

Tarea 1

Jennifer Porras Rojas
jenniporras@estudiantec.cr

Esteban Sanchez Acevedo
estsanchez@estudiantec.cr

Aaron Salas Alvarado
aasalas@estudiantec.cr

I. INTRODUCCIÓN

La precesión de la Tierra es un fenómeno astronómico que consiste en el cambio lento y gradual de la orientación del eje de rotación terrestre a lo largo del tiempo. Debido a las fuerzas gravitacionales ejercidas principalmente por el Sol y la Luna sobre el abultamiento ecuatorial del planeta, el eje de la Tierra no permanece fijo, sino que describe un cono alrededor de la perpendicular al plano de la eclíptica, completando un ciclo de aproximadamente 26 000 años [1]. Este fenómeno es análogo al comportamiento de un trompo o giroscopio cuando, bajo la acción de la gravedad, su eje comienza a describir un movimiento circular mientras el rotor continúa girando a gran velocidad, una descripción gráfica de este movimiento se observa en la siguiente figura:

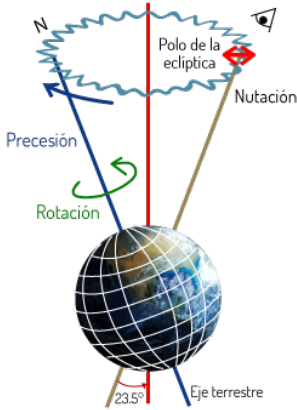


Fig. 1. El planeta Tierra precesando [2]

Desde el punto de vista dinámico, la *precesión* se produce debido al momento angular generado por la rotación de un cuerpo rígido. Cuando sobre dicho cuerpo actúa un torque en un eje diferente al de su rotación principal, se genera una respuesta angular en un tercer eje, perpendicular a los dos anteriores. En el caso de la Tierra, el torque lo ejercen las fuerzas gravitacionales externas; en el caso del giroscopio, el torque proviene de la velocidad angular impuesta en uno de sus ejes. Así, el mismo principio físico que explica la precesión terrestre describe también el comportamiento dinámico del giroscopio mostrado en la Fig. 3 .

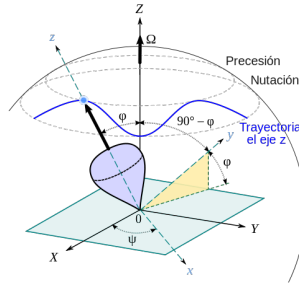


Fig. 2. Trompo precesando [3]

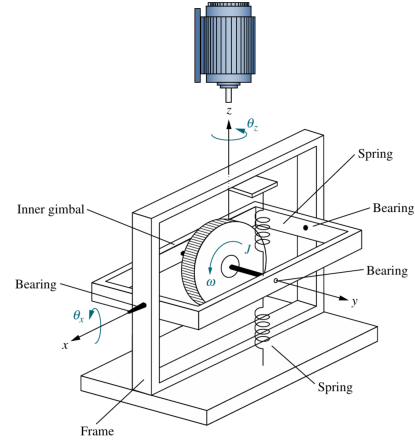


Fig. 3. Giroscopio

El comportamiento de los giroscopios puede describirse mediante ecuaciones diferenciales que representan la dinámica rotacional en función de los parámetros físicos del sistema, como el momento de inercia, la fricción viscosa y la rigidez [4]. En este tipo de sistemas, un torque aplicado en el eje de entrada genera una desviación angular controlada en otro eje ortogonal, fenómeno que se conoce como precesión giroscópica [5].

Por otra parte, el motor eléctrico encargado de accionar el movimiento en el eje de referencia constituye la parte electromecánica del sistema. En este trabajo, el motor proporciona la velocidad angular principal $\dot{\theta}_z$, que actúa como entrada al giroscopio, generando una respuesta de precesión θ_x dependiente de las propiedades mecánicas del sistema.

El objetivo de este trabajo es obtener la función de transferencia que relaciona la entrada eléctrica con la salida mecánica del sistema completo, así como su representación en espacio de estados. Además, se busca validar la consistencia entre los modelos obtenidos mediante las tres aproximaciones analíticas y computacionales del sistema giroscópico: *función de transferencia, espacio de estados y modelo Simscape*.

II. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

A. Función de transferencia del giroscopio

El análisis del giroscopio parte de la ecuación dinámica rotacional que describe la relación entre el desplazamiento angular en el eje x (θ_x) y la velocidad angular en el eje z ($\dot{\theta}_z$). Esta ecuación se obtiene aplicando la segunda ley de Newton para sistemas rotacionales:

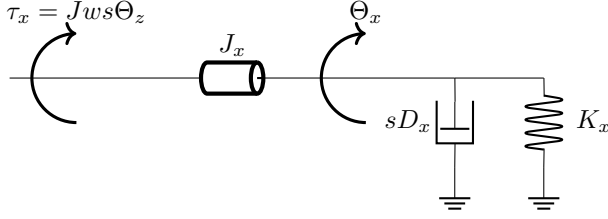


Fig. 4. Modelo dinámico del giroscopio

$$J_x \ddot{\theta}_x + D_x \dot{\theta}_x + K_x \theta_x = J\omega \dot{\theta}_z$$

donde J_x es el momento de inercia del gimbal interno, D_x representa el amortiguamiento rotacional debido a las pérdidas por fricción, K_x es la constante de rigidez torsional de los resortes, y $J\omega \dot{\theta}_z$ es el torque aplicado producto del acoplamiento giroscópico. Al aplicar la transformada de Laplace y reordenar términos, se obtiene la función de transferencia que relaciona la salida $\Theta_x(s)$ y $\Theta_z(s)$

$$\mathcal{L}\{J_x \ddot{\theta}_x + D_x \dot{\theta}_x + K_x \theta_x\} = \mathcal{L}\{J\omega \dot{\theta}_z\}$$

$$(J_x s^2 + D_x s + K_x) \Theta_x(s) = J\omega s \Theta_z(s)$$

$$G(s) = \frac{\Theta_x(s)}{\Theta_z(s)} = \frac{J\omega s}{J_x s^2 + D_x s + K_x} \quad (1)$$

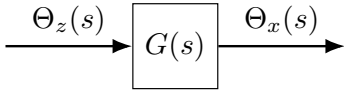


Fig. 5. Bloque del giroscopio G(s)

En la Fig 4 se muestra el modelo dinámico del giroscopio, se puede observar que la entrada del sistema es $\dot{\theta}_z$ y la salida θ_x

B. Función de transferencia del motor

El motor que acciona el giro en el eje z se modela considerando el efecto de la inductancia L , el momento de inercia de la carga J_z , la resistencia R , la fricción viscosa D_z , la constante de torque k_t y la constante de fuerza contraelectromotriz k_b .

La dinámica del motor se describe mediante:

$$E(s) = \left(\frac{(R + sL)(J_z s^2 + D_z s)}{k_t} + k_b s \right) \Theta_z(s)$$

lo que lleva a la función de transferencia:

$$M(s) = \frac{\Theta_z(s)}{E(s)} = \frac{k_t}{(R + sL)(J_z s^2 + D_z s) + k_t k_b s}$$

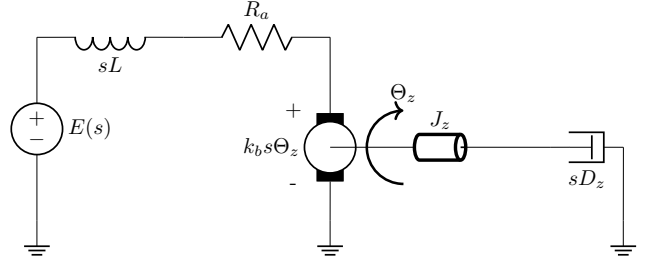


Fig. 6. Modelo dinámico del motor y la carga

$$M(s) = \frac{k_t}{J_z L s^3 + (R J_z + L D_z) s^2 + (R D_z + k_b k_t) s} \quad (2)$$

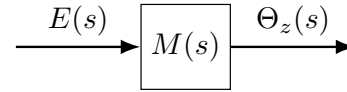


Fig. 7. Bloque del motor M(s)

C. Función de transferencia completa

Una vez obtenidas las funciones de transferencia individuales, se procede a integrar el comportamiento del motor y el giroscopio. Dado que la salida angular del motor $\Theta_z(s)$ es la entrada del giroscopio, el sistema se modela en cascada multiplicando ambas funciones de transferencia.

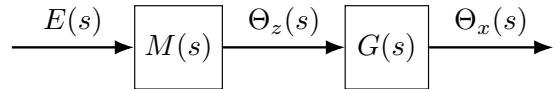


Fig. 8. Diagrama de bloques del sistema

$$\frac{\Theta_x(s)}{E(s)} = M(s) \cdot G(s) \quad (3)$$

III. REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADOS

A. Ecuación del motor

El modelo dinámico del motor de corriente continua, mostrado en la figura 6, puede describirse a partir de dos ecuaciones: la ecuación eléctrica del circuito de armadura y la ecuación mecánica de movimiento del eje.

Utilizando la ley de Kirchhoff la tensión $e(t)$ puede expresarse como

$$e(t) = R i_a(t) + L \frac{di_a(t)}{dt} + k_b \dot{\theta}_z(t)$$

El torque generado por la corriente acelera el eje del motor y compensa la fricción del sistema, lo cual se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$k_t i_a(t) = J_z \ddot{\theta}_z(t) + D_z \dot{\theta}_z(t)$$

Despejando la corriente se obtiene

$$i_a(t) = \frac{J_z \ddot{\theta}_z(t) + D_z \dot{\theta}_z(t)}{k_t}$$

Y sustituyendo en la ecuación eléctrica se obtiene:

$$e(t) = \frac{J_z L}{k_t} \ddot{\theta}_z(t) + \frac{R J_z + L D_z}{k_t} \ddot{\theta}_z(t) + \frac{R D_z + k_b k_t}{k_t} \dot{\theta}_z(t) \quad (4)$$

B. Ecuación del giroscopio

La ecuación que describe la dinámica rotacional entre θ_x y θ_z es la siguiente:

$$J_x \ddot{\theta}_x + D_x \dot{\theta}_x + K_x \theta_x = J \omega \dot{\theta}_z \quad (5)$$

Para obtener la representación en variables de estado, se determinó qué el sistema se puede describir en su totalidad mediante el ángulo de giro de los ejes x y z, la velocidad angular de ambos ejes y la aceleración angular en el eje z, entonces:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \dot{\theta}_x \\ \theta_z \\ \dot{\theta}_z \\ \ddot{\theta}_z \end{bmatrix}$$

De la ecuación (1) y (2) se obtiene:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{D_x}{J_x} x_2 - \frac{K_x}{J_x} x_1 + \frac{J \cdot \omega}{J_x} x_4,$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 = x_5,$$

$$\dot{x}_5 = \frac{k_t}{J_z L} e(t) - \frac{R J_z + L D_z}{J_z L} x_5 - \frac{R D_z + k_b k_t}{J_z L} x_4$$

Usando estas relaciones, se puede construir la representación en variables de estado usando:

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B u$$

Como entradas, se tomaron los voltajes de los circuitos RL de las caras resultantes(X,Z). Utilizando lo anterior, y las relaciones obtenidas en (2) se tiene que, la representación en espacio de estados es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_z \\ \dot{\theta}_z \\ \ddot{\theta}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_x}{J_x} & -\frac{D_x}{J_x} & 0 & \frac{J \omega}{J_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R D_z + k_b k_t}{J_z L} & -\frac{(R J_z + L D_z)}{J_z L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \dot{\theta}_x \\ \theta_z \\ \dot{\theta}_z \\ \ddot{\theta}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{J_z L} \end{bmatrix} [e(t)]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

IV. MODELO SIMSCAPE

A. Modelado del motor

Para el modelado del motor, se utilizó el modelo convencional de un motor DC con una inductancia L y resistencia fija R de armadura. Para modelar la inercia en el eje del motor, así como la fricción viscosa del, se colocó un bloque de inercia a la salida del motor con momento de inercia J_z y un bloque de fricción viscosa rotacional con coeficiente de fricción viscosa D_z . Para pasar del dominio eléctrico, al mecánico rotacional, se utilizó el bloque convertidor electromecánico con coeficiente de proporcionalidad k_b .

B. Modelado del giroscopio

El bloque constante C contiene la constante $J \omega$ que a su vez es multiplicada por la velocidad angular del motor, para generar el torque de entrada hacia el giroscopio, dado por el bloque generador de torque ideal (esto se hizo así de acuerdo a la ecuación característica del sistema mecánico (5)). Para el modelado del giroscopio, se observó de (5) que el sistema tiene el mismo comportamiento que un sistema masa-resorte-amortiguador rotacional.

Dado que Simscape proporciona directamente bloques equivalentes para inercia rotacional, resorte rotacional y amortiguador rotacional, se utilizaron estos bloques (con sus respectivos coeficientes J_x , D_x , K_x) para implementar el sistema físico equivalente del giroscopio.

C. Modelo SimScape implementado

Con base a las consideraciones anteriores, se utilizó el siguiente modelo electromecánico para simular el comportamiento del sistema en SimScape:

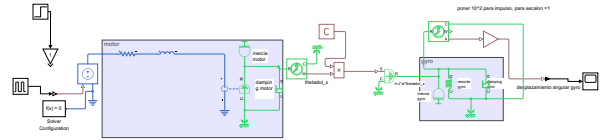


Fig. 9. Modelo de Simscape

V. SIMULACIONES

En la Tabla I se presentan las constantes físicas y eléctricas utilizadas en el modelado del sistema giroscópico electromecánico. Todas las magnitudes están expresadas en unidades del Sistema Internacional (SI).

TABLE I
CONSTANTES DEL SISTEMA GIROSCÓPICO Y DEL MOTOR DC

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
J_x	Momento de inercia del giroscopio (eje X)	1	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
D_x	Coefficiente de fricción viscosa (giroscopio)	1	$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$
K_x	Constante de rigidez torsional	1	$\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
J_z	Momento de inercia del eje del motor	1	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
D_z	Coefficiente de fricción viscosa (motor)	1	$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$
R	Resistencia de la armadura	1	Ω
L	Inductancia de la armadura	1	H
k_t	Constante de torque del motor	1	$\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$
k_b	Constante de fuerza contraelectromotriz	1	$\text{V}\cdot\text{s}/\text{rad}$
$J\omega$	Acoplamiento giroscópico	1	$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$

Para observar la respuesta del sistema, se escogieron 2 señales de entrada: el escalón unitario ($u(t)$) y el impulso unitario ($\delta(t)$), los resultados obtenidos se encuentran a continuación:

A. Respuesta al escalón

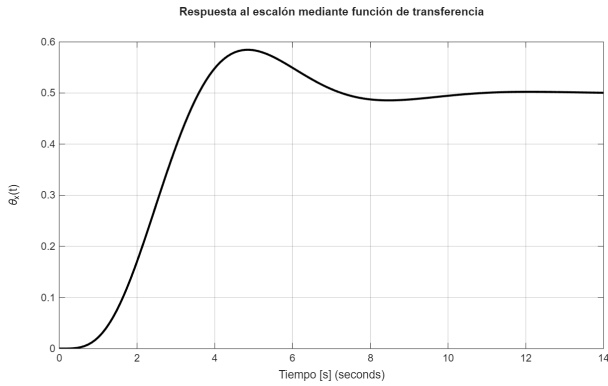


Fig. 10. Respuesta al escalón mediante función de transferencia

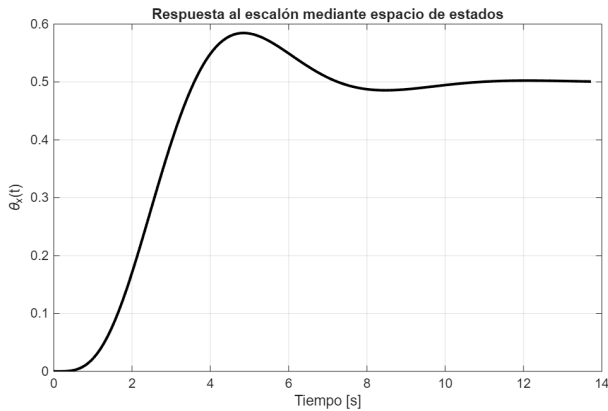


Fig. 11. Respuesta al escalón mediante espacio de estados

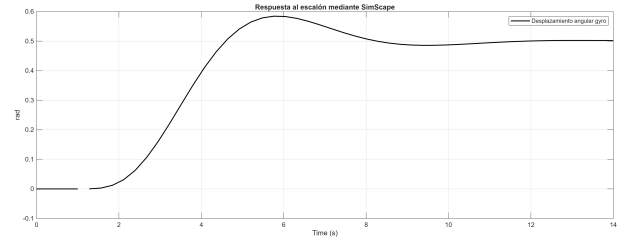


Fig. 12. Respuesta al escalón mediante modelo Simscape

B. Respuesta al impulso

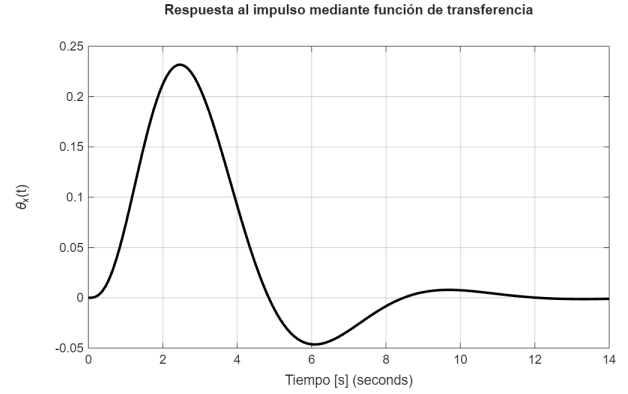


Fig. 13. Respuesta al impulso mediante función de transferencia

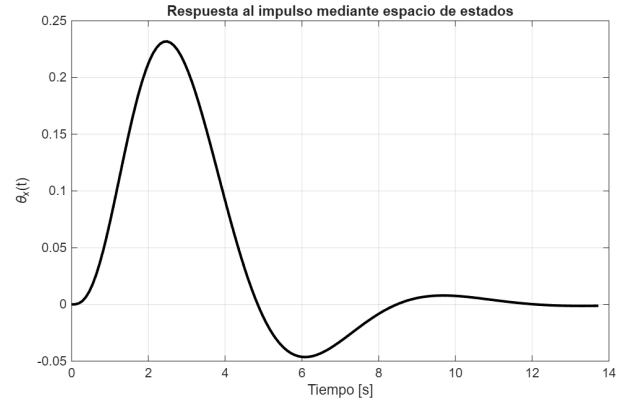


Fig. 14. Respuesta al impulso mediante espacio de estados

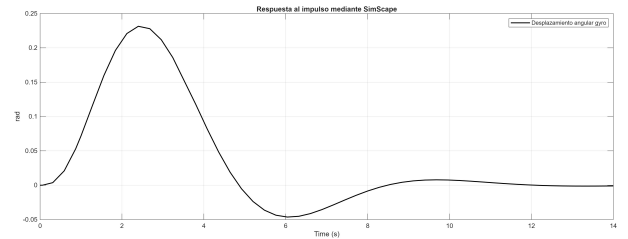


Fig. 15. Respuesta al impulso mediante modelo Simscape

REFERENCIAS

- [1] O. Montenbruck and E. Gill, *Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications*. Springer, 2000.
- [2] "Precession of Earth's Axis," Pinterest, [Imagen en línea]. Disponible: <https://www.pinterest.es/pin/390687336401055900/> (acceso: 2025).
- [3] "Trompo movimiento de precesión," PNGItem, [Imagen en línea]. Disponible: https://www.pngitem.com/middle/ThwowJT_movimientos-de-la-tierra-precesin-hd-png-download/ (acceso: 2025).
- [4] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed., Prentice Hall, 2010.
- [5] T. R. Kane, P. Schoen, and D. A. Levinson, "Dynamics of gyroscopic systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 6, no. 3, pp. 170–179, 1983.