n variabili definisce la funzione di disparità o somma modulo 2:

$$P = x_1 \oplus x_2 \ldots \oplus x_n$$

- La funzione P è chiamata di disparità perché vale 1 se e solo se un numero *dispari* di variabili vale 1.

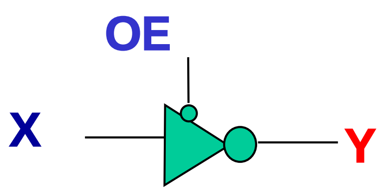
- Val la pena di notare che il bit di parità che si aggiunge nei codici a rivelazione di errore è ottenuto proprio con la funzione di disparità P; infatti aggiungendo al vettore X il bit P corrispondente alla funzione di disparità si ottiene una stringa di bit che avrà sempre un numero pari di 1.



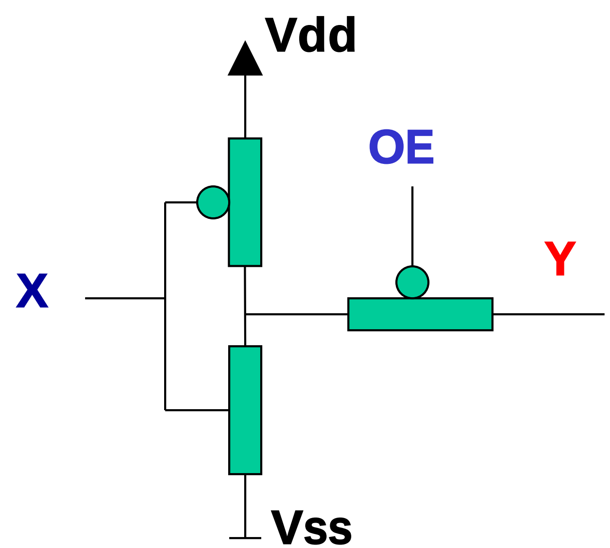
Operatore	Simbolo	Proprietà
NOT	$y=\neg x$	$y=1$ se e solo se $x=0$
AND	$y=x_1x_2$	$y=1$ se e solo se $x_1=x_2=1$
OR	$y=x_1+x_2$	$y=0$ se e solo se $x_1=x_2=0$
NAND	$y=x_1/x_2$	$y=0$ se e solo se $x_1=x_2 = 1$
NOR	$y= x_1\downarrow x_2$	$y=1$ se e solo se $x_1=x_2 = 0$
XOR	$y = x_1 \oplus x_2$	$y=1$ se e solo se $x_1 \neq x_2$
XNOR	$y= x_1 \equiv x_2$	$y=1$ se e solo se $x_1=x_2$

Interverter Three-state
(<u>non</u> è una porta logica)

- L'uscita può assumere uno stato di alta impedenza elettrica (non e' uno stato logico), utile per disconnettere l'uscita dagli altri circuiti ad essa collegati.

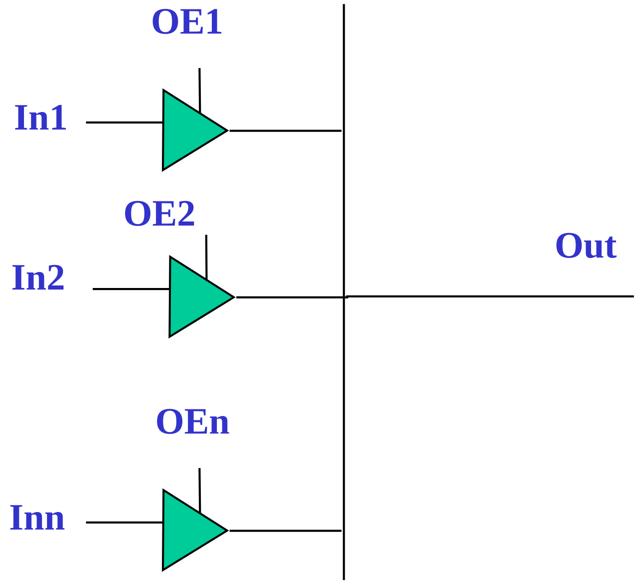


OE	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	-	Hi



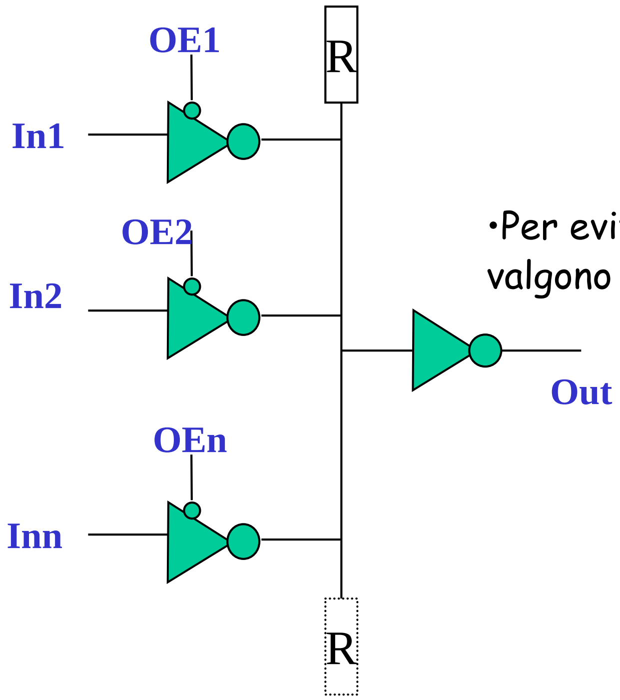
Buffer three-state

- Serve per collegare vari le uscite di vari dispositivi ad uno stesso mezzo trasmissivo (***bus***)
- Un solo segnale di abilitazione deve essere abilitante, gli altri devono mettere le uscite dei buffer three-state in alta impedenza.



Buffer three-state (cont.)

- Schema “elettrico”



•Per evitare instabilità elettrica quando tutti i segnali di abilitazione valgono 1 si usa una resistenza di “pull-up” (o pull-down)