

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS, FACULTÉ DE SCIENCES
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
DOCTEUR EN SCIENCES
Spécialité :
SCIENCES DE L'INGÉNIUR

par

THIERRY FUSCO

CORRECTION PARTIELLE ET ANISOPLANÉTISME EN OPTIQUE ADAPTATIVE : TRAITEMENTS *A POSTERIORI* ET OPTIQUE ADAPTATIVE MULTICONJUGUÉE

soutenue le 6 octobre 2000

devant le jury composé de :

M. Julien BORGINO	Directeur de Thèse
M. Gérard ROUSSET	Co-directeur de Thèse
M. François RODDIER	Rapporteur
M. Roberto RAGAZZONI	Rapporteur
M ^{me} Anne-Marie LAGRANGE	
M. François LACOMBE	
M. Norbert HUBIN	
M. Jean-Marc CONAN	

Thèse préparée au sein du Département d'Optique Théorique et Appliquée (DOTA)
de l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA).

*Man's mind and spirit grow with the space
in which they are allowed to operate.*
- Krafft A. Ehricke

À Mathias et Amandine.

Remerciements

Si je n'avais qu'une seule personne à remercier (j'en vois certains prêts à fermer rageusement la thèse, rassurez-vous, ce n'est pas le cas), ce serait, sans hésitation aucune, Jean-Marc Conan. Jean-Marc qui au cours des trois ans de thèse (et bien avant cela) a toujours été présent pour répondre à mes questions turbulentes, corriger mes faux pas et m'ouvrir l'esprit sur le grand champ des possibilités de l'optique adaptative et du traitement d'images. Ses compétences n'étant surpassées que par sa gentillesse et sa disponibilité, ce fut un réel plaisir de travailler avec lui au cours de ces trois dernières années. Un plaisir qui je l'espère se renouvellera très bientôt.

Bien entendu, je voudrais remercier François Roddier et Roberto Ragazzoni pour avoir accepté d'endurer les trois cents pages de ce mémoire. Si elles ont été parfois difficiles à écrire, j'espère qu'elles auront été plus aisées à lire. Merci à Anne-Marie Lagrange, François Lacombe et Norbert Hubin pour avoir accepté d'être mes examinateurs. Nous aurons bientôt l'occasion de travailler ensemble et je m'en réjouis à l'avance.

Julien Borgnino et Gérard Rousset, avant d'être mes directeurs de thèse, furent mes professeurs. Ce sont eux qui m'ont initié aux problèmes de l'imagerie à haute résolution à travers la turbulence et à la solution "miracle" (pas tout à fait mais presque) que représente l'optique adaptative. Même éloigné de près de 1000 km, Julien a toujours trouvé le temps de suivre mon travail et les quelques réunions que nous avons eues ensemble lors de mes descentes à Nice se sont révélées plus que fructueuses. Même sur-occupé par NAOS (essentiellement), Gérard a toujours su prendre (voler peut-être) le temps pour répondre à mes questions, m'encourager et m'orienter dans mes travaux. Une visite dans son bureau pour la présentation d'un résultat ou pour une question pouvait donner lieu à des discussions passionnantes qui conduisaient invariablement à de nouvelles propositions à étudier et de nouveaux chemins à explorer.

Si j'ai pu mener à bien tous les travaux présentés dans ce mémoire, je le dois, comme je viens de le dire (soyons précis, de l'écrire) à Jean-Marc et Gérard, mais aussi à l'ensemble de l'équipe (techniquement des deux unités ASO et OASO) "imagerie à haute résolution" du DOTA.

Je tiens d'abord à remercier Marc Séchaud pour m'avoir accueilli dans l'équipe pour mon stage de DEA il y a (déjà !!!) presque 5 ans, puis pour m'avoir permis de continuer en tant que scientifique du contingent et finalement thésard.

Merci à Vincent Michau pour avoir suivi mon travail tout au long de la thèse. Les idées échangées tôt le matin devant une tasse de café m'ont souvent tenu compagnie une journée (si ce n'est une semaine) entière et m'ont permis d'avancer (ou parfois simplement de ne pas reculer) dans mon travail. Ses conseils avisés m'ont permis de ne pas (trop) me disperser et de toujours rester sur le bon chemin en évitant autant que faire se peut les impasses et culs-de-sac.

Mille mercis à Laurent Mugnier, pour m'avoir initié à la rigueur nécessaire à l'étude et à la résolution des problèmes inverses et pour m'avoir transmis une petite (hélas) partie de ses compétences dans le domaine. Travailler avec Laurent et Jean-Marc fut, avant tout, un vrai plaisir! C'est vraiment en discutant avec eux, autour d'un tableau de moins en moins blanc que j'ai compris ce qu'était la recherche: aller toujours plus loin, au fond des choses et finir par en ressortir quelque chose (et je ne parle pas uniquement de migraines).

Je vous laisse imaginer le résultat de réunions avec Gérard, Vincent, Jean-Marc et Laurent ... Une seule de ces réunions valait bien un mois de travail!

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Stéphane Marteau (mon ex-voisin préféré, collègue et néanmoins ami ... ça fait beaucoup pour un seul homme), Fred Mahé (dit le γ -é), Cyril Ruilier, Emmanuel Di Folco, Olivier Rondeaux, Benoit Argast et Laurent Rousset-Rouvière pour leur amitié et les bons moments passés ensemble. J'avoue franchement que j'ai hésité à rajouter quelque chose sur mon gars Fred (cela n'étonnera personne), mais j'espère juste qu'il viendra (enfin) dîner à la maison.

Merci aussi à Clélia Robert de m'avoir supporté pendant près de 2 ans dans son bureau (et je sais que cela n'a pas dû être facile tous les jours!), à Marie-Thérèse Velluet pour les cafés du matin, à Pierre-Yves Madec pour ses conseils toujours avisés, à Fred Cassaing pour ses blagues et contrepétries (à lire à tout prix, pour les amateurs, les remerciements de sa thèse!!), à Christophe Coudrain pour son aide précieuse dans les méandres de l'informatique, à Didier Rabaud pour ses chants du matin, aux ingénieurs-système successifs (Patrice Cori, Eric Dumas et Benoit Gasquet), à François Assemat (stagiaire à l'humour improbable), à toute l'équipe de foot (Aline en tête) et à tous les autres membres (permanents ou stagiaires) de DOTA/E.

En dehors de l'ONERA, j'ai eu la chance de collaborer avec de nombreuses personnes qui m'ont beaucoup apporté tant par leurs compétences que par leur gentillesse. Merci donc à Franck Marchis d'abord pour son flux intarissable de données à déconvoyer, mais surtout pour son enthousiasme communicatif. J'espère sincèrement que l'on pourra de nouveau travailler ensemble et que son séjour aux États-Unis, loin de nous éloigner permettra au contraire de tisser de nouveaux liens et de traiter de nouvelles images. Merci à Athéna Coustenis et Julien Woillez pour m'avoir initié au monde merveilleux de Titan. Merci à Claude et François Roddier pour leurs données mais surtout et avant tout pour leur gentillesse. Leurs visites à l'ONERA furent toujours pour moi un réel plaisir. J'ai aussi été très heureux de rencontrer puis de travailler (même si ce fut brièvement) avec Christophe Dumas et Audrey Delsanti. J'espère que l'on continuera à collaborer ensemble et que Vesta n'aura bientôt plus aucun secret pour nous (enfin surtout pour vous). Je tiens aussi à remercier Jean-Pierre Véran avec qui il est toujours très agréable de travailler, Eric Gendron (avec qui j'ai hâte de travailler) et François Hammer pour m'avoir fait découvrir de nouvelles applications à l'optique adaptative multiconjuguée.

Merci à Flo d'avoir supporté Fred (bon d'accord je n'ai pas pu m'en empêcher, mais on ne peut lutter contre sa nature), à Cécile et Agnès de m'avoir supporté pendant un an. Gros bisous à Erwan et Vanessa, Guillaume, Jean-Louis, Françoise, Manu et Yann.

Un grand merci à mes parents pour m'avoir toujours encouragé et soutenu aux cours de mes études (enfin terminées) et pour m'avoir laissé la liberté de choisir ma voie.

Enfin je voudrais remercier tout particulièrement (et plus que ça même) Amandine pour m'avoir aidé, soutenu et supporté tout au long de ces trois ans. Merci pour t'être occupée (bien plus que moi) de Mathias et pour m'avoir ainsi laissé la possibilité de me concentrer presque exclusivement sur la rédaction de la thèse. Je vous embrasse tous les deux.

Table des matières

I TURBULENCE ATMOSPHÉRIQUE ET OPTIQUE ADAPTATIVE: ÉTUDE STATISTIQUE	17
1 Turbulence atmosphérique et propagation	19
1.1 Introduction	19
1.2 Le phénomène physique	19
1.3 Les fluctuations de l'indice de réfraction	20
1.3.1 La fonction de structure des fluctuations d'indice	20
1.3.2 La densité spectrale des fluctuations indice	21
1.3.3 La constante de structure de l'indice de réfraction	22
Mesures	22
Modélisation et prédition	23
1.3.4 Le paramètre de Fried	25
1.4 Propagation d'une onde électromagnétique	25
1.4.1 Propagation à travers une couche turbulente	25
1.4.2 Propagation à travers plusieurs couches	26
1.5 Propriétés statistiques de la phase	27
1.5.1 Fonction de structure de la phase turbulente	27
1.5.2 Spectre de puissance spatial de la phase turbulente	28
1.5.3 Évolution angulaire de la phase	28
1.5.4 Évolution temporelle de la phase	29
1.6 La décomposition modale de la phase	30
1.6.1 Les polynômes de Zernike	30
1.6.2 Variances et covariances des polynômes de Zernike	32
Influence de la grande échelle	34
1.7 Simulation de la phase turbulente	34
1.7.1 Utilisation de la base des polynômes de Zernike	35
Avantages et limitations	35
1.7.2 L'approche Fourier	36
Avantages et limitations	37
1.7.3 Choix d'une méthode	37
1.7.4 Problèmes lors de la projection de la phase sur les polynômes de Zernike	37
Une solution:	39
1.8 Étude modale de l'anisoplanétisme	40
1.8.1 Introduction	40
1.8.2 Corrélations angulaires et polynômes de Zernike	40
1.8.3 Modélisation des effets de l'anisoplanétisme: notion de "couches équivalentes" .	41
Définition	41

Influence du nombre de couches	42
Influence de l'échelle externe	47
1.9 Conclusion	48
2 Imagerie à travers la turbulence	51
2.1 Introduction	51
2.2 FEP et FTO du système télescope+atmosphère	51
2.3 FTO moyenne, FTS	52
2.3.1 FTO _{lp}	54
2.3.2 FTS	55
2.4 La relation objet-image	56
2.4.1 Dans le cas général	56
2.4.2 Dans le domaine isoplanétique	56
2.5 Restitution de l'information contenue dans les hautes fréquences spatiales de l'objet	57
2.5.1 Traitements <i>a posteriori</i>	57
L'interférométrie des speckles	57
La déconvolution par analyse de front d'onde	57
2.5.2 L'optique adaptative	58
2.6 Conclusion	58
3 Optique adaptative & reconstruction de front d'onde	59
3.1 Introduction	59
3.2 Historique	59
3.3 Principe de l'optique adaptative	60
3.4 L'analyse de front d'onde	60
3.4.1 Différentes méthodes d'analyse	60
3.4.2 Le Shack-Hartmann	62
Bruit d'analyse	63
3.5 Le système de correction	63
3.6 La commande	64
3.7 Reconstruction spatiale du front d'onde	64
3.7.1 Problème direct	64
3.7.2 Estimation au sens des moindres carrés	65
3.7.3 Estimation optimale de la phase sur la base de reconstruction	66
3.7.4 Erreur de reconstruction	68
Cas de l'approche MC	68
Cas de l'approche LMMSE/MAP	69
3.7.5 Estimation optimale vis-à-vis de la commande du miroir	69
3.7.6 Discussion	70
3.8 Conclusion	71
4 Performances et limitations de l'optique adaptative	73
4.1 Introduction	73
4.2 Les différentes sources d'erreurs	74
4.2.1 Erreur de reconstruction de la phase	74
4.2.2 Erreur temporelle	74
4.2.3 Erreur d'anisoplanétisme	74
4.2.4 Erreur totale	75

4.3	Imagerie en correction partielle	75
4.3.1	Effets de la correction partielle sur la FEP	76
4.3.2	Effets de la correction partielle sur la FTO	77
4.4	Caractérisation des performances d'une OA	78
4.4.1	La variance résiduelle	78
4.4.2	Le rapport de Strehl	79
4.4.3	L'énergie cohérente	79
4.4.4	Lien entre le rapport de Strehl et l'énergie cohérente	79
4.5	Comportement statistique des courtes poses corrigées par OA	80
4.5.1	Statistique des courtes poses sur l'axe optique	80
4.5.2	Statistique des courtes poses hors axe	96
	calcul de la moyenne	96
	calcul de la variance	96
	Comparaison entre la théorie et les simulations	98
4.5.3	Corrélations angulaires des courtes poses	98
	Comparaison entre théorie et simulation	101
4.6	Évolution angulaire des longues poses corrigées par OA	101
4.7	Définition de domaines isoplanétiques pour l'optique adaptative	103
4.7.1	La définition de Fried	103
4.7.2	Un critère sur la variance résiduelle	104
4.7.3	Un critère sur les corrélations angulaires des courtes poses	104
4.8	Conclusion	105

II LE TRAITEMENT D'IMAGES CORRIGÉES PAR OPTIQUE ADAPTATIVE 107

1	La déconvolution	109
1.1	Introduction	109
1.2	Le problème direct : correction partielle par OA	110
1.3	Le problème inverse : la déconvolution	110
1.3.1	Définition d'un critère	112
1.3.2	Minimisation du critère	114
1.4	La déconvolution "classique"	115
1.4.1	Statistiques sur le bruit & estimateurs MV	116
	Bruit blanc gaussien homogène & filtre inverse	116
	Bruit Poissonnien & Algorithme de Richardson-Lucy	118
	Bruit mixte: gaussien et poissonnien	119
1.4.2	Régularisation sur l'objet	120
	Introduction d'une contrainte de positivité sur l'objet	120
	Régularisation quadratique	121
	Régularisation quadratique-linéaire	123
	Régularisation par une norme L _p	126
1.4.3	Une régularisation spécifique : les champs d'étoiles	126
	Convexité du critère	127
	Détection de sources	128
	Sources ponctuelles sur fond lentement variable	130
1.4.4	Estimation de la FEP de référence	130

1.5	La déconvolution myope	131
1.5.1	Estimation de h_m et DSP_h	132
	Utilisation d'une étoile de référence	132
	Utilisation des données ASO	133
	Commentaires sur l'article	145
1.6	De la théorie à la pratique: l'algorithme MISTRAL	145
1.6.1	L'algorithme MISTRAL	145
1.6.2	Améliorations possibles	145
1.7	Application à des données astronomiques réelles	146
1.7.1	Pré-traitements	146
1.7.2	L'astéroïde Vesta observé à l'Observatoire de Haute Provence	147
	Rappels sur Vesta	147
	Les observations	147
	La déconvolution myope	151
	Évolution du flux et de la forme de Vesta au cours d'une rotation	151
1.7.3	Ganymède	154
1.7.4	Io	154
1.7.5	Uranus	156
1.7.6	Neptune	158
1.8	Conclusion	159
2	Traitement d'images anisoplanétiques corrigées par OA	161
2.1	Introduction	161
2.2	Effet de l'anisoplanétisme sur la déconvolution	161
2.3	Traitemen t d'images longue pose anisoplanétiques	163
	La Fonction de Transfert Anisoplanétique (FTA)	164
	Modification de l'algorithme de déconvolution "champs stellaires"	164
	L'article	165
2.4	Cas d'objets continuement étendus	175
2.4.1	limitations actuelles et perspectives	177
2.5	Traitemen t d'images courte pose anisoplanétiques	177
2.6	Conclusion	178
III	UNE TECHNIQUE D'IMAGERIE À GRAND CHAMP : L'OPTIQUE ADAPTATIVE MULTICONJUGUÉE	179
1	OAMC & reconstruction de front d'onde à grand champ	181
1.1	Introduction	181
1.2	Principe de l'optique adaptative multiconjuguée	182
1.2.1	Présentation générale	182
1.2.2	Un peu d'histoire	184
1.2.3	Position du problème	185
1.2.4	La mesure	185
1.2.5	La correction	187
1.3	La tomographie	187
1.3.1	Approche de type Maximum <i>A Posteriori</i>	189
1.3.2	Influence de la régularisation de type Kolmogorov	192

1.3.3	L'approximation des couches équivalentes	195
	Influence du nombre de miroirs	198
	Influence du nombre de directions d'analyse	199
1.3.4	Compléments sur la lettre	205
	Influence de la position des miroirs	205
	Influence du bruit d'analyse	206
1.3.5	Séparation optimale entre étoiles guides	207
1.4	Reconstruction optimale en fonction du champ d'intérêt	221
1.5	conclusion	243
2	Erreurs de reconstruction en OAMC	245
2.1	Introduction	245
2.2	Problème des modes mal mesurés par le système	246
2.3	Quels sont les modes mal ou pas mesurés ?	246
2.4	Erreurs liées aux modes non vus	249
2.4.1	Cas des moindres carrés tronqués	250
2.4.2	Cas de l'approche optimale (MAP)	252
2.4.3	Comparaison des deux estimateurs	253
	Gain en qualité de reconstruction	254
	Gain en qualité de correction	255
2.5	Définitions de systèmes	256
2.5.1	Influence du nombre d'étoiles guides	256
2.5.2	Influence de la séparation entre étoiles	257
2.6	Résumé des avantages d'une approche probabiliste	261
2.7	Conclusion	261
A	Calcul de la Fonction de Transfert Anisoplanétique	271
B	Calcul de Surfaces d'intersection de 3 disques	275
C	Phase estimation for large FOV: application to MCAO	277
D	Liste des publications	289
D.1	Revues à comités de lectures	289
D.2	Conférences	290

Table des figures

1.1	DSP des fluctuations d'indice	21
1.2	Fonction de structure des fluctuations d'indice	22
1.3	Profil de C_n^2 obtenu à Paranal	23
1.4	Profil théorique de C_n^2 (Hufnagel)	24
1.5	Propagation à travers une couche turbulente	26
1.6	Anisoplanétisme	29
1.7	Polynômes de Zernike	31
1.8	Matrice de covariance de Noll	33
1.9	Variance résiduelle après corrections des premiers polynômes Zernike	34
1.10	Évolution de la variance du tilt en fonction de L_0/D	35
1.11	Matrice des $Z_i^t Z_j$	38
1.12	Influence de la pixélisation sur le calcul des coefficients de Zernike	38
1.13	Résultats après re-orthonormalisation	39
1.14	Profils équivalents	43
1.15	Corrélation des coefficients de Zernike numéros 2 et 16 en fonction de l'angle	43
1.16	Erreur sur la corrélation en fonction des profils équivalents utilisés	44
1.17	Courbes de corrélations de la phase	45
1.18	Profil équivalents	45
1.19	Corrélation des coefficients de Zernike numéros 2 et 16 en fonction de l'angle	46
1.20	Erreur sur les courbes de corrélation	46
1.21	Corrélations en fonction de L_0/D	48
1.22	Corrélations normalisées en fonction du L_0/D	49
1.23	Corrélation en fonction de L_0/D pour des valeurs typiques sur le site de Paranal	49
2.1	Imagerie en présence de turbulence	53
2.2	FTO en présence de turbulence comparée à la FTO théorique du télescope	53
2.3	FTO moyenne en présence de turbulence	55
2.4	Fonction de Transfert de speckles	55
3.1	Schéma de principe d'un système d'optique adaptative.	61
3.2	Schéma de principe d'un analyseur de type Shack-Hartmann	62
3.3	Spectre spatial d'un signal échantillonné. On met en évidence le problème de l'effet de repliement lors de la mesure d'un signal échantillonné.	65
4.1	Coupe de FEP courte et longue poses	76
4.2	Fonction de structure de la phase résiduelle après correction des 36 premiers polynômes de Zernike	77
4.3	FTO en correction partielle par OA	78
4.4	Taux de fluctuation du rapport de Strehl instantané en fonction de l'angle	98

4.5	Taux de fluctuation du rapport de Strehl instantané en fonction de l'angle	99
4.6	Corrélations du rapport de Strehl instantané en fonction de l'angle	102
4.7	Corrélations du rapport de Strehl instantané en fonction de l'angle	102
1.1	Image test simulée	111
1.2	Coupe de la FEP simulée dans un cas VLT-NAOS	111
1.3	Représentation schématique de la déconvolution	112
1.4	Représentation schématique des effets de la régularisation	113
1.5	Exemple de critères à 1 seul et plusieurs minima.	115
1.6	Illustration du phénomène de Gibbs	117
1.7	Déconvolution en utilisant un algorithme de Richardson-Lucy	118
1.8	Évolution de l'erreur en fonction du temps de calcul pour un algorithme R-L	119
1.9	Comparaison entre une statistique Gaussienne et Poissonienne pour m=9 (et $\sigma = 3$) .	120
1.10	Estimation de la DSP de l'objet vrai	122
1.11	Objet estimé pour une régularisation quadratique	122
1.12	Norme L1-L2	124
1.13	Comparaison des résultats de déconvolution entre l'algorithme de L-R, la norme L2 et la norme L1-L2	124
1.14	Évolution des l'eqm en fonction des hyperparamètre	125
1.15	Vitesses de convergence	126
1.16	Critère non convexe	128
1.17	Image simulée d'un champ stellaire	129
1.18	Variation de la FEP due aux variations de seeing	130
1.19	Déconvolution classique avec FEP de référence	131
1.20	Évolution des FTO en fonction du seeing	133
1.21	Comparaison déconvolution classique - myope	134
1.22	Série d'images de Vesta	148
1.23	Série d'images de 63-Ceti (étoile de référence)	149
1.24	Évolution du rapport de Strehl	149
1.25	Évolution du r_0	150
1.26	Évolution du flux de 63 Ceti	150
1.27	Série d'images de Vesta déconvoluées	151
1.28	Variation de l'aire de Vesta au cours du temps	152
1.29	Correction du flux de 63 Ceti	153
1.30	Varia tion de Flux et d'aire sur Vesta	153
1.31	Déconvolution myope de Ganymède	154
1.32	Image de Io corrigée par OA et d'une FEP de référence	155
1.33	Un exemple de résultats: 2 images consécutives de Io déconvoluées par MISTRAL. .	156
1.34	Déconvolution d'Uranus	157
1.35	Anneaux et satellites d'Uranus	157
1.36	Images déconvoluées de Neptune	158
2.1	Évolution de la FEP en fonction de l'angle	162
2.2	Influence de l'anisoplanétisme sur la déconvolution	163
2.3	Représentation schématique du calcul des FEP à partir des FTA	175
2.4	Schéma de principe du découpage d'une image anisoplanétique en zones isoplanétiques	176
1.1	Schéma de principe de l'OAMC	183
1.2	Schéma de principe du système	187

1.3	répartitions des ASO	193
1.4	Reconstruction du volume de turbulence: cas 3 directions d'analyse	194
1.5	Évolution de la qualité de correction dans le champ. Comparaison MAP-MC. Cas d'un système de composé de 3 ASO	195
1.6	Reconstruction du volume de turbulence: cas 6 directions d'analyse	196
1.7	Évolution de la qualité de correction dans le champ. Comparaison MAP-MC. Cas d'un système de composé de 6 ASO	196
1.8	Influence de la position des MD sur la qualité de correction	205
1.9	Influence du RSB sur le nombre de MD	207
2.1	Schéma simplifiée à une dimension du problème des modes non mesurés	247
2.2	Évolution de la sensibilité des modes du système d'OAMC	248
2.3	Modes non vus en OAMC	248
2.4	Distribution de la variance turbulente sur les modes propres du système. Les conditions de turbulence sont celles résumées dans la table 2.1. Les variances sont données en rad^2	249
2.5	Répartition de l'erreur de reconstruction sur les modes du système: cas MC	251
2.6	Évolution de l'erreur en fonction du seuil de troncature de la TSVD	251
2.7	Évolution de la sensibilité des modes en fonctions de la géométrie d'analyse	252
2.8	Répartition de l'erreur de reconstruction sur les modes du système: cas MAP	253
2.9	Matrice de covariance de la phase turbulente exprimée dans la base des modes propres du système	254
2.10	Comparaison entre MAP et MC	255
2.11	Comparaison MAP-MC pour 2 étoiles d'analyse	256
2.12	Comparaison MAP - MC pour différents nombres de directions d'analyse	258
2.13	Évolution de la qualité de correction en fonction du nombre de directions d'analyse	259
2.14	Illustration des modes tip-tilt non vus. Ces modes sont non vus <u>quelle que soit</u> la direction dans le champ.	259
2.15	Réparation des étoiles guides dans le champ. Plusieurs séparations entre étoiles sont considérées.	260
2.16	Évolution de la qualité de correction dans le champ pour les reconstructeurs MC et MAP dans le cas de trois étoiles pour différentes valeurs de séparations. Figure de gauche: cas MC. Figure de droite: cas MAP	261
B.1	275

Table des acronymes et abréviations

PARAMÈTRES PHYSIQUES	
C_n^2	Constante de structure de l'indice de réfraction
D	Diamètre du télescope
h	altitude
λ	longueur d'onde
L_0	Grande échelle de la turbulence
l_0	Petite échelle de la turbulence
r_0	Paramètre (ou diamètre) de Fried
θ_0	angle isoplanétique (au sens de Fried)

ABRÉVIATIONS FRANÇAISES	
ASO	Analyseur de Surface d'Onde
CP	Courtes Poses
DSP	Densité Spectrale de Puissance
Ec	Énergie cohérente
EQM	Écart Quadratique Moyen
FEP	Fonction d'Étalement de Point
FTA	Fonction de Transfert Anisoplanétique
FTO	Fonction de Transfert Optique
FTS	Fonction de Transfert des Speckles
KL	Karhunen-Loeve (polynômes de)
MAP	Maximum <i>A Posteriori</i>
MC	Moindres Carrés
MD	Miroir Déformable
MV	Maximum de Vraisemblance
OA	Optique Adaptative
OAMC	Optique Adaptative Multiconjuguée
R-L	Richardson-Lucy (algorithme de)
RSB	Rapport Signal à Bruit
S-H	Shack-Hartmann
TF	Transformée de Fourier
TFD	Transformée de Fourier Discrète
UA	Unité Astronomique (149 597 871 km)

ABRÉVIATIONS ANGLAISES

AO	Adaptive Optics
ATF	Anisoplanatic Transfert Function
DM	Deformable Mirror
EL	Equivalent Layer
FoV	Field of View
GS	Guide Star
IDL	Interactive Data Language
ISR	Instantaneous Strehl Ratio
LMMSE	Linear Minimum Mean Square Estimator
LSE	Least Square Estimator
MCAO	Multiconjugate Adaptive Optics
MISTRAL	Myopic Iterative STep-preserving Restoration ALgorithm
ML	Maximum Likelihood
MMSE	Minimum Mean Square Estimator
OTF	Optical Transfert Function
PSF	Point Spread Function
SCIDAR	SCIillation Detection And Ranging
SNR	Signal to Noise Ratio
SR	Strehl Ratio
STF	Speckle Transfert Function
SVD	Singular Value Decomposition
UT	Universal Time
TSVD	Troncated Singular Value Decomposition
WFS	Wave-Front Sensor

ORGANISMES, OBSERVATOIRES ET INSTRUMENTS

ADONIS	ADaptive Optics Near Infrared System
ALTAIR	ALtitude conjugate Adaptive optics for InfraRed
BOA	Banc d'Optique Adaptative
CFHT	Canada-France-Hawaii Telescope
COME-ON	Cge Observatoire de Paris-Meudon ONéra
ESO	European Southern Observatory
GSM	Generalized Seeing Monitor
NAOS	Nasmyth Adaptive Optics System
OHP	Observatoire de Haute Provence
ONERA	Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
PUEO	Probing the Universe by Enhanced Optics
VLT	Very Large Telescope

Introduction

Depuis une centaine d'années, la taille des télescopes n'a cessé d'augmenter pour atteindre des diamètres de l'ordre de la dizaine de mètres. Aujourd'hui, certains projets plus ambitieux proposent des télescopes de 50 voire 100 mètres [Gilmozzi-p-98, Gilmozzi-p-00, Dierickx-p-00].

Cette croissance importante à deux principaux buts, augmenter le flux total collecté, réduisant par la même le bruit de photons qui représente la limite fondamentale de toute observation et améliorer la résolution angulaire sur l'objet observé. Si le premier objectif est atteint (le nombre de photons collecté augmente avec le carré du diamètre), il n'en est, hélas, pas de même pour la résolution angulaire [Roddier-l-81]. En effet, la présence de l'atmosphère terrestre limite de manière importante la résolution de ces télescopes. Cette dernière ne dépasse jamais la résolution théorique d'un télescope de quelques dizaines de centimètres aux longueurs d'onde optiques et ce, quelque soit le diamètre considéré [Fried-a-66]. En effet, les fronts d'ondes, issus d'un objet, sont perturbés par les fluctuations d'indice de réfraction de l'air dans l'atmosphère. Ces perturbations entraînent un élargissement de la tache image au foyer du télescope ce qui introduit, *in fine* un flou dans l'image. La résolution obtenue, dépendant de la longueur d'onde d'observation, peut être plusieurs dizaines de fois inférieure à la résolution théorique attendue.

De nombreuses techniques ont été proposées depuis 30 ans pour tenter de s'affranchir, du moins en partie, des effets de la turbulence atmosphérique. Le première d'entre elle est l'interférométrie des tavellures, proposée par A. Labeyrie [Labeyrie-a-70] en 1970. Elle repose sur l'enregistrement d'images ayant des temps de pose suffisamment courts pour figer les effets de la turbulence. Des traitements appropriés permettent ensuite, d'atteindre la limite de diffraction du télescope. Ce principe a, depuis, été amélioré par de nombreux auteurs [Knox-a-74, Weigelt-a-77]. D'autres techniques utilisant également l'acquisition d'images courte pose mais fondées sur le principe de la déconvolution ont aussi été développées (diversité de phase [Gonsalves-a-82], déconvolution par analyse de front d'onde [Primot-a-90], notamment). Une autre approche, l'Optique Adaptative (OA) [Babcock-a-53, Hardy-a-77, Roddier-l-99], consiste à corriger les effets de la turbulence en temps réel. Il s'agit d'analyser, puis de corriger au moyen d'un miroir déformable, les fluctuations du front d'onde induites par la traversée de l'atmosphère. Mise en œuvre pour la première fois en astronomie il y a une dizaine d'années sur le télescope de 3.6 mètres de l'European Southern Observatory (ESO) à la Silla (Chili) [Rousset-a-90], l'OA est en passe d'équiper la totalité des grands télescopes en activité ou en construction.

Si l'OA constitue sans nulle doute la solution d'avenir pour l'observation astronomique depuis le sol, certaines limitations technologiques ou fondamentales (bruit de photons) dégradent la qualité de correction des systèmes d'OA lors d'observation sur l'axe (c'est-à-dire dans la direction d'analyse). Le front d'onde n'est que partiellement corrigé et des résidus de turbulence viennent perturber l'image finale. Néanmoins, malgré une atténuation qui peut être importante à cause de la correction partielle, **toute** l'information fréquentielle de l'objet jusqu'à la fréquence de coupure du télescope est présente dans l'image [Conan-t-94]. Ainsi des traitements *a posteriori* permettent à partir d'une image partiellement corrigée, de restituer un objet atteignant la résolution limite du télescope.

Une autre limitation des systèmes d'OA provient du domaine angulaire restreint (domaine isopla-

nétique [Fried-a-82]) où l'on peut considérer que les dégradations sur le front d'onde sont identiques et donc où la correction du système sera efficace. En dehors de ce domaine la qualité de correction va chuter en fonction de l'angle. Ce domaine isoplanétique, qui fixe le champ de vue utile d'une optique adaptative, n'est que de quelques secondes d'arc aux longueurs d'onde visibles.

Un système d'optique adaptative ne fournira donc que des images partiellement corrigées (comportant donc un flou résiduel) sur un champ de vue restreint.

Le but de cette thèse est d'étudier et de développer de nouvelles méthodes permettant de s'affranchir de ces deux limitations. Il s'agit *in fine* d'obtenir une image "complètement" corrigée des effets de la turbulence et ce sur un grand champ de vue. Dans un premier temps, je me suis limité aux systèmes d'OA existants et j'ai développé de nouvelles techniques de traitement *a posteriori* permettant de restituer le meilleur objet possible à partir d'une image corrigée par OA. Ces techniques d'abord mises en œuvre dans le cadre d'images isoplanétaires ont ensuite été étendues au cas du traitement d'images dans un grand champ de vue. Ces approches sont néanmoins limitées par la perte en rapport signal à bruit due à la chute de la correction pour des zones éloignées de l'axe optique. Pour résoudre ce problème il a fallu envisager la modification du concept de l'optique adaptative "classique" pour permettre d'obtenir une bonne correction (donc un bon rapport signal à bruit) pour un très grand champ de vue. C'est le concept de l'optique adaptative multiconjuguée que j'ai étudié à la fois sur simulations numériques mais également en développant des formules analytiques.

La première partie de ce mémoire est consacrée à l'étude des phénomènes responsables de la correction partielle et de l'anisoplanétisme en optique adaptative. Cette étude comprend un certain nombre de rappels tant sur la turbulence (chapitre 1) et son influence sur la formation des images (chapitre 2) que sur l'optique adaptative (chapitres 3 et 4). En plus de ces rappels, des compléments originaux sur l'anisoplanétisme et la correction partielle en optique adaptative sont proposés. L'étude des décorrélations angulaires des fronts d'onde au chapitre 1 permet de mettre en évidence la faible sensibilité du phénomène d'anisoplanétisme vis-à-vis du profil de turbulence. Cela conduit à la définition du concept de "couches équivalentes" qui sera ré-utilisé dans la suite du mémoire. Au chapitre 3, je propose une approche globale du problème de la reconstruction de front d'onde qui sera à la base des études menées dans la troisième partie du mémoire. Puis au chapitre 4 une étude statistique des images courtes pose partiellement corrigées par OA est proposée. Cette étude complète les travaux menés par Jean-Marc Conan sur le sujet [Conan-t-94].

Cette première partie sert donc à introduire la problématique générale de la thèse et à étudier les phénomènes (correction partielle et anisoplanétisme) responsables des dégradations dont on veut s'affranchir.

La deuxième partie du mémoire porte sur l'étude et la mise en œuvre de méthodes de traitements *a posteriori* permettant d'éliminer les effets de la correction partielle et, à partir d'une image fournie par un système d'OA d'estimer au mieux l'objet observé. Ces études, présentées au chapitre 1, m'ont conduit à participer, en collaboration avec J.-M. Conan et L. Mugnier au développement du programme de déconvolution MISTRAL (Myopic Iterative STep-preserving Restoration ALgorithm). Les techniques mises en œuvre pour le développement de MISTRAL se fondent sur une approche bayesienne du problème de la déconvolution. L'introduction de connaissances *a priori* sur la statistique du bruit, sur l'objet observé et sur la fonction d'étalement de point (FEP) du système (qui n'est jamais parfaitement connue en pratique) permet d'obtenir un objet restitué avec une précision bien supérieure aux techniques habituellement employées en astronomie. Après avoir participé à son développement et à sa validation, j'ai utilisé MISTRAL pour traiter des données réelles (essentiellement des observations d'objets du système solaire) fournies par plusieurs astronomes (en particulier F. Marchis et C. Roddier). Des exemples de traitements sont présentées en fin de chapitre. Si MISTRAL fournit des résultats

impressionnantes en terme de qualité de reconstruction tant au niveau de la résolution qu'au niveau de la photométrie, la méthode reste limitée au cas d'une image isoplanétique. Elle ne peut donc pas être appliquée à des images à grand champ de vue. Deux problèmes se posent ici, d'une part l'évolution de la FEP dans le champ et de l'autre la perte en rapport signal à bruit due à la dégradation de la correction. Je propose dans le deuxième chapitre de cette partie une modélisation de l'évolution de la FEP en fonction de l'angle pour un système d'optique adaptative. Ce modèle permet d'estimer la FEP en tous points du champ. Cette connaissance est ensuite intégrée dans un algorithme de traitement *a posteriori* et permet ainsi d'augmenter très sensiblement le champ d'utilisation de l'algorithme et d'obtenir des objets restitués avec une grande précision sur des champs bien plus grands que le domaine isoplanétique classique. On résout par la même le problème posé en obtenant une image corrigée des résidus de turbulence sur un grand champ de vue. Hélas, cette technique bien qu'encourageante est limitée par la chute de la correction de l'OA et donc la perte en rapport signal à bruit pour les angles importants. On parvient donc à réduire les effets dus à l'anisoplanétisme mais pas à s'en affranchir. L'augmentation du rapport signal à bruit suppose une meilleure correction dans tout le champ! Ceci n'étant pas possible avec les systèmes d'OA existants, la solution à envisager est un nouveau type de systèmes d'OA qui permette de prendre en compte le phénomène d'anisoplanétisme et de procurer une bonne correction dans un grand champ de vue.

La troisième partie du mémoire concerne l'étude de l'optique adaptative multiconjuguée (OAMC) [Dicke-a-75, Beckers-p-88]. Ce système est une généralisation de l'OA à plusieurs miroirs déformables optiquement conjugués à différentes altitudes. Avec un tel système, il devrait être possible d'obtenir une correction uniforme dans un très grand champ. L'optique adaptative multiconjuguée, n'est pour le moment qu'un concept, certe séduisant mais qui n'a jamais été testé et validé sur le ciel. De nombreux problèmes sont à résoudre pour envisager la conception et la réalisation d'un tel système. Le but du premier chapitre de cette troisième partie est d'étudier plus spécifiquement un de ces problèmes à savoir la reconstruction de la phase dans un grand champ et la définition d'une commande spatiale pour l'OAMC. L'évolution des différents paramètres constituant le système est ensuite étudiée. Ainsi je montre qu'un faible nombre de miroirs déformables (2 ou 3) ainsi qu'un faible nombre de directions d'analyse (au moins 3) sont suffisants pour assurer une bonne (et surtout quasi-uniforme) correction dans un très grand champ (des facteurs supérieurs à 10 peuvent être espérés). Le développement d'une approche optimale pour la reconstruction spatiale du front d'onde dans un grand champ est proposée. Cette approche permet d'être très optimiste quant à l'efficacité des futurs systèmes d'OAMC. Dans le deuxième chapitre, j'étudie l'erreur de reconstruction en OAMC en comparant deux approches : les moindres carrés classiquement utilisées et l'approche optimale que je propose.

Enfin, la conclusion du mémoire permet de faire le bilan de trois années de recherche sur une gamme relativement vaste de sujets et pour chacun d'eux d'envisager quelques perspectives à court, moyen voire long terme.

Première partie

TURBULENCE ATMOSPHERIQUE ET
OPTIQUE ADAPTATIVE :
ÉTUDE STATISTIQUE

Chapitre 1

Turbulence atmosphérique et propagation

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est, à la fois de rappeler quelques résultats fondamentaux liés à l'étude statistique de la turbulence atmosphérique, et de son influence sur la propagation des ondes lumineuses, mais aussi de mettre l'accent sur des résultats originaux qui sont à la base des études menées au cours de cette thèse et essentiels à la bonne compréhension du mémoire.

La turbulence et ses effets sur la propagation d'une onde étant de nature aléatoire, une étude statistique est nécessaire pour étudier le phénomène et son influence sur la formation des images. Je vais, après quelques rappels sur la physique du phénomène, m'attacher à caractériser statistiquement les fluctuations de l'indice de réfraction de l'air introduites par la turbulence, puis les effets de ces fluctuations sur la propagation d'une onde. Je m'attarderai notamment sur les effets de décorrélations angulaires du front d'onde introduits par le volume de turbulence. Après avoir rappelé toutes les notions nécessaires à cette étude (en particulier la notion de décomposition modale), je présenterai des résultats originaux portant sur l'étude des corrélations angulaires de la phase. Ces résultats démontrent la faible sensibilité des corrélations angulaires de la phase vis-à-vis du profil de turbulence et permettent d'introduire la notion de "couches équivalentes" qui servira de base à de nombreuses études dans les parties suivantes.

Dans tout le mémoire je me placerai dans l'hypothèse d'une onde émise d'un objet suffisamment éloigné de la turbulence pour pouvoir supposer que cette onde, lors de la traversée de l'atmosphère, est plane.

1.2 Le phénomène physique

L'atmosphère terrestre est un milieu turbulent. La turbulence est créée par l'énergie cinétique produite par le déplacement de masses d'air (phénomène purement météorologique). Cette énergie qui entraîne la création de tourbillons ayant des grandeurs caractéristiques de quelques dizaines à quelques centaines de mètres (échelle externe de la turbulence) va se transmettre à des tourbillons de tailles de plus en plus faibles (théorie de Kolmogorov sur les cascades d'énergie) jusqu'à dissipation par viscosité lorsque les tourbillons atteignent des tailles de l'ordre du millimètre (échelle interne de la turbulence). Le domaine compris entre ces deux tailles caractéristiques, où la turbulence est pleinement développée, est appelé *domaine inertiel*. Par la connaissance de ce domaine, il est possible de décrire la majorité des effets responsables de la dégradation des images lors de l'observation depuis le sol aux longueurs d'onde visibles. En effet, ces tourbillons vont entraîner des mélanges de masses d'air différentes et donc des fluctuations de température, ces dernières produisant des fluctuations de l'indice de réfraction de l'air

et donc des perturbations d'une onde électromagnétique lors de sa propagation à travers la turbulence. Il est alors nécessaire, avant de s'intéresser aux perturbations de l'onde proprement dites, de rappeler quelques caractéristiques statistiques importantes du phénomène turbulent.

1.3 Les fluctuations de l'indice de réfraction

Lors de l'écoulement turbulent, la température (T) et la pression (P), fluctuent de façon aléatoire à la fois dans le temps et dans l'espace, entraînant la fluctuation de l'indice de réfraction de l'atmosphère, ce dernier étant lié à T et P par la relation :

$$n(\mathbf{r},t) = k(\lambda) \frac{P(\mathbf{r},t)}{T(\mathbf{r},t)} \quad (1.1)$$

où $k(\lambda)$ est un coefficient dépendant de la longueur d'onde (pour $\lambda = 0.5\mu m$, $k(\lambda) = 77.6 \cdot 10^{-6}$) [Ishimaru-l-78]. Aux longueurs d'onde optiques, ce sont les fluctuations de température qui vont dominer par rapport aux fluctuations de pression, et l'on peut alors, en première approximation, supposer que les fluctuations d'indice $\Delta_n(\mathbf{r},t)$ sont uniquement liées aux fluctuations de température¹ $\Delta_T(\mathbf{r},t)$ par la relation suivante :

$$\Delta_n(\mathbf{r},t) = k(\lambda) \frac{P(\mathbf{r},t)}{T(\mathbf{r},t)^2} \Delta_T(\mathbf{r},t). \quad (1.2)$$

où l'on a supposé que $n(\mathbf{r},t) = n_{moyen} + \Delta_n(\mathbf{r},t)$.

1.3.1 La fonction de structure des fluctuations d'indice

Une caractérisation statistique de ces fluctuations d'indice est donnée par la fonction de covariance :

$$B_{\Delta_n}(\boldsymbol{\rho}, h) = \langle \Delta_n(\mathbf{r},h) \Delta_n(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho},h) \rangle \quad (1.3)$$

où h représente l'altitude et $\langle . \rangle$ une moyenne d'ensemble. On a supposé, ici, $\Delta_n(\mathbf{r})$ localement stationnaire (entre h et δh), la fonction de covariance B_{Δ_n} ne va donc dépendre localement que de la distance $\boldsymbol{\rho}$ entre 2 points. Il faut noter que cette fonction de covariance diverge pour $\boldsymbol{\rho} = 0$ dans le cadre du modèle de Kolmogorov [Kolmogorov-a-41]. Pour s'affranchir de ce problème, on peut définir la fonction de structure des fluctuations de température [Tatarski-l-61] et donc des fluctuations d'indice de réfraction. Cette dernière est la variance de la différence des fluctuations d'indice entre deux points distants de $\boldsymbol{\rho}$:

$$D_{\Delta_n}(\boldsymbol{\rho}, h) = \left\langle [\Delta_n(\mathbf{r},h) - \Delta_n(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho},h)]^2 \right\rangle. \quad (1.4)$$

On montre facilement qu'elle peut s'exprimer en fonction de $B_{\Delta_n}(\boldsymbol{\rho})$:

$$D_{\Delta_n}(\boldsymbol{\rho}, h) = 2 [B_{\Delta_n}(0,h) - B_{\Delta_n}(\boldsymbol{\rho},h)] \quad (1.5)$$

Un raisonnement dimensionnel [Obukhov-a-49, Corrsin-a-51] montre que, dans le domaine inertielle, la fonction de structure des fluctuations de température et donc des fluctuations d'indice (par l'équation 1.2) peut se mettre sous la forme (voir figure 1.2) :

$$D_{\Delta_n}(\boldsymbol{\rho}, h) = C_n^2(h) \rho^{\frac{2}{3}} \quad (1.6)$$

en introduisant la constante $C_n^2(h)$ (de dimension $[m]^{-2/3}$) appelée constante de structure des fluctuations d'indice, qui caractérise la force de la turbulence à l'altitude h . $D_{\Delta_n}(\boldsymbol{\rho},h)$ ne dépend plus que du module ρ de la variable vectorielle $\boldsymbol{\rho}$.

1. On néglige les fluctuations d'humidité et de pression.

1.3.2 La densité spectrale des fluctuations indice

Un autre moyen de caractériser statistiquement les fluctuations de l'indice de réfraction est de considérer sa densité spectrale de puissance (qui est la transformée de Fourier de la fonction de covariance présentée dans l'équation 1.3) :

$$W_{\Delta_n, h}(f) = 0.033 (2\pi)^{-\frac{2}{3}} C_n^2(h) (f)^{-\frac{11}{3}} \quad (1.7)$$

avec f le module de la fréquence spatiale \mathbf{f} . Cette équation n'est valable que dans le domaine inertiel, c'est-à-dire pour $\frac{1}{L_0} > f > \frac{1}{l_0}$ [Tatarski-l-61] (L_0 et l_0 étant respectivement les échelles externes et internes de la turbulence). La densité spectrale de puissance définie au-dessus doit donc être modifiée pour couvrir tout le domaine fréquentiel, afin d'éviter une divergence en zéro. Von Karman a proposé un modèle ad hoc pour prendre en compte les deux échelles physiques de la turbulence, introduisant ainsi une coupure haute ($f = 1/l_0$) et basse ($f = 1/L_0$). La grande échelle est définie ici en termes de fréquences spatiales : $1/L_0 = f_0$. Notons qu'une autre définition de la grande échelle peut être trouvée dans [Winker-a-91] ou [Chassat-t-92] : $1/(2\pi L'_0) = f_0$. Dans ce cas $L'_0 = L_0/2\pi$.

$$W_{\Delta_n, h}(f) = 0.033 (2\pi)^{-\frac{2}{3}} C_n^2(h) \left(\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right)^{-\frac{11}{6}} \exp(-f l_0)^2 \quad (1.8)$$

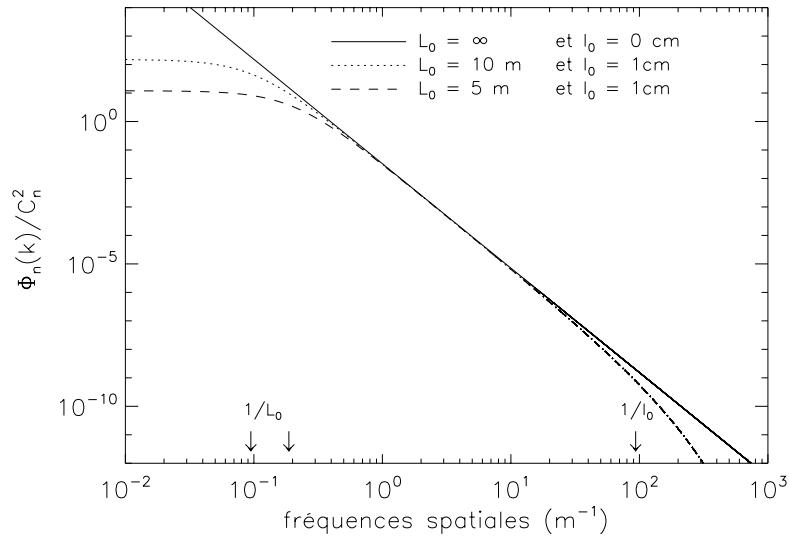


FIG. 1.1 – Densité spectrale de puissance des fluctuations d'indice. Le spectre est normalisé par la valeur du C_n^2

De nombreuses mesures de la grande échelle ont été effectuées ces dernières années grâce au “Generalized Seeing Monitor” (GSM) [Borgnino-a-92, Ziad-p-99]; elles conduisent à des valeurs moyennes de l'ordre de quelques dizaines de mètres (typiquement entre 20 et 30 m avec une loi de probabilité log-normale) [Martin-a-98, Conan-p-00].

En revenant à la notion de fonction de structure, il est intéressant de remarquer que cette dernière est modifiée par l'introduction du spectre de Von Karman à la place du spectre de Kolmogorov [Consortini-a-73, ?, Chassat-t-92] :

$$D_{\Delta_n}(\rho, h) = 0.336 C_n^2(h) \left(\frac{1}{L_0} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(0.915 - \left(\frac{\rho}{L_0} \right)^{\frac{1}{3}} K_{1/3}(2\pi\rho/L_0) \right) \quad (1.9)$$

où $K_{1/3}$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 1/3. L'introduction de la grande échelle a pour effet de faire saturer la fonction de structure pour de grandes séparations.

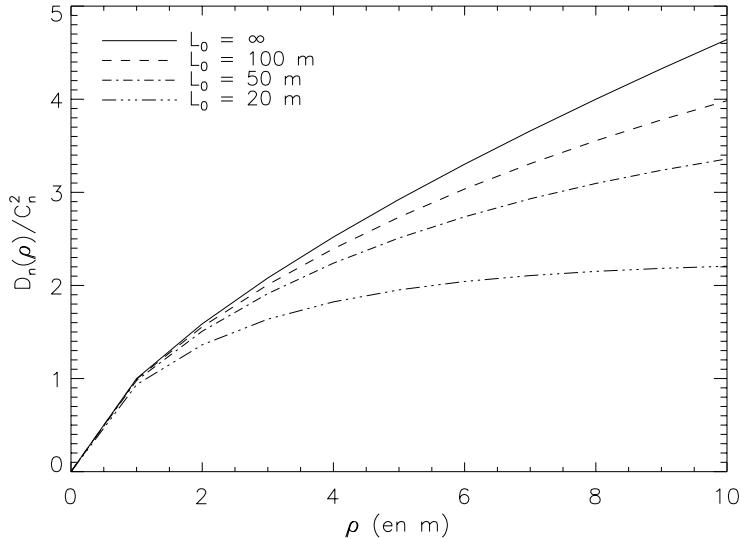


FIG. 1.2 – Fonction de structure des fluctuations d'indice pour différentes valeurs de la grande échelle (suivant un spectre de Von Karman)

1.3.3 La constante de structure de l'indice de réfraction

Revenons à présent, plus longuement, sur la constante de structure de l'indice de réfraction $C_n^2(h)$. La connaissance de cette dernière est essentielle dès que l'on s'intéresse à l'imagerie à haute résolution en présence de turbulence. Les valeurs de cette constante de structure dépendent de toute une série de paramètres allant des conditions météorologiques à la topographie et aux types de terrains en passant par les conditions d'éclairement (heure de la journée) [Hufnagel-p-74, Bougeault-a-95, Mahé-t-00].

Mesures

On peut avoir accès au $C_n^2(h)$ soit

- de manière intégrée: $C_n^2 \Delta h = \int C_n^2(h) dh$, ce qui donne la force globale de la turbulence sur tout le trajet de propagation Δh . On utilise pour cela des appareils optiques tel que le Shack Hartmann ([Laurent-p-89] et paragraphe 3.4.2 de cette première partie) ou le “Differential Image Motion Monitor” [DIMM] [Sarazin-a-90, Sarazin-t-92].

- de manière ponctuelle en fonction de l'altitude ($C_n^2(h)$). On utilise alors :
 - soit des ballons sondes utilisant des capteurs mesurant la fonction de structure des fluctuations de température, et donc la fonction de structure des fluctuations d'indice ce qui, au vu de l'équation 1.6, donne accès à la constante de structure $C_n^2(h)$;
 - soit un SCIDAR (SCintillation Detection And Ranging) Généralisé [Avila-a-97, Vernin-a-98, Kluckers-a-98] qui utilise le phénomène de scintillation pour remonter au profil de turbulence.

A noter que la connaissance du profil de turbulence va s'avérer essentielle lorsque l'on s'intéresse aux phénomènes tel que l'anisoplanétisme (voir paragraphe 1.5.3) ou la scintillation [Andrews-a-99, Mahé-t-00].

La figure 1.3 représente un exemple de profil de $C_n^2(h)$ obtenu par un lâcher de ballon sonde sur le site du Very Large Telescope (VLT) de l'European Southern Observatory (ESO) au mont Paranal (Chili). On peut remarquer sur ce profil :

- une turbulence importante au niveau du sol et sur les premiers kilomètres. La turbulence dans cette zone, appelée couche limite atmosphérique [Mahé-t-00], est importante notamment à cause des échanges de chaleur entre le sol et l'atmosphère et des effets du relief, naturels ou artificiels (effet de dôme pour un télescope).
- une série de pics de turbulence, très localisés à différentes altitudes.

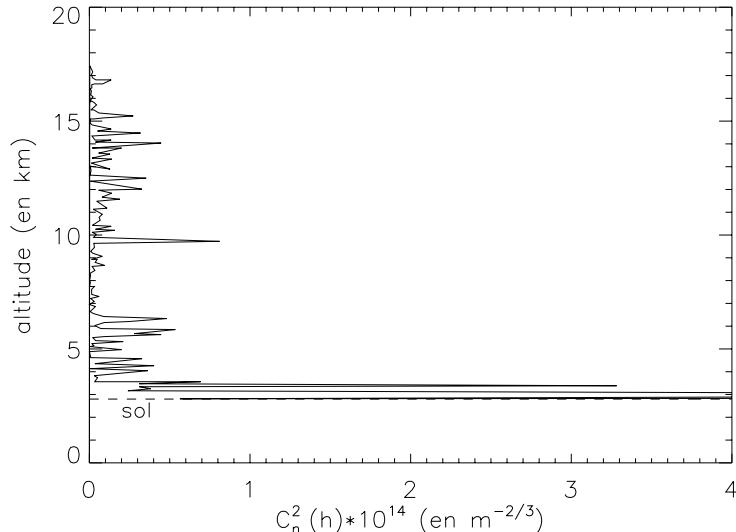


FIG. 1.3 – Profil de C_n^2 obtenu au mont Paranal (Chili) durant la campagne PARSCA 92 par un lâcher de ballon sonde.

Cet exemple illustre bien la tendance générale des profils de turbulence, à savoir, une distribution du profil en couches minces, jusqu'à des altitudes de 15 à 20 km, avec une turbulence importante près du sol et un certain nombre de couches prépondérantes à haute altitude.

Modélisation et prédiction

A partir de séries de mesures, de nombreux auteurs ont proposé des modèles de profils moyens de turbulence. Le plus connu est le modèle de Hufnagel [Hufnagel-p-74] qui a l'avantage de prendre en

compte l'évolution du profil entre le jour (ou la turbulence près du sol est plus importante à cause de l'éclairement solaire) et la nuit (voir figure 1.4).

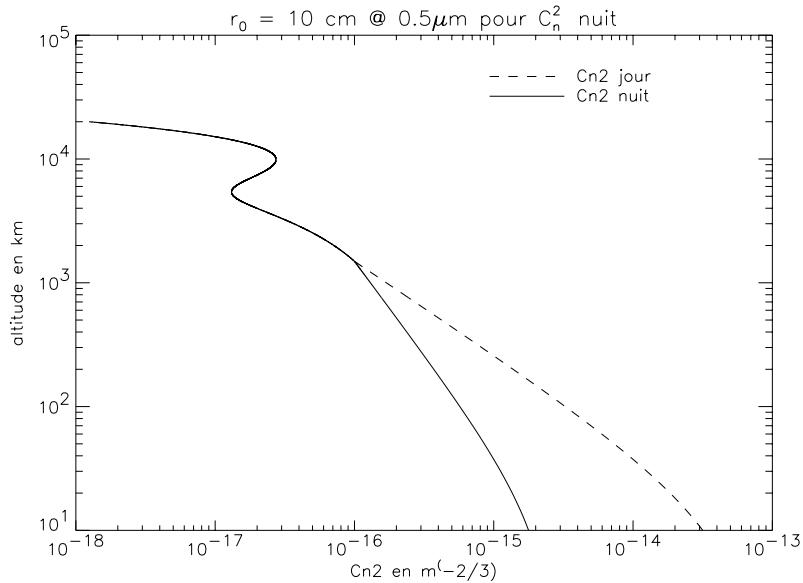


FIG. 1.4 – Profil théorique de C_n^2 jour et nuit. r_0 jour = 5 cm et r_0 nuit = 10 cm.

Une autre étude statistique intéressante est celle menée par R. Racine et B. Ellerbroek sur le site du Mauna Kea à Hawaii [Racine-p-95]. Au cours de 20 nuits d'observations (12 nuits en novembre 1987 et 8 en juin 1989), 414 profils de C_n^2 ont été acquis en utilisant un SCIDAR. Une étude statistique de ces 414 profils montre que pour environ 60% d'entre eux, une grande partie de la turbulence est localisée dans une unique couche turbulente située à une altitude moyenne de 6.5 km².

Toutes les séries de mesures effectuées ces 30 dernières années apportent plusieurs informations très importantes sur la distribution de la turbulence en fonction de l'altitude dans le cadre de l'observation de l'espace :

- la turbulence atmosphérique est stratifiée en couches minces [Coulman-a-95], ces dernières ayant des énergies très différentes sur de petites variations d'altitudes;
- il y a une dominance quasi-systématique de “quelques” couches turbulentes (le “quelques” variant selon les sites, les observations, les dates, de une à une dizaine) [Azouit-a-80, Tallon-p-92, Vernin-a-94, Racine-p-95]; le “continuum” de turbulence entre ces couches prépondérantes est très faible, il a donc peu d'influence sur l'imagerie [Troxel-a-94];
- on note enfin une extrême variabilité du profil de $C_n^2(h)$ tant spatialement (d'un site à l'autre) que temporellement (différences importantes entre le jour et la nuit, mais également, évolution notable sur quelques heures voire quelques minutes).

Il est donc nécessaire, si l'on veut avoir une bonne connaissance du profil de turbulence de pouvoir mesurer en temps réel le profil de $C_n^2(h)$.

Une alternative aux mesures *in situ* et en temps réel, est la prédiction en utilisant des codes météorologiques [Masciadri-t-98, Mahé-t-00, Cuxart-a-00]. Ces codes devraient permettre, à terme, de pouvoir prédire les évolutions du profil de $C_n^2(h)$ à partir d'entrées météorologiques (vent, humidité, température) et orographiques (nature et relief du terrain).

2. On verra dans la suite du mémoire, et notamment dans la troisième partie, l'importance de telles études.

1.3.4 Le paramètre de Fried

Un paramètre essentiel quand on s'intéresse aux effets de la turbulence atmosphérique sur la propagation des ondes lumineuses et sur la formation d'images est le paramètre de Fried (r_0) [Fried-a-66]. Fried introduit r_0 vis-à-vis de l'image formée au plan focal d'un télescope observant à travers la turbulence (voir chapitre 2). r_0 est défini comme un diamètre équivalent fixant la limite de résolution du télescope introduite par la turbulence.

r_0 rend compte de la force globale de la turbulence des différentes couches atmosphériques traversées, pour une direction de visée donnée. Dans le cas d'une onde plane et en considérant un spectre de Kolmogorov, il peut s'exprimer de la manière suivante:

$$r_0 = \left[0.42 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right]^{-\frac{3}{5}} \quad (1.10)$$

avec γ l'angle zénithal, λ la longueur d'onde d'observation. Cette relation définie pour un spectre de Kolmogorov sera aussi utilisée dans la suite de la thèse pour le cas de spectre de Von Karman. r_0 fixe alors la hauteur du domaine inertiel du spectre. r_0 peut aussi être vu comme une aire de cohérence, la zone dans laquelle le champ électrique reste corrélé spatialement.

Une autre façon de caractériser l'influence globale de la turbulence est de s'intéresser au seeing [Roddier-l-81], qui donne la résolution angulaire théorique que l'on peut attendre sur un télescope de diamètre supérieur à r_0 :

$$s = \frac{\lambda}{r_0} \text{ (rad)} \quad (1.11)$$

Il faut noter que si r_0 est un paramètre chromatique ayant une dépendance en $\lambda^{\frac{6}{5}}$ (plus la longueur d'onde sera faible, plus les effets de la turbulence sur l'imagerie seront importants), le seeing quant à lui est quasiment achromatique (dépendance en $\lambda^{-1/5}$)

1.4 Propagation d'une onde électromagnétique

On a rappelé dans les premiers paragraphes de ce chapitre les propriétés et grandeurs statistiques essentielles à l'étude de la turbulence atmosphérique. Intéressons-nous à présent à l'influence de la turbulence sur la formation des images et plus spécifiquement sur la propagation de l'onde électromagnétique issue de l'objet observé.

1.4.1 Propagation à travers une couche turbulente

On va considérer, dans un premier temps, un modèle simple où l'on suppose que toute la turbulence est concentrée à une altitude donnée, c'est-à-dire que le profil de turbulence n'est constitué que d'une seule couche. Cette dernière étant supposée suffisamment mince pour éviter les effets de diffraction durant la propagation de l'onde à l'intérieur de cette couche (approximation des couches minces [Roddier-l-81]) (voir figure 1.5). Dans ce cas, lors de la traversée de la couche, seule la phase du front d'onde est perturbée. Les fluctuations de la phase sont alors reliées à celle de l'indice par les variations du chemin optique:

$$\varphi(\mathbf{r}, h) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta(\mathbf{r}, h) \quad \text{avec } \Delta(\mathbf{r}, h) = \int_h^{h+\delta h} n(\mathbf{r}, z) dz \quad (1.12)$$

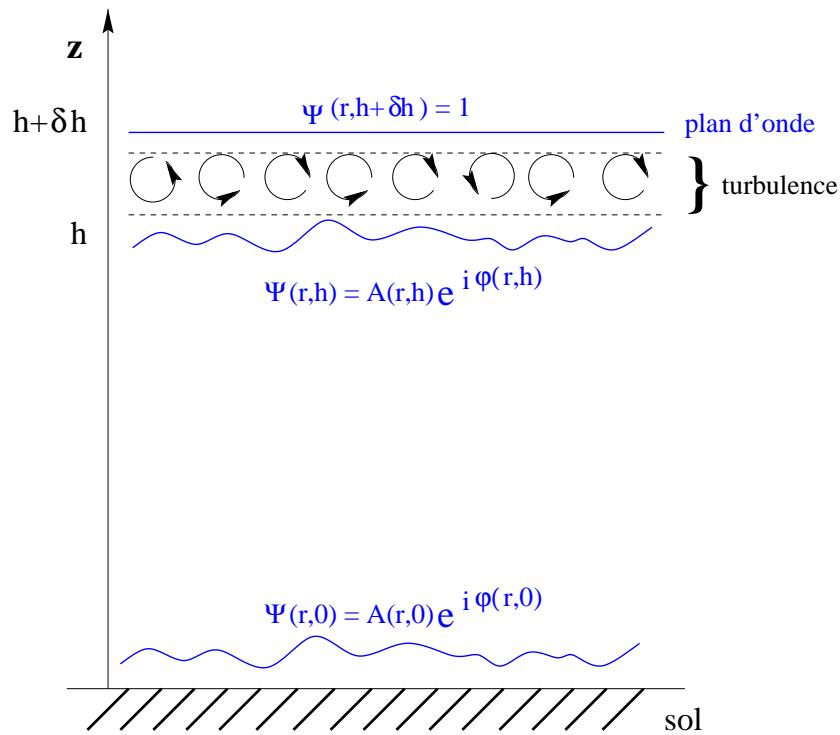


FIG. 1.5 – Propagation à travers une couche turbulente

où $n(\mathbf{r},z)$ représente les fluctuations de l'indice de réfraction. Le champ en h s'écrit alors :

$$\Psi(\mathbf{r},h) = \exp i\varphi(\mathbf{r},h) \quad (1.13)$$

Le front d'onde au sol ($h = 0$) est ensuite donné par la résolution de l'équation d'onde "classique" (propagation de Fresnel). L'état du champ résulte alors des effets de la diffraction induits par la distance de propagation entre la couche et le sol :

$$\Psi(\mathbf{r},0) = \Psi(\mathbf{r},h) * \frac{1}{i\lambda h} \exp \frac{i\pi r^2}{\lambda h} = A(\mathbf{r},0) \exp i\varphi(\mathbf{r},0) \quad (1.14)$$

où $A(\mathbf{r},0)$, l'amplitude du champ n'est désormais plus une constante mais fluctue en fonction de \mathbf{r} .

1.4.2 Propagation à travers plusieurs couches

Supposons à présent que la turbulence atmosphérique puisse être décrite par une série de couches minces localisées à différentes altitudes [Coulman-a-95] (voir figure 1.3)

$$\int_{h=0}^{h=h_{max}} C_n^2(h) dh \simeq \sum_{i=0}^m C_n^2(h_i) \delta h_i \quad (1.15)$$

Dans ce cas, on a le schéma de propagation suivant [Roddier-l-81] :

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{r}, h_m + \delta h_m) &= 1 \\
\Psi(\mathbf{r}, h_m) &= \exp(i\varphi_m(\mathbf{r}, h_m)) \\
\Psi(\mathbf{r}, h_{m-1} + \delta h_{m-1}) &= \Psi(\mathbf{r}, h_m) * \frac{1}{i\lambda(h_m - h_{m-1})} \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda(h_m - h_{m-1})}\right) \\
\Psi(\mathbf{r}, h_{m-1}) &= \Psi(\mathbf{r}, h_{m-1} + \delta h_{m-1}) * \exp(i\varphi_{m-1}(\mathbf{r}, h_{m-1})) \\
&\vdots && \vdots \\
\Psi(\mathbf{r}, 0) &= \Psi(\mathbf{r}, h_1) * \frac{1}{i\lambda h_1} \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda h_1}\right)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Le front d'onde arrivant sur la pupille du télescope résulte donc d'une succession de fluctuations de phase (introduites par les couches turbulentes) et d'amplitude (introduites par le phénomène diffractif de propagation entre les couches).

Or, on peut montrer [Roddier-l-81] que dans le cas de l'observation astronomique les effets de diffraction sont négligeables par rapport aux effets de fluctuations de phase (hypothèse de champ proche), c'est-à-dire des conditions de faible turbulence et de "petites" distances de propagation dans l'atmosphère³. On peut, dans ce cas, approximer la propagation à travers la turbulence par une simple somme de perturbations du front d'onde liées aux fluctuations d'indice des couches turbulentes (hypothèse géométrique) soit :

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) \simeq \exp\left(i \sum_{j=1}^m \varphi_j(\mathbf{r}, h_j)\right) \tag{1.17}$$

avec m le nombre de couches minces positionnées aux altitudes h_j . La grandeur d'intérêt est dans ce cas la phase de l'onde

$$\varphi(\mathbf{r}, 0) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(\mathbf{r}, h_j) \tag{1.18}$$

1.5 Propriétés statistiques de la phase

Il est donc clair qu'avec les hypothèses simplificatrices introduites dans le paragraphe précédent, la grandeur sur laquelle va influer la turbulence, est la phase de l'onde électromagnétique $\varphi(\mathbf{r})$ arrivant au sol. Or d'après l'équation 1.12 les fluctuations de phase sont fortement liées aux fluctuations d'indice. Comme pour ces dernières, on va donc caractériser la phase de manière statistique par sa fonction de structure et sa densité spectrale de puissance ainsi que ses corrélations temporelle et angulaire.

1.5.1 Fonction de structure de la phase turbulente

Considérons à nouveau une seule couche turbulente, dans ce cas la fonction de structure de la phase s'écrit, dans le domaine inertiel, en utilisant les équations 1.6 et 1.12 :

$$D_\varphi(\boldsymbol{\rho}) = \left\langle [\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})]^2 \right\rangle = 2.91 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 C_n^2(h) \delta h \rho^{\frac{5}{3}} \tag{1.19}$$

3. La turbulence susceptible d'influer notablement sur la propagation est typiquement localisée dans les vingt premiers kilomètres de l'atmosphère.

On a, encore une fois, supposé ici que le phénomène est stationnaire et isotrope (de part la nature même des fluctuations de phase intimement liées aux fluctuations d'indice).

Si l'on se place à présent dans le cas d'une propagation à travers plusieurs couches turbulentes que l'on suppose statistiquement indépendantes, la fonction de structure s'écrit comme suit en utilisant le paramètre de Fried r_0 défini en équation 1.10 :

$$D_\varphi(\rho) = 6.88 \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.20)$$

Comme pour la fonction de structure des fluctuations de l'indice de réfraction, la prise en compte d'une grande échelle L_0 a pour conséquence de faire saturer la fonction de structure de la phase pour les grandes séparations (grandes valeurs de ρ). L'équation 1.20 est modifiée au même titre que l'équation 1.9.

1.5.2 Spectre de puissance spatial de la phase turbulente

Comme pour les fluctuations d'indice on peut calculer un spectre de puissance spatial de la phase turbulente. Ce dernier est lié au spectre des fluctuations d'indice par la relation suivante pour une couche :

$$W_\varphi(f) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \delta h W_{\Delta n, h}(f) \quad (1.21)$$

et donc pour une propagation à travers plusieurs couches turbulentes en introduisant r_0 et en utilisant l'équation 1.7, c'est-à-dire en supposant une statistique de Kolmogorov :

$$W_\varphi(f) = 0.023 \left(\frac{1}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} f^{-\frac{11}{3}} \quad (1.22)$$

On peut bien évidemment introduire les échelles interne et externe en utilisant l'équation 1.8 plutôt que 1.7 dans l'équation 1.21.

1.5.3 Évolution angulaire de la phase

Deux fronts d'onde issus de deux sources séparées angulairement ne traversent pas les mêmes portions de l'atmosphère et ne sont donc pas dégradés de la même façon (voir figure 1.6). Du point de vue statistique, cette évolution angulaire du front d'onde se traduit par une décorrélation progressive de la phase en fonction de l'angle (on étudiera cette décorrélation au chapitre 1.8).

Cette décorrélation angulaire des perturbations du front d'onde est un des problèmes majeurs rencontrés lorsque l'on veut faire de l'imagerie à haute résolution. En effet, la majorité des techniques permettant de s'affranchir des problèmes liés aux fluctuations de la phase introduites par la turbulence se basent sur une hypothèse d'isoplanétisme, c'est-à-dire qu'elle suppose que sur leur domaine angulaire d'intérêt les déformations du fronts d'onde sont sensiblement les mêmes. Il est clair, au vu du schéma 1.6, que cet angle isoplanétique va dépendre de la répartition et de la force de la turbulence le long du trajet de propagation; plus la turbulence sera localisée en haute altitude, plus la décorrélation des fronts d'onde sera importante. En fait, pour chaque couche j , on peut définir un angle isoplanétique tel que

$$\theta_{0,j} = F(h_j, r_{0,j}) \quad (1.23)$$

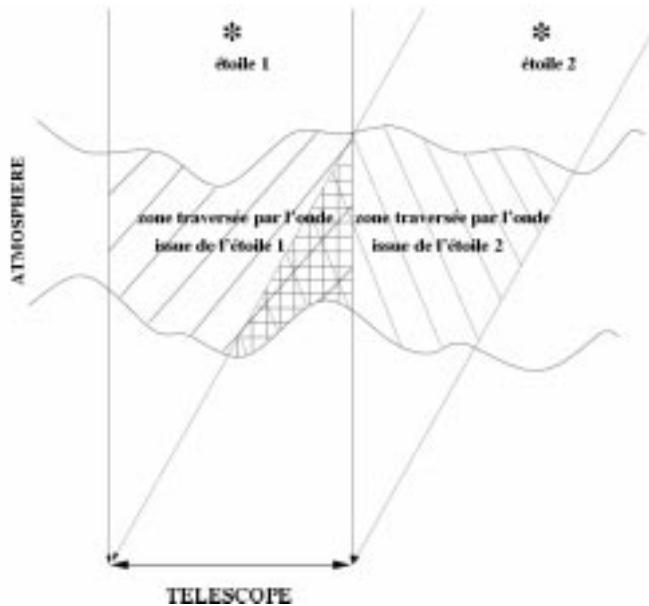


FIG. 1.6 – Propagation à travers la turbulence de deux ondes venant de deux objets séparés angulairement. Seule une faible partie de la turbulence a été traversée par les deux ondes. Sur la pupille du télescope les perturbations de la phase seront différentes.

où h_j et $r_{0,j}$ sont respectivement l'altitude et la force de la couche turbulente j . On peut évidemment étendre la définition au cas multicouches, dans ce cas on aura :

$$\theta_0 = F(C_n^2(h), h, r_0) \quad (1.24)$$

La fonction F va dépendre à la fois du système d'imagerie considéré et du critère choisi pour définir l'angle isoplanétique. À noter que de part sa dépendance en r_0 , l'angle isoplanétique est un paramètre chromatique, et que plus la longueur d'onde sera grande, plus ce dernier sera important.

Il reste bien évidemment à définir la fonction F . Comme on l'a vu plus haut, l'angle isoplanétique est une notion statistique puisqu'il rend compte du domaine angulaire où l'on peut considérer que la décorrélation angulaire de la phase est négligeable. Ce critère de non-évolution de la phase va dépendre, à la fois de l'application considérée [Fried-p-76] et du critère choisi par l'utilisateur⁴. Par exemple, on peut trouver dans la littérature, un angle isoplanétique défini pour les techniques speckles [Roddier-a-82a], un autre défini au sens des angles d'arrivées [Fried-p-76], plusieurs angles définis dans le cas de l'optique adaptative [Fried-a-82, Chassat-a-89, Molodij-t-96] (on y reviendra au paragraphe 4.7 du chapitre 4) ainsi que d'autres définis dans le cadre de l'optique adaptative multiconjuguée [Tokovinin-a-00, Fusco-p-00a] (on y reviendra dans la troisième partie de ce mémoire).

On peut enfin remarquer que dans les cas de fortes turbulences (qui ne sont pas considérés dans ce mémoire) où les effets de scintillation ne peuvent plus être négligés, des relations fortes existent entre les phénomènes d'anisoplanétisme et de scintillation [Sechaud-p-99].

1.5.4 Évolution temporelle de la phase

La problématique est ici la même que dans le cas de l'évolution angulaire. En effet, en supposant que le temps d'évolution des déformations du front d'onde est négligeable devant la translation globale

4. On peut, pour une même application, avoir des désiderata plus ou moins sévères quant à l'évolution tolérable de la phase dans le champ.

de ce dernier (due au vent) devant la pupille du télescope (hypothèse de Taylor [Taylor-a-38]), on peut aisément se ramener d'un aspect temporel à un aspect angulaire. Dans ce cas, la variable d'intérêt est le temps t au lieu de l'angle et la vitesse du vent par couche remplace l'altitude de la couche. La seule différence notable étant le caractère vectoriel de la vitesse du vent (vitesse de défilement des couches) alors que l'altitude, elle, est une grandeur purement scalaire.

1.6 La décomposition modale de la phase

Il est souvent intéressant pour caractériser la phase turbulente et ses évolutions de décomposer cette dernière sur une base discrète de modes. Bien évidemment, plusieurs bases peuvent être utilisées. On peut choisir la base des modes de Karhunen - Loëve (KL), qui, par définition, permet une décomposition sur la base de modes statistiquement indépendants. La matrice de covariance est alors diagonale, ce qui revêt plusieurs avantages au point de vue statistique. Il est notamment plus simple, numériquement, d'effectuer des tirages aléatoires dans une base où la matrice de covariance est diagonale.

Les modes de la base des KL sont généralement calculés en diagonalisant une matrice de modes obtenue dans une base quelconque. Le défaut majeur des modes de KL est qu'il n'existe pas, dans le cas de la turbulence, d'expression analytique pour les représenter, on leur préfère généralement une autre base, celle des polynômes de Zernike [Bezdid'ko-a-74, Noll-a-76].

Cette dernière, bien qu'ayant des covariances non nulles entre modes, a de nombreux avantages (qui seront détaillés dans le paragraphe suivant) et de plus, elle diffère assez peu de la base des KL pour les bas ordres (ceux de plus forte énergie) [Wang-a-78].

D'autres bases peuvent être utilisées comme la base des modes du miroir déformable d'un système d'optique adaptative par exemple (voir chapitre 3.7.5).

1.6.1 Les polynômes de Zernike

Proposés par Zernike en 1934, ces polynômes s'expriment en fonction d'ordres radiaux n , de fréquences azimutales m et de la parité de leur numéro i :

$$\begin{aligned} Z_{i \text{ pair}} &= \sqrt{n+1} R_n^m(\mathbf{r}) \sqrt{2} \cos(m\theta) & m \neq 0 \\ Z_{i \text{ impair}} &= \sqrt{n+1} R_n^m(\mathbf{r}) \sqrt{2} \sin(m\theta) & m \neq 0 \\ Z_i &= \sqrt{n+1} R_n^0(\mathbf{r}) & m = 0 \end{aligned}$$

avec

$$R_n^m(\mathbf{r}) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2-s]! [(n-m)/2-s]!} \mathbf{r}^{n-2s} \quad (1.25)$$

A noter que la base des polynômes de Zernike est une base orthonormée sur une pupille circulaire de surface S :

$$\frac{1}{S} \int_S Z_i^*(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{ij} \quad (1.26)$$

avec δ_{ij} valant 1 si $i = j$ et 0 autrement. On peut aussi remarquer, comme le montre la figure 1.7 que les premiers polynômes représentent les aberrations optiques classiques (comas, défocalisation, astigmatismes ...).

polynômes de Zernike

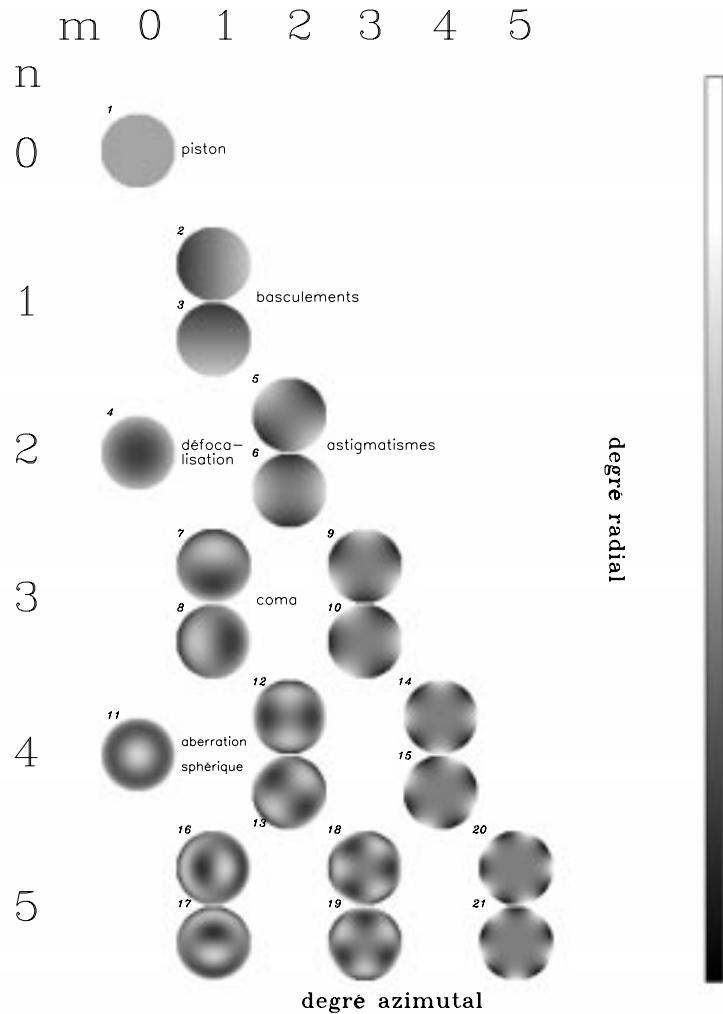


FIG. 1.7 – Polynômes de Zernike de 1 à 21 rangés par ordres radiaux et fréquences azimutales. A noter la correspondance des premiers ordres avec les aberrations optiques classiques.

En utilisant cette base de polynômes, la phase turbulente s'exprime de la façon suivante :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

où $\varphi(\mathbf{r})$ représente la phase turbulente et $Z_i(\mathbf{r})$ le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Zernike.

Inversement, un coefficient de Zernike a_i de la décomposition modale de $\varphi(\mathbf{r})$ sera obtenu par :

$$a_i = \frac{1}{S} \int_S \varphi(\mathbf{r}) Z_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.28)$$

Les polynômes de Zernike sont classés par ordres radiaux et azimutaux croissants. Ce classement a de nombreux avantages, le premier étant qu'il correspond au classement en fréquences spatiales, c'est-à-dire les polynômes d'ordres radiaux élevés correspondent aux hautes fréquences spatiales. Cette analogie entre ordre radial et fréquence spatiale, ainsi que les expressions analytiques des polynômes de Zernike permettent de représenter, d'étudier et de caractériser le comportement statistique de la turbulence et l'effet sur l'optique adaptative à l'aide de formules analytiques simples [Chassat-a-89, Conan-p-95, Molodij-a-97, Fusco-a-00b]. Le deuxième avantage de ce classement est qu'il est aussi fonction de l'énergie turbulente présente dans les modes. Plus les ordres sont élevés, plus l'énergie turbulente est faible.

1.6.2 Variances et covariances des polynômes de Zernike

En supposant une statistique de la phase turbulente suivant la loi de Kolmogorov (voir équation 1.22) et en utilisant l'expression des transformées de Fourier des polynômes de Zernike, Noll ([Noll-a-76]) a calculé la matrice de covariance des coefficients de la décomposition de la phase turbulente $\langle a_i a_j^* \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j \rangle &= 3.90 [(n_1 + 1)(n_2 + 1)]^{\frac{1}{2}} (-1)^{(n_1 + n_2 - 2m_1)/2} \delta_{m_1 m_2} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \\ &\quad \times \int_0^\infty k^{-\frac{14}{3}} J_{n_1+1}(k) J_{n_2+1}(k) dk \\ &= 3.90 [(n_1 + 1)(n_2 + 1)]^{\frac{1}{2}} (-1)^{(n_1 + n_2 - 2m_1)/2} \delta_{m_1 m_2} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \\ &\quad \times \frac{2^{-\frac{14}{3}} \Gamma \left[\frac{14}{3} \right] \Gamma \left[(n_1 + n_2 - \frac{14}{3} + 3)/2 \right]}{\Gamma \left[(-n_1 + n_2 + \frac{14}{3} + 1)/2 \right] \Gamma \left[(n_1 - n_2 + \frac{14}{3} + 1)/2 \right] \Gamma \left[(n_1 + n_2 + \frac{14}{3} + 3)/2 \right]} \quad (1.29) \end{aligned}$$

où D est le diamètre de la pupille (support des polynômes de Zernike), les fonctions $J_l(k)$ sont les fonctions de Bessel d'ordre l , n_1 et m_1 (resp. n_2 et m_2) les ordres radiaux et azimutaux du polynôme i (resp. j) et $\Gamma[x]$ la fonction gamma. On observe sur la figure 1.8 la matrice de covariance des modes turbulents et la diagonale de cette matrice (variance des coefficients). On note notamment que la matrice n'est pas diagonale et qu'il existe donc des liens statistiques entre certains coefficients de la décomposition modale de la phase turbulente (la valeur des corrélations de deux coefficients est néanmoins faible vis-à-vis des variances de ces derniers). On observe aussi la décroissance de ces variances en fonction de l'ordre radial en suivant la loi $(n + 1)^{-11/3}$.

À partir des variances des coefficients des polynômes de Zernike $\langle a_i^2 \rangle$ définis par l'équation 1.29, de la décomposition de la phase sur ces polynômes (équation 1.27) et de la propriété d'orthonormalité

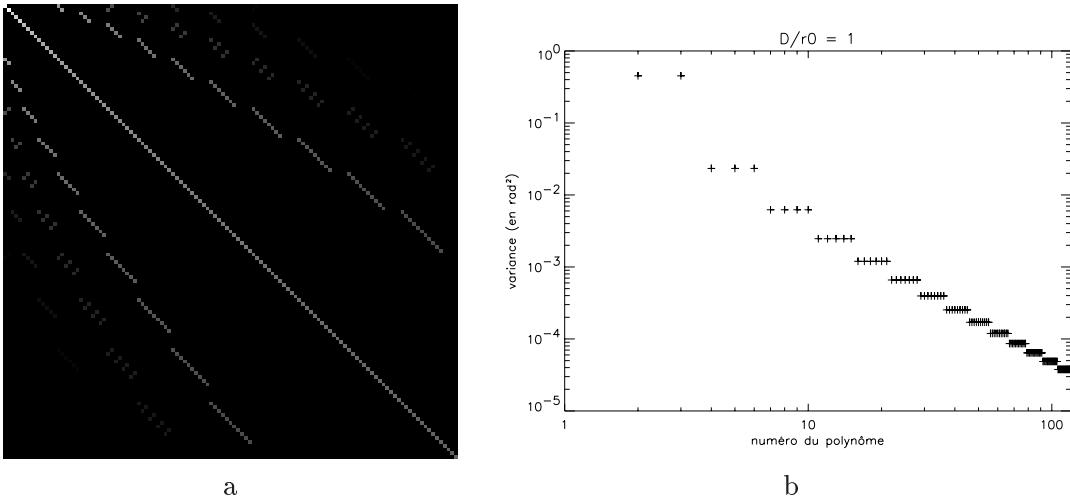


FIG. 1.8 – a : Matrice de covariance des 120 premiers coefficients de Zernike (en supposant une statistique de Kolmogorov). b : Variance théorique des 120 premiers coefficients de Zernike (en supposant une statistique de Kolmogorov). Échelle logarithmique

de la base des polynômes de Zernike, on peut exprimer la variance de la phase comme la somme des variances des coefficients a_i :

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \langle \varphi^2(\mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle a_i^2 \rangle. \quad (1.30)$$

Soit en utilisant l'équation 1.29 :

$$\sigma_\varphi^2 = 1.03 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.31)$$

Noll a donné une loi empirique fixant la valeur de la variance résiduelle après correction parfaite d'un nombre j_{max} de polynômes de Zernike

$$\sigma_{j_{max}, Noll}^2 \simeq 0.2944 (j_{max})^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.32)$$

En utilisant une approche plus rigoureuse J.-M. Conan [Conan-t-94, Fusco-a-00a] a montré que cette variance était égale, pour une correction de tous les modes jusqu'à un ordre radial n_{max} supposé grand, à :

$$\sigma_{n_{max}, Conan}^2 \simeq 0.458 (n_{max} + 1)^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.33)$$

soit, en écrivant que $j_{max} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$:

$$\sigma_{j, Conan}^2 \simeq 0.257 (j_{max})^{-\frac{5}{6}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.34)$$

A noter que les expressions (1.32 et 1.34) sont très proches comme le montre la figure 1.9

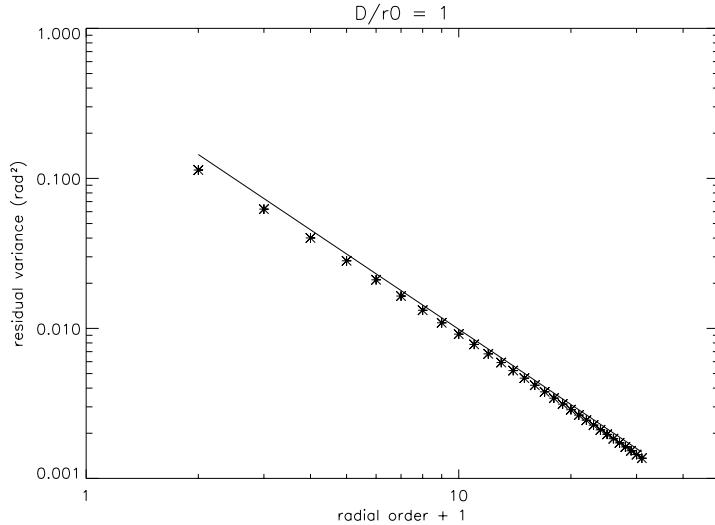


FIG. 1.9 – Variance résiduelle après une correction parfaite des n premiers ordres radiaux des polynômes de Zernike. Expression empirique de Noll (équation 1.32) [étoiles] et l'expression asymptotique (équation 1.33) [ligne continue]

Influence de la grande échelle

La grande échelle, notée L_0 (cf. équation 1.8) intervient sur les bas ordres de la décomposition modale (essentiellement les modes tip-tilt, défocalisation et astigmatismes). Plus L_0 va être petite vis-à-vis du diamètre du télescope, plus la variance des modes de Zernike sera faible [Winkler-a-91]. F. Chassat [Chassat-t-92] a donné une expression analytique de la chute de la variance turbulente en utilisant un formalisme basé sur les transformées de Mellin. Cette expression, devient pour le tilt, en utilisant la définition de la grande échelle présentée au chapitre 1.3.2:

$$\sigma_{n=1}^2 \simeq 0.451 \left\{ 1 - 0.77 \left(\frac{2\pi D}{L_0} \right)^{\frac{1}{3}} + 0.09 \left(\frac{2\pi D}{L_0} \right)^2 - 0.054 \left(\frac{2\pi D}{L_0} \right)^{\frac{7}{3}} + \dots \right\} \quad (1.35)$$

Cette expression n'est valide que pour $L_0/(2\pi D)$ grand devant 1 (voir figure 1.10), c'est-à-dire supérieur à quelques unités, ce qui, au vu des valeurs de la grande échelle mesurées par le GSM de l'équipe du département d'astrophysique de l'Université de Nice [Martin-a-98, Martin-a-00], n'est plus le cas dès que les télescopes ont des diamètres supérieurs à quelques mètres ($D/L_0 = 3$ en moyenne pour le VLT!). On montre sur la figure 1.10 que l'approximation proposée dans l'équation 1.35, basée sur un développement limité au deuxième ordre, est valable dès que $L_0/2\pi D$ est supérieur à 1. Pour ce faire, on compare l'expression analytique de l'équation 1.35 à un calcul numérique de l'équation 1.29.

1.7 Simulation de la phase turbulente

Les simulations numériques de la phase après propagation à travers la turbulence atmosphérique sont cruciales pour la validation des travaux effectués dans le domaine de l'imagerie à haute résolution.

Il faut donc pouvoir simuler de façon la plus réaliste possible la phase turbulente arrivant sur le télescope. Au cours de cette thèse, deux méthodes de simulation de la phase turbulente ont successivement été employées. Leurs avantages et limitations ont conduit à choisir l'une ou l'autre selon le

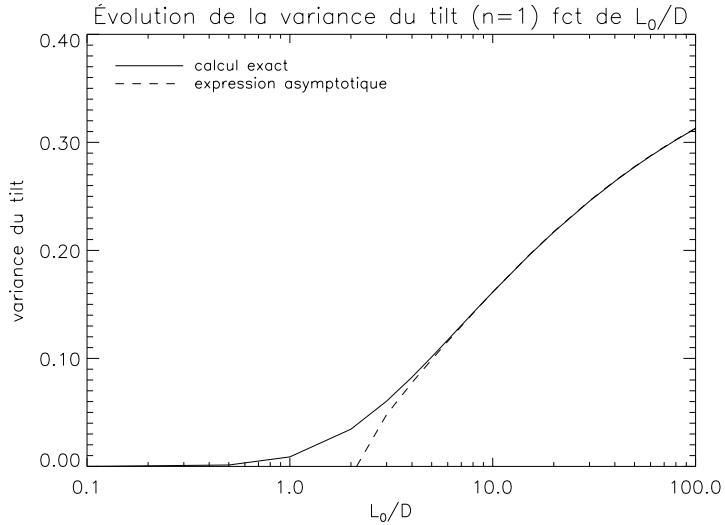


FIG. 1.10 – Évolution de la variance du tilt ($n=1$) en fonction de L_0/D [ligne continue]. Les valeurs tirées de l'expression asymptotique sont tracées pour comparaison [tirets]. Le D/r_0 considéré est égal à 1.

problème étudié. Je vais ici rappeler très brièvement les principes de base de ces deux approches et en donner les avantages et les limitations. Par la suite je me contenterai, avant chaque simulation, de donner la méthode et les paramètres choisis.

1.7.1 Utilisation de la base des polynômes de Zernike

Pour simuler un écran de phase perturbé par la turbulence atmosphérique, N. Roddier [RoddierN-a-90] propose d'utiliser une décomposition de la phase sur la base des polynômes de Zernike. La phase turbulente peut alors se récrire comme :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i Z_i(\mathbf{r}) \quad (1.36)$$

a_i est le coefficient issu de la projection de la phase sur le polynôme de Zernike numéro i (les polynômes de Zernike formant une base orthonormée). On connaît en outre, théoriquement les variances et les covariances des coefficients de Zernike dans le cas d'une phase turbulente suivant une loi de Kolmogorov [Noll-a-76]. N. Roddier propose donc de diagonaliser la matrice de covariance fournie par Noll, on passe alors dans la base des modes de Karhunen-Loève. On effectue des tirages aléatoires indépendants en utilisant la matrice de covariance (diagonale) de la base des KL. Enfin, le changement de base inverse nous donne les coefficients de Zernike décrivant la phase turbulente et donc par l'équation 1.36, les écrans de phase. Ces derniers ainsi calculés sont indépendants les uns par rapport aux autres. On peut toutefois rendre compte statistiquement d'une évolution temporelle en filtrant chaque série temporelle de coefficients par sa fonction de transfert temporelle [Conan-a-95].

Avantages et limitations

Les principaux avantages de cette méthode sont le nombre réduit de paramètres et la facilité de simulation d'une optique adaptative (voir chapitre 3).

Elle comporte néanmoins certaines limitations numériques dont la plus importante est sans nul doute l'erreur de sous-modélisation. En effet lors du calcul de la phase on va se restreindre à un nombre fini de polynômes de Zernike. En particulier des problèmes de précision numérique (pour les calculs en double précision) interviennent pour des ordres radiaux de l'ordre de 40 à 50. On commet donc une erreur de sous-modélisation de la phase consistant à ne pas prendre en compte les hauts ordres radiaux c'est-à-dire les hautes fréquences spatiales. Soit toutes les fréquences spatiales supérieures à

$$F_c(n) \simeq 0.37 \frac{(n+1)}{D} \quad (1.37)$$

où n est le dernier ordre radial simulé et D le diamètre du télescope [Conan-t-94]. Soit pour un télescope de 8 m et 860 polynômes de Zernike (ordre radial $n = 40$) une fréquence spatiale maximum simulée de 1.90 m^{-1} . Or pour une pupille simulée dont le diamètre est de 128 pixels, on peut espérer (par le théorème de Shannon) avoir $f_{max} = 1/(2(8m/128)) = 8 \text{ m}^{-1}$. On commet par conséquent une erreur importante de sous-modélisation en termes de fréquence spatiale, cette erreur peut aussi s'exprimer sous la forme d'une variance résiduelle de sous-modélisation (voir équation 1.33), soit

$$\sigma_{erreur}^2 = 0.458 * (n+1)^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.38)$$

Par exemple, pour $\frac{D}{r_0} = 65$ et $n = 40$, 1 rad^2 de variance ne sera pas pris en compte. Cette variance de sous modélisation va fixer la valeur maximum du $\frac{D}{r_0}$ que l'on va pouvoir considérer pour un nombre de polynômes de Zernike fixé et une tolérance donnée.

Il semble clair, au vu des deux expressions présentées plus haut (équations 1.37 et 1.38), que plus le $\frac{D}{r_0}$ considéré pour la simulation des fronts d'onde sera important, plus l'erreur commise sera grande, ou, dit autrement, plus il faudra de polynômes de Zernike pour bien modéliser les hautes fréquences spatiales de la phase. Cette augmentation n'est pas sans poser un grand nombre de problèmes pratiques tels que la taille des tableaux à gérer, le temps de calcul et la capacité à calculer ces polynômes d'ordre très élevé (des problèmes de précision numérique interviennent pour des ordres radiaux de l'ordre de 40 à 50).

Pour résumer, si la simulation des écrans de phase par la méthode de N. Roddier est intéressante pour de nombreuses applications, elle semble néanmoins peu adaptée à la simulation de très grands diamètres (c'est-à-dire de très grands écrans). Dans ces cas là, on lui préférera une méthode utilisant les transformées de Fourier présentée au paragraphe suivant.

1.7.2 L'approche Fourier

Cette méthode, proposée par B. McGlamery [McGlamery-p-76, Nakajima-a-88], se base sur un tirage aléatoire dans le plan de Fourier de cartes de fréquences spatiales suivant la statistique de Kolmogorov (ou de Von Karman). En fait, théoriquement, elle ne diffère de la précédente que par la base utilisée pour simuler la phase. Dans la pratique, plusieurs différences apparaissent néanmoins, essentiellement du fait de l'utilisation de supports finis lors de la création des écrans et de transformées de Fourier discrètes (TFD) qui rendent ces écrans stationnaires et périodiques.

La simulation se fait de la manière suivante: tirage d'un bruit blanc, que l'on colore, dans le plan de Fourier par le spectre spatial de la turbulence (spectre de Kolmogorov ou de Von Karman). On repasse ensuite dans le plan réel pour obtenir une réalisation de la phase turbulente.

Avantages et limitations

La limite des fréquences spatiales est donnée par la taille du pixel, cela permet une représentation plus fine des hautes fréquences spatiales que dans le cas de la génération à partir des polynômes de Zernike, sans l'inconvénient et la lourdeur de la création d'un très grand nombre de polynômes. Par contre, la taille finie des écrans de phase va introduire une "grande échelle numérique" (à cause de la périodicité introduite par les TFD) ayant pour taille la moitié de la taille du tableau. Des solutions existent pour rehausser numériquement les basses fréquences et se rapprocher, ainsi, de la statistique de Kolmogorov [Lane-p-92, Harding-a-99]. Il faut toutefois noter que cette limitation n'est pas fondamentale lorsque l'on s'intéresse à la simulation de cas réalistes, les dernières mesures de la grande échelle sur sites par le GSM de l'Université de Nice-Sophia Antipolis donnant des mesures moyennes de L_0 de l'ordre de la vingtaine de mètres [Martin-a-98, Martin-a-00], ce qui, pour les télescopes de la classe des 8 mètres, introduit un rapport L_0/D de seulement quelques unités.

1.7.3 Choix d'une méthode

Il n'y a pas de choix absolu mais plutôt un choix selon l'application considérée. Toutefois, il semble clair que pour la création d'écrans de phase de grandes tailles et ayant de très hautes fréquences spatiales, la solution de McGlamery sera la plus judicieuse, et la plus aisée à mettre en oeuvre⁵.

1.7.4 Problèmes lors de la projection de la phase sur les polynômes de Zernike

Lors de la décomposition d'une phase déjà échantillonnée sur la base des polynômes de Zernike, des problèmes peuvent apparaître suite au nombre fini de pixels considérés lors de la création des polynômes de Zernike. En effet en théorie la base des polynômes de Zernike est orthonormée (voir équation 1.26), mais numériquement, cette équation devient

$$\frac{1}{N_{pix}} \sum_{k=1}^{N_{pix}} Z_j^*(k) Z_j(k) \neq \delta_{ij} \quad (1.39)$$

où N_{pix} est le nombre total de pixels compris dans la pupille simulée qui sert à la définition des polynômes de Zernike Z_j et Z_j . Si on considère la matrice $Z_i^T Z_j$ dont chaque élément i,j est donné par l'équation 1.39, on s'aperçoit qu'elle contient énormément de termes non diagonaux (voir figure 1.11). Il est clair que plus le nombre de pixels utilisés sera important, plus le produit scalaire des polynômes de Zernike simulés va tendre vers δ_{ij} , mais dans la plupart des cas, cette non orthogonalité de la base va entraîner des erreurs d'estimation lors du calcul des coefficients par projection de la phase sur la base des polynômes de Zernike simulés.

On présente dans la figure 1.12 la variance des a_i après décomposition de la phase sur une base de polynômes de Zernike créée pour différentes valeurs du diamètre en pixels. Les phases ont été simulées par la méthode de McGlamery sur un tableau de 1024×1024 pixels. On a ensuite décomposé chaque phase sur une base de polynôme de Zernike créés sur des pupilles circulaires de 32, 64 et 128 pixels de diamètre. On observe sur cette figure l'effet de la pixélisation sur la restitution des coefficients de Zernike après projection de la phase sur la base. Plus le nombre de pixels choisi pour créer les polynômes de Zernike est faible plus les erreurs sur le calcul des coefficients de la décomposition sont importantes.

5. D'autres méthodes de simulation de la phase turbulente peuvent être utilisées, notamment une méthode basée sur une description fractale de la phase turbulente [Schwartz-a-94].

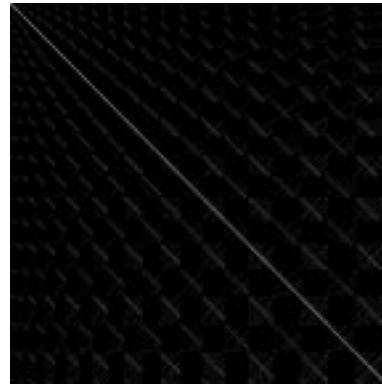


FIG. 1.11 – Matrice des $Z_i^t Z_j$ pour 300 polynômes et un diamètre de 128 pixels. On la représente en échelle logarithmique.

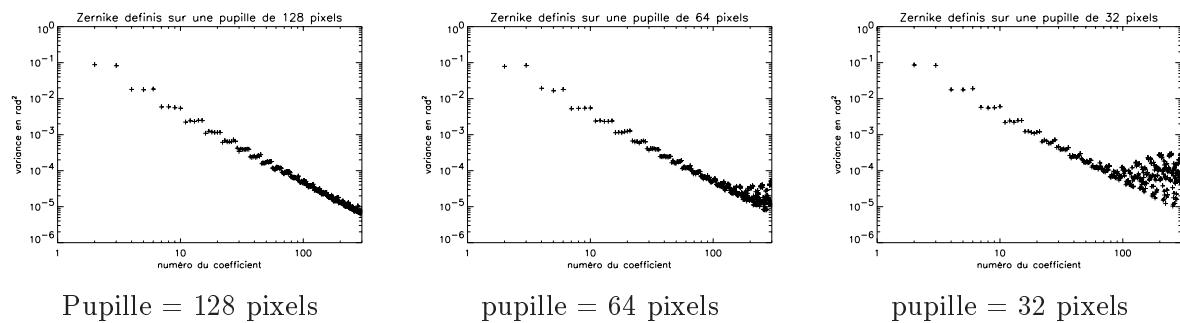


FIG. 1.12 – Influence de la pixélisation, c'est-à-dire de la non orthogonalité des polynômes de Zernikes sur le calcul des coefficients de Zernike.

Une solution :

La solution consiste à re-orthogonaliser la base des polynômes de Zernike avant de faire la projection. Le calcul est le suivant :

- calcul de la matrice des $\{Z_i^t Z_j\} = \{zz_{ij}\}_{i,j} = \mathbf{Z}$
- la phase à projeter est donnée par l'équation 1.36.
- $\langle \varphi, Z_j \rangle = \sum_i a_i z z_{ji}$ or $z z_{ji} = z z_{ij}$ on obtient donc :

$$\langle \varphi, Z_j \rangle = \sum_i a_i z z_{ij} = [\mathbf{ZA}]_j \quad (1.40)$$

soit $Y = \mathbf{ZA}$ représentant les coefficients erronés dus aux effets de pixélisation, et \mathbf{A} les vrais coefficients de Zernike que l'on cherche à estimer.

- Ces coefficients \mathbf{A} sont alors obtenus par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}^{-1} Y \quad (1.41)$$

\mathbf{Z} (voir figure 1.11) étant assez proche de la matrice identité, elle a de bonnes chances d'être inversible. Si toutefois, des valeurs propres très faibles venaient perturber l'inversion, une décomposition en valeurs singulières de \mathbf{Z} pourrait être effectuée permettant une inversion sur les seules valeurs singulières supérieures à un certain seuil (à déterminer).

Appliquons à présent cette méthode sur un des cas présentés plus haut (pupille de 32×32 pixels). On remarque 1.13 qu'après re-orthonormalisation, les variances des coefficients turbulents suivent à

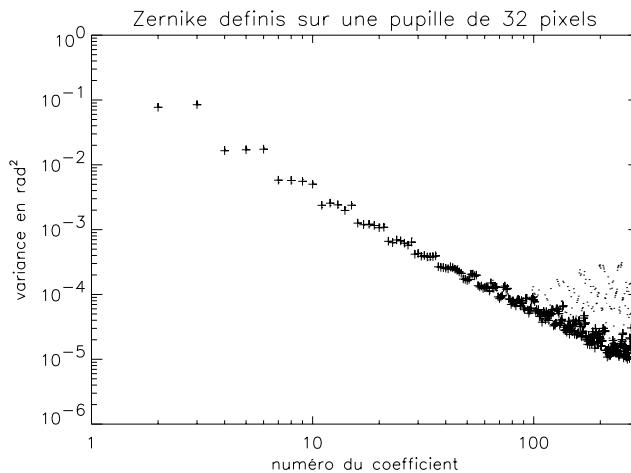


FIG. 1.13 – Résultats après re-orthonormalisation (+) pour le cas d'un pupille de 32 pixels de diamètre. Les résultats bruts sont présentés (.) pour comparaison

nouveau la pente en $-11/3$ prévue par la théorie.

Cette solution s'applique aussi dans le cas où l'on considère une pupille avec obturation centrale. Dans ce cas, les polynômes de Zernike définis avec ce genre de masque pupillaire ne forment plus une base orthonormée, et le même type d'approche peut alors être utilisée pour le calcul des coefficients.

1.8 Étude modale de l'anisoplanétisme

1.8.1 Introduction

Dans ce paragraphe, je vais reprendre le formalisme développé par F. Chassat au cours de sa thèse [Chassat-t-92], tout en le restreignant, pour plus de lisibilité et de simplicité, au cas d'une onde plane. J'introduirai ensuite le concept de "couches équivalentes", concept utilisé, par la suite, dans plusieurs chapitres du mémoire (voir paragraphe 2.3 de la deuxième partie et surtout paragraphe 1.3.3 de la troisième partie du mémoire), pour arriver au premier résultat important de la thèse, résultat qui va être à l'origine de nombreuses études menées par la suite, à savoir : la faible dépendance des corrélations angulaires de la phase vis à vis du profil de turbulence. Ce problème a déjà été abordé dans [Chassat-t-92, Molodij-t-96, Rousset-p-96]. J'en propose ici une analyse plus exhaustive qui permet de confirmer et développer les premiers résultats obtenus par ces auteurs.

1.8.2 Corrélations angulaires et polynômes de Zernike

On a vu au paragraphe 1.5.3 que l'anisoplanétisme était dû à la différence entre deux phases, provenant de deux sources différentes, arrivant au même instant sur la pupille mais n'ayant pas traversé exactement les mêmes zones de l'atmosphère, et ayant donc été dégradées différemment. Cette différence peut se caractériser statistiquement par une corrélation spatiale entre les deux fronts d'onde $\varphi(\mathbf{r}, \alpha_1)$ et $\varphi(\mathbf{r}, \alpha_2)$

$$C_{(\varphi_1, \varphi_2)}(\mathbf{r}, \alpha) = \langle \varphi(\mathbf{r}, \alpha_1) \varphi(\mathbf{r}, \alpha_2) \rangle \quad (1.42)$$

où $\langle \cdot \rangle$ dénote une moyenne d'ensemble (au sens mathématique) et $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ la différence entre les deux directions de visées.

On peut bien évidemment décomposer les deux fronts d'onde sur la base des polynômes de Zernike :

$$\varphi(\mathbf{r}, \alpha_1) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\alpha_1) Z_i(\mathbf{r}) \quad (1.43)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, \alpha_2) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\alpha_2) Z_i(\mathbf{r}) \quad (1.44)$$

La corrélation entre les 2 fronts d'onde est donc donnée par

$$C_{(\varphi_1, \varphi_2)}(\mathbf{r}, \alpha) = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \langle a_i(\alpha_1) a_j(\alpha_2) \rangle Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) \quad (1.45)$$

On peut montrer [Chassat-t-92] qu'il existe une expression analytique pour le calcul des $\langle a_i(\alpha_1) a_j(\alpha_2) \rangle$. En posant $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ et en notant n_1, n_2 et m_1, m_2 respectivement les ordres radiaux et azimutaux des coefficients a_i et a_j , on obtient l'équation suivante :

$$\langle a_i(0) a_j(\alpha) \rangle = 3.895 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\int_0^{h_{max}} dh C_n^2(h) I_{ij} \left(\frac{\alpha h}{R} \right)}{\int_0^{\infty} dh C_n^2(h)} \quad (1.46)$$

où h_{max} représente la limite haute de l'atmosphère et

$$I_{ij}(x) = (-1)^{\frac{n_1+n_2-m_1-m_2}{2}} \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \left[K_{1,2}^+ \int_0^{\infty} dk k^{-\frac{14}{3}} J_{n_1+1}(2\pi k) J_{n_2+1}(2\pi k) J_{m_1+m_2}(2\pi kx) \right. \\ \left. + K_{1,2}^- \int_0^{\infty} dk k^{-\frac{14}{3}} J_{n_1+1}(2\pi k) J_{n_2+1}(2\pi k) J_{|m_1-m_2|}(2\pi kx) \right] \quad (1.47)$$

$K_{1,2}^+$	$m_1 = 0$	$m_1 \neq 0$ et i pair	$m_1 \neq 0$ et i impair
$m_2 = 0$	1	$\sqrt{2}$	0
$m_2 \neq 0$ et i pair	$(-1)^{m_2} \sqrt{2}$	$(-1)^{m_2}$	0
$m_2 \neq 0$ et i impair	0	0	$(-1)^{m_2+1}$
$K_{1,2}^-$	$m_1 = 0$	$m_1 \neq 0$ et i pair	$m_1 \neq 0$ et i impair
$m_2 = 0$	0	0	0
$m_2 \neq 0$ et i pair	0	$S_{i,j}$	0
$m_2 \neq 0$ et i impair	0	0	$S_{i,j}$

avec $S_{i,j} = 1$ pour $m_1 + m_2$ pair et $S_{i,j} = \text{signe}(m_1 - m_2)$ pour $m_1 + m_2$ impair.

TAB. 1.1 – Tableau récapitulatif des coefficients intervenant dans l'équation 1.47 dans le cas d'ondes planes.

où les valeurs de $K_{1,2}^+$ et $K_{1,2}^-$ sont données par le tableau 1.1:

Le calcul intégral de l'équation 1.47 peut se mener en utilisant les propriétés des transformations de Mellin [Chassat-t-92, Sasiela-l-95, Molodij-t-96]. Ces dernières sont toutefois limitées à des domaines de validité précis. On utilisera ici une approche numérique pour calculer les intégrales de l'équation 1.47. L'utilisation d'une intégration de Romberg [Press-l-88] et un choix judicieux des bornes d'intégrations permettent d'obtenir de très bonnes précisions sur les intégrales calculées sans pour autant être coûteux en temps de calcul. Il est aussi important de noter que l'on peut très facilement remplacer le spectre de Kolmogorov par un spectre de Von Karman dans l'équation 1.47, et obtenir ainsi des courbes de corrélations en fonction de la grande échelle de la turbulence[Chassat-t-92].

1.8.3 Modélisation des effets de l'anisoplanétisme : notion de “couches équivalentes”

Il est clair à la vue des équations précédentes que le calcul théorique dépend du profil de C_n^2 . La connaissance de ce dernier est donc nécessaire pour obtenir des informations sur l'évolution statistique de la phase dans le champ. Plusieurs auteurs ont déjà proposé une modélisation simple du volume de turbulence pour caractériser les effets d'anisoplanétisme ([Roddier-a-82a, Chassat-t-92, Racine-p-95] par exemple). Je propose, ici, une étude plus exhaustive du problème en quantifiant les effets, sur les corrélations angulaires des coefficients de Zernike, d'une discréttisation plus ou moins lâche de la turbulence par un nombre fini de couches minces, appelées “couches équivalentes”. Je montre en particulier qu'un faible nombre de couches suffit pour obtenir une précision inférieure au pourcent sur les corrélations angulaires.

Définition

Considérons un profil de C_n^2 “vrai” contenant N_t couches turbulentes ($N_t \rightarrow \infty$), l'échantillonnage des mesures (mais aussi des considérations plus pratiques sur la nécessite de modéliser grossièrement le profil de turbulence) nous conduit à discréttiser ce vrai profil par un profil “équivalent” comportant N_{el} couches équivalentes virtuelles (que j'appellerai par la suite EL pour “Equivalent Layer”). Pour calculer la position et la force de la turbulence associée à chacune de ces couches virtuelles on découpe le profil de C_n^2 en N_{el} zones (on choisit ici des zones d'épaisseurs identiques), pour chaque zone on

définit une EL positionnée à l'altitude h_i tel que:

$$h_i = \left(\frac{\int_{h_{min}}^{h_{max}} C_n^2(h) h^\beta dh}{\int_{h_{min}}^{h_{max}} C_n^2(h) dh} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (1.48)$$

avec $\beta = 1$ dans notre cas, c'est-à-dire que l'on s'intéresse à la moyenne pondérée de l'altitude par le profil de C_n^2 dans la zone. La force de cette couche équivalente sera, elle, donnée par

$$C_n^2(h_i) \delta h_i = \int_{h_{min}(i)}^{h_{max}(i)} C_n^2(h) dh \quad (\text{en m}^{1/3}) \quad (1.49)$$

où $h_{min}(i)$ et $h_{max}(i)$ sont les altitudes limites (min et max) de la couche i . Cette équation représente, en fait, une moyenne de la turbulence par couche. D'autres choix peuvent être envisagés pour β (notamment $\beta = 5/3$ ou $\beta = 2$ [Roddier-a-82a, Racine-p-95, Lelouarn-t-00]).

On peut alors discréteriser l'équation 1.46 donnant la corrélation angulaire :

$$\langle a_i(0)a_j(\alpha) \rangle \simeq 3.895 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\sum_{i=1}^{N_{el}} C_n^2(h_i) \delta h_i I_{ij} \left(\frac{\alpha h_i}{R} \right)}{\sum_{i=1}^{N_{el}} C_n^2(h_i) \delta h_i} \quad (1.50)$$

On peut se demander quelle va être l'influence de cette approximation sur la précision des calculs de courbes de corrélations angulaires, et, pour un profil donné (et un angle de corrélation maximal donné) quel va être le nombre minimal de couches équivalentes nécessaires à la bonne modélisation statistique de la dépendance angulaire de la phase.

Influence du nombre de couches

Intéressons-nous à présent à l'influence du nombre de couches équivalentes sur la précision du calcul des corrélations angulaires de la phase décomposée sur les polynômes de Zernike. Deux types de profils de turbulence vont être considérés :

- Cas d'un profil à deux couches dominantes.

Considérons dans un premier temps un profil composé de 29 couches turbulentes mais ayant deux "zones" dominantes, une au sol et l'autre située à environ 14 kilomètres (voir figure 1.14). Ce profil est modélisé par une, deux et trois couches équivalentes (les zones définissant chaque couche équivalente sont d'égale épaisseur). On calcule, pour le vrai profil à 29 couches et pour les profils équivalents, les courbes de corrélations angulaires de différents coefficients de Zernike ($a_i = 2, a_i = 16$) et pour la phase elle-même (somme des 28 premiers polynômes de Zernike). Le diamètre du télescope est de 4 m et une grande échelle infinie (spectre de Kolmogorov pur). Le D/r_0 considéré est de un. Ce dernier n'influe que sur la hauteur des courbes de corrélations et donc sur l'erreur absolue, donnée en rad², et pas sur l'erreur relative (indépendante de D/r_0) donnée en pourcent.

Le figure 1.15 montre, sur deux exemples⁶ que les courbes de corrélations des coefficients de Zernike sont très proches dès que le nombre de couches équivalentes est supérieur ou égal à deux. Les erreurs, représentées sur la figure 1.16 et calculées selon la formule suivante :

$$err_{abs}(\alpha) = \left| \langle a_i(0)a_j(\alpha) \rangle_{29 \text{ couches}} - \langle a_i(0)a_j(\alpha) \rangle_{n \text{ couches}} \right|^2 \quad (1.51)$$

6. Les résultats restent valables quels que soient les coefficients de Zernike considérés.

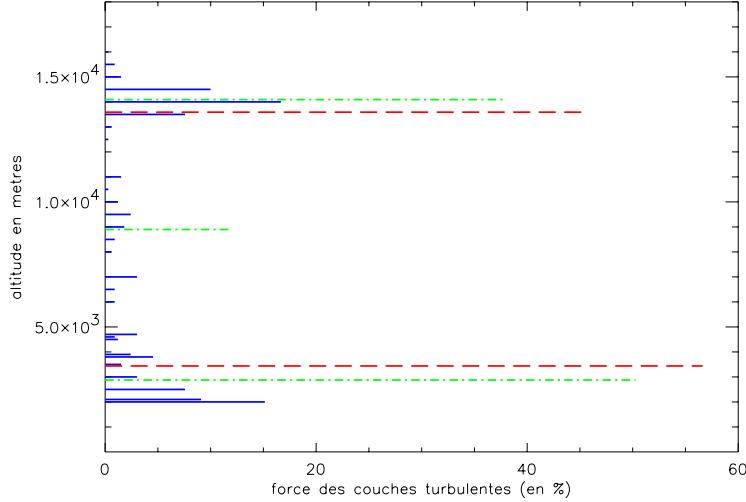


FIG. 1.14 – [bleu/continue] : profil initial de C_n^2 (29 couches), profil équivalent à deux couches [rouge/tirets], profil équivalent à trois couches [vert/tirets-points].

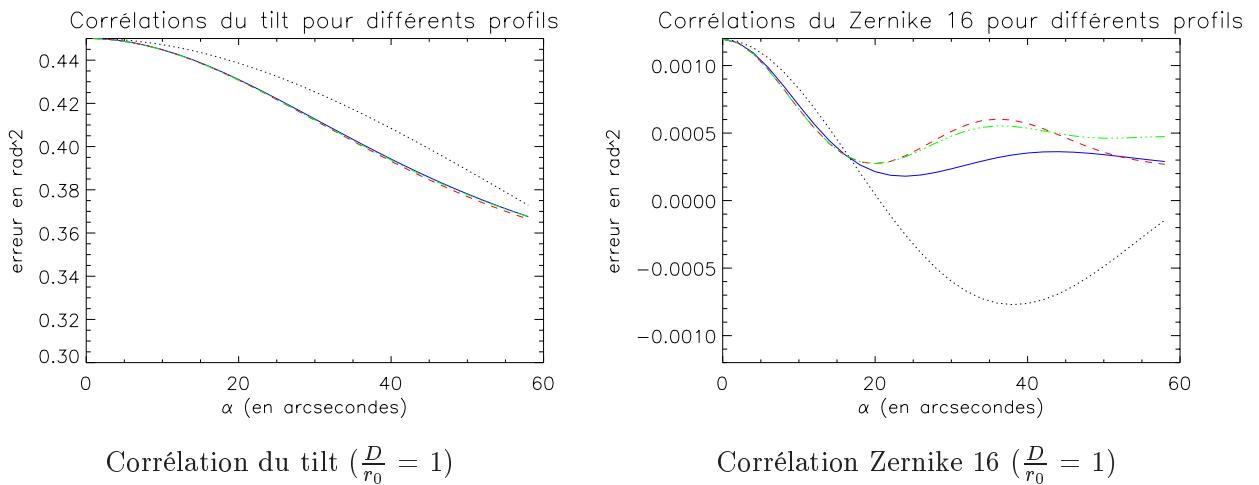
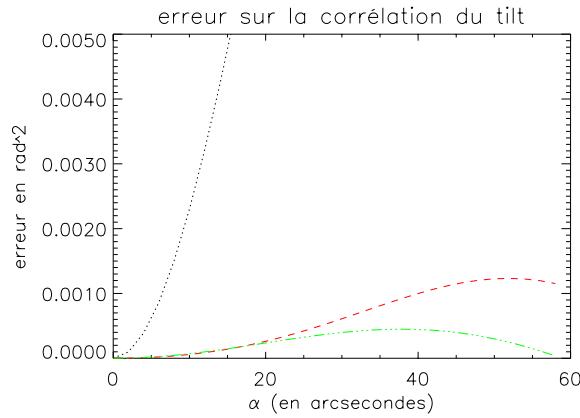
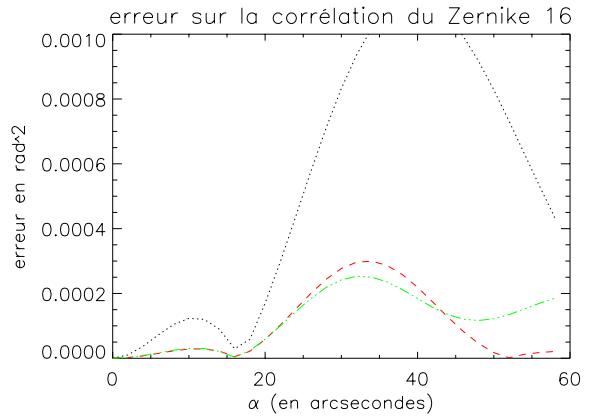


FIG. 1.15 – Corrélation (en rad²) des coefficients des polynômes de Zernike numéros 2 et 16 en fonction de l'angle. [bleu/continue] : profil initial de C_n^2 (29 couches), [points] : profil équivalent à 1 couche, [rouge/tirets] : profil équivalent à deux couches, [vert/tirets-points] : profil équivalent à trois couches.



Erreurs sur le tilt ($\frac{D}{r_0} = 1$)



Erreurs sur le Zernike 16 ($\frac{D}{r_0} = 1$)

FIG. 1.16 – Erreur (en rad^2) entre les courbes de corrélations calculées pour le vrai profil et pour des profils à 1, 2 et 3 couches équivalentes. Les coefficients de Zernike numéros 2 et 16 sont considérés. [points] : différence entre vrai profil et profil équivalent à 1 couche, [rouge/tirets] : différence entre vrai profil et profil équivalent à 2 couches, [vert/tirets-points] : différence entre vrai profil et profil équivalent à 3 couches.

montrent une dominance des premiers coefficients (tip-tilt) en terme d'erreur absolue (en rad^2). Ceci n'est plus vrai si l'on considère des erreurs relatives ($\text{err}_{\text{rel}}(\alpha) = \text{err}_{\text{abs}}(\alpha)/\text{err}_{\text{abs}}(0) * 100$) en pourcent. Dans ce cas, plus l'ordre radial du polynôme est élevé, plus l'erreur relative sera importante (notamment pour de grands angles). Cette différence entre erreur relative et erreur absolue est due à la décroissance de la variance par polynôme en $n^{-11/3}$ (n étant l'ordre radial). De petites erreurs relatives sur le tilt auront beaucoup plus d'effets sur l'erreur absolue que des erreurs relatives bien plus importantes sur des polynômes d'ordres élevés (mais faible en absolu).

On s'est intéressé jusqu'à présent aux corrélations par coefficient, la figure 1.17 montre la somme des corrélations et intercorrélations de 28 premiers coefficients de Zernike (soit une approximation de la corrélation angulaire de la phase), calculée pour les différents profils. De même, une erreur relative sur ces courbes de corrélations est présentée (vis-à-vis de la courbe de corrélations calculée pour le vrai profil). Si les résultats sont sensiblement différents pour le cas d'une EL, l'utilisation d'un profil à 2 EL puis 3 EL permet une très bonne précision sur la modélisation de la corrélation de la phase. On montre notamment que l'erreur relative est largement inférieure au pourcent pour 2 et 3 couches équivalentes.

- Cas d'un profil constant.

Considérons à présent le cas d'un profil composé de 28 couches turbulentes réparties uniformément entre 0 et 17 kilomètres (voir figure 1.18), chaque couche ayant la même énergie. Comme précédemment nous définissons des profils équivalents à une, deux et trois couches.

Les résultats des figures 1.19 et 1.20 sont sensiblement les mêmes (voire un peu meilleurs) que ceux du profil à 2 couches dominantes.

D'autres profils ont été étudiés; il ressort de ces études, que quel que soit le profil de turbulence considéré, les résultats présentés ci-dessus sont valables, à savoir que les erreurs d'estimation des corrélations angulaires sont très faibles dès que le nombre de couches équivalentes devient supérieur

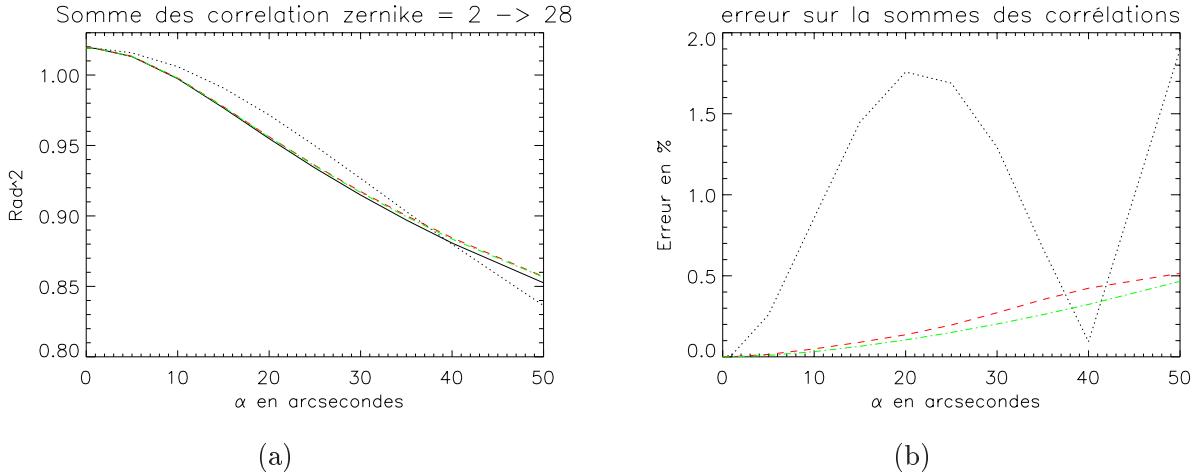


FIG. 1.17 – (a) Courbes de corrélations de la phase (somme des 28 premiers coefficients) pour différents profils et erreurs entre ces courbes de corrélations ($D/r_0 = 1$). (b) Erreur relative (en %) entre la courbe de corrélations calculée pour le vrai profil et celles calculées pour les profils équivalents à 1, 2 et 3 couches. Pour les 2 cas : [bleu/continue] : profil initial de C_n^2 (29 couches), [points] : profil équivalent à 1 couche, [rouge/tirets] : profil équivalent à 2 couches, [vert/tirets-points] : profil équivalent à 3 couches.

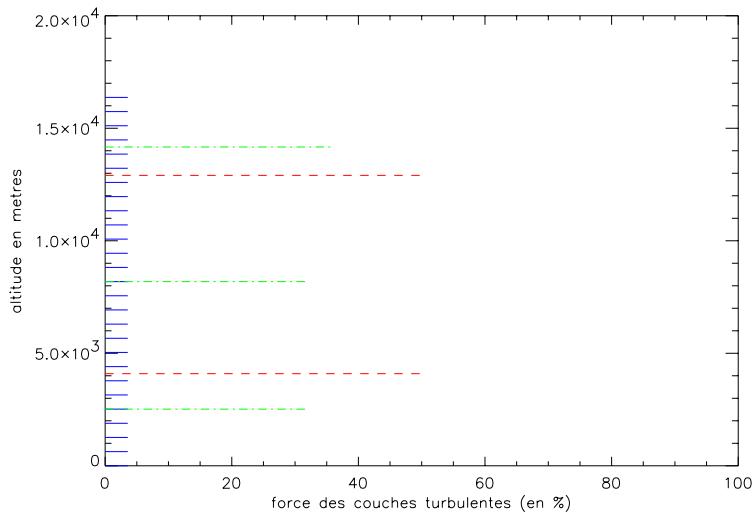
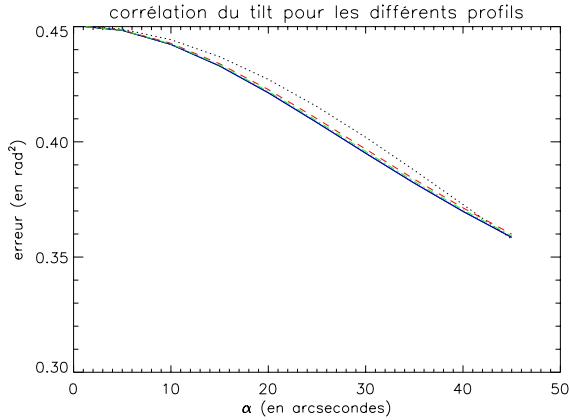
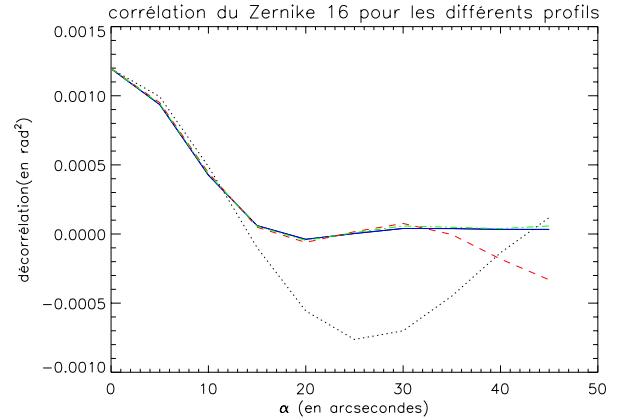


FIG. 1.18 – Profil initial de C_n^2 (29 couches)[bleu/continue], profil équivalent à 2 couches [rouge/tirets], profil équivalent à 3 couches [vert/tirets-points], [bleu clair/tirets-points/points/points] profil équivalent à 4 couches.

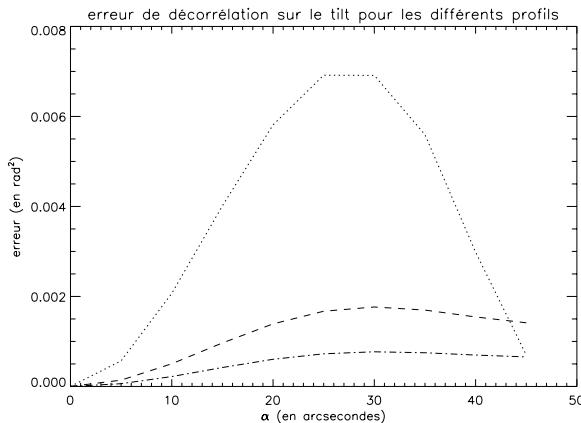


Corrélation du tilt ($\frac{D}{r_0} = 1$)

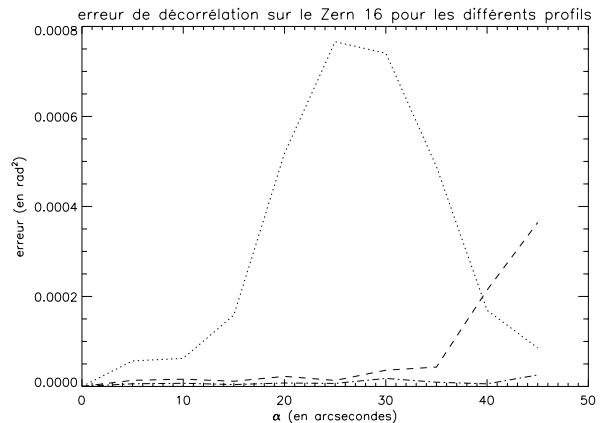


Corrélation du Zernike 16 ($\frac{D}{r_0} = 1$)

FIG. 1.19 – Corrélation (en rad²) des coefficients des polynômes de Zernike numéros 2 et 16 en fonction de l'angle. [bleu/continue] : profil initial de C_n^2 (29 couches), [points] : profil équivalent à 1 couche, [rouge/tirets] : profil équivalent à 2 couches, [vert/tirets-points] : profil équivalent à 3 couches.



Erreur sur le tilt ($\frac{D}{r_0} = 1$)



Erreur sur le Zernike 16 ($\frac{D}{r_0} = 1$)

FIG. 1.20 – Erreur (en rad²) entre les courbes de corrélations calculées pour le vrai profil et pour des profils à 1, 2 et 3 couches équivalentes. Les coefficients de Zernike numéros 2 et 16 sont considérés. [points] : différence entre vrai profil et profil équivalent à 1 couche, [rouge/tirets] : différence entre vrai profil et profil équivalent à 2 couches, [vert/tirets-points] : différence entre vrai profil et profil équivalent à 3 couches.

ou égal à deux. On est alors capable de simuler les effets de décorrélations produits par les hautes couches et les effets de “recorrélation” du front d’onde produits par les basses couches, et ainsi de bien reproduire l’allure globale des courbes de corrélations angulaires de la phase. Il faut insister ici sur le résultat important qui est qu’un très faible nombre de couches équivalentes par rapport au vrai profil (et quelle que soit l’allure de ce dernier) suffit à obtenir une bonne précision sur le comportement statistique de l’évolution de la phase. Notons que le phénomène avait déjà été observé par F. Chassat au cours de sa thèse [Chassat-t-92], lorsque il avait montré, essayant de remonter au profil de turbulence à partir des données portant sur la corrélation du front d’onde, qu’il lui était impossible de discriminer de manière probante plus de 2 couches turbulentes. Le phénomène a aussi été observé par G. Rousset et G. Molodij lors de la comparaison de corrélations angulaires théoriques et expérimentales, obtenues dans le cadre d’études menées sur l’étoile laser [Rousset-p-96, Molodij-t-96].

On remarque que, même si l’erreur relative paraît plus faible pour les bas ordres que pour les ordres élevés, du fait de l’énergie importante contenue dans ces bas ordres, l’erreur en variance va être essentiellement dominée par ces bas ordres.

Pour finir, il faut garder à l’esprit que tous les résultats présentés ici peuvent être étendus à d’autres valeurs de D/r_0 en multipliant tout simplement les courbes par un facteur $(D/r_0)^{5/3}$ et à d’autres valeurs de diamètre en multipliant l’axe des abscisses (α) par le rapport des diamètres. Par contre, il est évident que si les erreurs relatives restent identiques lors de l’augmentation des diamètres, les erreurs absolues sont multipliées par le rapport des diamètres puissance 5/3 (r_0 étant supposé identique). Cela peut devenir non négligeable lorsque l’on va s’intéresser à de très grands diamètres. Par exemple, pour un télescope de 100 mètres de diamètre, l’axe des abscisses est multiplié par 25 (soit un angle max de 1500 secondes d’arc au lieu de 60 pour un 4 mètres) mais la variance d’erreur absolue sur les courbes de corrélations est alors augmentée d’un facteur $25^{5/3} = 214$! Il faudra alors, vraisemblablement utiliser plus de quelques couches équivalentes pour faire baisser cette variance d’erreur absolue et retrouver des valeurs suffisamment faibles pour être à nouveaux négligées. Le calcul présenté ici est toutefois un peu pessimiste, car il ne prend pas en compte les effets de la grande échelle de la turbulence. Cette dernière, pour un 100 mètres, va généralement être bien inférieure au diamètre et donc réduire sensiblement la variance des premiers coefficients de Zernike. L’augmentation de l’erreur absolue sera donc certainement plus faible que le facteur 214 présenté plus haut, tout en restant très importante.

Influence de l’échelle externe

Ce paragraphe reprend et développe les études menées par F. Chassat dans sa thèse [Chassat-t-92]. Plaçons-nous dans le cas du profil constant de turbulence défini en figure 1.18. On peut, comme précédemment calculer les corrélations angulaires de la phase (décomposée sur la base des polynômes de Zernike). La différence étant qu’ici, nous considérons un spectre de Von-Karman en lieu et place du spectre de Kolmogorov. Les corrélations angulaires de la phase sont alors calculées pour toute une gamme de valeurs de L_0/D (D/r_0 est fixé à 1).

On trace, dans la figure 1.21 et 1.22 l’évolution des courbes de corrélations des coefficients de Zernike pour différentes valeurs de L_0/D . Dans la figure 1.21 on considère des corrélations en rad² alors que dans la figure 1.22, les corrélations sont normalisées par la variance (soit une variance égale à 1). Quatre coefficients de Zernike sont considérés (le tilt a_2 , la défocalisation a_4 , la coma a_7 et l’aberration sphérique a_{11}). Comme prévu, l’influence de la grande échelle est d’autant plus importante que l’ordre radial du polynôme est faible. Son influence se manifeste donc essentiellement sur les corrélations du tilt. Sur ce dernier, on remarque, dans la figure 1.21, une chute sensible des courbes des corrélations due à la chute de la variance du tilt en fonction de L_0/D (voir paragraphe 1.6.2). Si les courbes de corrélations en fonction de L_0/D du tilt (et dans une moindre mesure de la défocalisation) sont différentes à cause de la chute de la variance du coefficient, leurs allures mêmes

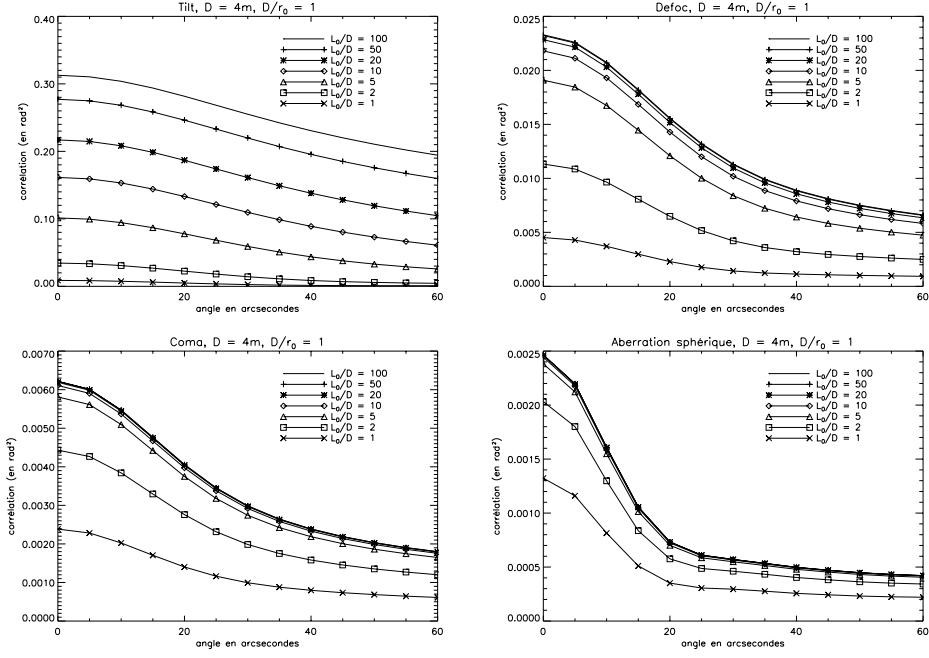


FIG. 1.21 – Évolution des courbes de corrélations angulaires du tilt (a_2), de la défocalisation (a_4), de la coma (a_7) et de l'aberration sphérique (a_{11}) pour un profil constant et différentes valeurs de la grande échelle.

différent, comme le montre la figure 1.22. On note une évolution sensible des courbes de corrélations normalisées du tilt en fonction de L_0/D . Cette évolution, encore présente pour la défocalisation tend à disparaître pour les ordres plus élevés.

J'ai choisi ici une grande dynamique de variations et des profils très défavorables en termes de corrélations pour accentuer les effets provoqués par la grande échelle. Si on considère un cas plus réel tel que le profil de type Paranal (présenté sur la figure 1.3), avec la grande échelle ayant comme valeur moyenne 25 mètres et suivant une statistique log normale [Martin-a-00], on obtient pour les corrélations du tilt (les plus sensibles aux évolutions du L_0), les résultats présentés sur la figure 1.23. Je résume dans le tableau 1.2 les valeurs de L_0 utilisées dans la figure 1.23 et leur probabilité d'apparition en suivant la loi log-normale de [Martin-a-00]. Dans ce cas, on peut noter la faible variation des profils

L_0 en m	10	15	20	25	30	35	40	45	50
pourcentage	1	7	18	19	14	9	8	4	3

TAB. 1.2 – Probabilité d'obtenir une valeur donnée de la grande échelle pour une statistique log-normale de médiane 25 mètres. 67 % des probabilités d'apparition sont pour L_0 compris entre 15 et 35 mètres.

des courbes de corrélations pour des fluctuations de L_0 de quelques unités à quelques dizaines d'unités autour de la valeur moyenne (voir 1.23).

1.9 Conclusion

J'ai rappelé dans ce premier chapitre les paramètres et les grandeurs essentiels à l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique à travers la turbulence atmosphérique. J'ai aussi présenté des

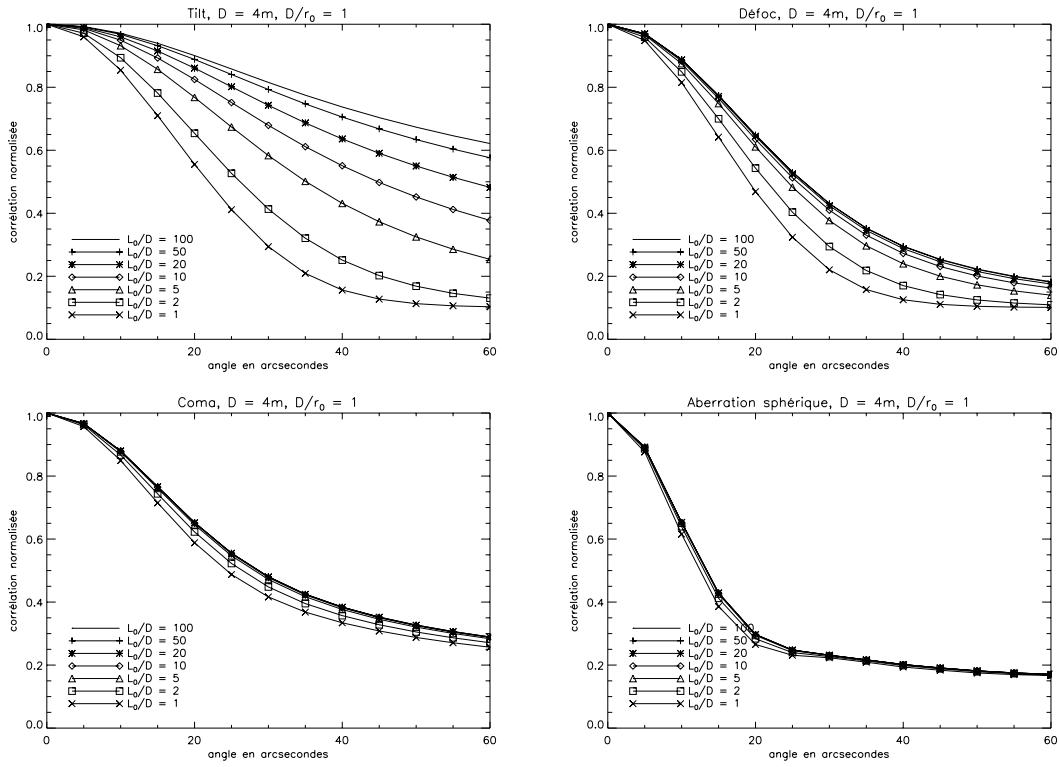


FIG. 1.22 – Évolution des courbes de corrélations angulaires normalisée du Tilt (a_2), de la defoc (a_4), de la coma (a_7) et de l'aberration sphérique (a_{11}) pour un profil constant et différentes valeurs de la grande échelle.

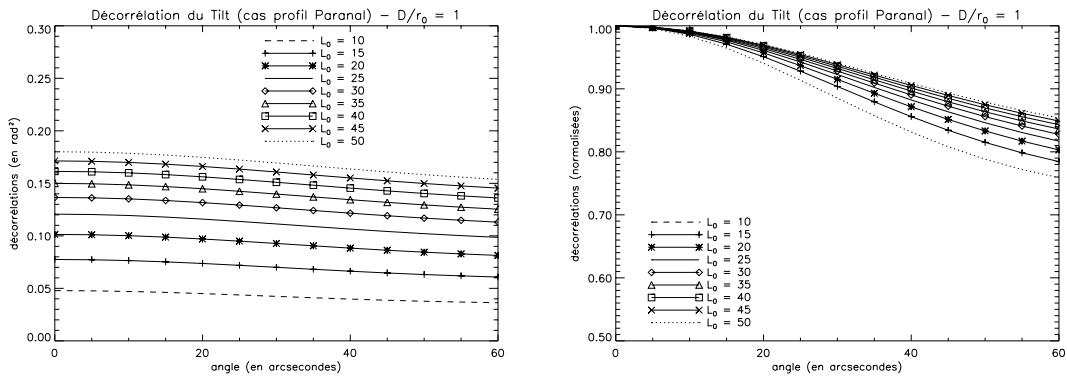


FIG. 1.23 – Évolution des courbes de corrélations angulaires du Tilt (a_2), pour un profil typique du site de Paranal et différentes valeurs de la grande échelle (répartie autours de $L_0 = 25\text{m}$). Dans la figure de gauche les corrélations sont données en rad^2 et dans la figure de droite elles sont normalisées.

travaux personnels sur l'étude et la résolution des problèmes liés à la non-orthogonalité des polynômes de Zernike lors de leur simulation numérique (problème de pixélisation). Puis, une étude menée sur les corrélations angulaires de la phase a été proposée. Cette étude, qui repose grandement sur les travaux effectués par F. Chassat au cours de sa thèse [Chassat-t-92], m'a permis de mettre en évidence la faible dépendance des corrélations angulaires de la phase vis-à-vis du profil de turbulence. J'ai notamment montré que, pour des profils de C_n^2 très différents, la modélisation de ces profils par un nombre très faible (2 ou 3) de couches équivalentes permettait d'obtenir de très bonne précision sur les profils de corrélations angulaires de la phase.

J'ai aussi mis en évidence que des variations importantes du rapport grande échelle sur diamètre avait une influence notable tant sur l'amplitude que sur la forme des courbes de corrélation des premiers coefficients de la décomposition de la phase sur la base des polynômes de Zernike (essentiellement pour l'ordre radial $n=1$). Toutefois, en se plaçant dans des cas réalistes et en tenant compte des nombreuses mesures de grande échelle effectuées ces dernières années à partir du GSM (qui donne un domaine de variation de L_0 de quelques dizaines de mètres autour d'une valeur moyenne d'environ 25 mètres), on peut pour des télescopes de la classe des 10 mètres (ou inférieur) considérer que les variations de L_0 ont peu d'influence sur la forme des courbes de corrélation. Attention toutefois, cette hypothèse ne sera plus vrai dès que le rapport L_0/D deviendra trop faible (typiquement inférieurs à quelques unités).

Les résultats originaux de cette partie portant sur l'étude statistique de l'évolution angulaire de la phase et sur la définition de profils équivalents sont importants, car à la base d'une partie des études menées dans cette thèse.

Chapitre 2

Imagerie à travers la turbulence

2.1 Introduction

Après avoir étudié les effets de la turbulence sur la dégradation d'une onde lumineuse, intéressons nous à présent aux effets de ces dégradations sur la formation des images au foyer d'un télescope. Ce chapitre est uniquement consacré aux définitions des grandeurs d'intérêt utilisées dans la suite du mémoire. On s'intéressera notamment au problème de la formation d'image à travers la turbulence et à la définition de la fonction d'étalement de point (FEP), qui est la grandeur qui caractérise les dégradations subies par l'image de l'objet observé. Après avoir présenté la problématique de la formation des images, on donnera un bref aperçu des techniques existantes permettant d'obtenir des objets avec une haute résolution angulaire malgré la présence de la turbulence.

Il faut noter que ce chapitre (ce sera d'ailleurs le seul de la thèse) ne présente que des rappels sur les grandeurs liées à la formation d'images à travers la turbulence et ne contient aucun travail personnel.

2.2 FEP et FTO du système télescope+atmosphère

Soit $P(\mathbf{r})$ la fonction pupille du système optique. Dans la plupart des cas, la pupille d'entrée d'un télescope est un disque pouvant avoir une occultation centrale (due au miroir secondaire du télescope). Supposons donc un télescope de diamètre D ayant une occultation centrale d , la fonction P se définit comme suit :

$$P(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{d}{2} \leq |\mathbf{r}| \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.1)$$

L'amplitude complexe de l'onde arrivant sur la pupille pour un point source dans une direction α , notée $\Psi_\alpha(\mathbf{r})$ à un instant t a été perturbée par l'atmosphère comme présenté dans la section 1.4. La FEP du système, qui n'est autre que l'image dans le plan focal de ce point source¹, est donnée par la théorie de la diffraction (Fraunhofer), soit le module carré de la transformée de Fourier de l'amplitude complexe sur la pupille du télescope :

$$\text{FEP}_\alpha(\rho) \propto \left\| \text{TF} [\Psi_\alpha(\mathbf{r}) P(\mathbf{r})]_\rho \right\|^2 \quad (2.2)$$

1. Plus généralement la FEP d'un système (ou réponse impulsionnelle, ou Point Spread Function en anglais) représente la réponse de ce système à une impulsion (ou pic de Dirac).

avec ρ (position angulaire dans le champ de vue) en radians et r en mètres. De plus, la Fonction de Transfert Optique FTO $_{\alpha}(\mathbf{f})$ associée à cette FEP pour une direction α est donnée par TF [FEP $_{\alpha}(\rho)$] ce qui est aussi équivalent (par le théorème de Wiener-Khintchine) à l'auto-corrélation de $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ définie sur la pupille du télescope, soit :

$$\text{FTO}_{\alpha}(\mathbf{f}) = \frac{1}{S} \int P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})\Psi_{\alpha}(\mathbf{r})\Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})d\mathbf{r} \quad (2.3)$$

où S représente la surface de la pupille P ($S = \int P(\mathbf{r})d\mathbf{r}$) et assure que la FTO est normalisée à 1 et donc que la FEP est d'énergie unitaire (attention, on a considéré ici que $P(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})^2$ cf. équation 2.1). \mathbf{f} est un vecteur de fréquences spatiales (variable conjuguée de ρ pour la transformée de Fourier).

Il convient de noter que dans le cadre d'une propagation en l'absence de turbulence ou d'une correction parfaite du front d'onde $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = 1$, la FEP du système est alors, dans le cas d'une pupille pleine, la tache d'Airy (figure de diffraction du télescope). La résolution de l'instrument est donnée par la largeur à mi hauteur de cette tache qui vaut λ/D . Si le télescope a une occultation centrale, la tache d'Airy est légèrement modifiée, en particulier l'amplitude des anneaux de diffraction évolue mais la résolution (valeur à mi hauteur) reste sensiblement la même. Cette notion de résolution maximale se retrouve bien évidemment sur la FTO qui dans ce cas est un filtre fréquentiel passe-bas, atténuant plus ou moins les fréquences élevées en fonction de l'occultation centrale et annulant complètement les fréquences supérieures à D/λ .

En présence de turbulence, les rayons lumineux sont déviés par les fluctuations d'indice (voir chapitre 1) et viennent interférer dans le plan focal de l'instrument provoquant un "éclatement" de la tache d'Airy. La FEP contient alors un certain nombre de speckles² ayant pour largeur à mi hauteur la limite de diffraction théorique (λ/D) et ce sur un domaine de taille λ/r_0 (voir figure 2.1). Cette FEP instantanée va évoluer en fonction de l'évolution de la phase turbulente. Si on augmente le temps de pose, les speckles vont se moyenner. Pour un temps de pose suffisamment long, la FEP ressemble à une gaussienne avec une largeur à mi hauteur de l'ordre de λ/r_0 .

On retrouve ici le paramètre de Fried défini au paragraphe 1.3.4. C'est cette taille caractéristique qui va *in fine* donner la résolution maximale du télescope en présence de turbulence. Le paramètre de Fried r_0 peut alors être vu comme le diamètre d'un télescope hors atmosphère donnant la même résolution qu'un télescope de diamètre infini en présence de turbulence. Aux longueurs d'onde visibles et même pour de très bon sites, r_0 ne dépasse pas quelques dizaines de centimètres. Cela donne une idée de la perte en résolution introduite par l'atmosphère et sur la nécessité d'y remédier.

Le phénomène d'éclatement de la tâche d'Airy se traduit sur la FTO courte pose par une chute rapide de cette dernière aux alentours de la fréquence r_0/λ puis à des oscillations autour de 0. Ces oscillations représentent l'énergie contenue dans les hautes fréquences spatiales, atténuée, apparaissant et disparaissant aléatoirement d'une courte pose à l'autre (voir figure 2.2). On verra aux paragraphes 2.5.1 suivant l'importance de ces oscillations de l'énergie dans les hautes fréquences de la FTO et de la présence d'information fréquentielle (même parcellaire) jusqu'à D/λ lorsque l'on s'intéresse aux courtes poses (CP).

A contrario, si on effectue une longue pose, l'effet de moyenne va faire disparaître ces oscillations, l'énergie contenue dans les hautes fréquences spatiales de la FTO longue pose va donc disparaître à partir de r_0/λ . On aura alors complètement perdu l'information haute fréquence.

2.3 FTO moyenne, FTS

Je ne vais faire dans ce paragraphe que rappeler et définir quelques notions et grandeurs statistiques, essentielles à la compréhension et à l'étude du problème de l'imagerie à haute résolution en présence

2. Notons que si j'emploie ici le terme anglais couramment utilisé, on parle aussi de tavelures en français.

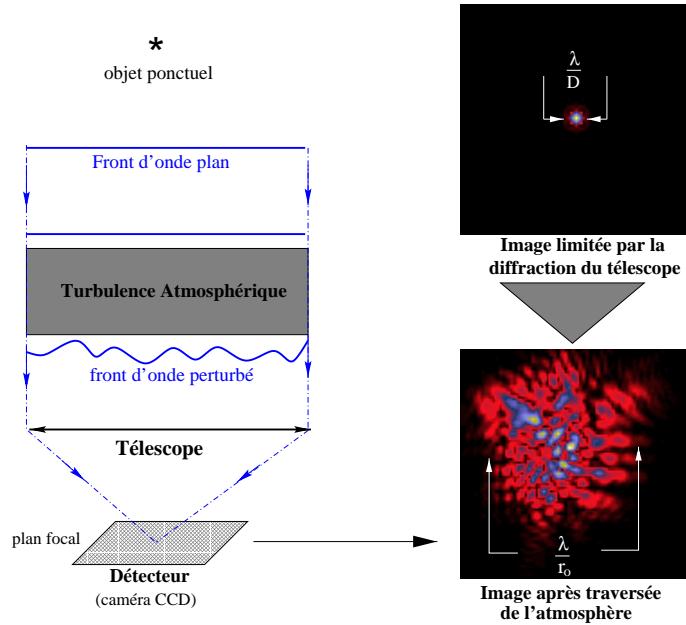


FIG. 2.1 – Dégradation de l'image en présence de turbulence atmosphérique. A gauche : dégradation du front d'onde. A droite : effet sur l'image courte pose au plan focal d'un instrument d'optique (simulation numérique avec $D/r_0 = 20$).

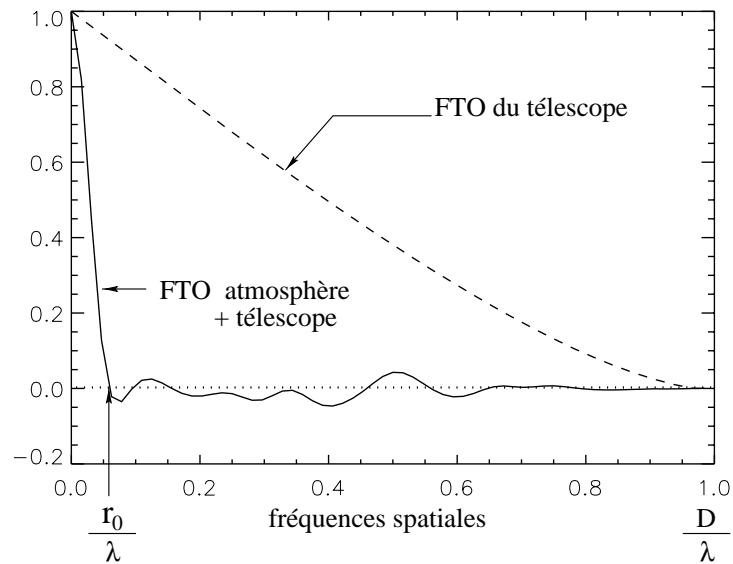


FIG. 2.2 – Partie réelle de la FTO en présence de turbulence comparée à la FTO théorique du télescope. On a considéré ici un télescope sans obturation centrale ($d = 0$)

de turbulence. Une étude plus poussée et bien plus complète est présentée dans [Roddier-l-81]. Je m'intéresse essentiellement aux deux premiers moments de la fonction de transfert optique, que l'on appellera fonction de transfert optique moyenne ou longue pose (FTO_{lp}) et fonction de transfert de speckle (FTS).

2.3.1 FTO_{lp}

La FTO_{lp} peut se définir comme la moyenne d'ensemble des FTO "instantanées" associées aux courtes poses. Soit

$$\text{FTO}_{lp}(\mathbf{f}) = \langle \text{FTO}(\mathbf{f}) \rangle = \frac{1}{\mathcal{S}} \int P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f}) \langle \Psi_{\alpha}(\mathbf{r})\Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f}) \rangle d\mathbf{r} \quad (2.4)$$

avec, $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = e^{i\varphi_{\alpha}(\mathbf{r})}$ si on néglige les effets de scintillation et donc :

$$\langle \Psi_{\alpha}(\mathbf{r})\Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f}) \rangle = \left\langle e^{i[\varphi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \varphi_{\alpha}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})]} \right\rangle \quad (2.5)$$

on voit ici apparaître la fonction caractéristique de la variable $[\varphi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \varphi_{\alpha}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})]$. Or $\varphi_{\alpha}(\mathbf{r})$ étant le résultat de la traversée d'un nombre important de couches, on peut, par application du théorème de la limite centrale, supposer que la phase à son arrivée sur la pupille du télescope a une statistique gaussienne, et donc que sa différence spatiale $\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})$ suit elle aussi une statistique gaussienne. Dans ce cas on a la relation :

$$\langle \exp i [\varphi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \varphi_{\alpha}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})] \rangle = \exp \frac{1}{2} \left\langle [\varphi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \varphi_{\alpha}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})]^2 \right\rangle \quad (2.6)$$

L'équation 2.6 fait ainsi apparaître la fonction de structure de la phase définie par l'équation 1.20 au chapitre précédent. L'hypothèse de stationnarité de la phase sur la pupille du télescope est ici importante, car elle permet d'exprimer l'équation 2.6 indépendamment de la variable \mathbf{r} .

Revenons maintenant à l'expression de la FTO_{lp} , l'indépendance de $D_{\varphi_{\alpha}}$ vis-à-vis de \mathbf{r} permet d'exprimer la FTO_{lp} comme le produit d'un terme uniquement lié à l'instrument optique³ par un terme uniquement lié à la turbulence atmosphérique. Soit :

$$\text{FTO}_{lp}(\mathbf{f}) = T(\mathbf{f}).B(\mathbf{f}) \quad (2.7)$$

avec

$$T(\mathbf{f}) = \frac{1}{\mathcal{S}} \int P(\mathbf{f})P(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f}) = \frac{2}{\pi} \left[\cos \left(\frac{\lambda f}{D} \right) - \frac{\lambda f}{D} \left(1 - \left(\frac{\lambda f}{D} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.8)$$

$$B(\mathbf{f}) = \exp \left(-\frac{1}{2} D_{\varphi} (\lambda f) \right) = \exp -3.44 \left(\frac{\lambda f}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (2.9)$$

On suppose dans le calcul de $T(\mathbf{f})$ que le télescope ne possède pas d'obturation centrale ($d = 0$). C'est le terme $B(\mathbf{f})$ qui domine dans l'équation 2.7. On a donc $\text{FTO}_{lp}(\mathbf{f}) \simeq B(\mathbf{f})$. La longue pose a pour effet de moyenner les hautes fréquences qui étaient encore présentes dans la FTO instantanée ($B(\mathbf{f})$ tend vers 0 très rapidement dès que $f \geq r_0/\lambda$). On a donc totalement perdu, dans ce cas, l'information haute fréquence⁴ comme le montre la figure 2.3.

3. On considère ici une pupille parfaite sans obturation centrale, cette dernière ayant pour effet d'abaisser un peu le plateau haute fréquence de la FTO théorique.

4. On peut enfin remarquer qu'à cause de l'effet de moyenne, et donc la seule dépendance en r_0 de $B(\mathbf{f})$, la FTO longue pose (en l'absence de toutes corrections des effets de la turbulence) est indépendante de l'angle α considéré.

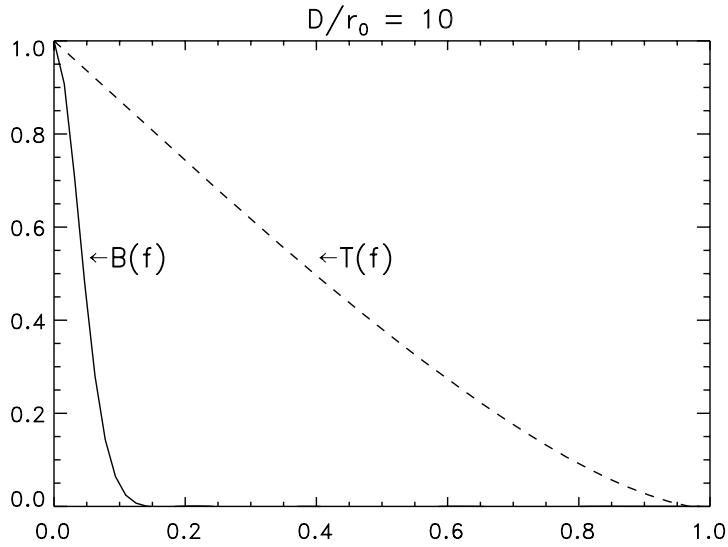


FIG. 2.3 – *FTO moyenne en présence de turbulence comparée à la FTO théorique du télescope*

2.3.2 FTS

Considérons à présent le moment du second ordre de la FTO instantanée, c'est à dire la fonction de transfert des speckle ou FTS (voir figure 2.4).

$$\text{FTS}(f) = \left\langle |\text{FTO}(f)|^2 \right\rangle \quad (2.10)$$

Dans ce cas, on peut montrer que l'information sur le module des hautes fréquences spatiale est

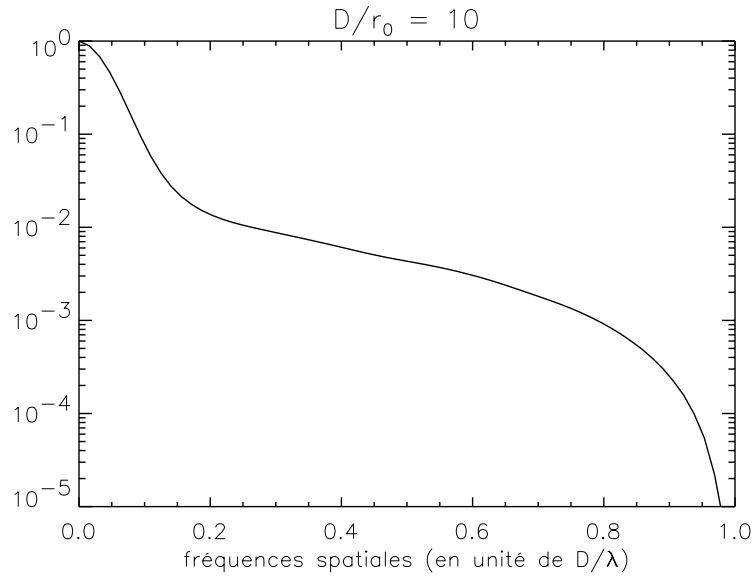


FIG. 2.4 – *Fonction de Transfert de speckles*

préservée, bien qu'atténuee, jusqu'à la fréquence de coupure du télescope [Labeyrie-a-70]. Le facteur d'atténuation est directement liée au nombre de speckles présents en moyenne dans la FEP courte pose, c'est-à-dire à $(D/r_0)^2$. En effectuant non pas une simple moyenne mais un calcul de moment du second ordre, on a réussi à préserver une partie de l'information (uniquement le module, atténue, des fréquences spatiales) jusqu'à la fréquence de coupure du télescope. On verra au paragraphe 2.5.1 l'importance de cette préservation de l'information contenue dans les hautes fréquences spatiales dans les méthodes de traitement *a posteriori*.

2.4 La relation objet-image

On s'intéresse maintenant à l'imagerie d'un objet dont la répartition d'intensité est $O(\alpha)$ (avec $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$ représentant ses coordonnées angulaires) par un instrument optique à travers la turbulence.

2.4.1 Dans le cas général

La FEP globale du système instrument+turbulence est supposée linéaire (voir plus haut). Les images finales sont, en outre, perturbées par un bruit $b(\alpha)$ supposé additif (bruit de photons et/ou de détecteur). Dans le cas général, l'image de l'objet observé à travers la turbulence est donnée par l'équation suivante :

$$I(\alpha) = \int \int FEP(\alpha', \alpha) O(\alpha') d\alpha' + b(\alpha) \quad (2.11)$$

où FEP est le noyau de l'équation intégrale.

La caractérisation complète du système suppose la connaissance de cette FEP **pour chaque vecteur angulaire** α dans le champ de vue considéré. Soit dans le cas d'une image de $N \times N$ pixels, N^2 FEPs à connaître.

Dans certains cas, on peut supposer que cette FEP est invariante par translation, c'est-à-dire que la FEP ne dépend plus de sa position dans le champ, réduisant par la même la connaissance du système à la connaissance **d'une seule** FEP. Le domaine où la FEP est considérée comme invariante est appelé *domaine isoplanétique*.

2.4.2 Dans le domaine isoplanétique

Dans le domaine isoplanétique, le front d'onde subit les mêmes dégradations quel que soit l'angle de vue considéré. Dans ce cas, la FEP peut être considérée comme invariante par translation, c'est-à-dire où tous les points de l'objet sont multipliés par la même FEP, l'équation 1.1 peut alors se simplifier de la manière suivante :

$$I(\alpha) = \int \int FEP(\alpha' - \alpha) O(\alpha) d\alpha' + b(\alpha). \quad (2.12)$$

On a une relation de convolution liant l'objet et l'image :

$$I(\alpha) = (H * O)(\alpha) + b(\alpha) \quad (2.13)$$

Dans le plan de Fourier, cette convolution s'écrit sous la forme d'un produit fréquence à fréquence :

$$\tilde{I}(\mathbf{f}) = FTO(\mathbf{f}) \times \tilde{O}(\mathbf{f}) + \tilde{b}(\mathbf{f}) \quad (2.14)$$

\tilde{I} , FTO , \tilde{O} et \tilde{b} représentent respectivement les transformées de Fourier de I , FEP , O et b . D'un point de vue matriciel, la matrice **FEP** est une matrice de Toeplitz (notons qu'il faut approximer ici la matrice de Toeplitz par une matrice à bloc circulante si on veut pouvoir effectuer des transformées de Fourier discrètes). On remarque ici que la FTO joue, dans l'équation 2.14 le rôle d'un filtre passe bas. Dans le cas d'une longue pose, les fréquences de l'images supérieures à r_0/λ sont irrémédiablement perdues. Par contre, dans le cas des techniques speckles (voir paragraphe 2.5.1) ou bien dans le cas de l'optique adaptative (voir paragraphe 2.5.2 et chapitre 3) l'énergie contenue dans hautes fréquences est seulement atténuee jusqu'à la fréquence de coupure du télescope⁵ D/λ , on peut donc espérer restituer l'information haute fréquence.

2.5 Restitution de l'information contenue dans les hautes fréquences spatiales de l'objet

Toutes les méthodes permettant de restituer l'information contenue dans les hautes fréquences présentées dans ce paragraphe supposent que l'on se place dans le domaine isoplanétique et donc que l'on a invariance par translation de la FEP. On verra dans les deux autres parties de la thèse comment étendre l'une d'entre elles (l'optique adaptative) à des domaines angulaires plus grands que le domaine isoplanétique et donc comment gérer (ou s'affranchir) des évolutions de la FEP dans le champ.

2.5.1 Traitements *a posteriori*

Toutes ces méthodes de traitement se basent sur l'enregistrement d'images ayant des temps de pose suffisamment courts (quelques millisecondes) pour figer les effets de la turbulence.

L'interférométrie des speckles

En interférométrie des speckles, on enregistre des images de l'objet d'intérêt puis dans un second temps d'une source ponctuelle (suffisamment proche pour supposer que l'on est dans le domaine isoplanétique). Les images du point source donnent accès à une mesure de la FTS, permettant ainsi par des traitements statistiques plus ou moins raffinés de remonter à tout ou partie de l'information contenue de l'objet. Dans le cas de l'interférométrie de speckles [Labeyrie-a-70] on n'a accès qu'au module de la transformée de Fourier de l'objet, mais des techniques plus élaborées permettent de remonter à la phase [Knox-a-74, Weigelt-a-77]. En particulier, l'utilisation de deux images liées par une relation connue permet d'estimer conjointement l'objet et la phase turbulente, c'est le concept de la diversité de phase [Gonsalves-a-82, Seldin-p-94, Paxman-a-96].

La déconvolution par analyse de front d'onde

L'idée de la déconvolution par analyse de surface d'onde est de combiner simultanément l'acquisition d'images courtes poses et de données d'analyse de front d'onde [Fontanella-a-85, Primot-a-90, Marais-p-91]. Les données sur les fronts d'onde permettent de remonter à l'estimation de la FEP associée à chaque image courte pose. Une déconvolution multi-trames est ensuite utilisée pour remonter à l'objet à partir des images et des FEPs. Une technique de restauration myope, plus puissante a été récemment proposée [Mugnier-p-99, Mugnier-a-00a] permettant une estimation optimale, à la fois de l'objet mais aussi des phases associées à chaque courte pose.

5. les fréquences supérieures à D/λ sont complètement filtrées par la fonction de transfert du télescope, dans tous les cas.

2.5.2 L'optique adaptative

Si toutes les techniques citées précédemment permettent d'obtenir des objets, ou des paramètres de l'objet, restaurés jusqu'à une fréquence spatiale proche de la fréquence de coupure du télescope (limite de diffraction), elles présentent néanmoins certaines limitations. La plus importante étant la nécessité, dans tous les cas, d'acquérir des poses suffisamment courtes pour pouvoir figer les effets de la turbulence et éviter l'effet de moyenne sur les hautes fréquences. Dans ce cas, la présence de speckles dans les images diminuent significativement le rapport signal à bruit.

L'optique adaptative (OA) [Babcock-a-53, Rousset-a-90, Roddier-l-99] est une technique permettant de s'affranchir de ces problèmes par une correction des effets de la turbulence avant l'enregistrement des images. On peut ainsi acquérir des images longue pose avec une résolution proche de la résolution théorique de l'instrument. Cela est possible en analysant et en corrigeant en temps réel et de manière opto-mécanique (par l'intermédiaire de la déformation d'un miroir) la phase après traversée de l'atmosphère. Cette technique, de loin la plus puissante pour l'observation à travers la turbulence sera présentée en détail dans le chapitre suivant. Si cette technique permet de restituer les fréquences jusqu'à D/λ , ces dernières sont plus ou moins atténuées, en fonction de la qualité de correction du front d'onde, vis-à-vis de la fonction de transfert théorique du télescope. Il est alors nécessaire de traiter *a posteriori* les images corrigées par optique adaptative pour rehausser le niveau des hautes fréquences de l'objet observé, et obtenir ainsi la meilleure estimation possible de ce dernier. L'étude de ces techniques de traitement *a posteriori*, appliquées sur des images partiellement corrigées par l'optique adaptative, sera présentée dans la deuxième partie de ce mémoire.

2.6 Conclusion

J'ai présenté dans ce chapitre, uniquement consacré à des définitions et des rappels, la problématique de la formation d'images à travers la turbulence, et j'ai donné un bref aperçu des méthodes classiques de traitement (*a posteriori* ou en temps réel) nécessaires pour faire de la haute résolution angulaire. On va s'attarder à présent sur la plus prometteuse de ces techniques, l'optique adaptative, en rappelant, dans un premier temps, les principes de base de cette technique (au chapitre 3), puis en caractérisant de manière statistique les performances et les limitations de cette approche (au chapitre 4).

Chapitre 3

Optique adaptative & reconstruction de front d'onde

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, après quelques considérations historiques, je vais rappeler le fonctionnement général d'une OA (une présentation bien plus complète sur le sujet pourra être trouvée dans de nombreux ouvrages dont [Roddier-l-99] par exemple). J'insisterai plus particulièrement sur les problèmes d'analyse et surtout de reconstruction de front d'onde à partir des données fournies par l'analyseur de surface d'onde (on considérera ici un analyseur de Shack-Hartmann). Une approche la plus rigoureuse possible de la problématique de la restitution spatiale de la phase à partir des données fournies par un analyseur de surface d'onde sera présentée. En m'appuyant sur la théorie du traitement du signal, j'essaierai de mettre en perspective les différentes approches possibles pour traiter le problème. La méthode classiquement utilisée (basée sur un critère de moindres carrés) est présentée, ainsi que des approches plus sophistiquées basées sur la prise en compte des connaissances *a priori* sur la phase, et en particulier la connaissance de sa statistique (Kolmogorov ou Von Karman).

Les notions et concepts ainsi introduits seront réutilisés dans la suite du mémoire et notamment dans le cadre de la reconstruction de front d'onde à grand champ (troisième partie du mémoire).

3.2 Historique

Il a fallu attendre près de 35 ans après la proposition de Babcock [Babcock-a-53] et les progrès fulgurants de l'informatique pour voir le premier système d'OA dédié à l'astronomie (le système COME-ON¹ [Kern-p-89, Rousset-a-90, Rigaut-p-92a]) installé sur le télescope de 3.6 mètres de l'ESO (observatoire européen austral) à La Silla (Chili). Depuis lors de nombreux systèmes ont été installés sur tous les grands télescopes en activité. À la Silla, COME-ON+ [Rousset-p-92a, Rousset-p-93b] puis ADONIS² [Beuzit-p-94] ont successivement amélioré le premier système COME-ON. ADONIS ainsi que les systèmes Hokupa'a³ [Roddier-p-91, Roddier-p-94] et PUEO⁴ [Arsenault-p-94, Rigaut-p-94, Lai-t-96] installés sur le télescope Canada-France-Hawaii au Mauna-Kea à Hawaii, fournissent ainsi depuis plusieurs années à la communauté astronomique des données de très grande qualité [Roddier-a-95, Roddier-a-96].

1. COME-ON : Cge Observatoire de Paris-Meudon ONéra

2. ADONIS : ADaptive Optics Near Infrared System

3. Hokupa'a : étoile polaire en Hawaïien

4. PUEO : Probing the Universe by Enhanced Optics (hibou Hawaïien)

Aujourd’hui, avec l’avènement des télescopes de la classe des 8-10 mètres, une nouvelle génération d’OA est en cours d’intégration. Il s’agit notamment de NAOS⁵ [Rousset-p-98, Rousset-p-00] pour le VLT, Altair⁶ [Herriot-p-98, Saddlemeyer-p-98] pour Gemini nord et les OA du Keck [Wizinowich-p-00] et de Subaru [Takami-p-98].

3.3 Principe de l’optique adaptative

L’optique adaptative (OA) est un système opto-mécanique permettant de corriger, en temps réel, les défauts de phase introduits sur le front d’onde lors de la propagation à travers la turbulence atmosphérique. Un système d’optique adaptative se compose de trois éléments clés: un analyseur de surface d’onde (ASO), un système informatique temps réel et un miroir déformable (MD) (voir figure 3.1). Les données fournies par l’ASO [Rousset-p-93a, Rousset-l-99a] sont traitées par l’informatique temps réel [Boyer-p-90, Madec-l-99, Rabaud-p-99] afin de piloter le miroir déformable [Sechaud-l-99] qui va s’adapter aux déformations du front d’onde pour le corriger, et obtenir en sortie un front d’onde plan et donc, sur l’instrument scientifique placé au foyer du télescope (caméra, spectrographe ...), une image à la résolution théorique de ce dernier (voir schéma 3.1). L’OA est un système asservi fonctionnant en boucle fermée, l’ASO étant situé en aval du miroir déformable. L’évolution rapide de la turbulence (quelques millisecondes) suppose des boucles de contrôle rapides et optimisées [Gendron-t-95, Dessenne-a-98, Madec-l-99], capables de piloter le miroir déformable avec des bandes passantes liées à l’évolution de la turbulence [Greenwood-a-77, Conan-p-92b] (typiquement de quelques centaines à quelques milliers de Hertz)

3.4 L’analyse de front d’onde

3.4.1 Différentes méthodes d’analyse

Les deux types d’analyseurs de surface d’onde classiquement utilisés dans le cadre de l’OA sont l’analyseur de Shack-Hartmann (dont je parlerai plus en détail dans le prochain paragraphe) et l’analyseur à courbure de F. Roddier [Roddier-a-88, Roddier-a-93]. Ces analyseurs font partie de la famille des analyseurs “plan pupille”⁷. Ils consistent en un échantillonnage de la pupille par des sous-pupilles, chacune d’elle donnant une information locale sur la surface d’onde. Le Shack-Hartmann mesure la pente locale du front d’onde alors que l’analyseur à courbure mesure lui une courbure locale en analysant l’intensité de part et d’autre du plan pupille. Ce type d’analyseur est particulièrement bien adapté dans le cas de l’utilisation de miroirs déformables de type bimorphe (voir paragraphe 3.5). Une étude comparative des différents types d’analyseurs pourra être trouvée dans [Rousset-l-99a].

Il existe d’autres types d’analyseurs, en particulier l’analyseur pyramidal proposé par R. Ragazzoni [Ragazzoni-a-96, Esposito-p-00] (qui comme le SH mesure les pentes du front d’onde) dont le potentiel paraît très intéressant, en particulier en terme de sensibilité [Ragazzoni-a-99c], dans l’optique des prochaines générations d’OA, et notamment pour l’optique adaptative multiconjuguée qui sera présentée dans la troisième partie du mémoire.

5. NAOS : Nasmyth Adaptive Optics System

6. Altair : ALTitude conjugate Adaptive optics for InfraRed

7. Notons qu’il existe un autre type d’analyseur : les analyseurs plan focal tels la diversité de phase [Gonsalves-a-82, Meynadier-a-99, Blanc-p-00], mais ces derniers sont généralement peu adaptés aux problèmes de l’OA.

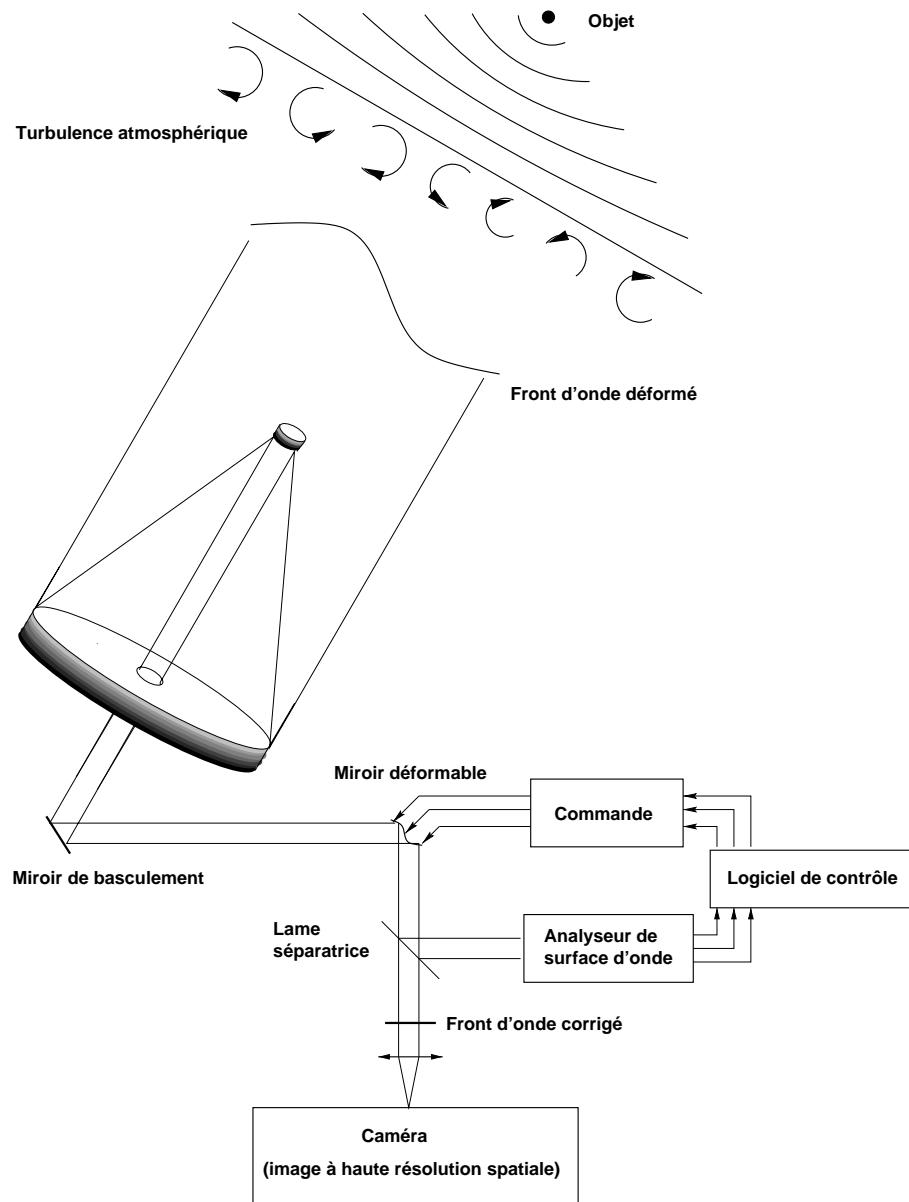


FIG. 3.1 – Schéma de principe d'un système d'optique adaptative.

3.4.2 Le Shack-Hartmann

Intéressons nous, de manière plus approfondie, à un type particulier d'analyseur : l'analyseur de Shack-Hartmann (SH) [Shack-a-71]. Le fonctionnement du SH repose sur le formalisme de l'optique géométrique. Il peut fonctionner avec des sources incohérentes, en lumière blanche. Dans toute la suite du mémoire, c'est l'analyseur qui sera considéré pour toutes les simulations et tous les développements théoriques. Comme présenté précédemment, on échantillonne la pupille du télescope avec des micro-lentilles placées dans un plan conjugué de la pupille et définissant des sous-pupilles. Chaque image formée au plan focal d'une sous-pupille va nous donner une information sur la pente moyenne du front d'onde par l'intermédiaire d'une mesure de centre de gravité (voir figure 3.2). La pente moyenne locale

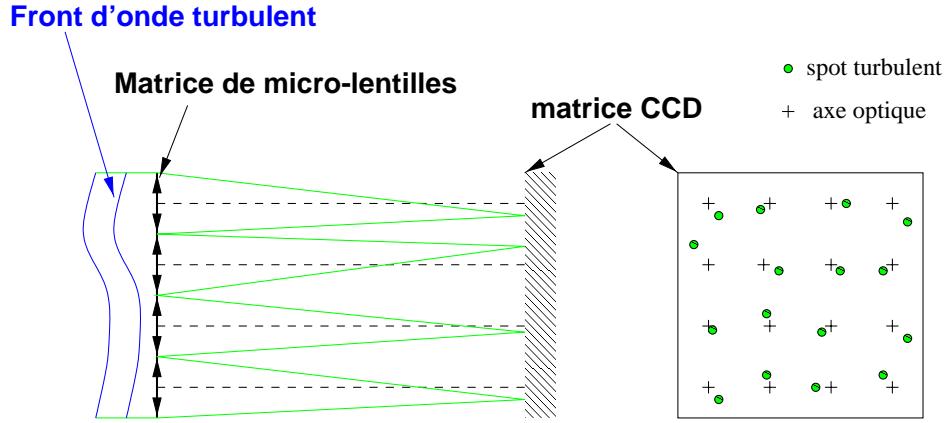


FIG. 3.2 – Schéma de principe d'un analyseur de type Shack-Hartmann

de la phase sur la sous-pupille (ou angle d'arrivée) est liée au déplacement du centre de gravité (CDG) de la tache focale au foyer d'une sous-pupille par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{x_c}{f_{ml}} = \frac{\lambda}{2\pi\mathcal{S}} \iint_{sspup} \frac{\delta\varphi}{\delta x} dx dy \\ \alpha_y &= \frac{y_c}{f_{ml}} = \frac{\lambda}{2\pi\mathcal{S}} \iint_{sspup} \frac{\delta\varphi}{\delta y} dx dy\end{aligned}\quad (3.1)$$

avec \mathcal{S} la surface de la sous-pupille, f_{ml} la focale des micro-lentilles⁸ et (x_c, y_c) le déplacement du centre de gravité par rapport à la position de référence de la sous-pupille (obtenue par un calibration en l'absence de turbulence). Pour écrire l'équation précédente, on a supposé que les effets de scintillation étaient négligeables (voir chapitre 1.4.2) [Roddier-l-81]. Sans cette hypothèse, la mesure de α_x (resp. α_y) devient une moyenne pondérée de $\frac{\delta\varphi}{\delta x}$ (resp. $\frac{\delta\varphi}{\delta y}$) par les fluctuations d'intensité $I(x, y)$ dans la pupille du télescope [Mahé-t-00]. Notons aussi que la variance turbulente de l'angle d'arrivée est donnée (pour des sous-pupilles carrées) par la relation suivante [Fante-a-75, Dessenne-t-98] :

$$\langle \alpha_x^2 \rangle = \langle \alpha_y^2 \rangle = 0.162 \frac{\lambda^2}{d^{1/3} r_0^{5/3}} \left[1 - 1.6 \left(\frac{d}{L_0} \right)^{1/3} + 7.4 \left(\frac{d}{L_0} \right)^2 - 9.0 \left(\frac{d}{L_0} \right)^{7/3} + \dots \right]. \quad (3.2)$$

où l'on suppose que $L_0 \gg d$.

Notons enfin que le SH fonctionne aussi dans le cas de sources étendues, au prix d'une perte en rapport signal sur bruit ([Rousset-a-87, Rousset-p-93a]), voire de sources très étendues (taille supérieure au champ de la sous-pupille). Dans ce dernier cas, le calcul de centres de gravité est remplacé

8. On règle la sensibilité d'un SH en jouant sur la focale f_{ml} des micro-lentilles.

par un calcul de corrélations ([Rousset-a-87, Michau-p-92, Rimmele-p-98]), ce qui suppose que l'objet observé doit présenter suffisamment de contraste pour permettre une bonne précision de mesure.

Bruit d'analyse

Le bruit de mesure avec l'analyseur de type SH peut avoir deux origines [Rousset-a-87, Sechaud-p-91, Rousset-p-93a] :

- Le bruit de photons issu du flux de la référence observée :

$$\sigma_{phot}^2 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{N_{ph}} \left(\frac{X_T}{X_D} \right)^2 \text{ (radian}^2\text{).} \quad (3.3)$$

avec N_{ph} le nombre de photons reçus par sous-pupille, X_T la largeur à mi-hauteur de la tache image et X_D la largeur à mi hauteur limitée par la diffraction (X_T et X_D sont en nombre de pixels).

- Le bruit de détecteur :

$$\sigma_{detect}^2 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{e-}}{N_{ph}} \frac{X_S^2}{X_D} \right)^2 \text{ (radian}^2\text{)} \quad (3.4)$$

avec σ_{e-} l'écart quadratique moyen du bruit par pixel (en électrons) et X_S le nombre de pixels pris en compte dans le calcul du centre de gravité (généralement $X_S \simeq 2X_T$).

Par la suite, je caractériserai un SH en fonction de son rapport signal sur bruit (RSB) par sous-pupille qui est ici défini comme le rapport de la variance turbulente de l'angle d'arrivée (équation 3.2) et de la variance de bruit $\sigma_{phot}^2 + \sigma_{detect}^2$ (cf. équations 3.3 et 3.4). Ce RSB dépend donc à la fois des caractéristiques du système (diamètre du télescope, nombre de sous-pupilles, performance du détecteur) mais aussi de la turbulence (r_0, L_0) et de l'objet observé (magnitude et étendue spatiale).

3.5 Le système de correction

Intéressons nous à présent brièvement au miroir déformable qui va permettre la correction du front d'onde. Une revue complète des différents types de systèmes de correction pourra être trouvée dans [Sechaud-l-99]. Toutefois, dans tous les cas le principe de correction est le suivant : le front d'onde arrive perturbé sur le miroir déformable, la surface réfléchissante de ce dernier est déformée pour s'adapter au front d'onde, corrigé ainsi les défauts de phase introduits par la turbulence. Ceci peut se résumer par l'équation de base de l'optique adaptative :

$$\phi_{res}(\mathbf{r}) = \phi_{turb}(\mathbf{r}) - \phi_{corr}(\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

avec la phase résiduelle $\phi_{res}(\mathbf{r})$ tendant (idéalement) vers zéro (consigne du système). La déformation $\phi_{corr}(\mathbf{r})$ du miroir est obtenue, classiquement, en utilisant l'effet piezo-electrique comme moyen d'action sur le miroir : soit par l'intermédiaire d'actionneurs qui poussent ou tirent sur la surface réfléchissante du miroir, soit par la dilatation différentielle de deux membranes collées. Il faut noter que le premier type de miroir est généralement couplé avec un analyseur de front d'onde de type SH, alors que le deuxième est généralement utilisé avec un analyseur à courbure.

Il s'agit à présent d'étudier comment, à partir des mesures de front d'onde fournies par l'analyseur on peut calculer au mieux les tensions à appliquer aux actionneurs du miroir déformable pour obtenir la meilleure correction possible.

3.6 La commande

Le problème de la commande en optique adaptive consiste, à partir des mesures fournies par l'analyseur de surface d'onde, à piloter le miroir déformable pour obtenir la meilleure correction possible de la phase. Pour obtenir cette correction optimale, il faut non seulement reconstruire la phase spatialement à partir des mesures de l'ASO, mais aussi gérer les aspects temporels liés à la boucle d'asservissement, notamment les problèmes de bande passante du système, de stabilité de boucle et d'optimisation temporelle des commandes à appliquer aux miroirs déformables. On peut en première approximation découpler les problèmes spatiaux et temporels, bien que des liens existent entre eux et que la définition d'une commande optimale suppose une approche globale du problème [Ellerbroek-a-94b].

Le cas de l'étude temporelle de la commande a déjà été traité par ailleurs et ne sera pas étudié dans cette thèse. Le lecteur intéressé pourra, pour plus d'informations, se rapporter aux références suivantes [Boyer-p-90, Demerle-p-93, Ellerbroek-a-94b, Gendron-t-95, Dessenne-t-98, Dessenne-a-98, Madec-l-99].

Pour ma part, je vais me focaliser sur les problèmes liés à la reconstruction spatiale du front d'onde. En particulier, je ne considérerai pas les aspects liés à la boucle fermée et me placerai dans le cas simplifié d'une OA fonctionnant en boucle ouverte. L'étude de la reconstruction spatiale va me permettre d'introduire différents concepts et notions qui seront réutilisés lors de l'étude de l'optique adaptative multiconjuguée.

3.7 Reconstruction spatiale du front d'onde

Un des aspects essentiels de l'optique adaptive consiste en la reconstruction de la phase à partir des mesures de l'ASO. Une présentation générale des techniques de reconstruction peut être trouvée dans [Rousset-p-93a] et [Rousset-l-99a] avec de nombreuses références aux travaux fondateurs sur ce sujet. Je présente ici une approche la plus rigoureuse possible de la problématique de la restitution de front d'onde en m'appuyant sur la théorie du traitement du signal.

3.7.1 Problème direct

De manière générale (en supposant toutefois une linéarité des mesures vis à vis de la phase), le problème direct peut se modéliser de la façon suivante:

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}\Phi + \mathbf{b} \quad (3.6)$$

où Φ est la phase arrivant sur l'analyseur, \mathbf{p} le vecteur contenant les mesures fournies par l'analyseur de surface d'onde, \mathbf{b} est un bruit additif et \mathbf{D} un opérateur linéaire appelé matrice d'interaction du système. \mathbf{D} va bien entendu dépendre de la base dans laquelle la phase va être exprimée. Idéalement, chaque colonne de \mathbf{D} contient un nombre infini de modes (ou du moins très grand). La taille de cette matrice est donc $n_{mes} \times n_{modes}$ avec $n_{modes} \rightarrow \infty$. \mathbf{D} peut être vue comme la dérivée de chaque mode (de la base de reconstruction considérée) en x et en y, intégrée sur les différentes sous-pupilles [Rousset-l-99a].

On ne mesure donc qu'une version échantillonnée de la dérivée de la phase (nombre fini de sous-pupilles), les mesures \mathbf{p} sont ainsi entachées d'une erreur de repliement. Ce phénomène est décrit sur la figure 3.3. Un échantillonnage de la mesure provoque une périodisation de son spectre dans le plan de Fourier avec une fréquence $f_{ech} = 1/d$. Ainsi, lors de la mesure d'une fréquence f , on est non seulement sensible à la valeur du spectre de la phase pour cette fréquence, mais aussi à la valeur du spectre d'une haute fréquence ($f_{ech} - f$) introduite par le phénomène de périodisation. La mesure des basses fréquences de la phase (fréquences les plus importantes car contenant le plus

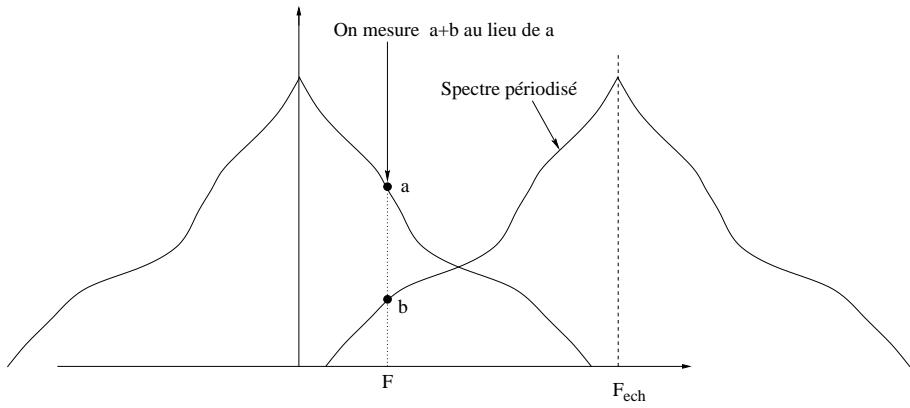


FIG. 3.3 – Spectre spatial d'un signal échantillonné. On met en évidence le problème de l'effet de repliement lors de la mesure d'un signal échantillonné.

d'énergie turbulente) va être entachée d'une erreur plus moins importante selon l'allure du spectre et l'échantillonnage de la mesure (taille de la sous-pupille).

On sera amené par la suite à considérer un modèle direct approché, où \mathbf{D} va être limité en nombre de modes pour des raisons pratiques (taille de la matrice et difficultés de calcul).

Pour l'instant, nous supposerons que \mathbf{D} contient bien plus de modes que le système d'OA ne peut en corriger (c'est-à-dire que l'on a un bon modèle de notre problème direct), et que la base choisie est celle des polynômes de Zernike⁹.

Intéressons-nous à présent au problème de la reconstruction de la phase. Il s'agit d'obtenir la meilleure estimation possible $\hat{\Phi}$ de Φ à partir de \mathbf{p} , soit, en se restreignant aux estimateurs linéaires :

$$\hat{\Phi}_{corr} = \mathbf{R}\mathbf{p} \quad (3.7)$$

où \mathbf{R} est appelé matrice de reconstruction. C'est le choix de la matrice \mathbf{R} qui va faire l'objet des paragraphes suivants.

3.7.2 Estimation au sens des moindres carrés

Considérons dans un premier temps un estimateur au sens des moindres carrés (MC), estimateur rustique, mais couramment employé dans les systèmes d'OA. Il s'agit d'un critère d'écart aux mesures :

$$\epsilon = \left\| \mathbf{p} - \mathbf{D}\hat{\Phi}_{corr} \right\|^2 \quad (3.8)$$

ce qui conduit au résultat bien connu :

$$\hat{\Phi}_{corr} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \mathbf{p} \quad (3.9)$$

où \dagger représente une matrice inverse généralisée.

Le problème majeur de ce type d'inversion réside dans le conditionnement de la matrice $(\mathbf{D}^T \mathbf{D})$. Or dans notre cas, l'échantillonnage fini de la mesure (erreur de repliement) a entraîné un couplage des hautes et des basses fréquences lors des mesures des dérivées de la phase. En particulier, des basses fréquences peuvent donner la même mesure que des hautes fréquences. Cela conduit à des vecteurs

9. Ce choix de base ne restreint en rien la généralité des approches de reconstruction présentées tout au long du chapitre.

propres (mélanges de basses et de hautes fréquences) ayant de très faibles (voire nulles) valeurs propres, et donc à un très mauvais conditionnement de la matrice $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$. Pour éviter cette amplification du bruit due aux faibles valeurs propres de $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$, l'inverse généralisée définie en équation 3.11 sera calculée en utilisant une décomposition en valeurs singulières tronquées (TSVD en anglais). Les valeurs propres les plus faibles du système seront mises à zéro lors de l'inversion, pour éviter une propagation trop importante du bruit [Golub-l-85]. Les modes associés à ces valeurs propres ne seront pas corrigés par le système, or ces modes contiennent des basses fréquences spatiales et donc une part non négligeable de l'énergie turbulente. Cette reconstruction n'est donc pas satisfaisante.

Pour résoudre en partie ce problème, la solution classiquement utilisée consiste en une modification (approximation) du problème direct. On remplace la matrice \mathbf{D} par une version tronquée (\mathbf{D}') à un nombre fini de modes (voir équation 3.10). La troncature est choisie de sorte à ne contenir que les modes basses fréquences (fortement énergétiques et non repliés). L'équation 3.6 se récrit donc de la manière suivante :

$$\mathbf{p} \simeq \mathbf{D}' \Phi + \mathbf{b} \quad (3.10)$$

qui conduit à la solution :

$$\hat{\Phi}_{corr} = (\mathbf{D}'^T \mathbf{D}')^\dagger \mathbf{D}'^T \mathbf{p} \quad (3.11)$$

Par contre, en modifiant le problème direct, on commet une erreur de sous-calibration [Veran-t-97]. En fonction du RSB et de l'échantillonnage des mesures (géométrie de l'analyseur), un compromis doit donc être trouvé entre l'erreur de sous-calibration (troncature trop importante de \mathbf{D}) et l'erreur de filtrage des bas ordres par la TSVD évoquée précédemment (troncature trop faible de \mathbf{D}). Ce compromis va fixer le nombre de modes à considérer dans \mathbf{D}' ¹⁰.

Le choix de la sous-calibration (fonction du RSB et de l'échantillonnage des mesures) qui introduit une modification du problème direct ainsi que le choix du seuil de troncature pour la TSVD [Robert-p-99, Fusco-a-00b] (qui va dépendre du RSB) sont deux problèmes majeurs de cette méthode de reconstruction.

Une approche optimale de l'estimation de la phase est proposée au paragraphe suivant. Dans cette dernière, l'utilisation d'une régularisation par l'introduction d'informations *a priori* sur la phase permet d'éviter la sous-modélisation du problème et de considérer la matrice \mathbf{D} dans son ensemble.

3.7.3 Estimation optimale de la phase sur la base de reconstruction

Pour améliorer la reconstruction de la phase et s'affranchir des problèmes soulevés au paragraphe précédent, une autre approche pour l'estimation de la phase doit être envisagée. Cette approche se base sur le constat simple suivant : on veut estimer la phase de correction qui se rapproche le plus possible de la phase vraie. C'est-à-dire que l'on veut estimer la phase de correction qui minimise en moyenne l'écart quadratique (ou estimateur "Minimum Mean Square Error" [MMSE] en anglais) entre les estimées et la vraie phase [Wallner-a-83]. Minimiser cet estimateur revient à assurer que la variance résiduelle de la phase sera toujours minimale (ce qui est le but recherché par l'OA). Soit à minimiser :

$$\epsilon = \left\langle \left\| \hat{\Phi}_{corr} - \Phi \right\|^2 \right\rangle_{\Phi, bruit} \quad (3.12)$$

La minimisation explicite de ce critère n'est possible que si l'on se restreint à la classe des estimateurs linéaires. On peut toutefois montrer que dans le cas où les statistiques tant sur le bruit que sur la phase

10. En pratique, on effectue aussi une TSVD sur \mathbf{D}' car il reste des valeurs propres très atténues.

sont gaussiennes, l'estimateur linéaire qui minimise le MMSE est l'estimateur optimal [VanTrees-l-68], on parle alors de LMMSE (Linear Minimum Mean Square Error). Or dans notre cas, la phase sur la pupille du télescope résulte des contributions d'un grand nombre de processus aléatoires indépendants (passage par les couches turbulentes de l'atmosphère), elle a donc, par le théorème de la limite centrale, une statistique gaussienne. De plus, comme on l'a vu au paragraphe précédent, le bruit sur la mesure du SH a une statistique gaussienne uniforme. On est bien dans le cas où l'estimateur LMMSE est équivalent au MMSE, on peut en outre montrer qu'alors, cette approche est équivalente à une approche de type Maximum *A Posteriori* (MAP) [VanTrees-l-68, Demoment-a-89, Conan-a-98]. Il y a donc équivalence entre la minimisation du critère défini par l'équation 3.12 et la maximisation de la loi *a posteriori* suivante (équation 3.13) :

$$p(\Phi|\mathbf{p}) = \frac{p(\mathbf{p}|\Phi)p(\Phi)}{p(\mathbf{p})} \quad (3.13)$$

où le premier terme $p(\mathbf{p}|\Phi)$ correspond à la probabilité d'avoir les mesures du SH \mathbf{p} connaissant la phase et le deuxième terme correspond à la loi *a priori* du front d'onde.

Notons que si dans nombre de cas, l'approche MAP consistant à considérer les inconnues comme une réalisation d'un processus probabiliste relève plus d'un artifice mathématique que d'une réalité physique, nous nous trouvons ici dans un cas physique où, effectivement, la phase est issue d'un processus aléatoire pour lequel on connaît explicitement la loi de probabilité (gaussienne avec une densité spectrale de puissance donnée par la loi de Kolmogorov ou de Von Karman). Maximiser cette loi de probabilité est équivalent à en minimiser son antilogarithme, soit

$$\epsilon = (\mathbf{p} - \mathbf{D}\hat{\Phi}_{corr}) \mathbf{C}_b^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{D}\hat{\Phi}_{corr})^T + \Phi \mathbf{C}_\Phi^{-1} \Phi^T \quad (3.14)$$

où \mathbf{C}_Φ représente la matrice de covariance de la phase (voir chapitre 1.6.1 pour sa définition dans le cas d'une décomposition sur la base des polynômes de Zernike) et \mathbf{C}_b la matrice de covariance du bruit (en général, on supposera que la statistique du bruit est identique et indépendante sur chaque mesure, c'est-à-dire sur chaque sous-pupille et on aura donc $\mathbf{C}_b = \sigma_b^2 \mathbf{I}$). Le premier terme de l'équation 3.14 constitue un terme d'attache aux données, alors que le deuxième est un terme de régularisation qui a pour but d'éviter l'amplification du bruit.

Minimiser l'équation 3.14 vis à vis de Φ conduit à la solution suivante pour \mathbf{W} (solution de Wiener) :

$$\hat{\Phi}_{corr} = \mathbf{W}\mathbf{p} \quad (3.15)$$

avec

$$\mathbf{W} = (\mathbf{D}\mathbf{C}_b^{-1}\mathbf{D}^T + \mathbf{C}_\Phi^{-1})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{C}_b^{-1} \quad (3.16)$$

Il faut noter que \mathbf{W} peut se récrire sous la forme

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_\Phi \mathbf{D}^T (\mathbf{D}\mathbf{C}_\Phi \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_b^{-1})^{-1} \quad (3.17)$$

Ici, la matrice \mathbf{D} contient un grand nombre de modes (idéalement un nombre infini). Le problème de l'amplification du bruit par les valeurs propres faibles (voire nulles) du système est résolu par l'introduction de la matrice de covariance de la phase \mathbf{C}_Φ , qui évite l'amplification du bruit. De plus \mathbf{C}_Φ donne une information sur l'énergie contenue dans chaque fréquence spatiale de la phase. Ainsi, le problème du repliement pourra être géré au mieux. Pour chaque fréquence mesurée, on introduit une connaissance *a priori* de la fraction d'énergie due au repliement d'une haute fréquence et la fraction

d'énergie due à la fréquence sensée être mesurée. Ce rapport (qui n'est bien sûr qu'une moyenne statistique) permet de répartir au mieux la mesure sur la basse fréquence et la fréquence repliée.

Enfin, il est important de remarquer que lorsque le rapport signal à bruit (RSB) tend vers l'infini, l'estimateur MAP ne tend pas vers l'estimateur MV présenté au paragraphe 3.7.2. On peut montrer [Conan-n-99] que, si le bruit tend vers zéro, maximiser la loi de probabilité *a posteriori* revient à maximiser la loi *a priori* des inconnues sous contrainte d'avoir une phase donnant exactement les pentes mesurées. C'est-à-dire que l'on va chercher parmi l'ensemble des phases donnant les mêmes mesures SH celle qui satisfait les *a priori*.

3.7.4 Erreur de reconstruction

Il est bien sur important de connaître, pour chacune des méthodes présentées ci-dessus, quelle va être l'erreur de reconstruction de la phase. C'est-à-dire qu'il faut être capable de calculer également l'écart quadratique moyen entre la phase reconstruite et la phase vraie:

$$\epsilon = \left\langle \left\| \hat{\Phi}_{corr} - \Phi \right\|^2 \right\rangle_{\Phi, bruit} \quad (3.18)$$

ϵ est donc la trace d'une matrice de covariance de l'erreur dont la diagonale nous donne l'information sur l'erreur commise pour chacun des modes du système. Dans la suite je ne m'intéresse qu'au problème de la propagation du bruit et je suppose les erreurs dues au repliement comme étant négligeable. Cela revient à considérer, par exemple, un analyseur composé d'un grand nombre de sous-pupille ($d \rightarrow 0$).

Cas de l'approche MC

Dans ce cas, l'équation 3.18 devient :

$$\epsilon_{mc} = \left\langle \left\| (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \mathbf{p} - \Phi \right\|^2 \right\rangle_{\Phi, bruit} \quad (3.19)$$

On néglige l'erreur de repliement, dans ce cas, la sous-modélisation de \mathbf{D} par \mathbf{D}' n'est plus nécessaire (voir paragraphe 3.7.2), on conserve donc une expression exacte du problème direct. La troncature par TSVD (elle toujours nécessaire pour éviter l'amplification du bruit par les faibles valeurs propres du système) se fait à partir d'une valeur propre notée λ_s . L'équation 3.19 devient alors

$$\begin{aligned} \epsilon_{mc} = & \\ & \text{trace} \left\{ \left(\left((\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \mathbf{I} \right) \Phi + (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \mathbf{b} \right) \left(\left((\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \mathbf{I} \right) \Phi + (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \mathbf{b} \right)^T \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

On a supposé ici que les statistiques du bruit et de la phase sont décorrélées. L'expression 3.20 peut se mettre sous la forme d'une somme de deux termes :

$$\begin{aligned} \epsilon_{mc} = & \text{trace} \left\{ (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \mathbf{C}_b \left((\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \right)^T \right\} \\ & + \text{trace} \left\{ \left((\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_\Phi \left((\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \mathbf{I} \right)^T \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le premier terme rend compte de la propagation du bruit à travers la matrice de reconstruction $(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^\dagger \mathbf{D}^T$. Seules les valeurs propres du système prises en compte dans la TSVD sont affectées par cette erreur.

Le deuxième terme rend compte de l'erreur due à la troncature de la TSVD. En effet, si l'on considère toutes les valeurs propres du système (l'inverse généralisé devient une inversion vraie dans l'équation 3.11) ce deuxième terme vaut 0. Dans le cas d'une troncature par TSVD, ce deuxième terme a pour valeur la variance turbulente des modes propres non pris en compte dans l'inversion.

On voit aisément apparaître ici le problème sous-jacent à la méthode MC, à savoir la compétition des deux termes d'erreur et le choix de la troncature qui va minimiser le terme d'erreur global.

Cas de l'approche LMMSE/MAP

Dans ce cas, on obtient, par définition même de la méthode, le reconstructeur donnant la meilleure estimation de $\hat{\Phi}_{corr}$. L'erreur de reconstruction s'écrit :

$$\epsilon_{map} = \text{trace} \left\{ (\mathbf{WD}\Phi + \mathbf{Wb} - \Phi)(\mathbf{WD}\Phi + \mathbf{Wb} - \Phi)^T \right\} \quad (3.22)$$

qui s'exprime sous la forme

$$\epsilon_{map} = \text{trace} \left\{ \mathbf{W} (\mathbf{DC}_\Phi \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_b) \mathbf{W}^T - \mathbf{WDC}_\Phi - \mathbf{C}_\Phi \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T + \mathbf{C}_\Phi \right\} \quad (3.23)$$

Soit en utilisant l'expression de \mathbf{W} obtenue en équation 3.17 et après simplification

$$\epsilon_{map} = \text{trace} \left\{ \mathbf{C}_\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{WD}) \right\} \quad (3.24)$$

Cette expression simplifiée de l'erreur de reconstruction en MAP peut sembler étrange au premier abord, car elle ne fait pas apparaître explicitement la matrice de covariance du bruit \mathbf{C}_b . En fait cette dernière est contenue dans l'expression même du reconstructeur \mathbf{W} .

Pour bien comprendre le comportement de l'estimateur MAP en fonction des conditions de RSB, on peut l'exprimer en développant l'expression de \mathbf{W} . Il vient alors,

$$\epsilon_{map} = \text{trace} \left\{ \mathbf{C}_\Phi \left(\mathbf{I} - (\mathbf{DC}_b^{-1} \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_\Phi^{-1})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{D} \right) \right\} \quad (3.25)$$

Si la statistique de bruit est la même sur chaque mesure et que ces statistiques sont décorrélées, $\mathbf{C}_b = \sigma_b^2 \mathbf{I}$ et l'équation 3.25 se simplifie de la façon suivante :

$$\epsilon_{map} = \text{trace} \left\{ \mathbf{C}_\Phi \left(\mathbf{I} - (\mathbf{DD}^T + \sigma_b^2 \mathbf{C}_\Phi^{-1})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{D} \right) \right\} \quad (3.26)$$

On peut alors montrer [Mugnier-p-97] que l'erreur sur les modes de bas ordres (ayant un fort RSB) est essentiellement dominée par le terme de propagation de bruit alors que les modes dus aux ordres où le RSB devient faible ont, eux, une erreur qui va tendre vers la variance turbulente.

3.7.5 Estimation optimale vis-à-vis de la commande du miroir

On a vu au paragraphe 3.7.3 comment estimer au mieux la phase de correction dans une base de mode donnée. Idéalement, cette base doit décrire la totalité de la phase turbulente et doit donc avoir un nombre de modes infini. Toutefois, dans le cas d'une correction par OA on veut, au bout du compte, piloter un miroir déformable et estimer au mieux, à partir des mesures de fronts d'onde, les tensions à appliquer aux actionneurs du miroir déformable. C'est-à-dire que l'on veut estimer la phase de correction dans une base particulière (base du miroir) ayant un nombre fini de modes. Une approche optimale de la commande spatiale pour une optique adaptative a été proposée par Wallner [Wallner-a-83]. Je vais ici retrouver les résultats présentés dans son article en utilisant la théorie des dérivées matricielles présentées en Annexe de l'article [Fusco-a-00b] (voir paragraphe 1.4 de la troisième partie).

La déformation à appliquer au miroir est donnée par $\hat{\Phi}_{corr}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}\mathbf{c}$ où \mathbf{M} est la matrice contenant la base du miroir (soit les N_{act} fonctions d'influences des actionneurs du miroir $\{m_j\}_{N_{act}}$). \mathbf{M} a pour dimensions $N_{act} \times N_{modes}$ (avec $N_{modes} \rightarrow \infty$. \mathbf{c} est la matrice contenant les tensions à appliquer à chaque actionneur ($\mathbf{c} = \{c_j\}_{N_{act}}$). Comme précédemment, \mathbf{D} , définie idéalement sur un nombre infini de modes et en pratique sur un nombre de modes bien plus grand que celui corrigé par le système, est la matrice d'interaction phase-ASO.

Considérons encore une fois l'estimateur MMSE qui minimise en moyenne l'écart quadratique entre les vraies phases et la phase de correction du miroir.

En supposant que $\mathbf{c} = \mathbf{W}\mathbf{p}$ il vient :

$$\epsilon = \left\langle \left\| \mathbf{M}\mathbf{W}\mathbf{p} - \Phi(\mathbf{r}) \right\|^2 \right\rangle \quad (3.27)$$

Une fois de plus on cherche à estimer les éléments de la matrice \mathbf{W} qui vont permettre d'estimer au mieux \mathbf{c} à partir des mesures de pentes du SH (\mathbf{p}), soit:

$$\epsilon = \left\langle \left\| \mathbf{M}\mathbf{WD}\Phi + \mathbf{MWb} - \Phi \right\|^2 \right\rangle \quad (3.28)$$

$$= \text{trace} \left\{ (\mathbf{M}\mathbf{WD} - \mathbf{I}) \mathbf{C}_\Phi (\mathbf{M}\mathbf{WD} - \mathbf{I})^T + \mathbf{M}\mathbf{WC}_b \mathbf{W}^T \mathbf{M}^T \right\} \quad (3.29)$$

$$= \text{trace} \left\{ \mathbf{M}\mathbf{WDC}_\Phi \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \mathbf{M}^T - 2\mathbf{C}_\Phi \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \mathbf{M}^T + \mathbf{M}\mathbf{WC}_b \mathbf{W}^T \mathbf{M}^T + \mathbf{C}_\Phi \right\} \quad (3.30)$$

\mathbf{c} et \mathbf{p} sont des vecteurs, \mathbf{W} est la matrice vis à vis de laquelle on veut optimiser. Soit, en utilisant le formalisme des dérivées matricielles présenté en Annexe de l'article [Fusco-a-00b] (voir paragraphe 1.4 de la troisième partie) :

$$\mathbf{M}^T \mathbf{MWDC}_\Phi \mathbf{D}^T - \mathbf{M}^T \mathbf{C}_\Phi \mathbf{D}^T + \mathbf{M}^T \mathbf{M}\mathbf{WC}_b = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

avec $\mathbf{0}$ la matrice nulle (c'est-à-dire la matrice dont tous les éléments sont nuls). Il vient alors :

$$\mathbf{W} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{C}_\Phi \mathbf{D}^T (\mathbf{DC}_\Phi \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_b)^{-1} \quad (3.32)$$

Ce qui correspond, d'un point de vue matriciel, à l'expression donnée par Wallner [Wallner-a-83]. À noter que l'on peut interpréter l'équation 3.32 comme la solution générale de l'estimation de la phase dans la base modale choisie (estimateur de Wiener présenté au paragraphe 3.7.3 : $\mathbf{C}_\Phi \mathbf{D}^T (\mathbf{DC}_\Phi \mathbf{D}^T + \mathbf{C}_b)^{-1}$) que l'on projette ensuite sur l'espace de reconstruction qui nous intéresse, c'est-à-dire les fonctions d'influence du miroir déformable (la matrice de projection étant alors $(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$).

3.7.6 Discussion

Il est intéressant de remarquer que malgré leur caractère optimal, les méthodes de reconstruction présentées précédemment (basées sur une approche probabiliste et introduisant une régularisation du problème par ajout d'*a priori*) ne sont jamais (du moins à ma connaissance) utilisées en pratique dans les systèmes d'OA en fonctionnement ou en cours de développement. Ceci pour deux raisons principales :

- comme on l'a dit, ces approches supposent la prise en compte d'un nombre infini de modes (en pratique ce nombre doit être bien supérieur à ceux corrigés par le système). Cela conduit à des matrices d'interactions de grandes tailles qu'il est difficile de gérer, mais surtout à des problèmes de précision dans l'estimation de \mathbf{D} (nécessite un très bon modèle du système)[Dessenne-t-98].
- Les développements effectués ici l'ont été pour le cas d'une OA fonctionnant en boucle ouverte, l'extension à la boucle fermée reste à étudier [Ellerbroek-a-94b].

Dans la pratique, pour des raisons de simplicité et de rapidité de calcul une approche TSVD est utilisée avec définition d'une matrice \mathbf{D}' , comme présenté au paragraphe 3.7.2. La matrice d'interaction \mathbf{D}' est calculée en utilisant directement la réponse du SH à la déformation du miroir. Cette approche plus simple (mais sous-optimale) de la reconstruction est suffisamment précise pour ne pas limiter les performances des systèmes actuels. Si l'approche rustique est suffisante dans le cadre de l'OA classique, on verra dans la suite du mémoire (troisième partie) que l'utilisation d'une approche optimale peut s'avérer nécessaire dans le cas de systèmes plus compliqués tels que l'OA multiconjuguée.

3.8 Conclusion

J'ai proposé, dans ce chapitre, une présentation rapide de l'optique adaptative. Certains points, qui serviront à la bonne compréhension de la suite du mémoire ont été plus particulièrement développés. Il s'agit de rappels concernant le fonctionnement et les caractéristiques de l'analyseur Shack-Hartmann et des méthodes de reconstruction de la phase turbulente à partir des données fournies par l'analyseur. A ce titre, l'accent a été mis sur la reconstruction optimale du front d'onde. Ceci a permis d'introduire, sur un cas relativement simple, les notions et les approches qui seront réutilisées dans la troisième partie du mémoire. J'ai en particulier proposé l'analyse la plus rigoureuse possible du problème de la reconstruction spatiale du front d'onde, en utilisant une approche de traitement du signal. J'ai présenté les différents problèmes pouvant être rencontrés (bruit de mesure, problème de repliement) et comment l'utilisation de diverses approches de la reconstruction (moindres carrés tronqués, MAP) permettaient de les résoudre.

Enfin, j'ai proposé une réécriture de l'approche, proposée par Wallner permettant une estimation optimale de la commande spatiale des actionneurs d'un système d'OA, en utilisant au mieux les données fournies par l'analyseur de front d'onde. Cette réécriture se base sur un formalisme lié à la théorie des dérivations matricielles et permet de redémontrer simplement le résultat présenté dans [Wallner-a-83].

Chapitre 4

Performances et limitations de l'optique adaptative

4.1 Introduction

Comme on vient de le voir au chapitre précédent, si l'OA est une technique puissante permettant de s'affranchir d'une grande partie du phénomène turbulent, la correction de l'OA ne demeure que partielle [Rousset-a-90, Rigaut-a-91, Rousset-p-91, Roggemann-a-91, Roggemann-a-92a, Conan-p-92a, Conan-p-93, Conan-t-94]. Elle est essentiellement soumise aux limitations dues au bruit de photons, à la vitesse du vent et au paramètre r_0 qui fixent le dimensionnement des différents composants du système (nombre d'actionneurs sur le miroir déformable, nombre de sous-pupilles, performance de la caméra de l'ASO, bande passante du système¹...) pour obtenir une correction donnée dans des conditions d'utilisation fixées (magnitude de la référence pour l'analyseur, r_0 ...).

Une autre limitation d'un système d'OA est liée au problème d'anisoplanétisme, c'est-à-dire à l'évolution de la dégradation du front d'onde en fonction de l'angle (voir paragraphe 1.5.3). Or, le front d'onde est analysé dans une direction (que l'on définira comme la direction de l'axe optique) et les déformées du miroir, optimisées pour cette direction, sont ensuite appliquées à tout le champ d'intérêt. Cela se traduit par une dégradation de la qualité de correction en fonction de l'angle.

Pour étudier les performances et les limitations d'un système d'optique adaptative, je vais, en premier lieu rappeler les différents types d'erreurs qui viennent dégrader les performances du système. Je m'intéresserai ensuite aux conséquences de ces erreurs, donc à la correction partielle de la turbulence par l'OA, sur l'imagerie. Je rappellerai quelques résultats importants sur la FEP et la FTO d'un système en correction partielle, puis je rappellerai la définition de trois critères (la variance résiduelle, le rapport de Strehl et l'énergie cohérente) permettant de caractériser et d'étudier les performances d'une OA.

Je proposerai ensuite une étude statistique de l'effet de la correction partielle sur les FEP courtes poses corrigées par OA. Ces travaux originaux comprennent à la fois un calcul analytique de la moyenne et de la variance des images courtes poses (CP) en fonction du degré de correction (D/r_0 , nombre de modes corrigés), mais aussi une étude de la corrélation angulaire des CP. Cette corrélation angulaire rend compte des dégradations introduites sur l'imagerie par le phénomène d'anisoplanétisme.

Enfin, plusieurs définitions d'un angle isoplanétique pour l'OA sont proposées, à partir des résultats obtenus sur les évolutions angulaires de la variance résiduelle mais aussi des FEP corrigées.

1. Ces spécifications sont données pour un cas nominal d'utilisation du système, si les conditions d'utilisation sont meilleures (magnitude de la référence plus faible par exemple), la limitation des performances de l'OA sera alors donnée par la sous modélisation du système, et non par le bruit de photons.

4.2 Les différentes sources d'erreurs

On définit la variance résiduelle de la phase après correction par optique adaptative (σ_{res}^2) par

$$\sigma_{res}^2 = \left\langle \frac{1}{S_{pup}} \int (\varphi_{turb}(\mathbf{r}) - \varphi_{corr}(\mathbf{r}))^2 d\mathbf{r} \right\rangle_\varphi \quad (4.1)$$

où $\langle . \rangle_\varphi$ représente une moyenne d'ensemble sur les réalisations de la phase². Cette variance résiduelle est la conséquence de différentes erreurs venant dégrader la correction. Ces erreurs sont présentées brièvement dans les paragraphes suivants. Pour une étude et un bilan plus complet des différents types d'erreurs on pourra se reporter à [Rousset-p-93a] par exemple. Par la suite les différentes erreurs seront supposées découpées les unes des autres. Ceci n'est qu'une approximation au premier ordre et des couplages peuvent intervenir entre les différents termes.

4.2.1 Erreur de reconstruction de la phase

L'erreur de reconstruction, notée $\sigma^2(rec)$, est due à la propagation de l'erreur de mesure de l'analyseur à travers la reconstruction. Elle a déjà été présentée aux paragraphes 3.4.2 et 3.7.4. Elle dépend essentiellement de la magnitude et de l'étendue angulaire de la référence servant à l'analyse, des caractéristiques de l'ASO et du miroir déformable (bruit de lecture, nombre de sous-pupilles, nombre d'actionneurs), de D/r_0 et de la grande échelle L_0 . Elle peut s'exprimer comme une somme de trois termes, un terme de propagation de bruit sur les modes (bas ordres) corrigés par le système, un terme de repliement dû à l'échantillonnage fini des mesures de l'ASO (voir paragraphe 3.7.2) et un terme de variance turbulente des modes (haut ordres) non corrigés par le système (erreur de sous modélisation donnée par Noll pour les polynômes de Zernike comme on l'a vu au chapitre 1.6.2), soit

$$\sigma^2(rec) = \sigma_{prop}^2 + \sigma_{rep}^2 + \sigma_{Noll}^2 \quad (4.2)$$

4.2.2 Erreur temporelle

L'erreur temporelle, notée $\sigma^2(\tau)$, est due au retard introduit par la boucle d'asservissement entre la mesure du front d'onde résiduel et la correction de celui-ci par l'OA. Ce retard est dû au temps d'exposition sur le SH. Il est aussi lié à des considérations technologiques portant à la fois sur le temps de lecture des données de l'analyseur, et sur le temps de calcul des corrections à appliquer au miroir à partir de ces mesures [Boyer-p-90, Demerle-p-93, Madec-l-99]. Schématiquement, on peut considérer que l'on applique la phase de correction de l'instant $t - \tau$ à la phase turbulente à l'instant t .

4.2.3 Erreur d'anisoplanétisme

Cette erreur $\sigma^2(\alpha)$ est due à l'écartement entre la source de référence servant à l'analyse de front d'onde et l'objet d'intérêt. Dans ce cas, on applique à la phase venant de l'objet une phase de correction calculée pour une phase légèrement différente. Soit

$$\varphi_{res}(\mathbf{r}, \alpha) = \varphi_{turb}(\mathbf{r}, \alpha) - \varphi_{corr}(\mathbf{r}, 0) \quad (4.3)$$

Dans le cadre d'une décomposition de la phase sur les polynômes de Zernike, on peut exprimer cette erreur, en considérant qu'il n'y a pas d'erreurs temporelles ni de bruit de mesure, en termes de

2. Idéalement, $\sigma_{res}^2 \rightarrow 0$ (consigne du système d'OA).

variance et de corrélation de chacun des coefficients de la décomposition [Chassat-t-92] soit :

$$\sigma^2(\alpha) = \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \langle a_i(0)^2 \rangle + 2 \sum_{i=2}^{i_0} (\langle a_i(0)^2 \rangle - \langle a_i(0)a_i(\alpha) \rangle) \quad (4.4)$$

où le premier terme représente l'erreur de sous-modélisation du système (on suppose une correction parfaite des i_0 premiers polynômes reconstruits) et le deuxième terme rend compte des décorrélations angulaires des polynômes de Zernike corrigés par le système. Ces décorrélations angulaires sont calculées en utilisant les formules théoriques présentées au paragraphe 1.8.2.

On verra, dans le paragraphe 4.7, que cette variance résiduelle "angulaire" va permettre de donner une (parmi d'autres) définition d'un domaine isoplanétique pour l'OA.

4.2.4 Erreur totale

L'erreur globale, en termes de variance pour un système d'OA est donc donnée par la somme des erreurs présentées aux paragraphes précédents. On peut ainsi l'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{res}^2 &= \underbrace{\sigma_{prop}^2 + \sigma_{rep}^2 + \sigma^2(\tau) + \sigma^2(\alpha)}_{\sigma_{\text{bas ordres}}^2} + \sigma_{Noll}^2 \\ &= \sigma_{\text{bas ordres}}^2 + \sigma_{Noll}^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

L'erreur $\sigma_{\text{bas ordres}}^2$ est liée à la correction partielle des bas ordres par le système (propagation du bruit lors de la reconstruction, erreur temporelle et erreur d'anisoplanétisme). L'erreur σ_{Noll}^2 est elle uniquement due à la sous-modélisation, la non prise en compte par le système des hauts ordres de la turbulence. Cette erreur est tout simplement donnée par la variance turbulente des modes non corrigés [Noll-a-76].

Cette répartition de la variance entre les bas ordres corrigés et les hauts ordres non corrigés par le système est importante pour la suite de ce chapitre. Elle permet notamment de comprendre la forme de la fonction de structure de la phase corrigée, et donc de la FTO corrigée, comme on le verra au paragraphe 4.3.2. De plus elle va permettre, en faisant l'hypothèse $\sigma_{Noll}^2 \gg \sigma_{\text{bas ordres}}^2$ (cas d'une source de référence brillante par exemple) de mener à leur terme les calculs analytiques présentés au paragraphe 4.5.

Mais avant tout ceci, intéressons-nous à l'influence du résidu de phase non corrigée (l'erreur globale σ_{res}^2) sur la formation d'images et donc en particulier sur la FEP (FTO) du système.

4.3 Imagerie en correction partielle

Dès 1986, François et Claude Roddier [Roddier-p-86] ont proposé une modélisation de la FEP d'un système d'OA par une tache d'Airy (résultat de la correction de la phase par le système), à laquelle il faut rajouter un halo provenant de la phase résiduelle non corrigée. Cette modélisation sera ensuite confirmée par les premières images réelles fournies par COME-ON [Rousset-a-90, Rigaut-a-91] et par simulation [Rousset-p-91].

Une étude complète de la correction partielle a été effectuée par J-M Conan dans sa thèse [Conan-t-94] avec notamment une étude approfondie des effets de la correction partielle sur l'imagerie longue pose (étude sur la FEP et sur la FTO, influences des différentes sources d'erreurs du système ...), la comparaison des performances de l'imagerie longue pose avec les techniques speckles (en terme de RSB) et une étude de l'apport, en terme de RSB, de l'optique adaptative aux techniques speckles.

Je me propose ici de compléter les travaux menés par Jean-Marc Conan et d'étudier le comportement statistiques des CP corrigées par OA. Au cours de cette étude statistique, présentée au

paragraphe 4.5, des formules analytiques simples sont proposées pour caractériser les fluctuations des CP (et en particulier de leur rapport de Strehl) en fonction du degré de correction par OA. Cette étude a donné lieu à un article [Fusco-a-00b] présenté au paragraphe 4.5.1; j'ai ensuite étendu les résultats de l'article au cas d'un OA utilisant une source de référence située hors axe (à une distance α de l'objet d'intérêt). Enfin, je me suis intéressé à la décorrélation angulaire des CP corrigées par OA.

Mais avant de présenter ces études originales et les résultats qui en découlent, quelques rappels sur les effets de la correction partielle sur les FEP (courte et longue poses), ainsi que sur les FTO qui leur sont associées, sont proposés dans les paragraphes 4.3.1 et 4.3.2. Quelques définitions de grandeurs utiles à la caractérisation de la qualité de correction d'une OA sont aussi présentées au paragraphe 4.4

4.3.1 Effets de la correction partielle sur la FEP

Comme on l'a vu tout au long de ce chapitre, un certain nombre d'erreurs viennent entacher la correction du front d'onde par l'OA. Idéalement, la FEP d'un système d'OA doit tendre vers la tache d'Airy (correction parfaite de la turbulence), mais en pratique une phase résiduelle est toujours présente, cette dernière entraînant une correction partielle par l'OA.

Pour une FEP courte pose partiellement corrigée, une grande partie du flux a été concentrée dans un unique pic central autour duquel gravitent des speckles résiduels, dus aux effets de turbulence non corrigés par le système (voir figure 4.1).

Lorsque l'on s'intéresse à la FEP longue pose du système, la somme des courtes poses partiellement corrigées va donner naissance à un pic cohérent (issu du pic central des CP) dont la largeur à mi hauteur est de l'ordre de λ/D , c'est-à-dire la largeur à mi hauteur de la tache d'Airy. En plus de ce pic cohérent, l'effet de moyenne sur les speckles résiduels présents dans les CP va produire un halo non corrigé (voir figure 4.1) qui va introduire un flou résiduel dans l'image finale.

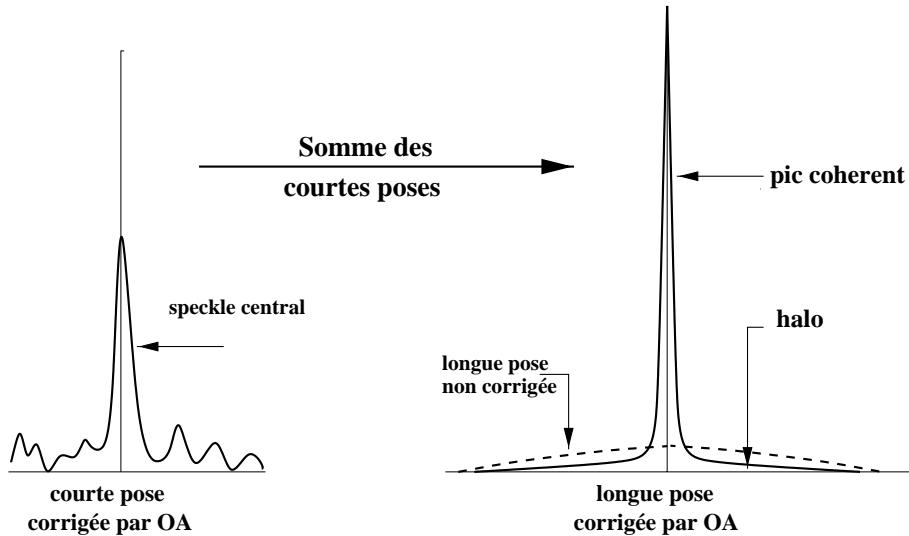


FIG. 4.1 – Coupe de FEP courte et longue poses, les deux étant corrigées par AO. On observe notamment sur la longue pose un pic cohérent (de largeur à mi-hauteur λ/D) et un halo non corrigé (d'une largeur de l'ordre de λ/r_0).

4.3.2 Effets de la correction partielle sur la FTO

La FTO partiellement corrigée peut s'exprimer (dans le cas d'un temps de pose infini) de la façon suivante (en supposant que la phase résiduelle suit une statistique gaussienne) :

$$FTO_{corr}(\mathbf{f}) = \frac{1}{S} \int \exp\left(-\frac{1}{2}D_{\varphi_{res}}(\mathbf{r}, \lambda\mathbf{f})\right) P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})d\mathbf{r} \quad (4.6)$$

En faisant une hypothèse de stationnarité de la phase résiduelle sur la pupille du télescope³ cette expression peut être approximée par [Conan-t-94]

$$FTO_{corr}(\mathbf{f}) = T(\mathbf{f}) \exp\left(-\frac{1}{2}D_{\varphi_{res}}(\lambda\mathbf{f})\right) \quad (4.7)$$

où $T(\mathbf{f})$ correspond à la fonction de transfert du télescope en l'absence de turbulence (voir paragraphe 2.3.1) et $D_{\varphi_{res}}(\lambda\mathbf{f})$ la fonction de structure de la phase résiduelle non corrigée par l'OA définie comme

$$D_{\varphi_{res}}(\lambda\mathbf{f}) = \frac{\int D_{\varphi_{res}}(\mathbf{r}, \lambda\mathbf{f}) P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{f})d\mathbf{r}} \quad (4.8)$$

On peut montrer que l'erreur commise par cette approximation est négligeable [Conan-t-94, Veran-t-97].

Un exemple de fonction de structure est tracé en figure 4.2. On peut remarquer sur cette figure

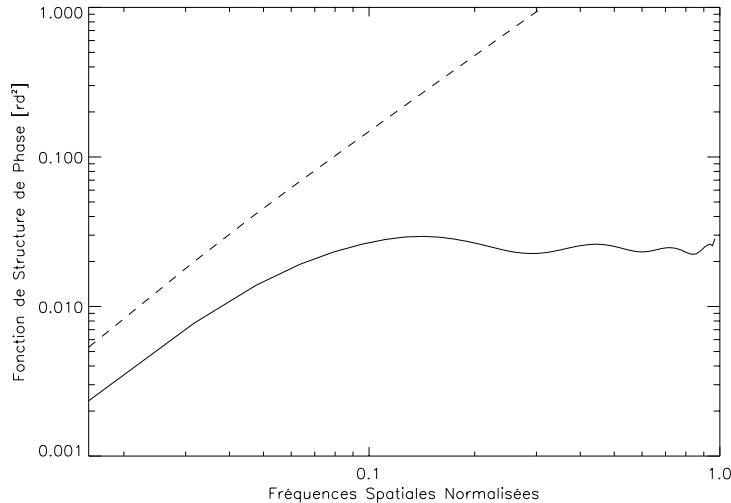


FIG. 4.2 – Fonction de structure de la phase résiduelle après correction des 36 premiers polynômes de Zernike (la fonction de structure de la phase non corrigée [tiret] est tracée pour comparaison). On remarque la loi de puissance en $(\lambda f)^{5/3}$ aux basses fréquences et la saturation à deux fois la variance résiduelle aux hautes fréquences (les variances sont normalisées à $D/r_0 = 1$).

que, pour les basses fréquences spatiales, $D_{\varphi_{res}}(\lambda\mathbf{f})$ suit une loi de puissance en $(\lambda f)^{5/3}$ similaire à la fonction de structure de la phase non corrigée, seul un facteur global d'atténuation rend compte de la correction plus ou moins importante par l'OA. Si on se réfère à l'équation 1.20 du chapitre 1.5 cela

3. Cela revient à approximer la moyenne d'une exponentielle par l'exponentielle de la moyenne. On sous-estime de ce fait légèrement la FTO.

revient à augmenter la valeur du r_0 , c'est-à-dire à définir un $r_{0,corr}$ qui sera plus ou moins important selon le degré de correction. Pour les hautes fréquences spatiales, la distance entre deux points de la pupille mis en regard par la fonction de structure est supérieure à la longueur de corrélation introduite par la correction de l'OA⁴. Ainsi, pour ces hautes fréquences spatiales, la fonction de structure sature à une valeur égale à 2 fois la variance résiduelle σ_{res}^2 [Conan-p-92a].

Tout ceci se traduit sur la fonction de transfert optique corrigée (voir figure 4.3) par une chute rapide aux basses fréquences (reliée au $r_{0,corr}$), puis un palier aux hautes fréquences ($\exp(-\sigma_{res}^2)$) qui sera plus ou moins haut selon le degré de correction par OA. On voit ici que l'OA permet de restituer les hautes fréquences **jusqu'à la fréquence de coupure du télescope**⁵. Ces dernières sont toutefois atténées vis à vis du cas idéal (fonction de transfert du télescope en l'absence d'atmosphère). L'atténuation est liée à la variance résiduelle par l'expression $\exp(-\sigma_{res}^2)$; plus l'OA sera performante, plus la variance résiduelle sera faible et plus le plateau hautes fréquences de la FTO sera élevée.

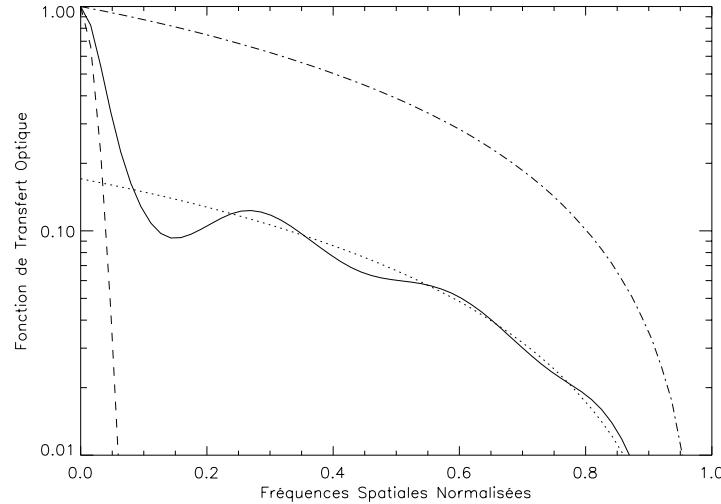


FIG. 4.3 – *FTO en correction partielle par OA [ligne continue] (36 polynômes de Zernikes sont corrigés parfaitement). On trace, pour comparaison, la FTO non corrigée [tiret], la FTO en l'absence de turbulence [point-tirets] et la FTO en l'absence de turbulence atténuee par $\exp(-\sigma_{res}^2)$ [pointillés].*

4.4 Caractérisation des performances d'une OA

4.4.1 La variance résiduelle

Comme on l'a vu au paragraphe 4.2, la variance résiduelle totale de la phase résiduelle est donnée par la somme de la variance de l'erreur sur les modes reconstruits par le système (bas ordres) et de la variance turbulente des modes non reconstruits (hauts ordres) (voir équation 4.5). La variance résiduelle de la phase est, par définition, un bon estimateur des performances du système (c'est la grandeur minimisée par l'OA), mais le but final de l'optique adaptative étant de fournir des images corrigées au plan focal de l'instrument, considérons à présent des estimateurs de la correction par OA portant sur la FEP (ou la FTO) du système.

4. En pratique, cette longueur de corrélation va être de l'ordre de la distance inter-actionneur sur le miroir déformable.

5. n'oubliions pas le filtrage par $T(\mathbf{f})$ qui annule toutes les fréquences supérieures à D/λ .

4.4.2 Le rapport de Strehl

Un estimateur très largement utilisé pour caractériser les performances d'une OA est le rapport de Strehl (SR). Ce dernier se définit comme le rapport de l'intensité maximale de la FEP corrigée sur l'intensité maximale de la tache de diffraction du télescope en l'absence d'aberrations (tache d'Airy), soit

$$SR = \frac{FEP(\alpha = 0)}{\text{Airy}(\alpha = 0)} \quad (4.9)$$

Le rapport de Strehl peut aussi s'exprimer comme le rapport des intégrales des FTO,

$$SR = \frac{\int FTO(f) df}{\int T(f) df} \quad (4.10)$$

Il caractérise donc essentiellement la concentration de l'énergie dans le pic cohérent de la FEP. C'est effectivement un bon estimateur dès que l'on s'intéresse aux problèmes de couplage d'énergie dans une fente (spectroscopie), un trou ou une fibre (interférométrie). Par contre pour l'imagerie à haute résolution, c'est-à-dire le problème de la restitution des hautes fréquences spatiales de l'image par le système d'OA, le rapport de Strehl n'est pas un estimateur très pertinent de la qualité de correction, on va lui préférer l'énergie cohérente.

4.4.3 L'énergie cohérente

L'énergie cohérente (E_c) est définie de la façon suivante: [Rousset-p-91].

$$E_c = \exp(-\sigma_{res}^2) \quad (4.11)$$

Ce paramètre est un estimateur de l'atténuation plus ou moins importante des hautes fréquences dans l'image corrigée (voir paragraphe 4.3.2). Il est donc pertinent du point de vue de l'imagerie à haute résolution, qui consiste justement en la meilleure restitution possible de ces hautes fréquences spatiales.

4.4.4 Lien entre le rapport de Strehl et l'énergie cohérente

Un lien fort existe entre le rapport de Strehl et l'énergie cohérente comme le montre le calcul proposé ci-dessous. Ce dernier, bien qu'approximatif a le mérite de faire clairement apparaître les similitudes et les différences entre les deux notions.

En décomposant la FEP corrigé par un système d'OA en deux parties, on obtient un pic cohérent I_{coh} et un halo non corrigé I_{halo} , comme présenté au paragraphe 4.3.1. Par définition, on a :

$$FEP(r) = I_{coh}(r) + I_{halo}(r) \quad (4.12)$$

En utilisant les largeurs à mi-hauteur et en égalisant les énergies, on a également :

$$\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 FEP(0) = \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 I_{coh}(0) + L_{halo}^2 I_{halo}(0) \quad (4.13)$$

où L_{halo} représente la largeur à mi-hauteur du halo. L'énergie cohérente et le rapport de Strehl se définissant comme :

$$E_c = \frac{I_{coh}(0)}{\text{Airy}(0)} \quad (4.14)$$

$$SR = \frac{I_{coh}(0) + I_{halo}(0)}{\text{Airy}(0)} = E_c + \frac{I_{halo}(0)}{\text{Airy}(0)} \quad (4.15)$$

On a donc, en utilisant l'équation 4.13, la relation suivante [Conan-n-00] :

$$SR = E_c + (1 - E_c) \frac{(\lambda/D)^2}{L_{halo}^2} \quad (4.16)$$

Dans tous les cas $SR \geq E_c$, mais on aura $SR \simeq E_c$ dans les cas suivants :

- si l'énergie cohérente est proche de 1, c'est-à-dire dans les cas de très bonnes corrections ($E_c \geq 0.3$)
- ou si la largeur du halo non corrigé est très importante, c'est-à-dire le cas d'une bonne correction d'un grand nombre de modes par l'OA en présence d'un D/r_0 grand (par exemple correction dans le visible sur un objet brillant avec un système à grand nombre d'actionneurs [Conan-p-00]).

4.5 Comportement statistique des courtes poses corrigées par OA

Je vais dans ce paragraphe m'intéresser à l'étude du comportement statistique des courtes poses corrigées par OA.

Dans toute la suite de ce chapitre, je vais considérer que la source servant à l'analyse de front d'onde définira l'axe optique.

J'étudie au paragraphe 4.5.1 les comportements statistiques des courtes poses dans cette direction (référence ASO et direction d'imagerie confondues). Au cours de cette étude je m'intéresse à plusieurs points de la FEP : je distingue le centre du plan focal (maximum du pic cohérent que l'on peut aussi assimiler au rapport de Strehl) et les points appartenant au halo, je parle alors de points dans le plan focal (mais toujours vis à vis de la FEP obtenue sur l'axe optique). Au paragraphe 4.5.2, j'étudie le comportement de courtes poses obtenues pour une étoile située à une distance angulaire α (étoile hors axe) de la source de référence. Enfin, je m'intéresse au paragraphe 4.5.3 aux corrélations entre les CP sur axe et hors axe.

4.5.1 Statistique des courtes poses sur l'axe optique

Ce paragraphe résume l'article “Statistical behaviour of AO corrected short exposure.” soumis à Applied Optics et présenté en fin de paragraphe.

Dans cet article, je m'intéresse aux fluctuations de l'intensité des courtes poses corrigées par OA, et en particulier aux fluctuations d'intensité au centre du plan focal, ce qui correspond à l'étude des fluctuations du rapport de Strehl instantané (noté ISR dans l'article).

L'OA est modélisée par un filtre passe haut parfait sur les polynômes de Zernike : les bas ordres sont parfaitement corrigés jusqu'à une certaine limite au delà de laquelle tous les autres ordres ne sont pas corrigés par le système.

Dans le cas des faibles fluctuations de phase (bonne correction et/ou faible D/r_0), on peut exprimer le rapport de Strehl instantané (RSI) en fonction uniquement de la “variance spatiale de la phase instantanée” sur la pupille définie comme :

$$\text{VAR}\Phi = \frac{1}{S} \int P(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (4.17)$$

soit

$$\text{RSI} = I_0 = \simeq 1 - \text{VAR}\Phi \quad (4.18)$$

On peut alors obtenir des expressions de la moyenne et de la variance de ce rapport de Strehl instantané ne dépendant que du degré de correction de l'OA (nombre de modes corrigés) et de la force de la turbulence (D/r_0):

$$\begin{aligned}\langle I_0 \rangle &\simeq 1 - \sigma_{\Phi}^2 \\ \sigma_{I_0}^2 &\simeq \sigma_{\text{VAR}\Phi}^2 \\ \sigma_{I_0}^2 &\simeq 1.04 \frac{\sigma_{\Phi}^4}{(n_0 + 1)^2}\end{aligned}\tag{4.19}$$

où I_0 représente l'intensité au plan focal sur l'axe optique, σ_{Φ}^2 la variance résiduelle de la phase (voir paragraphe 1.6.2), n_0 le dernier ordre radial corrigé et $\sigma_{\text{VAR}\Phi}^2$ la variance statistique de la grandeur défini en équation 4.18. $\langle I_0 \rangle$ représente le rapport de Strehl pour un temps de pose infini ($\langle \text{RSI} \rangle$) .

On peut aussi définir un taux de fluctuation du rapport de Strehl instantané comme le rapport de l'écart-type du Strehl sur sa moyenne, dans ce cas on a:

$$\frac{\sigma_{I_0}}{\langle I_0 \rangle} \simeq 1.02 \frac{\sigma_{\Phi}^2}{(n_0 + 1)}\tag{4.20}$$

Dans le cadre des fortes fluctuations de phase résiduelle, même si l'on corrige parfaitement un certain nombre de modes, la force de la turbulence est telle qu'il y a disparition du pic cohérent; dans ce cas

$$I_0 \neq 1 - \text{VAR}\Phi\tag{4.21}$$

Le développement proposé plus haut n'est plus valable. On utilise la théorie développée dans [Goodman-l-75] et [Dainty-l-75] sur les speckles lasers. On est dans un cas où les fluctuations de la FEP sont uniquement dues au bouillonnement speckle ou "boiling" (on a corrigé les bas ordres responsables des fluctuations de l'angle d'arrivée)[Roddier-l-81]. L'utilisation de la théorie des speckles lasers conduit alors au résultat bien connu :

$$\frac{\sigma_{I_0}}{\langle I_0 \rangle} \simeq 1\tag{4.22}$$

Ce résultat est non seulement valable au centre du plan focal (ISR) mais plus généralement pour tous les points de la FEP dans le plan focal (pic cohérent et halo).

Les résultats théoriques sont ensuite vérifiés à l'aide de simulations numériques, dans lesquelles la méthode de simulation des fronts d'onde proposée par N. Roddier est utilisée (voir paragraphe 1.7.1). Les deux régimes de faibles et de fortes fluctuations de la phase résiduelle sont bien retrouvés, et une très bonne adéquation entre la théorie et les simulations numériques est observée.

En utilisant ces simulations numériques, une extension de l'étude à tous les points du plan focal est proposée.

Enfin, quelques applications possibles de cette étude sont passées en revue, notamment la caractérisation des performances d'une OA et en particulier l'étude des erreurs commises sur l'estimation du rapport de Strehl longue pose, dans le cas où le temps de pose est fini. Dans ce cas, l'erreur d'estimation peut s'exprimer de la façon suivante:

$$\sigma_I(T) = 1.02 \sqrt{\frac{\tau}{T(n+1)}} \frac{\sigma_{\Phi}^2}{\sigma_{\Phi}^2 + \sigma_{\text{VAR}\Phi}^2}\tag{4.23}$$

où T représente le temps total d'intégration et τ le temps de corrélation des courtes poses (le rapport T/τ représente alors tout simplement le nombre d'événements indépendants). En première approximation on peut utiliser pour ce τ le temps de corrélation speckle défini par F. Roddier [Roddier-a-82b], toutefois un temps de corrélation des courtes poses corrigées par OA peut être déduit à partir des études menées par la suite (voir paragraphe 4.8) et pourra alors être utilisé dans l'équation 4.23.

Statistical behavior of adaptive optics corrected short-exposure

T. Fusco, J.-M. Conan

To be submitted to Applied Optics

The angular resolution of astronomical telescopes is severely limited by atmospheric turbulence. Adaptive optics (AO) compensates in real time for the optical effects of turbulence. This correction is however only partial, the images are still blurred by a residual point spread function (PSF). This paper studies the AO corrected short exposure PSF statistics. Asymptotic expressions are found for the mean and the standard deviation of the PSF value at the center of the field (instantaneous Strehl ratio) for either very small or very large residual phase variances. The intermediate regime and the off center statistics are studied by numerical simulations. These results are very important for the performance estimation of many AO applications (spectroscopy, fiber coupled interferometry ...).

1. Introduction

Atmospheric turbulence severely limits the angular resolution of ground-based telescopes. Adaptive Optics (AO)^{1,2} is a powerful technique to overcome this limitation and to reach the diffraction limit of large astronomical telescopes. The turbulent wavefront is measured by a wavefront sensor (WFS)³, these measurements are used to control a deformable mirror^{4,5} that performs a real time correction of the phase fluctuations. The limited flux available for the WFS sets a fundamental limitation to the AO correction quality. The corrected image is highly improved but the fine details are still blurred by a residual Point Spread Function (PSF)⁶.

The characterization of the residual PSF statistics is very important both in the case of short and long AO exposure in itself but also for *a posteriori* image processing, which generally makes use of a statistical knowledge of the object and the PSF^{7,8}. The PSF statistics are also important to evaluate the flux injected fluctuations in instruments placed behind the AO system: fiber-coupled interferometer⁹, spectroscope

This article is structured as follows. After a short presentation of the image degradation by atmospheric turbulence and its correction by adaptive optics in section 2, we present some analytical expressions of the statistical behavior of the corrected short exposure Strehl Ratio. We study both the case of weak residual phase amplitude ($\varphi(\mathbf{r}) \ll 1$) in section 3 A and the case of strong residual phase amplitude ($\varphi(\mathbf{r}) \gg 1$) in section 3 B. These expressions present an extension of the calculation presented in¹⁰ since they are valid whatever the D/r_0 values (strength of the turbulence with D the telescope diameter and r_0 the Fried diameter¹¹) and the correction degrees (number of corrected modes) and does not depend on an "ad hoc" calculated coherence areas in the corrected wavefront. Numerical simulations give a validation of these expressions in section 4. These simulations also allow us to extend the analytical study to the whole focal plane. Finally, some examples of applications are presented in section 5.

2. Image formation and adaptive optics correction

In the case of a ground based telescope, the short exposure image of an unresolved star, that is the instantaneous point spread function of the system (PSF) is given by the following relation:

$$I(\rho) = |FT[\Pi(\mathbf{r}) a(\mathbf{r}) \exp(i\varphi(\mathbf{r}))]|^2 \quad (1)$$

where $\Pi(\mathbf{r})$ is the pupil of the telescope, $a(\mathbf{r})\exp(i\varphi(\mathbf{r}))$ the complex amplitude in the pupil and FT the Fourier transform operator. We assume that atmospheric turbulence only induces phase fluctuations (i.e $a(\mathbf{r}) = \text{Cte}$)¹³.

In the case of AO correction, the residual phase which is not corrected by the system still evolves and still degrades the PSF. The temporal evolution of this residual phase induces a fluctuation of $I(\rho)$.

Let us define an Instantaneous Strehl Ratio (ISR) as the PSF value at the centre of the focal plane normalized by the value of the Airy pattern:

$$I_0 = \frac{I(0)}{\text{AIRY}(0)} \quad (2)$$

I_0 can be seen as a short exposure correction quality. It can be considered as a statistical process which can be completely characterized by its probability law. In this article we only focus on the two first moments of I_0 :

- the mean value $\langle I_0 \rangle = \langle I(0) \rangle / \text{AIRY}(0)$ which is the classical notion of Strehl Ratio (SR) defined on the long exposure PSF
- the variance $\sigma_{I_0}^2$, which characterizes the fluctuations around the mean value.

3. Instantaneous Strehl Ratio statistics

A. Case of weak residual phase amplitude

1. Expression of $\langle I_0 \rangle$ and σ_{I_0}

As defined in section 2, AO systems partially correct the turbulent phase. Of course, the residual uncorrected phase amplitude depends both on D/r_0 , that is the strength of the turbulence and on the AO correction degree, that is the efficiency of the AO system. But, if $\varphi(\mathbf{r}) \ll 1$, which is the case for typical D/r_0 (lesser than a few ten) and classical AO systems, then a second order expansion of the short exposure PSF (Equation 1) gives (second order expansion):

$$\begin{aligned} I(\rho) &\simeq \left| FT \left[\Pi(\mathbf{r}) \left(1 + i\varphi(\mathbf{r}) - \frac{\varphi(\mathbf{r})^2}{2} \right) \right] \right|^2 \\ I(\rho) &\simeq \left| FT[\Pi(\mathbf{r})] + i(FT[\Pi\varphi(\mathbf{r})]) - (FT[\Pi\varphi(\mathbf{r})^2]) / 2 \right|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

and, for $\rho = 0$, it comes (second order expansion):

$$\begin{aligned} I(0) &\simeq \left[\left(\int \Pi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)^2 + \left(\int \Pi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)^2 - \int \Pi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \int \Pi(\mathbf{r}) \varphi^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] \\ I(0) &\simeq \text{AIRY}(0) (1 - \text{VAR}(\Phi)) \end{aligned} \quad (4)$$

where AIRY is the aberration free PSF ($\text{AIRY}(0) = S^2$, and $\text{VAR}(\Phi) = \frac{1}{S} \int \Pi(\mathbf{r}) \Phi^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, Φ is the piston removed phase: $\Phi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) - \frac{1}{S} \int_{pupil} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ and S the pupil surface ($S = \int \Pi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$)). $\text{VAR}(\Phi)$ is not a variance in the statistics sense of the word, but it must be seen as a random variable giving the instantaneous spatial mean square value of the phase in the pupil.

The two first moments of $I(0)$ can be written as :

$$\begin{aligned} \langle I(0) \rangle &\simeq \text{AIRY}(0)(1 - \langle \text{VAR}(\Phi) \rangle) \quad (2^{nd} \text{ order expansion}) \\ \langle I(0)^2 \rangle &\simeq \text{AIRY}(0)^2(1 - 2\langle \text{VAR}(\Phi) \rangle + \langle \text{VAR}(\Phi)^2 \rangle) \quad (4^{th} \text{ order expansion}) \end{aligned} \quad (5)$$

and then

$$\begin{aligned} \langle I_0 \rangle &\simeq (1 - \langle \text{VAR}(\Phi) \rangle) \\ \langle I_0^2 \rangle &\simeq (1 - 2\langle \text{VAR}(\Phi) \rangle + \langle \text{VAR}(\Phi)^2 \rangle) \end{aligned} \quad (6)$$

which leads to the standard deviation of the ISR

$$\sigma_{I_0} \simeq \sigma_{\text{VAR}\Phi} \quad (4^{\text{th}} \text{ order expansion}) \quad (7)$$

Note that, to obtain Equations 6 and 7, a fourth order expansion of Equation 1 is actually necessary. However in our case, the high order terms cancel out and the previous results are still valids.

2. Expression of $\sigma_{\text{VAR}\Phi}$

Now let us analytically express $\sigma_{\text{VAR}\Phi}$ to obtain both $\langle I_0 \rangle$ and σ_{I_0} . This analytical calculation is based on a modal phase decomposition. With such a decomposition, a simple expression of $\sigma_{\text{VAR}\Phi}$ can be found which only depends on AO system parameters (number of corrected modes) and on the turbulence strength (D/r_0).

Let us expand the turbulent phase onto the Zernike polynomials basis :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=2}^{+\infty} a_i Z_i(\mathbf{r}) \quad (8)$$

where $\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{r})$ is the psiton removed turbulent phase before AO correction and $Z_i(\mathbf{r})$, the i^{th} Zernike polynomial defined as:

$$\begin{aligned} Z_i &= \sqrt{n+1} R_n^0(\mathbf{r}) & m = 0 \\ Z_{i,odd} &= \sqrt{n+1} R_n^m(\mathbf{r}) \sqrt{2} \cos(m\theta) & \left. \right\} m \neq 0 \\ Z_{i,even} &= \sqrt{n+1} R_n^m(\mathbf{r}) \sqrt{2} \sin(m\theta) & \left. \right\} m \neq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

with

$$R_n^m(\mathbf{r}) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2-s]! [(n-m)/2-s]!} \mathbf{r}^{n-2s} \quad (10)$$

The properties of the atmospheric turbulence in this particular basis are described by Noll¹². In a first approximation, the AO correction can be seen as a high-pass filter which corrects all the low order Zernike polynomials. With this assumption and for an AO correction up to the coefficient i_0 we have:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} a_i Z_i(\mathbf{r}) \quad (11)$$

Then, assuming a pupil with no central occultation, the instantaneous spatial variance of the phase, can be re-written as:

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\Phi) &= \frac{1}{S} \int \left(\sum_{i=i_0+1}^{+\infty} a_i Z_i(\mathbf{r}) \right) \left(\sum_{j=i_0+1}^{+\infty} a_j Z_j(\mathbf{r}) \right) d\mathbf{r} \\ &= \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \sum_{j=i_0}^{+\infty} a_i a_j \frac{1}{S} \int Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &\stackrel{\frac{1}{S} \int Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{ij} \text{ since } \{Z_i\} \text{ is an orthonormal basis}}{=} \\ \text{VAR}(\Phi) &= \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} a_i^2 \end{aligned} \quad (12)$$

where i_0 stands for the last corrected polynomial.

- mean calculation

$$\langle \text{VAR}(\Phi) \rangle = \sum_{i=i_0}^{+\infty} \langle a_i^2 \rangle = \sigma_\Phi^2 \quad (13)$$

where σ_Φ^2 stands for the residual variance of the phase. This variance can be expressed as a function of the last corrected radial order n_0 : $\sigma_\Phi^2 = 0.458(n_0 + 1)^{-\frac{5}{3}}(D/r_0)^{\frac{5}{3}}$ (see appendix A).

- Variance calculation:

We calculate $\langle \text{VAR}(\Phi)^2 \rangle$ assuming that inter-correlations between coefficients are negligible. This latest assumption is valid since AO correction removes the lowest Zernike polynomials which are the most inter-correlated modes.

$$\langle \text{VAR}(\Phi)^2 \rangle = \left\langle \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} a_i^2 a_j^2 \right\rangle \simeq \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \langle a_i^4 \rangle + \sum_{j=i_0+1}^{+\infty} \sum_{i \neq j}^{+\infty} \langle a_i^2 \rangle \langle a_j^2 \rangle$$

Let us consider the turbulent atmosphere as a sum of thin turbulent layers¹³. Each layer disturbs the incoming wavefront, then the phase on the telescope pupil can be seen as a sum of independent variables. By the central limit theorem, the probability law of the turbulent phase on the pupil is gaussian. Therefore, the probability distribution of the Zernike coefficients is also gaussian. Therefore, using properties of the second and fourth moments of such a statistics, it comes:

$$\langle \text{VAR}(\Phi)^2 \rangle \simeq 3 \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \sigma_{a_i}^4 + \sum_{j=i_0+1}^{+\infty} \sum_{i \neq j}^{+\infty} \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_j}^2 \quad (14)$$

and

$$\begin{aligned} \langle \text{VAR}(\Phi) \rangle^2 &= \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \sum_{j=i_0+1}^{+\infty} \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_j}^2 \\ &= \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \sigma_{a_i}^4 + \sum_{i \neq j}^{+\infty} \sum_{i \neq j}^{+\infty} \sigma_{a_i}^4 \end{aligned} \quad (15)$$

Equation 15 and 13 lead to

$$\sigma_{\text{VAR}\Phi}^2 \simeq 2 \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \sigma_{a_i}^4 \quad (16)$$

Because all the Zernike coefficients in a same radial order have the same variance $\sigma_{n_0}^2$ this equation can be re-written as

$$\sigma_{\text{VAR}\Phi}^2 \simeq 2 \sum_{m=n+1}^{+\infty} (m+1) \sigma_m^4 \quad (17)$$

This leads to (see appendix A for the complete calculation)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{VAR}\Phi}^2 &\simeq 0.218(n_0 + 1)^{-\frac{16}{3}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{10}{3}} \\ &\simeq 1.04 \frac{\sigma_\Phi^4}{(n_0 + 1)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

where σ_Φ^4 is given in Appendix A : $\sigma_\Phi^4 = 0.2098(n_0 + 1)^{-\frac{10}{3}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{10}{3}}$

We have now a simple and analytical expression of $\sigma_{\text{VAR}\Phi}^2$, which allows us to express the ISR statistics

3. Analytic expression of $\langle I_0 \rangle$ et $\sigma_{I_0}^2$

With the expression 18, we can deduce the two first moments of the random variable I_0 . Equation 6 and Appendix A give :

$$\begin{aligned}\langle I_0 \rangle &\simeq (1 - \sigma_\Phi^2) \\ &\simeq \left(1 - 0.458(n_0 + 1)^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}}\right)\end{aligned}\quad (19)$$

which is the classical approximation of the SR in the case of good AO corrections, that is for small residual phase amplitudes, and

$$\begin{aligned}\sigma_{I_0}^2 &\simeq \sigma_{\text{VAR}\Phi}^2 \\ &\simeq 1.04 \frac{\sigma_\Phi^4}{(n_0 + 1)^2}\end{aligned}\quad (20)$$

where n is the last corrected radial order. The residual variance σ_Φ^2 is given in appendix A.

Using Equations ??, 20 and the small phase amplitude assumption, the ISR fluctuations rate can be defined as

$$\frac{\sigma_{I_0}}{\langle I_0 \rangle} \simeq 1.02 \frac{\sigma_\Phi^2}{(n_0 + 1)} \quad (21)$$

B. The case of strong residual phase amplitude

In the case of strong D/r_0 and low order AO system the residual phase amplitude becomes important. Then, the fourth order expansion of the PSF (Section 3 A 1) is no longer valid. Another approach must be used. In this particular case, there is no coherent peak in the PSF any more, even if the first turbulent modes are corrected. The PSF statistics is therefore completely dominated by the well-known speckle boiling phenomena¹³ (correction of tip-tilt and then of the much important part of the angle of arrival). Such a “boiling” statistics has been already studied in the case of laser¹⁴ and stellar Speckle¹⁵. The main results are briefly summarized in this section.

We have seen in section 3 A 2 that the phase probability law is a gaussian. However, the image is the square modulus of the Fourier transform of the complex amplitude (see equation 1), and $\exp(i\varphi(r))$ is only sensitive to the phase modulo 2π . Therefore, we only consider the phase between $-\pi$ and π . For the modulo 2π phase, the probability law evolves with the phase amplitude. If this amplitude is small enough, the probability law is still a gaussian, but this probability law converge to a uniform law when the phase amplitude increases (see figure 1).

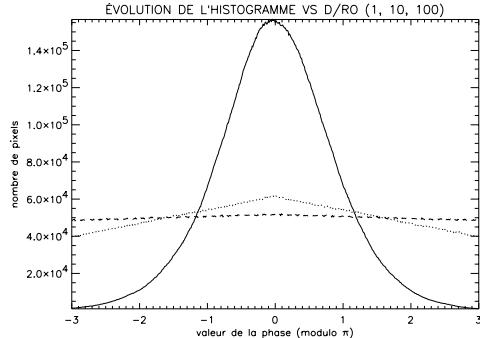


Fig. 1. Evolution of the probability law of one phase point between $-\pi$ et π for different D/r_0 : $D/r_0 = 1$ [solid line], $D/r_0 = 10$ [dotted line] and $D/r_0 = 100$ [dashed line]. The probability law goes from a gaussian (weak values of D/r_0) to an uniform law (strong values of D/r_0). Non corrected case

Therefore, the complex amplitude in a point M of the focal plane can be considered as a sum of random phasors¹⁶. Let $B(\rho)$ be the complex amplitude in M.

$$B(\rho) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N A_i(\rho) \quad (22)$$

where $A_i(\rho) = a \exp(-i\psi_i(\rho))$ stands for the phasor coming from the i^{th} point of the scatterer. By the central limit theorem, B has a gaussian probability law which can be written as:

$$P_B(\Re(B), \Im(B)) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp - \left[\frac{\Re(B)^2 + \Im(B)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (23)$$

where the root mean square of the Real and Imaginary part of B is the same (σ)¹⁶. Equation 23 can be re-written with the following change of variable:

$$\begin{aligned} I &= \Re(B)^2 + \Im(B)^2 \\ \Psi &= \arctan \left(\frac{\Im(B)}{\Re(B)} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

The probability law of I and Ψ is given by the transformation: $P_B(I, \Psi) = \frac{1}{2} P_B(\Re(B), \Im(B))$. Where $\frac{1}{2}$ stands for the Jacobian of the transformation. And after integration on $\Psi \in [-\pi, \pi]$ we obtain the intensity probability law:

$$P_B(I) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp \left(-\frac{I}{2\sigma^2} \right) \quad (25)$$

The two first moment of this probability law, $\langle I \rangle$ and $\langle I^2 \rangle$, can be calculated:

$$\langle I \rangle = \int I P_B(I) dI = 2\sigma^2 \quad (26)$$

this leads, replacing $2\sigma^2$ by $\langle I \rangle$ in Equation 25, to

$$P_B(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp \left(-\frac{I}{\langle I \rangle} \right) \quad (27)$$

and then :

$$\langle I^2 \rangle = \int I^2 P_B(I) dI = 2\langle I \rangle^2 \quad (28)$$

Finally the rate of intensity fluctuations is

$$\frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} = 1 \quad (29)$$

This behavior is similar to the well-known result in laser speckle: $\langle I \rangle = \sigma_I$. Note that the main result of this section, $\sigma_I/\langle I \rangle = 1$ is valid for each point of the focal plane and in particular for the intensity at the center of the focal plane ($I(0)$). Then for the normalized intensity I_0 we also obtain the relation:

$$\frac{\sigma_{I_0}}{\langle I_0 \rangle} = 1 \quad (30)$$

Using two different approaches, one for the weak phase amplitude case and the other (which is a well known study of the speckle boiling statistics) for the strong phase amplitude case, we have derived an analytical expression of the ISR behavior as a function of the strength of the turbulence and the number of corrected mode by the AO system.

4. Validation on simulations

In order to validate the theoretical expressions of $\langle I_0 \rangle$ and σ_{I_0} we have simulated AO corrected short exposures using the simulation method proposed by N. Roddier¹⁷. It is based on a random generation of Zernike polynomials following a Kolmogorov statistics. Only the first 861 coefficients are considered, but the error due to this limited number of polynomials is shown to be negligible¹⁸ for the D/r_0 considered here. Phase screens and their associated PSF are created with these coefficients. Phase screens of 128×128 pixels are simulated corresponding to a pupil diameter of $4m$. The advantage of such a simulation is that it easily allows a perfect correction of first i_0 Zernike polynomials.

In order to obtain accurate statistics, 1000 decorrelated phase screens and then short exposure AO corrected PSF's are simulated for each case.

Comparison between theoretical curves and simulations are presented in section 4 A.

A. Instantaneous Strehl Ratio fluctuation

In the following simulations, different correction levels are presented. It goes from 1 to 7 corrected radial orders. For each correction degree, a large scale of D/r_0 values is considered (from 0.1 to 100).

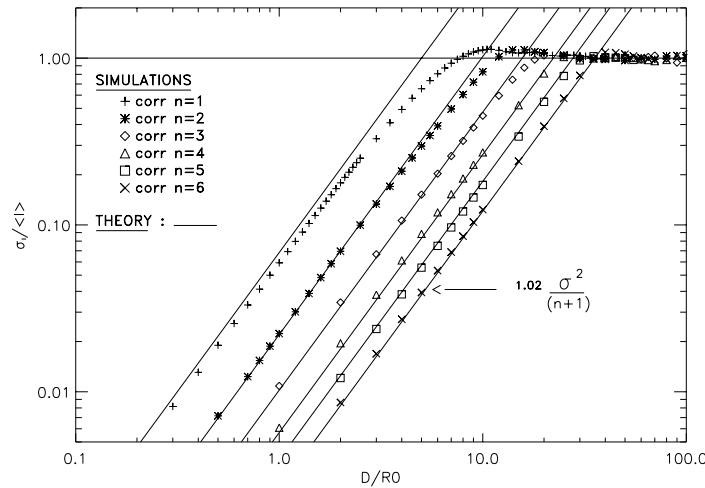


Fig. 2. Curves of intensity fluctuations $\sigma_{I_0} / \langle I_0 \rangle$ for different kind of corrections. The 2 behaviors presented above : a $(D/r_0)^{5/3}$ behavior in the case of weak phase amplitudes and saturation in the strong amplitude cases.

The two behaviors of the evolution of $\sigma_{I_0} / \langle I_0 \rangle$ versus D/r_0 , predicted by the study performed in Section 3, are well restored:

- a $(D/r_0)^{5/3}$ law for weak phase amplitudes ($\sigma_{I_0} / \langle I_0 \rangle = 1.02\sigma_\Phi^2 / (n + 1)$)
- a saturation ($\sigma_{I_0} / \langle I_0 \rangle = 1$) for strong phase amplitudes.

The figure 2 validates the theoretical expression of $\sigma_{I_0} / \langle I_0 \rangle$.

These expressions are given for small and large amplitude of $\varphi(\mathbf{r})$ ($\varphi(\mathbf{r}) \ll 1$ and $\varphi(\mathbf{r}) \gg 1$). Even for $n = 1$, the ad-equation between theory and simulations is quite good. In that case, some differences can be seen for D/r_0 values around 1. The Zernike coefficient correlations responsible of the angle of arrival are, in that case, significant and lead

to a transition rate: an over-estimation by the theory for small value of D/r_0 and an under estimation for strong D/r_0 . These can be seen as a competition between the residual statistics of the angle of arrival and the blurring¹³. As soon as n is greater than one, all the values of D/r_0 are well fitted by one of the two predicted behaviors.

Only using the knowledge of the correction level, we have developed a simple and analytical expression of the ISR fluctuations as a function of the turbulence strength (D/r_0).

B. Extension to the whole focal plane

This study only characterizes one particular point of the focal plane ($\rho = 0$). Let us now extend it, via numerical simulations, to the whole focal plane.

In order to study the evolution of the two first moments of the short exposure PSF as a function of the position in the focal plane, a perfect correction of first four radial orders (i.e the first sixteen Zernike polynomials) of the turbulent phase is considered. Nevertheless, the following results can be extended whatever the number of corrected radial orders. 1000 decorrelated short exposure (I) are simulated.

A x-axis cut of $\langle I \rangle$ and σ_I is plotted for $D/r_0 = 10$ in figure 3. For such a D/r_0 the long exposure SR is equal to 30%. This figure shows the different statistical behavior as a function of the focal plane position, i.e the non-stationarity of two first moments of $I(\rho)$. Figure 4 shows, for different D/r_0 , the evolution of the ISR fluctuation rate as a function of the focal plane position.

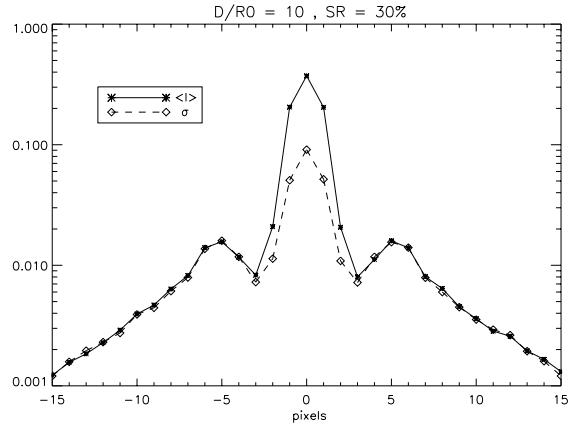


Fig. 3. x axis cut of a PSF mean and a PSF root mean square for a correction of 4 radial orders. $D/r_0 = 10$, SR = 30%.

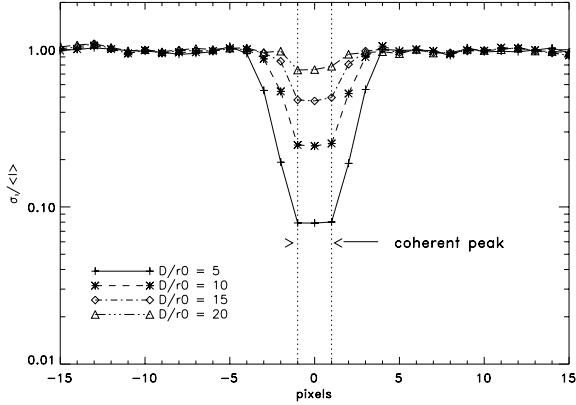


Fig. 4. x axis cut of $\sigma_I / \langle I \rangle$ for a correction of 4 radial orders and for different $D/r_0 = [5, 10, 15, 20]$, i.e. Strehl Ratio = [68%, 30%, 11%, 3%].

It is well-known that, in the case of an AO correction, the PSF can be decomposed in two different parts¹⁹:

- a coherent peak which represents the O.A. correction degree and gives the resolution limit. It can be seen as the peak of the diffraction limit pattern with a $\exp(-\sigma^2\phi)$ attenuation (i.e close to the SR case for good corrections, that is small residual phase variances).
- a halo pattern which is due to the residual non-corrected turbulence.

Figure 3 clearly shows that the statistical behavior of the short exposure PSF's is directly linked to these two specific regions. On one hand, the coherent peak statistics has the same evolution that the central pixel ($\sigma_I / \langle I \rangle = 1.02\sigma_{res}^2/(n+1)$) and on the other hand, the halo statistics follows a $\sigma_I / \langle I \rangle = 1$ law, which is the typical behavior of non-corrected short exposure PSF's.

5. AO performance characterization

J.-P. Véran has shown that it is possible to obtain an infinite exposure PSF from the wavefront sensor data²⁰. But, for various applications (spectroscopy for example), it is very important to estimate the error bars on the SR estimation for finite exposure time. In that case, the long exposure variance is directly linked to short exposure variance by the following relation¹⁸:

$$\sigma_I^2(T) = \frac{\tau}{T} \sigma_I^2(\tau) \quad (31)$$

where T is the integration time, τ the correlation time of the residual phase (typically lesser than 10 ms) and $\sigma_I^2(\tau)$ the mean root of the short exposure PSF. The ratio $\frac{\tau}{T}$ represents the number of decorrelated events.

To estimate the error on the SR due to finite exposure time, equations 31 and 20 give :

$$\sigma_I(T) = 1.02 \sqrt{\frac{\tau}{T(n+1)}} \sigma_{\Phi}^2 \quad (32)$$

Note that, in a first approximation, τ can be taken as the speckle life time defined by Roddier²¹. But it seems clear that τ depends not only on the atmospheric parameters (r_0 , wind speed) but also on the AO correction degrees.

Other applications may be considered such as:

- PSF *a priori* for post-processing.

The knowledge of the PSF statistics is important for deconvolution of AO corrected images. Generally, the PSF is not known accurately, which makes deconvolution difficult. Myopic deconvolution^{7,8} is a stochastic approach which allows to overcome the imprecise knowledge of the PSF and leads to accurate results. But this approach supposes the knowledge of the PSF statistics. In a first approximation, this statistics has been supposed to be stationary and uniform. Even if the results with such an approximation are good, this article shows that the PSF has a non-stationary statistics. This knowledge should be taken into account in future works.

- Light coupling into fiber for stellar interferometry

Another application takes place in the spatial filtering process with a single-mode fiber at the focus of a telescope. In a first approximation, assuming a perfect single-mode system, the estimator of coupling efficiency is close to the instantaneous Strehl ratio for weak phase fluctuations⁹, and then, these relative fluctuations are given by equation 20. Therefore, for a given system, several atmospheric conditions and several object magnitudes, a comparison between photon noise and Strehl ratio fluctuations can easily be made.

6. Conclusion

Adaptive optics systems are now currently used in order to correct the atmospheric turbulence effects. Then, the knowledge of the statistical behavior of corrected short exposure, and more particularly of Instantaneous Strehl Ratio (ISR), is important for many applications.

In this article, we have derived simple expressions of this ISR statistics, that is the center of the focal plane intensity, for the two first moments of their probability law. These analytical expressions only depends on the correction degrees of the AO systems (residual variance and last corrected radial order) and on the turbulence strength (D/r_0). Numerical simulations allow us to validate these expressions. With these simulations, we have extended the study of the ISR statistics to the whole focal plane. The statistics found for the center of the plane are still valid in the whole coherent peak. In the halo, the statistics are the same as in the case of a perfect scatterer $\sigma_I = \langle i \rangle$. This two behaviors came from the different nature of the light in these two case : a coherent light for the coherent peak and an incoherent light for the halo.

This statistical characterization of the AO corrected short exposure is important for various applications such as AO performance characterization, PSF *a priori* for post-processing, studies of light coupling into single-mode fibers.

The authors wish to thank V. Michau, G. Rousset, L. Mugnier, C. Ruilier, F. Cassaing, F. Malbet and J. Borgnino for fruitful discussions and helpful comments.

Appendix A: Calculation of σ_Φ^2 and $\sigma_{\text{VAR}\Phi}^2$ as a function of n

Noll¹² gives a theoretical expression of the variance for each radial order :

$$\sigma_n^2 = 2.2698(n+1) \frac{\Gamma(n - \frac{5}{6})}{[\Gamma(\frac{17}{6})]^2 \Gamma(n + \frac{23}{6})} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} \quad (\text{A1})$$

gvp using an asymptotic development of the gamma function (Stirling formula) we obtain an approximation of σ_n^2

$$\sigma_n^2 \simeq 0.7632(n+1)^{-\frac{11}{3}} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} \quad (\text{A2})$$

and

$$\sigma_n^4 \simeq 0.5824(n+1)^{-\frac{22}{3}} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{10}{3}} \quad (\text{A3})$$

The phase residual variance after a correction of n radial orders is given by

$$\sigma_{\Phi}^2 = \sum_{n'=n+1}^{+\infty} (n' + 1) \sigma_{n'}^2 \quad (\text{A4})$$

and

$$\sigma_{\text{VAR}\Phi}^2 = 2 \sum_{n'=n+1}^{+\infty} (n' + 1) \sigma_{n'}^4 \quad (\text{A5})$$

replacing $\sigma_{n'}^2$ by its asymptotic expression and the discrete sum by an integral, we obtain

$$\sigma_{\Phi}^2 \simeq 0.458 (n + 1)^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (\text{A6})$$

and

$$\sigma_{\text{VAR}\Phi}^2 = 0.218 (n + 1)^{-\frac{16}{3}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{10}{3}} \quad (\text{A7})$$

Note that, the number of the last corrected polynomial j_{max} is given by $j_{max} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, the equation A6 can therefore be rewritten, for large values of n , as:

$$\sigma_{\Phi}^2 \simeq 0.257 (j_{max})^{-\frac{5}{6}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (\text{A8})$$

This expression is very close of the empirical law given by Noll¹²:

$$\sigma_{\Phi, \text{Noll}}^2 \simeq 0.2944 (j_{max})^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (\text{A9})$$

The two formulas are plotted in figure 5 for comparison.

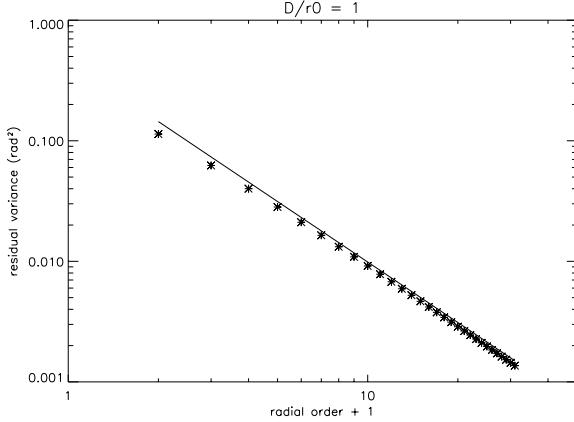


Fig. 5. Residual variance after a perfect correction of the n first radial orders. Noll expression (eq. A9) [stars] and asymptotic expression (eq A6) [solid line]

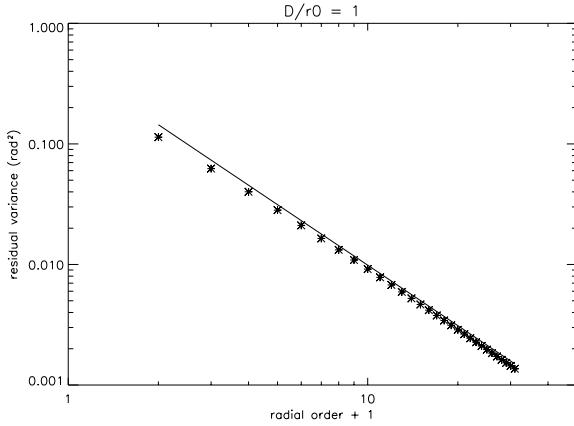


Fig. 5. Residual variance after a perfect correction of the n first radial orders. Noll expression (eq. A9) [stars] and asymptotic expression (eq A6) [solid line]

1. H. W. Babcock, "The possibility of compensating astronomical seeing," Pub. Astron. Soc. Pacific **65**, 229 (1953).
2. G. Rousset, J.-C. Fontanella, P. Kern, P. Gigan, F. Rigaut, P. Léna, C. Boyer, P. Jagourel, J.-P. Gaffard, and F. Merkle, "First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics," Astron. Astrophys. **230**, 29–32 (1990).
3. G. Rousset, "Wave-front sensors," *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed., (Cambridge University Press, 1999), Chap. 5, pp. 91–130. See Ref.¹⁹.
4. P.-Y. Madec, "Control techniques," *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed., (Cambridge University Press, 1999), Chap. 6, pp. 131–154. See Ref.¹⁹.
5. M. Séchaud, "Wave-front compensation devices," *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed., (Cambridge University Press, 1999), Chap. 4, pp. 57–90. See Ref.¹⁹.
6. J. M. Conan, P. Y. Madec, and G. Rousset, "Temporal power spectra of turbulent wavefronts," in *Real Time and Post Facto Solar Image Correction*, (Sunspot, New Mexico, United States of America, 1992).
7. J.-M. Conan, L. M. Mugnier, T. Fusco, V. Michau, and G. Rousset, "Myopic Deconvolution of Adaptive Optics Images using Object and Point Spread Function Power Spectra," Appl. Opt. **37**, 4614–4622 (1998).
8. T. Fusco, J.-P. Vérat, J.-M. Conan, and L. Mugnier, "Myopic deconvolution method for adaptive optics images of stellar fields," Astron. Astrophys. Suppl. Ser. **134**, 1–10 (1999).
9. C. Ruillier, "A study of degraded light coupling into single-mode fibers," in *Astronomical Interferometry*, R. D. Reasenberg, ed., **3350 vol. 1**, 319–329 (Kona, USA, 1998).
10. V. F. Canales and M. P. Cagigal, "Rician distribution to describe speckle statistics in adaptive optics," *ao* **38**, 766–771 (1999).
11. R. J. Noll, "Zernike polynomials and atmospheric turbulence," *J. Opt. Soc. Am.* **66**, 207–211 (1976).
12. F. Roddier, "The effects of atmospherical turbulence in optical astronomy," *Progress in Optics*, E. Wolf, ed., (North Holland, Amsterdam, 1981), Vol. XIX, pp. 281–376.
13. J.-M. Conan, "Etude de la correction partielle en optique adaptative," Ph.D. thesis, Université Paris XI Orsay, 1994.
14. J. W. Goodman, *Statistical Optics* (Wiley-Interscience, 1985).
15. N. Roddier, "Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials," *Opt. Eng.* **29**, 1174–1180 (1990).
16. F. Roddier and C. Roddier, "NOAO Infrared Adaptive Optics Program II: modeling atmospheric effects in adaptive optics systems for astronomical telescopes," in *Advanced Technology Optical Telescopes III*, L. D. Barr, ed., **628**, 298–304 (Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Washington, 1986).

4.5.2 Statistique des courtes poses hors axe

On peut se demander ce que deviennent les expressions de la statistique du rapport de Strehl instantané dans le cas d'une observation d'une étoile hors axe (par rapport à l'étoile guide de l'OA). Dans ce cas il faut calculer comme dans l'article précédent 4.5.1, les statistiques sur la variance de la phase en supposant ici que l'on a la relation suivante :

$$\Phi(\mathbf{r}, \alpha) = \sum_{i=2}^{i_0} (a_{i,2} - a_{i,1}) Z_i(\mathbf{r}) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} a_{i,2} Z_i(\mathbf{r}) \quad (4.24)$$

où $a_{i,2}$ représente le coefficient du polynôme de Zernike numéro i dans la direction d'observation et $a_{i,1}$ dans la direction d'analyse. On suppose également que l'on corrige parfaitement sur axe les i_0 polynômes de Zernike (bruit de reconstruction négligeable et pas d'erreur temporelle). On peut alors calculer la variance spatiale de la phase corrigée sur la pupille en calculant respectivement la moyenne et le moment du second ordre de $\text{VAR}[\Phi(\mathbf{r}, \alpha)]$.

calcul de la moyenne

$$\text{VAR}[\Phi(\mathbf{r}, \alpha)] = \sum_{i=2}^{i_0} (a_{i,2} - a_{i,1})^2 + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} a_{i,2}^2. \quad (4.25)$$

On peut donc calculer la moyenne et la variance (au sens statistique du terme) de cette "variance spatiale instantanée" (voir équation 4.18) sur la pupille.

$$\langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r}, \alpha)] \rangle = 2 \sum_{i=2}^{i_0} (\sigma_{a_i}^2 - \langle a_{i,2} a_{i,1} \rangle) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sigma_{a_i}^2 \quad (4.26)$$

Posons $\langle a_{i,2} a_{i,1} \rangle = C_i(\alpha)$, on obtient :

$$\langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r}, \alpha)] \rangle = 2 \sum_{i=2}^{i_0} (\sigma_{a_i}^2 - C_i(\alpha)) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sigma_{a_i}^2 \quad (4.27)$$

On retrouve ici, et ce n'est pas une surprise, l'expression proposée par F. Chassat [Chassat-a-89, Chassat-t-92] pour rendre compte de l'évolution de la variance résiduelle en fonction de la séparation angulaire.

calcul de la variance

$$\begin{aligned} \left\langle (\text{VAR}[\Phi(\mathbf{r}, \alpha)])^2 \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=i_0+1}^{\infty} a_{i,2}^2 a_{j,2}^2 \right\rangle \\ &+ \left\langle \sum_{i=2}^{i_0} \sum_{j=2}^{i_0} (a_{i,2}^2 + a_{i,1}^2 - 2a_{i,2}a_{i,1}) (a_{j,2}^2 + a_{j,1}^2 - 2a_{j,2}a_{j,1}) \right\rangle \\ &+ 2 \left\langle \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} a_{i,2}^2 (a_{j,2}^2 + a_{j,1}^2 - 2a_{j,1}a_{j,2}) \right\rangle \\ &+ 2 \left\langle \sum_{j=i_0+1}^{\infty} \sum_{i=2}^{i_0} a_{i,2}^2 (a_{j,2}^2 + a_{j,1}^2 - 2a_{j,1}a_{j,2}) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.28)$$

Le premier terme de cette expression a déjà été calculé au chapitre 4.5.1, et est égal à

$$(1) = 3 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sigma_{a_i}^4 + \sum \sum_{i \neq j}^{\infty} \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_j}^2 \quad (4.29)$$

Le deuxième terme, quant à lui, s'écrit :

$$(2) = 2 \left(\sum_{i=2}^{i_0} \sum_{j=2}^{i_0} \langle a_{i,2}^2 a_{j,2}^2 \rangle + \langle a_{i,1}^2 a_{j,2}^2 \rangle - 4 \langle a_{j,2}^2 a_{i,1} a_{i,2} \rangle + 2 \langle a_{j,1} a_{j,2} a_{i,1} a_{i,2} \rangle \right) \quad (4.30)$$

En supposant que la statistique des coefficients de Zernike est gaussienne et que deux coefficients a_i et a_j sont indépendants si $i \neq j$ il vient⁶

$$\begin{aligned} (2) &= 6 \sum_{i=2}^{i_0} \sigma_{a_i}^4 + 4 \sum \sum_{i \neq j} \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_j}^2 + 2 \sum_{i=2}^{i_0} \sigma_{a_i}^2 + 4 \sum_{i=2}^{i_0} C_i^2(\alpha) - 24 \sum_{i=2}^{i_0} \sigma_{a_j}^2 C_i(\alpha) \\ &\quad - 8 \sum \sum_{i \neq j} \sigma_{a_i}^2 C_j(\alpha) + 4 \sum_{i=2}^{i_0} \sigma_{a_i}^4 + 8 \sum_{i=2}^{i_0} C_i^2(\alpha) + 4 \sum \sum_{i \neq j} C_i(\alpha) C_j(\alpha) \\ (2) &= 4 \left(3 \sum_{i=2}^{i_0} (\sigma_{a_i}^2 - C_i(\alpha))^2 + \sum \sum_{i \neq j} (\sigma_{a_i}^2 - C_i(\alpha)) (\sigma_{a_j}^2 - C_j(\alpha)) \right) \end{aligned}$$

enfin, les troisième et quatrième termes deviennent chacun :

$$(3, 4) = 4 \left(\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} \sigma_{a_i}^2 (\sigma_{a_j}^2 - C_j(\alpha)) \right)$$

En rassemblant ces quatre termes, et en soustrayant le carré de la moyenne $\langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r}, \alpha)] \rangle^2$ (voir équation 4.27), on obtient l'expression de la variance de cette "variance spatiale instantanée", soit :

$$\sigma_{\text{VAR}[\Phi(\mathbf{r}, \alpha)]}^2 = 2 \left(\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sigma_{a_i}^4 + 4 \sum_{i=2}^{i_0} (\sigma_{a_i}^2 - C_i(\alpha))^2 \right) \quad (4.31)$$

Si l'on se place dans l'hypothèse des faibles fluctuations de phase, on peut alors revenir (voir l'article présenté plus haut) à des considérations sur le rapport de Strehl instantané. La moyenne de ce dernier (RSI longue pose) est alors égale à :

$$\langle RSI \rangle \simeq 1 - \left(\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sigma_{a_i}^2 + 2 \sum_{i=2}^{i_0} (\sigma_{a_i}^2 - C_i(\alpha)) \right) \quad (4.32)$$

et sa variance égale à

$$\sigma_{RSI}^2 \simeq 2 \left(\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sigma_{a_i}^4 + 4 \sum_{i=2}^{i_0} (\sigma_{a_i}^2 - C_i(\alpha))^2 \right). \quad (4.33)$$

En résumé, plus l'on s'écarte de l'axe, plus le Strehl moyen sera faible et plus la variance autour de ce dernier sera importante (ce qui globalement est le résultat attendu, la qualité de correction chutant en fonction de l'augmentation de la distance angulaire entre la direction de la source de référence et la direction de l'objet d'intérêt).

6. J'utilise ici le "théorème des moments" concernant les variables gaussiennes jointes à valeur moyenne nulle (voir [Goodman-l-85] page 39): $\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \langle x_1 x_2 \rangle \langle x_3 x_4 \rangle + \langle x_1 x_3 \rangle \langle x_2 x_4 \rangle + \langle x_1 x_4 \rangle \langle x_2 x_3 \rangle$.

Comparaison entre la théorie et les simulations

Il s'agit à présent de valider, sur simulations, les expressions théoriques déterminées au paragraphe précédent, et notamment de vérifier la pertinence des diverses approximations effectuées pour mener les calculs analytiques à leur terme. Pour ce faire, on choisit un profil de turbulence composé de 2 couches pour faciliter les calculs. La complexité du profil n'a ici aucune importance, puisque l'on suppose qu'on le connaît parfaitement. Si toutefois cette connaissance était imparfaite, il a été montré au paragraphe 1.8.2 que l'emploi de couches équivalentes en lieu et place du vrai profil turbulent, permettait une très bonne précision sur le calcul des corrélations angulaires des coefficients des polynômes de Zernike. Les fronts d'onde pour chacune des couches turbulentes sont simulés par la méthode de N. Roddier (voir paragraphe 1.7.1) en utilisant 465 polynômes de Zernike.

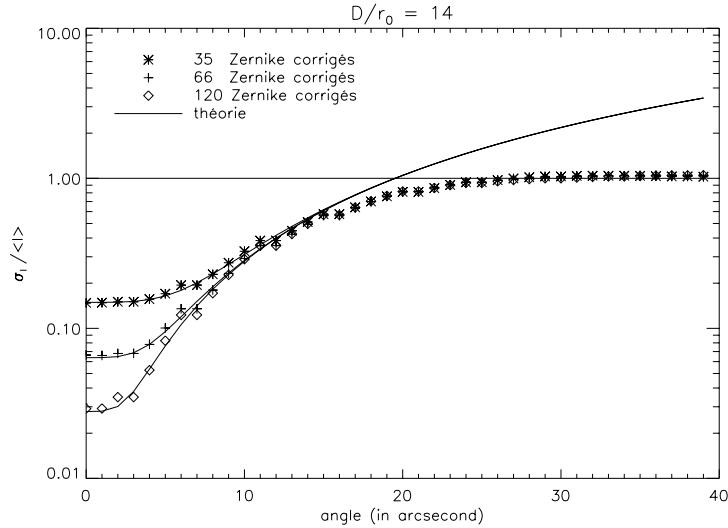


FIG. 4.4 – Comparaison du taux de fluctuation du rapport de Strehl instantané en fonction de l'angle entre la source de référence pour l'analyseur de front d'onde et l'objet observé. 3 corrections sont simulées pour le même $D/r_0 = 14$: 35 polynômes de Zernike [*], 66 polynômes de Zernike [+] et 120 polynômes de Zernike [◇]. Les courbes théoriques pour chaque cas sont tracées en trait continu.

On trace sur la figure 4.4 l'évolution du taux de fluctuation du rapport de Strehl instantané (comme défini dans l'article précédent) pour un D/r_0 de 14, et trois types de corrections: 35, 66 et 120 polynômes de Zernike corrigés. La figure 4.5, quant à elle, montre l'évolution de ce même taux de fluctuation pour une correction fixée (66 polynômes de Zernike) mais trois valeurs de D/r_0 : 5, 10 et 14.

Les deux figures 4.4 et 4.5 montrent la très bonne adéquation entre la théorie et les simulations pour de faibles séparations angulaires (et donc de faibles fluctuations de phases). Pour les séparations angulaires importantes, le taux de fluctuation du rapport de Strehl instantané tend vers 1, c'est-à-dire vers le cas des fortes fluctuations de phase. Ceci se conçoit aisément, sachant que plus on s'écarte de l'axe plus le degré de correction diminue et donc plus on se rapproche du cas non corrigé, c'est-à-dire du cas où l'on a une absence totale de pic cohérent.

4.5.3 Corrélations angulaires des courtes poses

Considérons à présent les corrélations angulaires des courtes poses corrigées par OA. On va essentiellement se concentrer sur la corrélation de l'intensité de la FEP sur l'axe optique, défini par l'objet

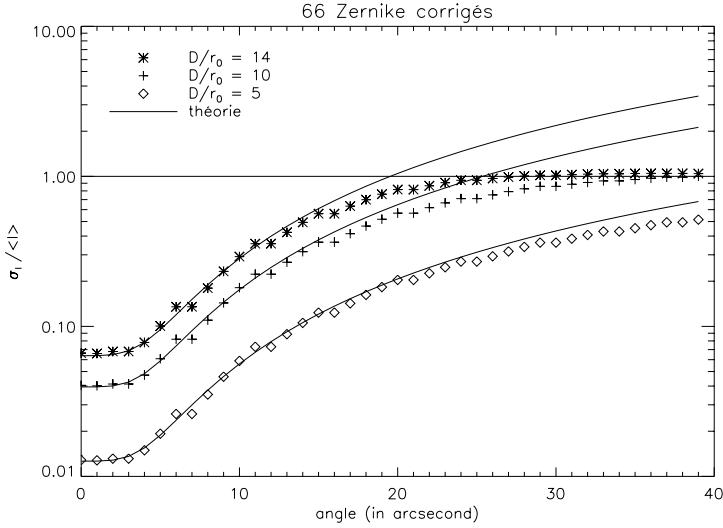


FIG. 4.5 – Comparaison du taux de fluctuation du rapport de Strehl instantané en fonction de l'angle entre la source de référence pour l'analyseur de front d'onde et l'objet observé. 3 D/r_0 sont considérées : [*] 14, [+] 10 et [◊] 5 et un seul type de correction (66 polynômes de Zernike corrigés) . Les courbes théoriques pour chaque cas sont tracées en trait continu.

observé ($I(0, \alpha) = I_0(\alpha)$), ce qui revient finalement à s'intéresser à la corrélation angulaire des rapports de Strehl instantanés. La corrélation sera définie de la manière suivante :

$$C(\alpha) = \frac{\langle I_0(0) I_0(\alpha) \rangle - \langle I_0(0) \rangle \langle I_0(\alpha) \rangle}{\sqrt{\sigma_{I_0(0)}^2 \sigma_{I_0(\alpha)}^2}} \quad (4.34)$$

Cette définition est utilisée par F. Roddier pour le calcul de domaine isoplanétique dans le cadre des techniques speckles (non corrigées par OA), et pour des conditions de très forte turbulence [Roddier-a-82a]. En considérant que le phénomène dominant dans la statistique de la tache de speckle est le “bouillonnement speckle” (ou boiling)[Roddier-l-81], il montre qu'en première approximation⁷ la courbe des corrélations angulaires des FEPs suit une loi gaussienne (D/r_0 étant très grand, on suppose que la statistique de chaque point de la FEP dans le plan focal est identique). À partir de cette expression, il définit θ_{nc} comme l'angle où la chute de la courbe de corrélation est à une valeur de $1/e$, soit :

$$\theta_{nc} = 0.36 \frac{r_0}{\delta h} \quad (4.35)$$

avec

$$\delta h = \left(\frac{\int h^2 C_n dh}{\int C_n^2 dh} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.36)$$

Il faut noter que le calcul de F. Roddier se base sur l'étude de la corrélation angulaire de l'ensemble de la figure de speckle, et non simplement du centre de celle-ci. Toutefois, l'approximation de très forte turbulence introduit une indépendance de la statistique pour tous les pixels du plan focal, et

⁷. développement limité au premier ordre.

il y a donc équivalence (au bruit de convergence près dans les calculs numériques⁸) à considérer la corrélation de la FEP au centre du champ et la corrélation sur tous les pixels de la FEP. Bien entendu, dans le cas de la correction par OA et donc de l'apparition du pic cohérent, cette équivalence n'est plus vraie et on doit étudier séparément la statistique du pic cohérent et du halo non corrigé.

Je me propose donc ici d'étendre l'étude de la corrélation angulaire des courtes poses au cas d'une correction par OA. Pour effectuer cette étude, je me place encore une fois dans le cadre idéaliste d'une correction parfaite dans la direction d'analyse des i_0 premiers coefficients de Zernike, et dans le cas des faibles fluctuations de phase. La corrélation de l'intensité au centre du plan focal (équation 4.34) s'écrit alors:

$$\mathbf{C}(\alpha) = \frac{\langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},0)] \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)] \rangle - \langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},0)] \rangle \langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)] \rangle}{\sqrt{\sigma_{\text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},0)]}^2 \sigma_{\text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)]}^2}} \quad (4.37)$$

Il faut donc pouvoir exprimer $\langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r})] \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)] \rangle$. Soit :

$$\begin{aligned} \langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},0)] \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)] \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=i_0+1}^{\infty} a_{i,1}^2 \right) \left(\sum_{j=i_0+1}^{\infty} a_{j,2}^2 + \sum_{j=2}^{i_0} (a_{j,2} - a_{j,1})^2 \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=i_0+1}^{\infty} a_{i,1}^2 a_{j,2}^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} a_{i,1}^2 a_{j,2}^2 \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} a_{i,1}^2 a_{j,1}^2 \right\rangle - \left\langle 2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} a_{i,1}^2 a_{j,1} a_{j,2} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.38)$$

On a une somme de quatre termes à détailler. Comme au paragraphe 4.5.2, on va supposer que la statistique des coefficients de Zernike est gaussienne et que deux coefficients a_i et a_j sont indépendants si $i \neq j$, soit :

– 1^{er} terme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=i_0+1}^{\infty} \langle a_{i,1}^2 a_{j,2}^2 \rangle &= \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \langle a_{i,1}^2 \rangle \langle a_{i,2}^2 \rangle + 2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} C_i^2(\alpha) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{i \neq j}^{\infty} \langle a_{i,1}^2 \rangle \langle a_{j,2}^2 \rangle \\ &= \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sigma_{a_i}^4 + 2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} C_i^2(\alpha) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{i \neq j}^{\infty} \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_j}^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

– 2^{ème} + 3^{ème} termes :

$$2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} \langle a_{i,1}^2 a_{j,2}^2 \rangle = 2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_j}^2 \quad (4.40)$$

– 4^{ème} terme :

$$-2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} \langle a_{i,1}^2 a_{j,1} a_{j,2} \rangle = -2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} \sigma_{a_i}^2 C_j(\alpha) \quad (4.41)$$

8. En effet, considérer la somme de tous les pixels du plan focal au lieu d'un seul pixel augmente la convergence lors des calculs de moyenne.

Et donc,

$$\langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},0)] \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)] \rangle = \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (\sigma_{a_i}^4 + 2C_i^2(\alpha)) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{i \neq j} \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_j}^2 + 2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0+1} \sigma_{a_i}^2 (\sigma_{a_j}^2 - C_j(\alpha)) \quad (4.42)$$

On peut aussi calculer $\langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},0)] \rangle \langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)] \rangle$ qui est égal à :

$$\langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},0)] \rangle \langle \text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)] \rangle = \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=i_0+1}^{\infty} \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_j}^2 + 2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=2}^{i_0} \sigma_{a_i}^2 (\sigma_{a_j}^2 - C_j(\alpha)) \quad (4.43)$$

On obtient finalement l'expression de $\mathbf{C}(\alpha)$:

$$\mathbf{C}(\alpha) = \frac{2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (C_i(\alpha))^2}{\sqrt{\sigma_{\text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},0)]}^2 \sigma_{\text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)]}^2}} \quad (4.44)$$

$C_i(\alpha)$ étant proportionnel à $(D/r_0)^{5/3}$ de même que $\sigma_{\text{VAR}[\Phi(\mathbf{r},\alpha)]}^2$, le numérateur et le dénominateur ont tous les deux en facteur $\left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{10}{3}}$. Dans l'hypothèse des faibles perturbations, les résultats de la corrélation angulaire des courtes poses corrigées par OA sont donc indépendants de $\frac{D}{r_0}$ et ne dépendent donc que du nombre de modes corrigés par le système !

Comparaison entre théorie et simulation

Il s'agit une fois de plus de valider les expressions analytiques, et notamment des approximations effectuées par simulation numérique. Les paramètres des simulations numériques sont les mêmes que ceux du paragraphe 4.5.2. On trace en figure 4.6 les corrélations angulaires de l'intensité des courtes poses au centre du plan focal en fonction du degré de correction (35, 66 et 120 polynômes de Zernike corrigées parfaitement dans la direction d'analyse) pour un D/r_0 de 14^9 . Une très bonne adéquation entre la théorie et les simulations est obtenue.

On retrouve sur la figure 4.7 le résultat attendu, c'est-à-dire que, dans le cadre des faibles perturbations de phase, la corrélation angulaire des courtes poses au centre du champ ne dépend pas de D/r_0 au contraire de la théorie de Roddier pour les courtes poses non corrigées. La corrélation calculée ici dépend essentiellement du profil de turbulence considéré et du degré de correction (nombre de polynômes corrigés) de l'OA.

4.6 Évolution angulaire des longues poses corrigées par OA

Dans le cas de bonne correction par l'optique adaptative, le rapport de Strehl longue pose est égal à l'énergie cohérente, soit $SR \simeq \exp(-\sigma_{res}^2)$. Dans ce cas, l'évolution angulaire de cette expression est directement donnée par l'évolution angulaire de la variance résiduelle σ_{res}^2 . Une étude précise de cette évolution angulaire a déjà été proposée par F. Chassat [Chassat-a-89, Chassat-t-92], en utilisant l'équation 4.4 présentée au paragraphe 4.2 de ce mémoire. L'évolution de la correction ne dépend alors que du nombre de modes corrigées par l'OA et du profil de C_n^2 . Je reviendrai au paragraphe 4.7.2 sur

9. Même pour ces valeurs de D/r_0 la correction des premiers ordres radiaux permet de rester dans l'hypothèse des faibles perturbations de phase.

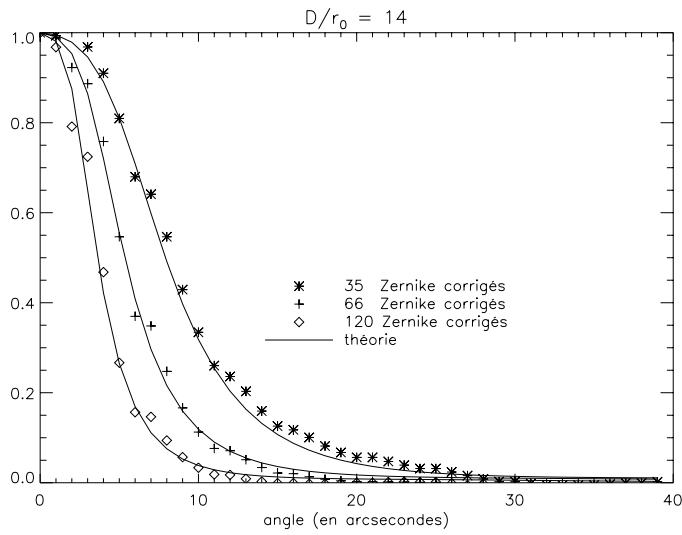


FIG. 4.6 – Comparaison des corrélations du rapport de Strehl instantané (définies en équation 4.34) en fonction de l'angle entre la source de référence pour l'analyseur de front d'onde et l'objet observé. 3 corrections sont simulées pour le même $D/r_0 = 14$: 35 polynômes de Zernike [*], 66 polynômes de Zernike [+] et 120 polynômes de Zernike [◇]. Les courbes théoriques pour chaque cas sont tracées en trait continu (les mêmes tirages aléatoires de turbulence ont été utilisés pour chaque cas de correction).

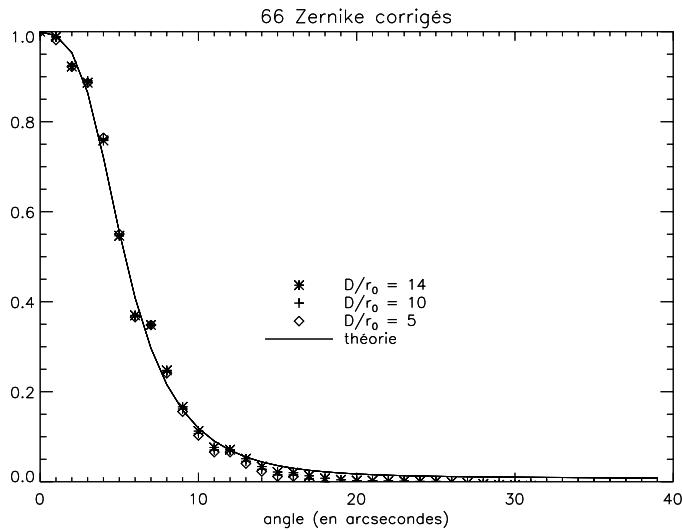


FIG. 4.7 – Comparaison des corrélations du rapport de Strehl instantané en fonction de l'angle entre la source de référence pour l'analyseur de front d'onde et l'objet observé. 3 D/r_0 sont considérés : [*] 14, [+] 10 et [◇] 5) et un seul type de correction (66 polynômes de Zernike corrigés) . Les courbes théoriques pour chaque cas sont tracées en trait continu (les mêmes tirages aléatoires de turbulence ont été utilisés pour chaque cas de correction).

l'utilisation de cette expression pour obtenir des domaines isoplanétiques sur des images longue poses corrigées par OA.

Dans le cadre du traitement d'images anisoplanétiques, présenté au chapitre 2 de la deuxième partie, une étude de l'évolution de la forme globale de la FEP (et non plus du seul rapport de Strehl) sera proposée. Cette étude statistique de l'évolution de la forme de la FEP en fonction de l'angle sera intégrée dans un algorithme de traitement d'image [Fusco-a-00a].

4.7 Définition de domaines isoplanétiques pour l'optique adaptative

Après avoir étudié les effets de la décorrélation angulaire sur les performances d'une optique adaptative, il est intéressant, à présent de définir un angle isoplanétique¹⁰, c'est-à-dire un angle à l'intérieur duquel on va pouvoir considérer que les effets des décorrélations angulaires de la phase sont négligeables. Le terme "négligeable" étant pour le moins qualitatif, il va falloir pour définir ce domaine isoplanétique définir un critère. Comme on l'a vu tout au long de ce chapitre, les performances d'un système d'OA peuvent être caractérisées par toute une série de grandeurs allant de la variance résiduelle de la phase, à la qualité de la FEP (rapport de Strehl) en passant par l'atténuation plus ou moins importante des hautes fréquences de la fonction de transfert optique (énergie cohérente). Il est clair qu'un critère défini sur une de ces grandeurs, par exemple la variance résiduelle, ne donnera pas le même angle isoplanétique (pour un système donné et des conditions de turbulence fixées) qu'un critère défini sur les corrélations des FEP courtes poses. Et même une fois choisi la grandeur d'intérêt, le critère va pouvoir évoluer en fonction des exigences de l'utilisateur.

Il est donc clair qu'il est impossible de définir un angle isoplanétique "absolu" pour l'OA¹¹, mais qu'une multitude d'angles sont envisageables en fonction de l'application considérée derrière l'OA (interférométrie, spectroscopie, focalisation d'un faisceau, traitement d'image ...) et des désiderata de l'utilisateur. Je vais donc ici, à titre d'exemple, donner quelques définitions possibles d'angles isoplanétiques. En particulier je m'intéresserai à la définition d'angle isoplanétique dans le cas de l'imagerie longue pose et de l'imagerie courte pose derrière l'OA.

D'autres définitions seront proposées dans la suite du mémoire aux paragraphes 2 de la deuxième partie (angle isoplanétique lié à la précision du traitement d'image derrière l'OA) et 1.3.5 de la troisième (angle isoplanétique lié au problème d'analyse pour une optique adaptative multiconjuguée).

4.7.1 La définition de Fried

La définition de l'angle isoplanétique la plus couramment utilisée pour l'OA a été proposée par D. Fried [Fried-a-82]. En supposant un système d'OA parfait (c'est-à-dire une analyse et une correction parfaite de la phase dans la direction d'analyse), il étudie la décroissance de la FTO due à la décorrélation angulaire des fronts d'onde en se plaçant dans le cas où le diamètre du télescope tend vers l'infini. En fixant un critère de décroissance de $1/e$ sur la FTO, ce qui correspond en termes de fonction de structure, et donc de variance de phase¹², à une augmentation de la variance de phase de 1 rad^2 , il obtient une expression relativement simple d'un angle isoplanétique pour l'OA. Cet angle, que l'on note par la suite θ_0 est uniquement fonction du profil de turbulence:

$$\theta_0 = \left[2.905 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos(\gamma)^{\frac{8}{3}} \int C_n^2(h) h^{\frac{5}{3}} dh \right]^{-\frac{3}{5}} \quad (4.45)$$

10. Je parlerai dans la suite d'angle isoplanétique, le domaine étant défini comme deux fois cet angle.

11. Ceci est d'ailleurs vrai quelle que soit la technique d'imagerie à haute résolution considérée.

12. Cela correspond aussi à une chute du rapport de Strehl jusqu'à une valeur minimum de 37%, en faisant l'hypothèse énergie cohérente $\simeq \text{SR}$.

Cet angle peut s'exprimer, en fonction de r_0 [Roddier-l-81] :

$$\theta_0 = 0.314 \frac{r_0}{\bar{h}} \quad (4.46)$$

avec

$$\bar{h} = \left[\frac{\int_0^\infty h^{\frac{5}{3}} C_n^2(h) dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right]^{\frac{3}{5}}$$

L'avantage de cette définition de l'angle isoplanétique est qu'il ne dépend que du profil de $C_n^2(h)$, elle est donc très utile pour caractériser et comparer différents sites entre eux [Eaton-a-85, Walters-a-97]. Néanmoins cette définition représente un cas limite, relativement pessimiste du fait de l'approximation du diamètre infini [Stone-a-94], et n'est pas représentative des performances des systèmes actuels [Chun-a-98]. Cette définition ne prend en compte aucune des caractéristiques du système (diamètre, correction partielle ...). Des définitions plus complexes mais plus réalistes en termes de résultats méritent donc d'être étudiées.

4.7.2 Un critère sur la variance résiduelle

Comme la définition de Fried, les critères portant sur la variance résiduelle définissent un domaine isoplanétique pour l'imagerie longue pose. L'intérêt d'un tel critère est de prendre en compte les caractéristiques d'un système donné. Il s'en suit une définition moins générale que celle de Fried, mais donnant des domaines isoplanétiques plus en rapport avec les performances du système.

On utilise ici l'équation 4.4 définie par F. Chassat et présentée au paragraphe 4.2 de ce mémoire. L'angle isoplanétique est alors donné par l'angle pour lequel cette variance résiduelle angulaire $\sigma^2(\alpha)$ dépasse un seuil fixé. Ce seuil peut être défini :

- de manière “absolue”, au sens où sa valeur ne va pas dépendre de la qualité de correction du système, soit α_s tel que $\sigma^2(\alpha_s) = \text{seuil } (\text{rad}^2)$. Cette définition absolue va servir, par exemple, au dimensionnement d'un système.
- de manière relative, c'est-à-dire qu'il va dépendre de la correction optimale (dans la direction d'analyse) du système. Par exemple, α_s tel que $\sigma^2(\alpha_s) = \sigma_0^2 + \text{seuil } (\text{rad}^2)$, ou encore $\sigma^2(\alpha_s) = \sigma_0^2 * \text{seuil } (\text{rad}^2)$. Cette définition relative, elle, est utilisée pour quantifier la dégradation de la correction d'un système existant en fonction du champ.

Il est clair que l'évolution de l'angle isoplanétique en fonction du degré de correction ne va pas être du tout le même en fonction du seuil choisi. Si l'on reprend les trois seuils définis plus haut (**a** seuil = 1rad², **b** seuil = 1rad² de plus que la variance résiduelle minimale, **c** seuil = 1.2 fois la variance minimale) on peut aisément voir que si l'on suppose une correction parfaite sur axe, le seuil **a** et le seuil **b** donneront le même angle isoplanétique, par contre le seuil **c** aura un domaine isoplanétique nul (seuil = 1.2 * 0 = 0 ne permet pas la moindre évolution de la variance). A l'inverse, dans le cas d'un système complètement non corrigé, le seuil **a** donnera un domaine isoplanétique nul (même sur axe le critère est dépassé), alors que les critères **b** et **c** donneront des angles isoplanétiques infinis (variance uniforme dans tout champ et égale à $1.03 (D/r_0)^{5/3}$).

On voit donc ici que l'évolution des angles isoplanétiques est complètement différente selon la définition du seuil, bien que le critère (équation 4.4) et le système sont identiques.

4.7.3 Un critère sur les corrélations angulaires des courtes poses

Dans le cadre de l'imagerie courte pose derrière l'optique adaptative on peut, en utilisant les développements théoriques du paragraphe 4.5.3, généraliser l'angle isoplanétique défini par F. Roddier

[Roddier-a-82a] et présenté en équation 4.35. On calcule alors une largeur équivalente sur les courbes théoriques de corrélations, cela nous permet d'obtenir une valeur d'angle isoplanétique ne dépendant (pour des valeurs raisonnables de D/r_0) que de la répartition relative du C_n^2 entre les couches turbulentes et du degré de correction du système d'OA (voir paragraphe 4.35). On peut ainsi modéliser les courbes de corrélations angulaires présentées en figures 4.6 et 4.7 par des fonctions analytiques simples (gaussiennes par exemple) pour trouver une expression de l'écart-type en fonction du nombre de polynômes de Zernike corrigés par le système et du profil relatif de turbulence. Cette étude est en cours et devrait donner un résultat du type :

$$\theta_{cp} = F(C_n^2(h)/\bar{C}_n^2, n_{corr}) \quad (4.47)$$

où n_{corr} représente le nombre d'ordres radiaux corrigé et \bar{C}_n^2 une moyenne du $C_n^2(h)$ sur h . On verra au chapitre 2 de la deuxième partie une application possible de ce domaine isoplanétique dans le cadre du traitement d'images anisoplanétiques courtes posées corrigées par OA.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté les différentes sources d'erreurs pouvant entacher les performances d'un système d'OA, j'ai présenté différents estimateurs permettant de caractériser ses performances. J'ai notamment étudié le lien entre le rapport de Strehl et l'énergie cohérente. Après avoir fait quelques rappels sur la notion de correction partielle en optique adaptative et rappelé la forme des FEP partiellement corrigées, j'ai étudié le comportement statistique des courtes poses corrigées et plus spécifiquement du rapport de Strehl instantané. Cette étude a donné lieu à un article soumis à Applied Optics. Il ressort de cet article des expressions simples, permettant de décrire l'évolution de la variance et de la moyenne du rapport de Strehl instantané en fonction de deux paramètres : D/r_0 , et le nombre de modes corrigés par le système. L'approche utilisée dans cet article a ensuite été étendue à l'étude de l'évolution angulaire des courtes poses. Toutes ces études ont permis de définir plusieurs angles isoplanétiques pour l'OA en fonction à la fois de la grandeur d'intérêt considérée (rapport de Strehl, énergie cohérente, variance résiduelle ...), et des critères choisis.

On peut facilement étendre l'étude effectuée sur les corrélations angulaires des courtes poses corrigées à celle des corrélations temporelles [Roddier-a-82b]. Il suffit de remplacer dans les équations précédentes θ par τ , α par t , h par v ¹³. On peut donc définir un temps de corrélation pour l'OA comme F . Roddier définit un temps de corrélation relatif aux techniques speckles. Ce temps de corrélation pour l'OA est indépendant des valeurs de D/r_0 mais ne dépend que du degré de correction. On peut s'en servir notamment dans l'équation 4.23 pour caractériser l'erreur commise sur l'estimation du rapport de Strehl pour une longue pose ayant un temps de pose fini (voir l'article [Fusco-a-00b] présenté au paragraphe 4.5.1).

A présent que l'on a caractérisé et étudié la correction partielle en optique adaptative et donc les effets des deux limitations fondamentales d'un système d'OA, à savoir le bruit de photons sur l'analyseur et le domaine isoplanétique restreint, on va dans la deuxième partie de ce mémoire, par le biais de traitement *a posteriori*, montrer que l'on peut s'affranchir, du moins pour une grande partie, de ces limitations. L'utilisation de méthodes de traitement *a posteriori* sophistiquées (déconvolution et traitement anisoplanétique) va nous permettre de restituer un objet le plus proche possible de l'objet vrai observé et d'éliminer la plus grande partie des dégradations dues à la FEP partiellement corrigée.

Toutefois, le problème de l'anisoplanétisme ne sera que partiellement résolu par le traitement d'image anisoplanétique. La troisième partie du mémoire traitera donc d'une modification possible d'un système d'OA classique pour permettre de corriger des effets de la turbulence, non plus uniquement

13. Il faut toutefois faire attention que dans le cas temporel, v est une grandeur vectorielle.

dans une direction d'analyse mais dans un grand champ de vue. Cette technique, appelée optique adaptative multiconjuguée, permettra d'étendre les domaines isoplanétiques à des champs plusieurs dizaines de fois plus grands que ceux obtenus pour une AO classique.

Deuxième partie

LE TRAITEMENT D'IMAGES CORRIGÉES PAR OPTIQUE ADAPTATIVE

Chapitre 1

La déconvolution

1.1 Introduction

Je m'intéresse, dans ce chapitre, au traitement d'images partiellement corrigées par OA, en me restreignant au cas de l'imagerie isoplanétaire. Soit, comme on l'a vu au paragraphe 4.2.3 de la partie I, dans le domaine où la correction peut être considérée comme identique en tout point du champ. La taille de ce domaine sera donnée par un des critères définis au chapitre 4.7 de la partie I.

Les travaux présentés dans ce chapitre trouvent leur origine dans la Thèse de Jean-Marc Conan [Conan-t-94]. Ils sont le fruit d'une collaboration entre Jean-Marc Conan, Laurent Mugnier et moi-même, comme le montrent les articles et actes de conférences que nous avons co-écrits sur le sujet [Conan-p-97, Conan-a-98, Mugnier-p-98, Conan-p-98, Fusco-a-99a, Conan-a-00, Conan-p-00, Mugnier-a-00b]. A ce titre, j'utiliserai souvent dans ce chapitre le pronom "nous". Toutefois si j'ai participé à certaines études (notamment pour la programmation, le test et la validation des concepts) mais sans en être à l'initiative, mon apport est plus important pour d'autres, notamment en ce qui concerne la déconvolution de champs stellaires (paragraphe 1.4.3), l'aspect myope (paragraphe 1.5), et le traitement des données réelles (paragraphe 1.7).

Après un bref rappel de la formation d'images partiellement corrigées par OA au paragraphe 1.2, une présentation de notre approche pour la déconvolution de ces images sera proposée au paragraphe 1.3. Je m'intéresserai alors au paragraphe 1.4 au cas de la déconvolution que j'appellerai "classique", c'est-à-dire à FEP parfaitement connue. J'insisterai plus particulièrement sur le problème de la régularisation pour éviter l'amplification du bruit dans le processus de déconvolution; à ce titre, plusieurs types de régularisation seront proposés en fonction de la nature de l'objet étudié (objet lisse, à bord franc, champ d'étoiles). Dans le paragraphe 1.5 une généralisation de la déconvolution est proposée dans le cas où la FEP n'est pas parfaitement connue. Dans cette déconvolution "myope" on recherche à la fois l'objet et la FEP. Enfin, tous les développements théoriques présentés sont appliqués aux paragraphes 1.5.1 et 1.7 à des données réelles obtenues sur différents télescopes et avec différents systèmes d'OA.

Il est important de noter que notre travail commun a permis de mettre au point un programme de déconvolution, appelé MISTRAL (Myopic Iterative and STep-preserving Restoration ALgorithm) qui regroupe une grande partie des développements théoriques présentés dans ce chapitre. Ce programme, écrit en IDL¹ est maintenant utilisé par de nombreux astronomes et fournit des résultats publiés ou soumis dans des revues et des conférences d'astronomie [Prangé-p-99, Marchis-p-99, Marchis-p-00a, Marchis-p-00b, Marchis-a-00a, Marchis-a-00b, Coustenis-p-00a, Coustenis-p-00b, Coustenis-a-00, Hestroffer-a-00].

1. IDL : Interactive Data Language.

1.2 Le problème direct : correction partielle par OA

Dans le domaine isoplanétique, on a vu au chapitre 2.4.2 de la partie I, que la relation reliant l'objet observé et l'image obtenue au foyer du télescope est une relation de convolution :

$$i(\mathbf{r}) = o(\mathbf{r}) \star h(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

On modélise, ici, numériquement la convolution en supposant que l'objet $o(\mathbf{r})$ a le même échantillonnage spatial que l'image (on verra, au paragraphe 1.4.3 que d'autres types de modélisation de l'objet peuvent être utilisées et peuvent permettre un gain en précision sur les résultats de la déconvolution). L'équation 1.1 devient dans le plan de Fourier

$$\tilde{i}(\mathbf{f}) = \tilde{o}(\mathbf{f}) \times \tilde{h}(\mathbf{f}) + \tilde{b}(\mathbf{f}) \quad (1.2)$$

avec $h(\mathbf{r})$ (resp. $\tilde{h}(\mathbf{f})$) la FEP (resp. FTO) du système (longue pose partiellement corrigée par OA) et $b(\mathbf{r})$ (resp. $\tilde{b}(\mathbf{f})$) un bruit additif² (essentiellement du bruit de photons et/ou du bruit de détecteur). Ces deux termes contribuent à la dégradation de l'image. La FEP partiellement corrigée entraîne un effet de flou résiduel, c'est-à-dire une perte en résolution angulaire sur l'objet observé (voir figure 1.1). Le bruit, lui, entraîne une perturbation aléatoire de l'intensité reçue par chaque pixel de l'image. Néanmoins, grâce à la correction, même partielle, du système d'OA, les fréquences spatiales sont préservées, bien qu'atténuées (et bruitées) jusqu'à la fréquence de coupure du télescope (voir paragraphe 4.3 de la première partie).

Une illustration de cette formation d'image derrière l'optique adaptative est proposée en figure 1.1. Cette image représente la simulation de l'observation d'un objet de type planétaire (astéroïde) (magnitude visuelle 11) par l'optique adaptative du VLT (NAOS) fonctionnant dans le visible. Dans ce cas, bien que la correction soit faible en terme de rapport de Strehl (uniquement 2.1 %) à cause de la valeur importante du D/r_0 , la bonne correction d'un grand nombre de modes due à la faible magnitude de la source de référence ($m_v = 11$) permet quand même d'obtenir un pic cohérent dans la FEP, avec toutefois un halo très étendu (voir figure 1.2). L'énergie cohérente est, dans ce cas, environ égale au rapport de Strehl (voir paragraphe 4.4.4 de la première partie) et les hautes fréquences sont restituées (mais très atténuées) jusqu'à D/λ . L'objet vrai $o(\mathbf{r})$, la FEP et l'image bruitée par du bruit de photons (10^8 photo-e⁻ dans l'image) et du bruit de détecteur (bruit blanc à moyenne nulle d'écart-type $\sigma_b = 31$ e⁻) sont présentés en figure 1.1.

Pour caractériser la qualité de restitution d'un objet, un écart quadratique moyen entre cet objet restitué et l'objet vrai est défini :

$$eqm = \frac{1}{\sqrt{N_{pix}}} \sqrt{\sum_{\mathbf{r}} (\hat{o}(\mathbf{r}) - o(\mathbf{r}))^2} \quad (1.3)$$

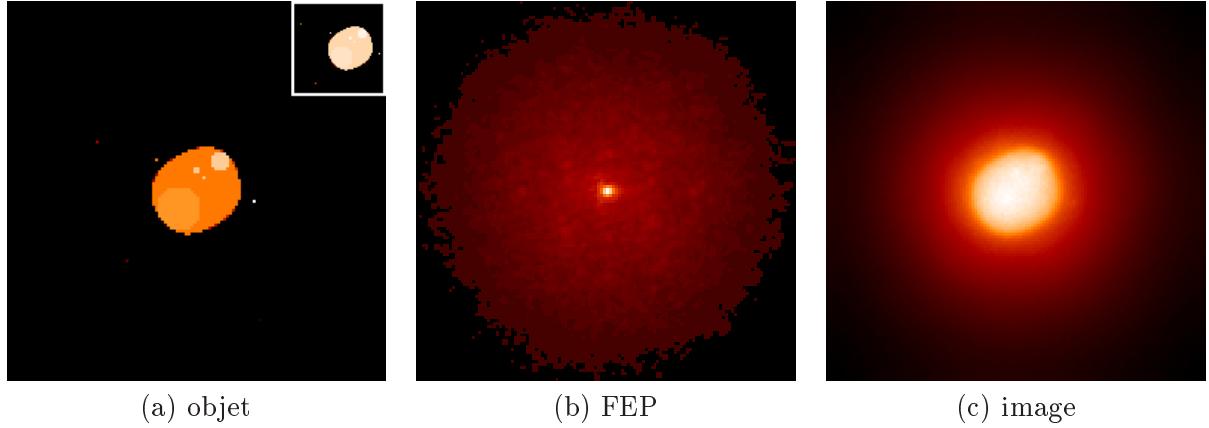
avec N_{pix} le nombre de pixels dans l'image. Pour l'image présenté en figure 1.1, l'eqm (on remplace $\hat{o}(\mathbf{r})$ par $i(\mathbf{r})$ dans l'équation 1.3) est de 49 700 photo-e⁻/pixel.

Il va donc falloir, par une méthode de déconvolution, s'affranchir des dégradations introduites par la FEP et par le bruit. C'est-à-dire restituer aussi fidèlement que possible les hautes fréquences pour obtenir la meilleure estimation possible de l'objet.

1.3 Le problème inverse : la déconvolution

Le problème de la déconvolution d'images corrigées par OA, est un problème inverse [Tikhonov-l-77] qui peut se résumer de la façon suivante: "Estimer au mieux l'objet d'intérêt à partir des images

2. Dans les articles en anglais, le bruit sera souvent noté $n(\mathbf{r})$ (pour noise) au lieu de $b(\mathbf{r})$.



(a) objet

(b) FEP

(c) image

FIG. 1.1 – (a) *Objet simulé (astéroïde)*. Le disque planétaire a une surface uniforme avec une zone de sur-intensité 10% plus brillante et 4 petites zones 30% plus brillantes. Quatre étoiles sont présentes dans le champ (voir représentation logarithmique en haut à droite de l’objet). La différence de magnitude entre la plus brillante et la plus faible est de 2.5 magnitudes. L’étoile la plus faible correspond à un flux détecté de $4 \cdot 10^4$ photons ce qui, dans l’image, correspond à un flux maximum de 155 photo-e⁻ par pixel. (b) *FEP simulée de NAOS* (cf. Figure 1.2). (c) *Image résultant de la convolution de l’objet par la FEP et rajout de bruit*. Le nombre de photons détectés dans l’image est de 10^8 photo-e⁻. Le bruit de détecteur à un écart-type de $31 e^-$. Le champ de vue est de 0.8 arcsec et l’image contient 128×128 pixels.

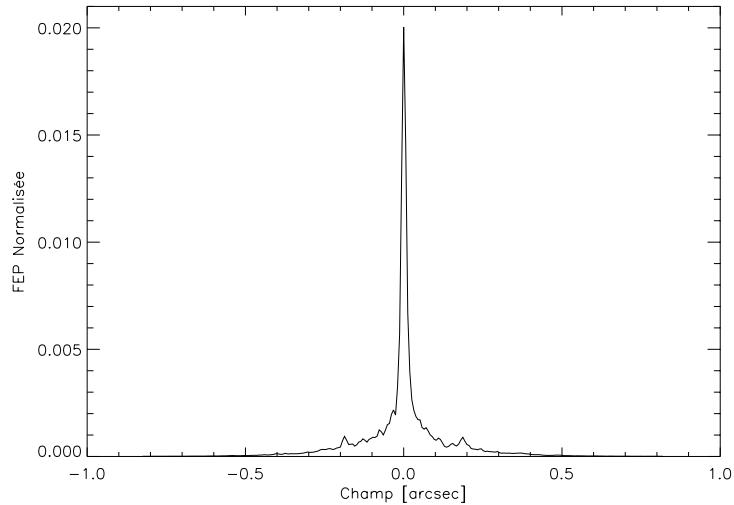


FIG. 1.2 – *Coupe de la FEP simulée à $0.5 \mu m$ dans un cas VLT-NAOS pour un seeing de 0.73 arcsec et une référence de magnitude 11. La FEP est normalisée à son rapport de Strehl, soit 0.021.*

partiellement corrigées par l'OA". Il s'agit donc de s'affranchir de la FEP du système dans l'équation 1.1 pour obtenir o (ou du moins la solution la plus proche possible de o). Or deux problèmes majeurs viennent rendre ce problème inverse difficile à résoudre, il s'agit :

- du bruit dans l'image qui va nécessiter l'utilisation d'approches régularisées de la déconvolution [Tikhonov-l-77, Titterington-a-85] (voir paragraphe 1.4.2);
- de la connaissance imparfaite de la FEP qui va nécessiter une restitution non seulement de l'objet mais aussi de la FEP [Ayers-a-88] (déconvolution myope, voir paragraphe 1.5).

Schématiquement le processus de déconvolution peut se résumer de la façon suivante (voir figure 1.3) : à partir de l'image observée et de connaissances *a priori* sur l'objet et la FEP (que l'on introduit en tant que régularisations), on cherche à estimer au mieux l'objet d'intérêt.

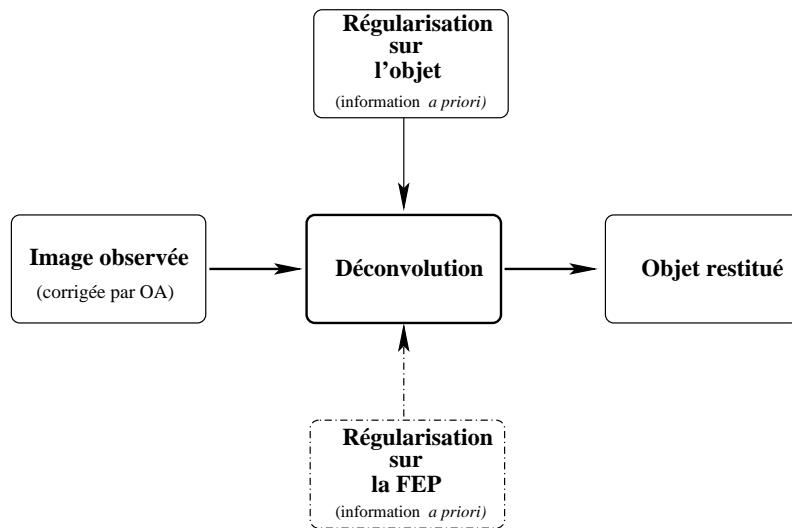


FIG. 1.3 – Représentation schématique du problème de la déconvolution.

La plupart des approches de déconvolution reposent sur la minimisation d'un critère (que celui ci soit explicitement donné ou qu'il soit implicite dans la méthode de minimisation). En conséquence, quand on s'intéresse au traitement d'un problème inverse tel que la déconvolution deux points essentiels sont à considérer. La première étape est la définition d'un critère à minimiser (méthodologie) le plus pertinent possible vis à vis du problème direct et de l'objectif visé. Une fois ce critère défini, la deuxième étape, purement numérique, consiste en la minimisation de ce critère (algorithmie) vis-à-vis des inconnues du problème (l'objet observé et/ou la FEP dans notre cas) pour obtenir la solution désirée.

1.3.1 Définition d'un critère

Le plus grand soin doit être apporté à la définition du critère, en effet, c'est sa pertinence qui va permettre (pour une image, c'est à dire un RSB donné) une plus ou moins grande précision sur

l'estimation de l'objet. Pour une même image, plusieurs critères peuvent amener à plusieurs solutions, parfois très différentes comme on le verra tout au long du chapitre.

Le critère repose essentiellement sur un terme d'attache aux données qui va assurer la fidélité de l'objet estimé vis à vis de l'image observée (une étude détaillée de ce terme est proposée au paragraphe 1.4.1). Deux types d'approches sont envisageables pour obtenir ce terme :

- une approche déterministe qui conduit à un terme de type moindres carrés
- une approche probabiliste qui elle, en tenant compte de la statistique des différents bruits présent dans l'image, conduit à un maximum de vraisemblance (MV).

Dans tous les cas, il est bien connu [Tikhonov-l-77, Root-a-87] que l'utilisation de ce seul terme conduit à une amplification du bruit et donc à une très mauvaise restitution de l'objet. Pour éviter cette amplification du bruit, il faut régulariser le problème [Titterington-a-85, Demoment-a-89]. Plusieurs types de régularisation, plus ou moins pertinents, peuvent être envisagés (on discutera des avantages et inconvénients de chacun tout au long de ce chapitre). On peut par exemple réduire l'espace des inconnues (par reparamétrisation, contrainte de support ou arrêt des itérations dans un algorithme itératif). Mais d'une manière générale, la régularisation peut être vue comme le rajout au terme d'attache aux données d'un deuxième terme qui va, au prix de l'introduction d'un biais dans la solution, éviter l'amplification du bruit (et donc diminuer la variance de l'erreur). Ceci peut se représenter schématiquement (voir figure 1.4) comme une "compétition" entre une variance d'erreur trop élevée et un biais trop important introduit par la régularisation. Le critère à minimiser peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_{total}(o(\mathbf{r})) = \mathcal{E}_b(o(\mathbf{r})) + \mu \mathcal{R}eg_o(o(\mathbf{r})) \quad (1.4)$$

où $\mathcal{E}_b(o(\mathbf{r}))$ est le terme d'attache aux données et $\mathcal{R}eg_o(o(\mathbf{r}))$ le terme de régularisation. Le paramètre

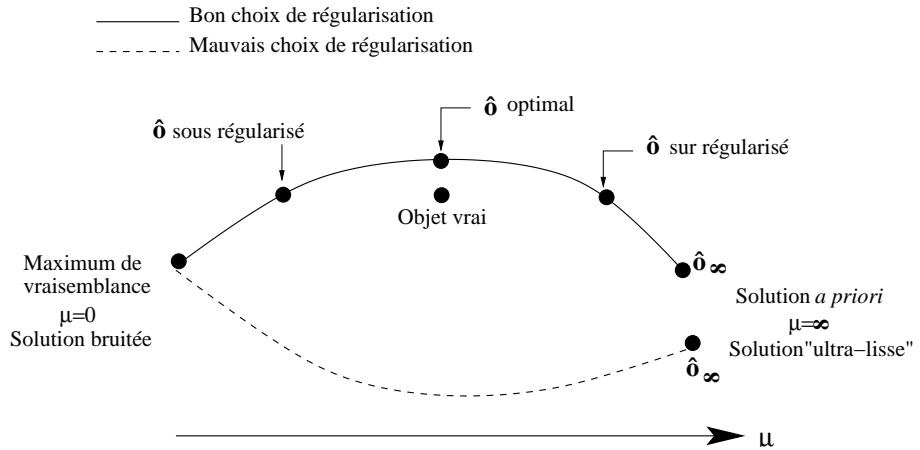


FIG. 1.4 – Représentation schématique de l'utilisation d'un critère régularisé.

μ aussi appelé hyperparamètre va fixer le poids du terme de régularisation vis à vis du terme d'attache aux données. On remarque sur la figure 1.4 que la qualité de la solution dépend non seulement du critère de régularisation choisi mais aussi de la valeur de l'hyperparamètre μ . Si $\mu \rightarrow 0$ dans l'équation 1.4, on est ramené au cas du maximum de vraisemblance où seul le terme d'attache aux données est pris en compte. Si $\mu \rightarrow \infty$, seul le terme de régularisation intervient, on obtient donc une solution ne dépendant que des *a priori* sur l'objet et ne prenant pas en compte l'image. Entre ces 2 solutions existe une infinité de possibilités donnant des solutions plus ou moins proches de l'objet vrai.

Il s'agit donc de construire au mieux le critère régularisé $\mathcal{E}_{total}(o(\mathbf{r}))$ en y incorporant toutes les informations *a priori* que l'on peut avoir sur le type d'objet observé afin de minimiser le biais introduit dans la solution par l'ajout de $\mathcal{R}eg_o(o(\mathbf{r}))$.

La encore, deux types d'approches sont classiquement utilisées pour introduire cette régularisation. Il s'agit soit :

- d'une approche déterministe dans laquelle $\mathcal{R}eg_o(o(\mathbf{r}))$ est une fonctionnelle de régularisation [Phillips-a-62, Hunt-a-73, Tikhonov-l-77]. Cette fonctionnelle correspond à l'introduction de contraintes, en particulier des contraintes de douceur, sur l'objet. Les régularisations les plus communément utilisées pour imposer cette douceur de la solution portent sur la norme du gradient (ou du laplacien) de l'objet, ce qui revient à pénaliser les fortes différences entre pixels voisins dans l'objet estimé;
- d'une approche probabiliste (approche Bayesienne) dans laquelle on introduit, sous forme de lois de probabilités (en choisissant à chaque fois la probabilité la moins informative possible), les *a priori* que l'on a sur l'objet [Titterington-a-85, Demoment-a-89].

On pourra trouver une étude des liens et des différences entre ces 2 approches dans [Demoment-a-89], et une classification des différentes méthodes de déconvolution existantes dans [Katsaggelos-l-91a].

Un des problèmes majeurs inhérent aux critères régularisés est donc l'estimation de la valeur de μ . On verra par la suite que dans certaines conditions, le choix de μ peut être introduit naturellement en fonction du RSB de l'image et d'étendue spatiale de l'objet observé. Toutefois, dans la plupart des cas, le choix de μ devra se faire de manière plus ou moins ad hoc.

Il faut noter que tous les problèmes inverses traités dans le mémoire (que ce soient les problèmes de reconstruction de front d'onde, la déconvolution ou le traitement d'image anisoplanétique) le sont dans le cadre d'une approche probabiliste. Le lecteur pourra donc trouver des liens forts entre la démarche (et donc les résultats) utilisée dans ce chapitre, avec celle utilisée dans le cadre de la reconstruction de front d'onde présentée au paragraphe 3.7 de la première partie ainsi que celle utilisée dans la troisième partie du mémoire pour le contrôle des miroirs d'une optique adaptative multiconjuguée.

1.3.2 Minimisation du critère

Après avoir défini un critère, il s'agit de le minimiser vis à vis de l'objet à restituer. Dans la plupart des cas, il n'existe pas de solution analytique (une exception notable étant le filtre de Wiener que l'on présentera au paragraphe 1.14) et un algorithme spécifique de minimisation itératif doit être utilisé. L'algorithme de minimisation que nous avons choisi dans le cadre de nos études est un algorithme de descente de type gradients conjugués³ [Press-l-88]. Nous avons en particulier utilisé un algorithme optimisé, développé par le Groupe Problème Inverse (GPI) du Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S)[GPI-97]. Comme tous les algorithmes de descente, les algorithmes de type gradients conjugués supposent que le critère à minimiser n'a qu'un seul minimum (voir figure 1.5). Si le critère ne satisfait pas cette hypothèse de minimum unique, et comporte plusieurs minima locaux, le résultat de la minimisation sera dépendant du point de départ (la minimisation s'arrêtant dans le premier minimum rencontré). Rien, alors, ne pourra garantir que l'on a atteint le minimum global du critère. Dans le cas de critères à minima locaux, des algorithmes de minimisation plus sophistiqués (du type recuit simulé [Geman-a-84]) permettent, dans tous les cas, d'atteindre le minimum global du critère, au prix, toutefois, d'un temps de calcul prohibitif dans la plupart des cas.

3. L'algorithme des gradients conjugués est un algorithme de descente du premier ordre, car faisant uniquement intervenir les gradients du critère. Notons qu'il existe des algorithmes de second ordre qui font aussi intervenir le Hessian (courbure locale du critère). Ces derniers bien adaptés pour des problèmes à faibles nombre d'inconnus, le sont beaucoup moins dans le cas de restaurations d'images de grandes tailles.

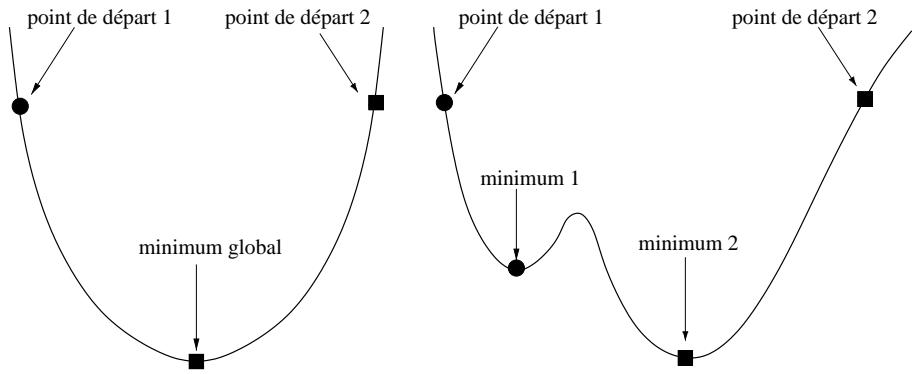


FIG. 1.5 – Exemple de critères à 1 seul et plusieurs minima.

Une condition pour que le critère ne comporte qu'un seul minimum est qu'il soit strictement convexe⁴ en chacun des paramètres à estimer (chaque pixel de l'objet dans notre cas). Cette condition assure alors que le critère global (sur tous les paramètres) est lui aussi strictement convexe et, donc n'a qu'un minimum global. Si cette condition est suffisante, elle n'est pas nécessaire, on peut, en effet, avoir des critères non-convexes avec un seul minimum global, ils sont cependant difficiles à caractériser et peuvent introduire des problèmes de convergence avec l'algorithme de gradients conjugués.

Dans la suite des études présentées dans cette partie du mémoire, nous essayerons, lors de la définition des critères, de garder à l'esprit l'intérêt d'avoir des critères strictement convexes. Nous tenterons de nous restreindre à ce type de critère, et si ce n'est pas le cas nous étudierons la sensibilité de la solution au point de départ de la minimisation et nous essaierons de nous ramener à des critères qui sont, au moins localement, strictement convexes.

1.4 La déconvolution “classique”

Plaçons nous dans un premier temps, dans le cas d'une déconvolution “classique”, c'est-à-dire un problème inverse où la FEP est supposée parfaitement connue (on verra au paragraphe 1.5 que ce n'est jamais le cas en pratique et qu'il faudra gérer cette méconnaissance plus ou moins importante de la FEP).

Considérons une approche probabiliste du problème. Cette approche, appelée maximum *a posteriori* (MAP) [Demoment-a-89], consiste à maximiser la loi de probabilité *a posteriori* de l'objet sachant l'image soit :

$$\hat{o}_{\text{map}}(\mathbf{r}) = \arg \max_o p(o(\mathbf{r})|i(\mathbf{r})) \quad (1.5)$$

En utilisant la règle de Bayes, on peut montrer que la loi de probabilité de l'objet connaissant l'image est proportionnelle au produit des lois de probabilités de l'image connaissant l'objet (c'est-à-dire la probabilité du bruit), et de l'objet lui même, (c'est-à-dire les connaissances *a priori* que l'on a sur ce dernier) :

$$p(o(\mathbf{r})|i(\mathbf{r})) = \frac{p(i(\mathbf{r})|o(\mathbf{r})) \times p(o(\mathbf{r}))}{p(i(\mathbf{r}))} \quad (1.6)$$

4. C'est-à-dire que la valeur de tout point du critère soit strictement inférieure à tous les points de toutes les cordes du critère.

Cette approche MAP assure que l'objet estimé sera le plus probable pour une image observée et compte tenu des connaissances *a priori* disponibles sur l'objet (on suppose alors que ce dernier fait partie d'une "classe d'objet", c'est-à-dire qu'il est une réalisation d'un processus stochastique dont la loi de probabilité est définie par les caractéristiques communes de la classe).

Maximiser l'expression définie en équation 1.6 vis-à-vis de $o(\mathbf{r})$ revient à maximiser son numérateur⁵. Cela revient à minimiser l'antilogarithme de la somme des lois de probabilités, soit à minimiser, en o , le critère suivant :

$$\hat{o}_{\text{map}}(\mathbf{r}) = \arg \min_o [J_b(o(\mathbf{r})) + J_o(o(\mathbf{r}))]. \quad (1.7)$$

avec $J_b(o(\mathbf{r})) = -\ln[p(i(\mathbf{r})|o(\mathbf{r}))]$ et $J_o(o(\mathbf{r})) = -\ln[p(o(\mathbf{r}))]$. Si aucun *a priori* sur l'objet n'est disponible, il faut alors choisir la probabilité la moins informative possible c'est-à-dire $p(o(\mathbf{r})) = 1$, soit $J_o(o(\mathbf{r})) = 0$. La maximisation de $p(i(\mathbf{r})|o(\mathbf{r}))$ est alors un maximum de vraisemblance (MV) sur les données. On remarque en outre, qu'avec ce type d'approche l'hyperparamètre μ fixant le poid de la régularisation vis à vis du terme d'attache aux données (voir équation 1.4) est contenu dans $J_o(o(\mathbf{r}))$.

On va, au paragraphe 1.4.1, s'intéresser aux différents types de bruits venant perturber l'image pour définir le meilleur terme d'attache aux données possible ($J_b(o(\mathbf{r}))$). Puis nous nous intéresserons au paragraphe 1.4.2, suivant les types d'objets observés, aux connaissances *a priori* que nous pourrons incorporer dans le critère pour régulariser le problème et obtenir la meilleure précision possible sur l'objet restitué.

1.4.1 Statistiques sur le bruit & estimateurs MV

Intéressons nous au premier terme de l'équation 1.7, c'est-à-dire au terme d'attache aux données, ou terme de vraisemblance. Les images obtenues sur un détecteur sont essentiellement perturbées par deux types de bruit (dont les réalisations sont indépendantes sur chaque pixels du détecteur). Ce sont :

- le bruit de détecteur, lié aux caractéristiques du CCD⁶ et suivant une statistique gaussienne blanche à moyenne nulle et de variance identique pour tous les pixels;
- le bruit de photons, lié au flux reçu de l'objet observé et suivant une statistique de Poisson.

Bruit blanc gaussien homogène & filtre inverse

Considérons, dans un premier temps, le cas d'un bruit blanc gaussien homogène, ce qui peut représenter le cas d'une image où le bruit dominant est le bruit de détecteur. Dans ce cas, le critère d'attache au donnée $J_b^{gauss}(o(\mathbf{r}))$ s'écrit :

$$J_b^{gauss}(o(\mathbf{r})) = \frac{1}{2\sigma_b^2} \sum_{\mathbf{r}} ((h * o)(\mathbf{r}) - i(\mathbf{r}))^2. \quad (1.8)$$

avec σ_b^2 la variance du bruit, supposée constante sur tous les pixels . Pour une image contenant N_{ph} photons on prendra $\sigma_b^2 = N_{phot}/N_{pixels}$. Notons que l'équation 1.8 correspond, en fait à un critère de moindres carrés. Le théorème de Parseval nous permet de récrire l'équation 1.8 dans le domaine de Fourier, soit:

$$J_b^{gauss}(o(\mathbf{f})) = \frac{1}{2\sigma_b^2} \sum_{\mathbf{f}} |\tilde{h}(\mathbf{f}) \times \tilde{o}(\mathbf{f}) - \tilde{i}(\mathbf{f})|^2 \quad (1.9)$$

5. $p(i(\mathbf{r}))$ étant une constante vis à vis de $o(\mathbf{r})$, il n'intervient pas dans la maximisation de $p(o(\mathbf{r})|i(\mathbf{r}))$.

6. CCD (Charge-coupled Devices) : dispositif à transfert de charge.

Dans ce cas, on peut aisément montrer (simple dérivation de l'équation 1.9 vis à vis de $o(\mathbf{f})$) que la minimisation de ce critère conduit à un simple filtrage inverse:

$$\hat{o}(\mathbf{f}) = \frac{\tilde{i}(\mathbf{f})}{\tilde{h}(\mathbf{f})} \text{ si } \tilde{h}(\mathbf{f}) \neq 0 \quad (1.10)$$

Pour les fréquences \mathbf{f} où $\tilde{h}(\mathbf{f}) = 0$ (au delà de la fréquence de coupure du télescope D/λ), $\hat{o}(\mathbf{f})$ peut prendre n'importe quelle valeur, on peut toutefois définir un estimateur au sens des moindres carrés de norme minimale qui implique que pour ces fréquences indéterminées $\hat{o}(\mathbf{f}) = 0$. Même en considérant l'estimateur de norme minimale, il est bien connu qu'une telle division fréquentielle n'est pas stable vis à vis du bruit et conduit à son amplification du fait des valeurs de $\tilde{h}(\mathbf{f})$ très faibles aux hautes fréquences.

On peut bien sûr, choisir de ne pas prendre en compte les fréquences aux valeurs trop faibles, on se retrouve alors dans le cas d'une inversion tronquée. Les hautes fréquences avec un rapport signal à bruit trop faible ne sont pas considérées dans l'inversion et sont mises à zéro dans l'objet restitué. Ceci conduit généralement à une restauration peu efficace de l'objet. En particulier, on restreint le support fréquentiel de l'objet à une fréquence spatiale maximum (f_{max}) inférieure ou égale à D/λ (f_{max} étant d'autant plus faible que le bruit est important). Or, le support fréquentiel de l'objet, lui, contient des très hautes fréquences, en particulier si ce dernier est constitué de bords francs (c'est-à-dire de sauts importants d'intensité entre pixel). La non prise en compte de ces hautes fréquences dans l'inversion, va introduire une reconstruction de l'objet sur support fréquentiel tronqué $[-f_{max}, f_{max}]$ et donc une impossibilité de restituer des hautes fréquences. Cela se caractérise sur l'objet estimé par une mauvaise reconstruction des bords francs, qui vont être approximés par des transitions plus douces, ce qui va entraîner l'apparition d'effets de Gibbs (phénomènes d'oscillations) comme le montre la figure 1.6, sur un exemple simple à une dimension. Dans ce cas, l'objet est une simple fonction porte, la FTO une fonction avec une fréquence de coupure inférieure à l'étendue fréquentielle de l'objet de départ. L'objet

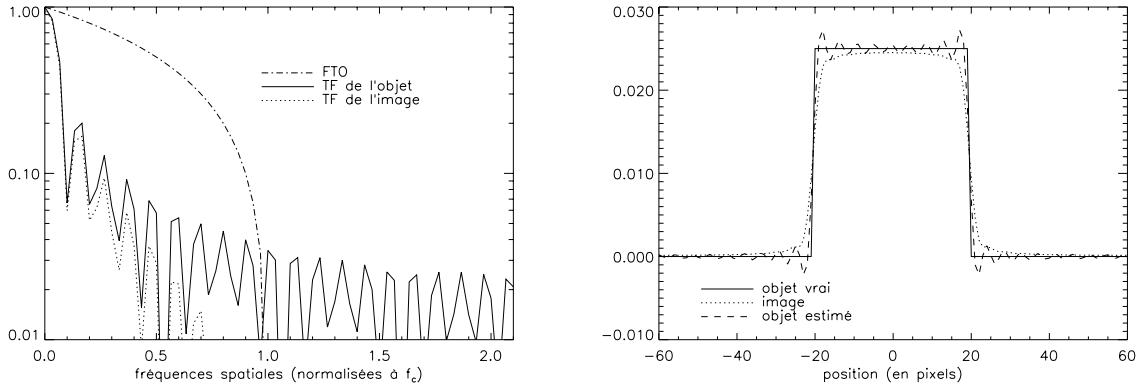


FIG. 1.6 – Illustration des effets de Gibbs sur un objet à une dimension. L'objet est une fonction porte, la FTO a une fréquence de coupure f_{max} inférieure à l'étendue fréquentielle de l'objet (voir figure de gauche). On estime l'image par filtrage inverse en ne considérant que les valeurs non nulles de la FTO. L'objet, l'image et l'objet estimé sont tracés dans la figure de droite.

est estimé par un filtre inverse où ne sont considérées que les valeurs non nulles de la FTO. L'objet estimé a donc un support fréquentiel $[-f_{max}, f_{max}]$ tronqué vis à vis de l'objet vrai. On remarque en particulier que ces effets de Gibbs (ou “ringing effects” en anglais) font apparaître des artefacts et donc introduisent des erreurs de photométrie qui peuvent s'avérer importantes (ce qui peut conduire à

des erreurs d'interprétation sur les résultats). On reviendra dans le paragraphe 1.4.2 sur ce problème d'effets de Gibbs et sur une approche permettant de s'en affranchir.

Bruit Poissonnien & Algorithme de Richardson-Lucy

Intéressons-nous à présent au bruit introduit par le nombre fini de photons arrivant sur le détecteur. Ce bruit de photons suit, pour chaque pixel éclairé, une statistique de Poisson. Le critère d'attache aux données s'écrit alors :

$$J_b^{poisson}(o(\mathbf{r})) = \sum_{\mathbf{r}} (h * o)(\mathbf{r}) - i(\mathbf{r}) \ln[(h * o)(\mathbf{r})]. \quad (1.11)$$

On peut montrer que c'est ce critère de maximum de vraisemblance que minimise, de manière itérative, l'algorithme de Richardson-Lucy (R-L) [Richardson-a-72, Lucy-a-74]. Comme pour le cas de la statistique gaussienne, la minimisation de ce seul critère d'attache aux données conduit à une amplification du bruit. En pratique, pour éviter cette amplification, on stoppe l'algorithme avant la convergence. Cette régularisation implicite du problème est hautement insatisfaisante puisqu'elle se fait de manière empirique sans contrôle de la solution. De plus, on a défini un critère à minimiser (critère que l'on sait non adapté puisque entraînant l'amplification du bruit), et on décide finalement de ne pas le minimiser jusqu'au bout (ce qui, du point de vue logique semble peu satisfaisant). On constate, sur les figures 1.7 et 1.8 l'évolution de la qualité de restitution de l'objet en fonction du nombre d'itérations considérées⁷. On montre notamment que l'écart quadratique moyen entre l'objet vrai et l'objet estimé (défini en équation 1.3) est minimum pour un nombre d'itérations relativement important et qu'il conduit à un objet qui semble, à l'oeil, relativement bruité, d'où la difficulté de choisir le nombre optimum d'itérations si on ne connaît pas l'objet vrai. Dans tous les cas, les restitutions obtenues avec l'algorithme R-L sont peu satisfaisantes et contiennent de nombreux artefacts.

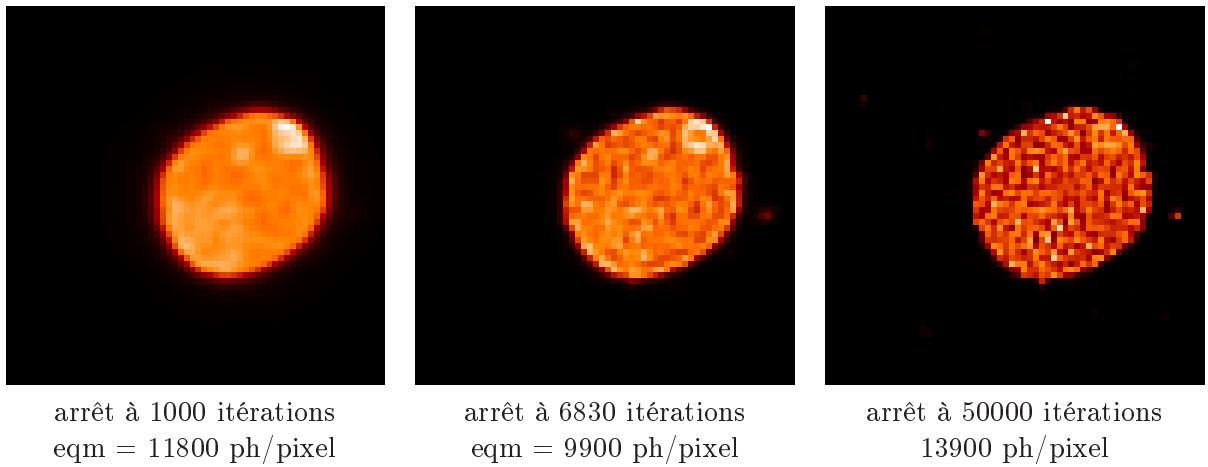


FIG. 1.7 – *Évolution de la qualité de restitution de l'algorithme de R-L pour différentes valeurs de l'itération maximale (1000, 6 830 et 50 000). Dans chaque cas la valeur de l'eqm entre l'objet restitué et l'objet vrai est donnée (eqm = 11 800, 9 900 et 13 900 photons par pixel). Notons que l'eqm minimum est donné pour un arrêt à l'itération 6 830, bien que l'objet semble plus dégradé (aspect visuel) que l'objet obtenu à l'itération 1 000.*

7. J'utilise ici le programme “max_likelihood.pro” d'IDL.

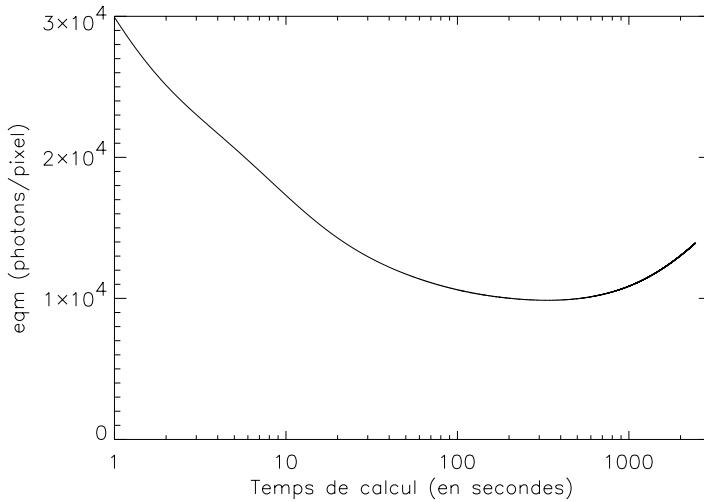


FIG. 1.8 – Distance à l’objet vrai exprimé en photons par pixel en fonction du temps de calcul pour l’algorithme de R-L (1 itération = 0.12 seconde).

On peut, par une interprétation fréquentielle de la reconstruction de l’objet, expliquer le comportement de l’*eqm* et l’allure de l’objet estimé en fonction du nombre d’itérations de l’algorithme de R-L. En supposant [Demoment-a-89] que pour un faible nombre d’itérations, seules les basses fréquences seront reconstruites par l’algorithme, l’erreur sera alors dominée par un lissage excessif de l’objet et par l’apparition d’artefacts (de type effets de Gibbs). Ces derniers (dues à l’absence de hautes fréquences) vont, dans un premier temps, être le facteur d’erreur dominant, puis vont décroître à mesure que l’on va reconstruire des hautes fréquences (avec l’augmentation du nombre d’itérations). Hélas pour ces dernières, le rapport signal à bruit est bien moins favorable et une amplification du bruit va apparaître, cette dernière va peu à peu dominer l’*eqm*. L’erreur minimale sera donc un compromis entre les erreurs de sous modélisation fréquentielle et d’amplification du bruit.

Bruit mixte : gaussien et poissonnien

Dans le cas d’observations réelles, on va être confronté à un mélange des deux types de bruits présentés ci-dessus (gaussien blanc homogène et poissonnien). On propose ici, une approximation permettant de prendre en compte ces deux bruits dans une seule et même statistique. Pour des forts flux (supérieurs à une dizaine de photons par pixels en pratique), on peut montrer [Mugnier-n-99] qu’un développement limité au deuxième ordre de l’équation 1.11 amène à

$$J_b^{poisson}(o(\mathbf{r})) \simeq \frac{1}{2i(\mathbf{r})} \sum_r ((h * o)(\mathbf{r}) - i(\mathbf{r}))^2 \quad (1.12)$$

On trace sur la figure 1.9 une comparaison des statistiques de Poisson et de Gauss dans le cas d’une valeur moyenne de 9 photons. La différence majeure est due à la légère dissymétrie de la statistique de Poisson vis à vis de sa moyenne.

On peut donc, avec une bonne approximation, combiner les effets des bruits de détecteur et de photon en une loi de probabilité Gaussienne non uniforme de type :

$$J_b^{poisson+detec}(o(\mathbf{r})) \simeq \frac{1}{2\sigma^2(\mathbf{r})} \sum_r ((h * o)(\mathbf{r}) - i(\mathbf{r}))^2 \quad (1.13)$$

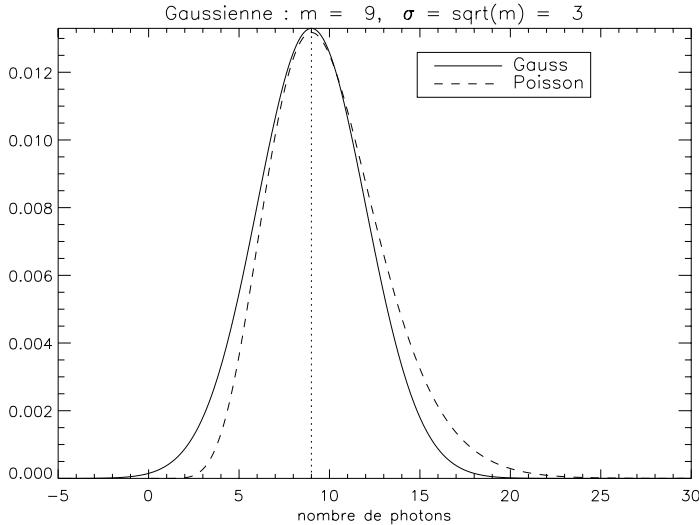


FIG. 1.9 – Comparaison entre une statistique Gaussienne et Poissonienne pour $m=9$ (et $\sigma = 3$)

où $\sigma^2(\mathbf{r}) = \sigma_{ph}^2 + \sigma_{detec}^2$ avec $\sigma_{ph}^2 = \max(i(\mathbf{r}), 0)$. L'utilisation de l'OA permettant d'effectuer des longues poses, on sera généralement, pour les pixels éclairés, dans la zone de validité de l'approximation. On peut toutefois noter que les CCD actuels (notamment ceux qui ont été utilisés pour les données traitées dans la thèse) ont des variances de bruit de l'ordre de 10 (voire supérieures pour les détecteurs infrarouges). Donc, dans les rares cas où l'approximation présenté plus haut n'est plus valide (cas d'objets à très fortes magnitudes), c'est de toutes façons σ_{detec}^2 qui domine dans l'équation 1.13 qui elle reste valide.

C'est ce terme d'attache aux données qui sera utilisé, à présent, dans tous le reste du chapitre⁸, y compris pour le traitement de données expérimentales .

1.4.2 Régularisation sur l'objet

On vient de défini, en fonction du type de bruit présent dans l'image, quels étaient les meilleurs termes d'attache aux données à considérer dans le processus de déconvolution. Intéressons nous à présent, à la partie régularisation du critère, qui, comme on l'a vu sur les exemples proposés au paragraphe 1.4.1, sera essentielle à une bonne estimation de l'objet.

Introduction d'une contrainte de positivité sur l'objet

Avant de s'intéresser à l'estimation du terme de régularisation de l'équation 1.4, on peut remarquer que l'objet observé est forcément positif (carte d'intensité). Il s'agit d'intégrer cette connaissance dans le problème. Pour ce faire 3 approches peuvent être considérées :

- re-paramétrisation : par exemple $o(\mathbf{r}) = a^2(\mathbf{r})$ [Biraud-a-69, Thiebaut-a-95]. On ne cherche plus à restituer $o(\mathbf{r})$ mais $a^2(\mathbf{r})$ qui par définition est positif;
- projection : on modifie l'algorithme de descente (gradient conjugué par exemple) en rajoutant, entre autres, une projection de la solution courante dans R^+ . [Nakamura-a-88];

8. La seule exception étant l'article [Fusco-a-99a] présenté au paragraphe 1.5.1 qui lui utilise une statistique Gaussienne homogène.

– entropie: on rajoute un terme d'entropie dans le critère 1.4 qui empêche l'apparition de points négatifs en pénalisant très fortement (le critère tend vers l'infini) leur apparition [Narayan-a-86]. L'approche choisie, dans notre cas, est la reparamétrisation. Dans la suite du chapitre, sauf mention explicite du contraire, cette reparamétrisation sera toujours appliquée. Il convient aussi de noter que l'algorithme de R-L impose, par construction, la positivité sur l'objet à la condition que l'objet de départ (itération 0) n'aie pas de valeurs négatives.

Régularisation quadratique

Considérons, dans un premier temps, que l'objet suit une loi de probabilité gaussienne [Conan-p-97, Conan-a-98, Mugnier-p-98]. On suppose que l'objet est non stationnaire, c'est-à-dire que sa moyenne $o_m(\mathbf{r})$ dépend de la position \mathbf{r} , mais, pour des raisons de simplicité on supposera que la grandeur $o(\mathbf{r}) - o_m(\mathbf{r})$ est, elle, stationnaire. On peut alors, dans le plan de Fourier, définir un critère de régularisation sur l'objet de la façon suivante :

$$J_o(\tilde{o}(\mathbf{f})) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{f}} \frac{|\tilde{o}(\mathbf{f}) - \tilde{o}_m(\mathbf{f})|^2}{DSP_o(\mathbf{f})} \quad (1.14)$$

avec $DSP_o(\mathbf{f})$ la densité spectrale de puissance associée à l'objet.

En faisant une hypothèse d'ergodicité, o_m peut-être estimé par une moyenne locale sur l'image (dans le but de lisser le bruit). La densité spectrale de puissance est définie par l'équation suivante :

$$DSP_o(\mathbf{f}) = E[|\tilde{o}(\mathbf{f})|^2] - |\tilde{o}_m(\mathbf{f})|^2 \quad (1.15)$$

Un modèle [Kattnig-p-97] est utilisé pour estimer cette DSP :

$$DSP_o(\mathbf{f}) = N_{ph}^2 / [1 + (f/f_0)^p] - |\tilde{o}_m(\mathbf{f})|^2 \quad (1.16)$$

où N_{ph}^2 représente le nombre de photons dans l'image, f_0 est inversement proportionnelle à l'étendue spatiale de l'objet et p est une puissance qui caractérise la régularité de l'objet (p est généralement compris entre 2 et 4). Pour notre objet d'intérêt (voir figure 1.1), on prendra $p = 2.7$ et $f_0^{-1} \simeq 30$ pixels (voir figure 1.10). Pour obtenir ces valeurs on a utilisé l'objet vrai et on a supposé que la DSP de ce dernier était tout simplement égale à la moyenne circulaire $|\tilde{o}(\mathbf{f})|^2$ ⁹ (on a supposé que $\tilde{o}_m(\mathbf{f}) = 0$). On a ensuite effectué un ajustement de la fonction définie en l'équation 1.16 sur cette DSP. Notons que l'on se place ici dans un cas d'école où l'on connaît l'objet vrai. En pratique la DSP sera estimée de manière plus approximative en utilisant des connaissances *a priori* sur le type d'objet observé.

Il est intéressant de constater que pour $p = 4$ (resp. $p = 2$) et $o_m = 0$ l'équation 1.14 est équivalente, dans une approche déterministe à une fonctionnelle de régularisation quadratique sur le laplacien (resp. gradient) de l'objet.

De plus, dans le cas où l'on suppose une statistique de bruit gaussienne homogène (équation 1.9), le critère admet une solution analytique qui est un filtre de Wiener généralisé¹⁰ [Hunt-a-77] et l'objet estimé est donné par

$$\tilde{o}(\mathbf{f}) = \frac{\tilde{h}^*(\mathbf{f})\tilde{i}(\mathbf{f}) + \frac{\sigma_b^2}{DSP_o(\mathbf{f})}\tilde{o}_m(\mathbf{f})}{|\tilde{h}(\mathbf{f})|^2 + \frac{\sigma_b^2}{DSP_o(\mathbf{f})}} \quad (1.17)$$

où σ_b^2 est défini en équation 1.8.

9. Cela revient, en fait, à effectuer une hypothèse d'ergodicité sur \tilde{o} .

10. Si $\tilde{o}_m(\mathbf{f}) = 0$ on retombe sur l'expression classique du filtre de Wiener.

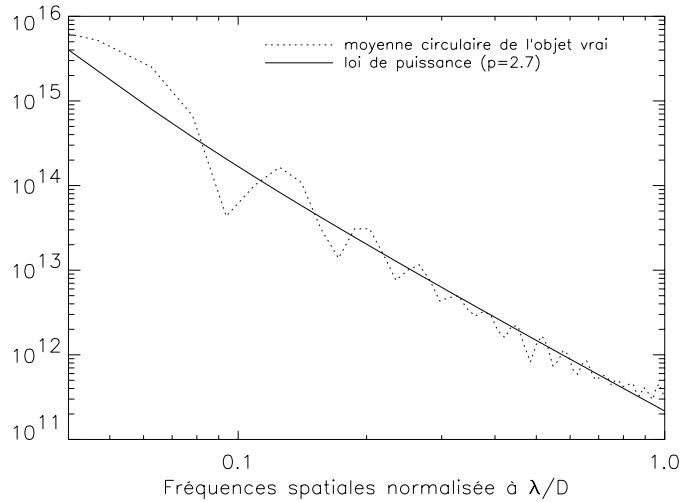


FIG. 1.10 – Comparaison entre la DSP de l'objet [pointillés] et l'approximation par la fonction définie en équation 1.16

L'un des intérêts majeurs de cette approche probabiliste de la régularisation réside ici dans le réglage automatique de l'hyperparamètre μ (voir équation 1.4). Cette pondération, qu'il faut introduire de manière ad hoc dans le cadre d'approches déterministes, est ici donnée par le carré nombre de photons présents dans l'image ($DSP(0)$), la connaissance *a priori* sur l'étendue angulaire de l'objet ($1/f_0$) et le niveau de bruit dans l'image.

On présente, en figure 1.11 le résultat de la déconvolution de notre objet type en utilisant le terme d'attache aux données défini au paragraphe 1.4.1 (statistique gaussienne non uniforme) et une régularisation quadratique. On utilise l'équation 1.16 pour l'estimation de la DSP de l'objet¹¹.

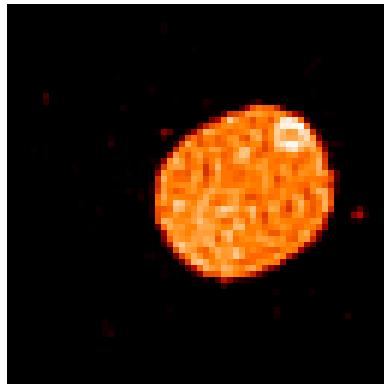


FIG. 1.11 – Objet restitué avec une régularisation quadratique (équation 1.14). L'eqm entre l'objet restitué et l'objet vrai est de 8 100 photons par pixel.

Pour résumer, l'utilisation d'une régularisation prenant en compte les caractéristiques de l'objet observé permet une meilleure estimation que l'algorithme de R-L, et ce quelque soit l'itération maxi-

11. L'utilisation de la statistique gaussienne non homogène et de la positivité ne permet plus de solution analytique et l'on doit minimiser itérativement le critère comme présenté au paragraphe 1.3.2.

mum considérée (si l'*eqm* minimum pour R-L est de 9900, il n'est ici que de 8100 photons/pixels). L'approche bayesienne du problème permet de s'affranchir du réglage ad hoc du poids relatif du terme de régularisation vis à vis du terme d'attache aux données (hyperparamètre μ). Toutefois, la régularisation quadratique sur l'objet est appropriée si ce dernier appartient à une classe d'objets lisses, c'est-à-dire sans bords francs (voir l'article [Conan-a-98]). Dans ce cas, cette régularisation donne de très bons résultats.

Par contre pour des objets présentant de forts sauts d'intensité (bords francs) tel l'objet test utilisé ici, la pénalisation quadratique des saut d'intensité ne permet pas la restitution des bords francs, entraîne l'apparition d'effets de Gibbs et donc une restauration peu efficace de l'objet. Dans ce cas d'autres types de régularisations vont devoir être envisagées. Il faudra incorporer cette connaissance *a priori* sur l'objet (présence de sauts importants d'intensité) dans le critère. La régularisation devra alors permettre à la fois d'éviter l'amplification du bruit tout en laissant au critère la latitude de restituer des forts gradients d'intensité.

Régularisation quadratique-linéaire

Comme on vient de le voir au chapitre précédent, l'utilisation d'une régularisation quadratique n'est pas adaptée aux objets présentant de forts gradients d'intensité. Il faut alors envisager un autre type de régularisation qui puisse prendre en compte cette spécificité de l'objet et permettre ainsi de s'affranchir de l'apparition d'artefacts de déconvolution (effets de Gibbs). Cette régularisation, appelée L1-L2, pénalise fortement (de manière quadratique) les faibles sauts d'intensité entre pixels (typiquement du au bruit) tout en laissant la possibilité aux forts gradients d'intensité d'être restitués (permettant ainsi des transitions fortes sur l'objet) [Conan-p-98, Conan-a-00, Conan-p-00, Mugnier-a-00b]. Cette régularisation, appelée $L_1 - L_2$, a été proposée par S. Brette et J. Idier [Brette-p-96] dans le cadre du traitement de signal. Une version isotrope a été proposée par L. Mugnier [Mugnier-p-99, Conan-p-00, Mugnier-a-00b] et se définit comme :

$$J_o(o(\mathbf{r})) = \mu \sum_{\mathbf{r}} \left[\left(\frac{\Delta o(\mathbf{r})}{\delta} \right)^2 - \ln \left(1 + \frac{\Delta o(\mathbf{r})}{\delta} \right) \right] \quad (1.18)$$

avec $\Delta o(\mathbf{r}) = \sqrt{\Delta_x o(\mathbf{r})^2 + \Delta_y o(\mathbf{r})^2}$, $\Delta_x o$ et $\Delta_y o$ sont respectivement les gradients de l'objet selon x et y . Pour les faibles différences d'intensité entre pixels ($\Delta o(\mathbf{r})$ petit), l'équation 1.18 tend vers une norme quadratique (L2) alors que pour les sauts importants d'intensité ($\Delta o(\mathbf{r})$ grand), l'équation 1.18 tend vers une norme linéaire (L1) comme le montre la figure 1.12. Or, dans ce cas, le coût de $J_o(o(\mathbf{r}))$ ne va dépendre que du pixel de départ et du pixel d'arrivée, la pénalisation, dans le critère, d'une transition rapide ou d'une transition douce sera alors la même. On pourra ainsi, en fonction du terme d'attache aux données restaurer les bords francs de l'objet. Dans l'équation 1.18 c'est l'hyperparamètre δ qui permet le passage de la norme L2 à la norme L1 (voir figure 1.12). Notons aussi que dans tous les cas, ce critère est strictement convexe (sauf si $\delta = 0$).

On applique cette régularisation sur notre objet test (voir figure 1.13) et l'on compare le résultat avec ceux obtenus à partir d'un simple maximum de vraisemblance (algorithme de Richardson Lucy) et de l'utilisation d'une régularisation quadratique (voir paragraphe 1.14). Le gain apporté par la régularisation L1-L2 est notable. Cette amélioration visuelle est conforté par le calcul de l'*eqm* qui a chuté de près d'un facteur 2 (de 9 100 à 5 100 photons par pixels). L'analyse du résultat obtenu avec la norme L1-L2 montre que l'on réussit à lisser le bruit tout en permettant la bonne restitution des bords francs de l'objet. En particulier, les effets de Gibbs ont été éliminés. Il est important de noter ici que l'élimination des effets de Gibbs assure que la photométrie de l'objet sera respectée.

Le facteur μ donnant le poids global de cette régularisation et le seuil δ permettant de passer de la norme L_2 à la norme L_1 doivent, pour le moment, être ajustés à la main (à l'inverse de la régularisation

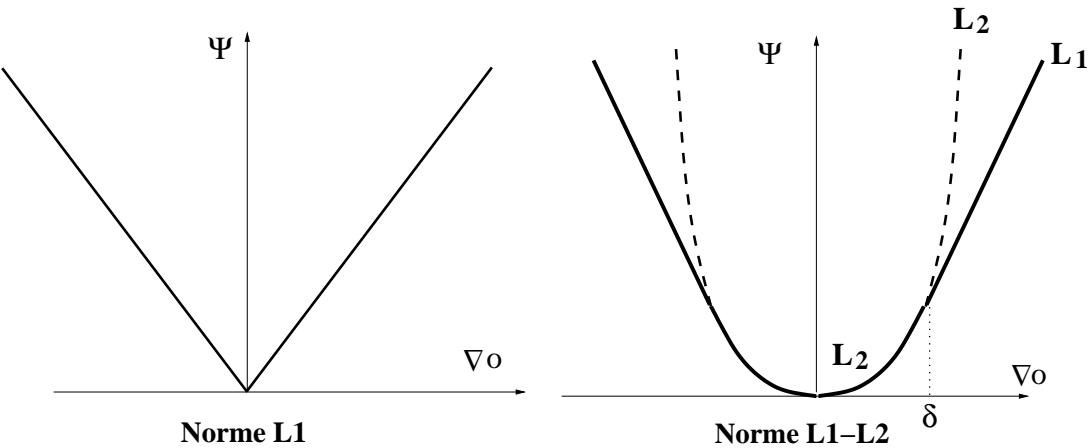


FIG. 1.12 – Norme L_1 (figure de gauche) et norme L_1-L_2 (figure de droite) δ est le seuil de passage de la norme L_1 à la norme L_2 . Pour la norme L_1 on peut montrer que le passage rapide (fort gradient) d'un point **a** à un point **b** à le même coût qu'un passage lent (lissage).

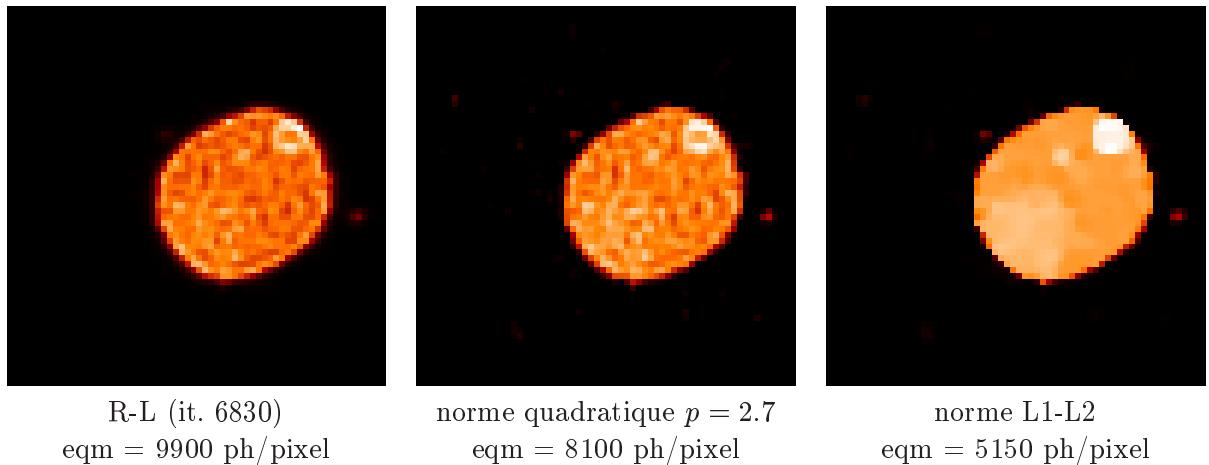


FIG. 1.13 – Comparaison entre les résultats obtenus pour des déconvolutions utilisant : (a) un simple maximum de vraisemblance (algo. de Richardson-Lucy), (b) une régularisation quadratique et (c) une norme L_1-L_2 .

quadratique présenté au paragraphe 1.14 où la valeur de μ était automatiquement fixée par DSP_o). Toutefois, une première estimation de ces valeurs peut être faite en fonction du nombre de photons dans l'image et de la structure de l'objet. μ est alors donné par $1/N_{phot}^2$ et δ par un écart-type du gradient numérique de l'image selon x et y :

$$\delta = a \sqrt{\frac{1}{2N_{pix}} \sum_{x,y}^{N_{pix}} [(i(x,y) - i(x-1,y))^2 + (i(x,y) - i(x,y-1))^2]} \quad (1.19)$$

a est une constante valant typiquement quelques unités. Cet écart type donne une estimation de la rugosité de l'objet (en général on ne considère, dans ce calcul que les pixels avec du signal). Il faut ensuite optimiser, “à la main” les valeurs des hyperparamètres autour de ces premières estimations (par expérience, il est rare d'avoir plus d'une décade de différence entre la première estimée, à partir de l'image elle même, et les paramètres optimum). On trace sur la figure 1.14 l'évolution de l' eqm en fonction de la valeur des hyperparamètres μ et δ . Les valeurs estimées à partir du nombre de photons et de l'équation 1.19 (avec $a = 2$) sont normalisés à 1 sur la figure 1.14. On remarque alors que toute une gamme d'hyperparamètres autour de cette valeur donne des résultats très proches. De plus, même si un écart de quelques unités dégrade les résultats, l' eqm est dans tous les cas, bien inférieur à ceux obtenus avec l'algorithme R-L ou même la régularisation quadratique.

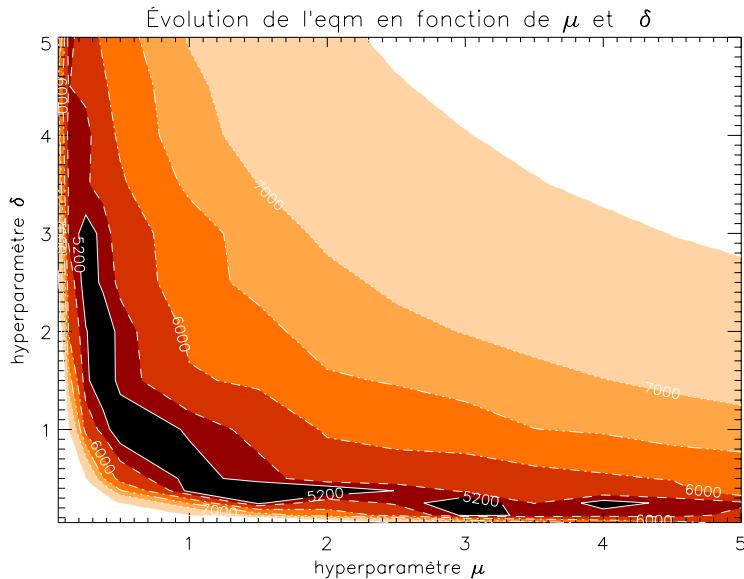


FIG. 1.14 – Évolution de l' eqm en fonction des hyperparamètres δ et μ . Les valeurs 1 correspondent aux hyperparamètres estimées à partir du nombre de photons dans l'image et de l'équation 1.19 où $a = 2$.

Il serait bien entendu souhaitable, à terme, de pouvoir intégrer ces hyperparamètres dans le problème et de les estimer en même temps que l'objet¹².

De plus, le temps de calcul pour obtenir la convergence de l'algorithme, minimisant le critère défini aux paragraphes 1.4.1 et 1.4.2 par les équations 1.13 et 1.18 (critère implémenté dans le l'algorithme MISTRAL), est sensiblement équivalent au temps de calcul pour obtenir l' eqm minimal dans le cas de l'algorithme R-L (it 6830) comme le montre la figure 1.15 où l'on trace l' eqm en fonction du temps de

12. Si cela est possible sans trop complexifier le problème ...

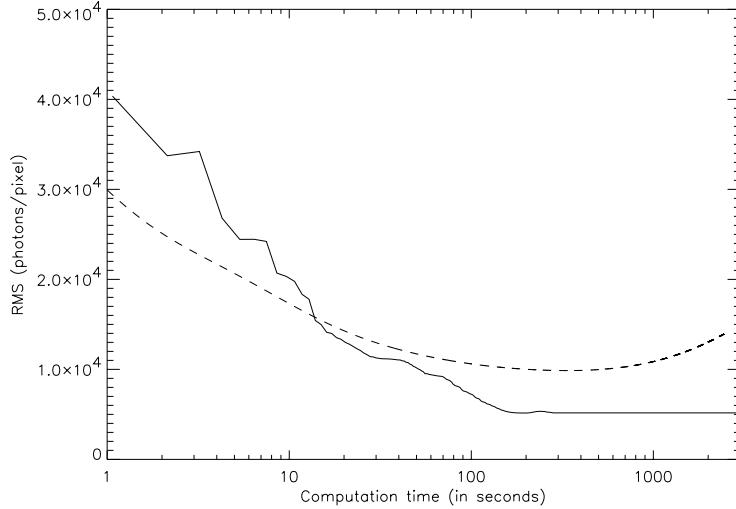


FIG. 1.15 – Comparaison entre le temps de calcul de l’algorithme de Richardson-Lucy [tirets] et MISTRAL [trait plein]. Notons que le point de départ de cette figure se situe pour 1 seconde de temps de calcul ce qui explique la différence entre R-L et MISTRAL. Bien évidemment, au temps 0, les deux erreurs sont identiques.

calcul (CPU time) pour l’algorithme de R-L et notre algorithme (utilisant la méthode optimisée de descente par gradients conjugués [GPI-97]).

Régularisation par une norme L_p

Bien entendu, la régularisation L1-L2 proposée au paragraphe précédent n’est pas le seul type de régularisation permettant de restituer des bords francs et d’éviter les effets de Gibbs. Dans le même ordre d’idée, on peut envisager l’utilisation de normes L_p [Mugnier-p-98] définies comme

$$J_o(o(\mathbf{r})) = \mu \sum_{\mathbf{r}} (\Delta o(\mathbf{r}))^p \quad (1.20)$$

Cette fonctionnelle va plus ou moins pénaliser l’apparition de bords francs selon la valeur de la puissance p (pour $p = 2$ on retombe sur une régularisation quadratique portant sur le gradient de l’objet). Pour ce type de norme, plus la valeur de p sera proche de 1^{13} , plus la régularisation aura tendance à laisser se développer les différences d’intensités entre pixels voisins et à restituer un objet chahuté. À l’inverse, pour une valeur de p proche de 2 (on tend alors vers une régularisation quadratique), les écarts d’intensité entre pixels voisins vont être fortement pénalisés, et une version lissée de l’objet sera restituée (voir [Mugnier-p-98] pour plus de détails).

1.4.3 Une régularisation spécifique : les champs d’étoiles

Intéressons nous, à présent, à une classe particulière d’objet : les champs stellaires. Pour ce type d’objet, une régularisation spécifique peut être utilisée, permettant d’atteindre des précisions bien supérieures à la limite théorique de diffraction du télescope avec lequel ils sont observés. La spécificité des champs stellaires est que l’objet observé peut être décrit comme une collection de points

13. Notons que la stricte convexité de ce terme d’erreur est assurée pour p strictement supérieur à 1.

sources, c'est-à-dire par une somme de pics de Dirac¹⁴. Chaque étoile peut, ainsi, être reparamétrée [Gunsay-p-95, Veran-t-97, Veran-p-98, Fusco-a-99a]¹⁵ par 3 valeurs (sa position $\alpha_i = (\alpha_{i,x}, \alpha_{i,y})$ et son intensité γ_i).

$$O(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta(\mathbf{r} - \alpha_i) \quad (1.21)$$

Le nombre d'étoiles n est supposé connu (on discutera par la suite de ce point). De plus, on rajoute un *a priori* de positivité sur l'intensité γ_i . Cette contrainte de positivité est obtenue par reparamétrisation : $\gamma_i = 10^{-0.4mag_i}$: on ne recherche plus des intensités γ_i mais des magnitudes d'étoiles mag_i .

La reparamétrisation de l'image par une somme de fonctions de Dirac permet non seulement de réduire le nombre d'inconnues (d'où un gain en temps de calcul) mais aussi de restituer la position de l'étoile avec une précision bien supérieure à celle du pixel et donc bien supérieure à la résolution théorique du télescope¹⁶. Évidemment, la précision sur l'estimation des positions aussi bien que du flux est liée au rapport signal à bruit de l'image (nombre de photons et bruit de détecteur) ainsi qu'à la qualité de la correction (étendue de la FEP). Toutefois, comme on peut le voir dans l'article [Fusco-a-99a] présenté au paragraphe 1.5.1, des précisions plusieurs dizaines de fois supérieures à la limite de diffraction du télescope, peuvent être atteintes. Dans l'article, on montre que pour de bons rapports signal à bruit, des précisions de l'ordre de $\lambda/(60D)$ peuvent être atteintes.

Les résultats obtenus sont très satisfaisants, toutefois un certains nombres de problèmes peuvent venir limiter l'utilisation de ce type de traitement.

Convexité du critère

La reparamétrisation de l'objet par des pics de Dirac dont on recherche position et intensité n'assure plus la convexité du critère. Supposons l'observation d'une étoile double dont les 2 composantes ont des intensités γ_1 et γ_2 et dont les positions sont données, par rapport au centre du CCD, par $\alpha_1 = (0,0)$ et $\alpha_2 = (0,10)$ (en pixels). Notons que l'on a pris des valeurs de pixels entières pour simplifier mais que ce choix ne restreint en rien la généralité de l'exemple. On suppose que tous les paramètres sont connus sauf la position en x de α_1 . On calcule donc les valeurs du critère pour différentes valeurs de α_1 . On montre sur la figure 1.16 l'évolution de cette erreur en fonction de la position (toujours en pixel). Bien évidemment, l'erreur est minimale pour $\alpha_1 = 0$ (vraie valeur) mais il est important de remarquer que pour un décalage supérieur à ± 2 pixels le critère n'est plus convexe (voir paragraphe 1.3.2). Rien n'assurera donc que le critère d'erreur global défini sur tous les paramètres n'ait qu'un minimum global. En particulier, on constate que différents points de départs ne donnent pas la même solution et donc que le critère global n'a effectivement pas un seul minimum. Pour assurer la convexité du critère, il va falloir considérer des points de départ proche (à moins de 2 pixels) de la vraie valeur du paramètre. Cela suppose, avant l'utilisation de la régularisation par les points sources, une déconvolution préalable pixel à pixel (c'est-à-dire où l'on recherche une carte d'intensité pour l'objet) en utilisant les critères définis aux paragraphes 1.4.1 et 1.4.2. Cette déconvolution est suffisamment précise pour nous permettre d'estimer la position de chaque étoile avec la bonne marge d'erreur. Il ne reste plus qu'à utiliser la régularisation "champs stellaires" avec comme point de départ les estimations fournies par la déconvolution précédente. On obtient, ainsi, pour chaque étoile une précision sub-pixel en terme de position et des estimations photométriques très précises (voir paragraphe précédent).

14. rappelons que jusqu'à présent, l'objet était décrit par une carte d'intensité avec le même échantillonnage spatial que l'image.

15. Ce type de reparamétrisation est aussi utilisé dans d'autres disciplines (géophysique, imagerie médicale, Contrôle Non Destructif, ...)

16. On suppose bien sûr ici que les images sont échantillonées de façon à, au moins, vérifier le théorème de Shanon, c'est-à-dire que la taille angulaire d'un pixel est inférieure ou égale à $\lambda/(2D)$.

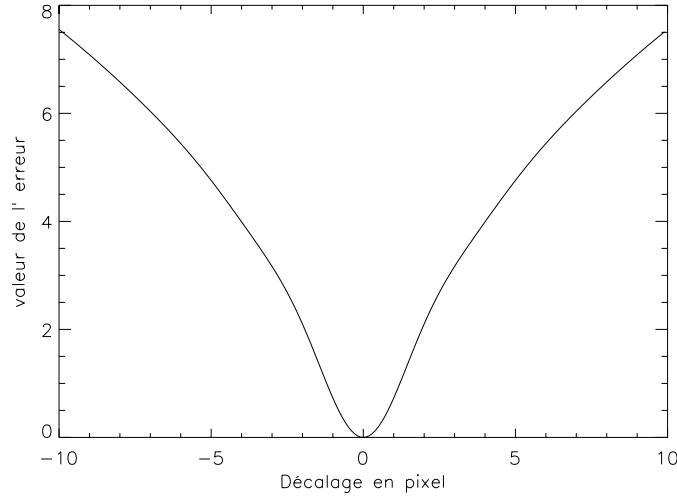


FIG. 1.16 – critère non convexe défini sur la position (en x) d'une étoile.

Détection de sources

Un autre problème majeur de l'algorithme utilisant la régularisation “champs stellaires” est la nécessité de fixer le nombre de sources dont on cherche à estimer les paramètres. Cette détection précise est un *a priori* fort qu'il faut discuter et il serait souhaitable, à terme, d'intégrer le nombre de sources en tant que paramètre à estimer par le programme au même titre que les positions et les intensités.

A l'heure actuelle, la détection des sources se fait en utilisant une déconvolution pixel à pixel (régularisée par la norme L1-L2) comme le montre l'exemple présenté en figure 1.17 et en table 1.1. Dans cet exemple, on considère 8 étoiles ayant des différences de magnitudes allant de 0.75 à 10 par rapport à l'étoile la plus brillante (voir tableau 1.1). La FEP considérée est calculée pour un télescope de 4 mètres avec 1 m d'obturation centrale. Le D/r_0 est de 15 soit un Strehl de 9 % pour les conditions d'éclairement considérées. Le nombre total de photons dans l'image est de 10^8 photons ce qui correspond à une magnitude d'environ 12 pour l'étoile la plus brillante (étoile 1). Du bruit de détecteur a été rajouté dans l'image en plus du bruit de photons ($\sigma_{detect}^2 = 500$). Une seule étoile n'a pas été détectée par cette méthode.

En conclusion, l'algorithme de déconvolution de champs stellaires permet d'obtenir une précision sur la position des étoiles bien supérieure à la résolution théorique du télescope. Toutefois, pour obtenir cette précision, une bonne initialisation de l'algorithme doit être effectuée (tant sur le nombre d'étoiles que sur la position de celles-ci) afin d'éviter les problèmes de non-convexité du critère et d'erreurs de reconstructions dues à la mauvaise estimation du nombre d'étoiles. On montre que l'utilisation d'un critère de déconvolution pixel à pixel utilisant un terme d'attache aux données gaussien non homogène (1.4.1) et une régularisation L1-L2 (1.4.2) permet une très bonne précision tant sur l'estimation du nombre que de la position des étoiles. Toutefois cette méthode “en 2 pas”, n'est certainement pas optimale et il serait intéressant d'intégrer la détection automatique des sources directement dans l'algorithme “champs stellaires”. Pour cela, une piste serait l'introduction d'une statistique P-Gaussienne ou Bernouilli-Gaussienne dans la méthode.

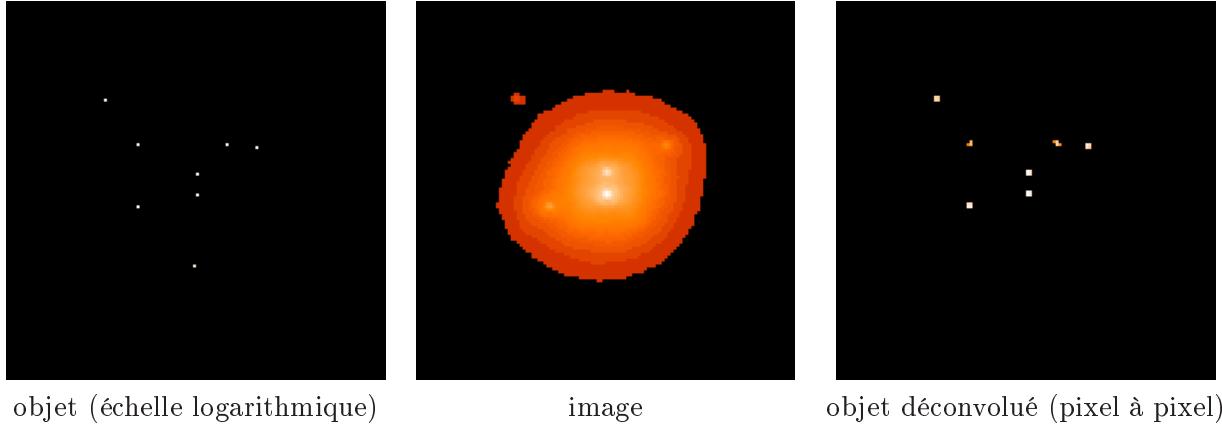


FIG. 1.17 – *Représentation logarithmique du champ d'étoiles observé, image correspondante (en échelle linéaire) et objet estimé après un déconvolution pixel à pixel. On note que 7 des 8 étoiles ont été restituées. La dernière, ayant une différence de magnitude de 10 avec la plus brillante est à la limite de détection, dans le bruit.*

	paramètres vrais		déconvolution pixel à pixel		déconvolution champ stellaire	
	Δ_{sep}	Δ_m	Δ_{sep}	Δ_m	Δ_{sep}	Δ_m
étoile 1	0	0	0	0	0	0
étoile 2	7.38	0.7526	8.00	0.7515	7.38	0.7523
étoile 3	19.93	2.5000	19.42	2.4947	19.93	2.4960
étoile 4	25.92	3.2526	26.25	3.2539	25.91	3.2523
étoile 5	44.48	5.0000	45.28	4.9977	44.55	5.0004
étoile 6	19.66	5.7525	19.72	5.8316	19.70	5.8002
étoile 7	25.86	7.500	25.50	7.51	25.65	7.506
étoile 8	25.71	10	non détectée			

TAB. 1.1 – *Comparaison de la restitution des différents paramètres des étoiles pour une déconvolution pixel à pixel et la déconvolution “champs stellaires”. Les résultats de la première déconvolution (nombre positions et intensité des étoiles) servent de point de départ à la deuxième. La séparation pour l'étoile n est estimée vis à vis de l'étoile 1 par la relation $\Delta_{\text{sep}} = \sqrt{(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2}$. De même la différence de magnitude est estimé vis à vis de de l'étoile 1 par $\Delta_m = -2.5 * \log_{10} (I_n / I_1)$.*

Sources ponctuelles sur fond lentement variable

Je me suis limité, dans l'algorithme de “champs stellaires” à l'étude de champs d'étoiles sur fond uniforme. Il serait intéressant de modifier cet algorithme pour pouvoir intégrer la possibilité d'avoir des fonds variables [Lucy-p-94, Hook-p-94, Magain-a-98].

L'idée est d'utiliser à la fois une régularisation quadratique (comme présentée au paragraphe 1.14) pour estimer les variations du fond et l'algorithme “champs stellaires” pour estimer les paramètres (position et intensité) des étoiles présentes sur ce dernier.

1.4.4 Estimation de la FEP de référence

Depuis le début de ce chapitre sur la déconvolution, on a supposé que l'on se plaçait dans un cas d'école où l'on pouvait considérer que la FEP était parfaitement connue. Or ceci n'est jamais le cas pour des observations réelles. La FEP utilisée pour la déconvolution (appelée FEP de référence) est toujours une estimation plus ou moins grossière de la FEP réelle du système. Il existe deux façons d'obtenir cette FEP de référence :

- soit par l'obtention de l'image d'une étoile de référence (c'est-à-dire non résolue par le télescope).

Pour obtenir une bonne estimation, il faut alors que le niveau de bruit sur l'analyse de front d'onde soit le même entre l'image et la FEP de référence. Or d'une part, les conditions de turbulence (r_0 , L_0 , vitesse du vent) peuvent évoluer, d'autre part le flux reçu par l'analyseur mais aussi la taille angulaire de l'image sur l'analyseur peuvent évoluer entre l'objet d'intérêt et l'étoile de référence. Si on peut régler le flux reçu en choisissant une étoile ayant la même magnitude que l'objet observé ou au pire en rajoutant des densités sur la voie d'analyse, on n'a, par contre, aucun moyen de s'assurer que les paramètres atmosphériques n'évolueront pas entre l'acquisition de la FEP de référence et l'acquisition de l'image de l'objet. Il est donc très difficile d'assurer le même bruit sur l'analyseur, donc la même qualité de correction et donc la même FEP entre l'image et l'étoile de référence. Ceci est illustré sur la figure 1.18 où l'on trace des variations de FEP dues aux variations du seeing au cours du temps. Les conditions de simulations sont les mêmes que celle de la figure 1.2. On suppose cette fois que le seeing a évolué durant les observations de 0.65 à 0.93 arcsec. L'image a été obtenue pour un seeing de 0.73 arcsec et les FEP de référence pour des seeing de 0.65, 0.79, 0.85 et 0.93 arcsec.

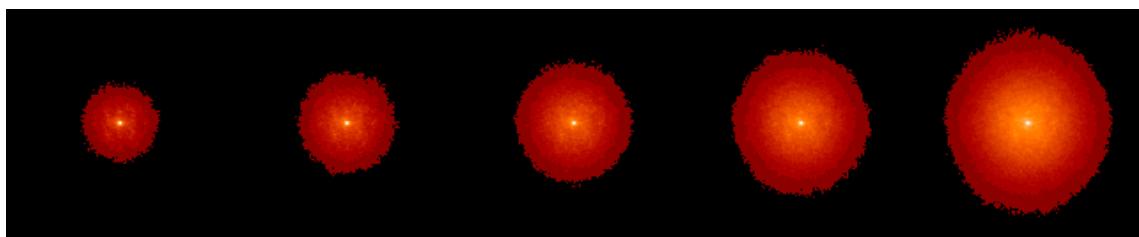


FIG. 1.18 – Exemple de la variation de la FEP en fonction de l'évolution du seeing. Les conditions sont les mêmes que celle du paragraphe 1.2. Les FEP sont estimées pour différentes valeurs de seeing : de gauche à droite, 0.65, 0.73, 0.79, 0.85 et 0.93 arcsec. Les rapports de Strehl correspondant sont : 3.8 %, 2.1 %, 1.3 %, 0.8 % et 0.4 %

- soit en utilisant les données fournies par l'analyseur de surface d'onde pour estimer la FEP du système. Cette méthode a été développée par J.-P. Véran [Veran-a-97, Veran-t-97] dans le cadre sa thèse. Son approche suppose toutefois une optique adaptative utilisant un analyseur à courbure (voir paragraphe 3.4 de la première partie). Plus récemment, S. Harder a repris les travaux

de Jean-Pierre Véran et les a adaptés au cas d'un analyseur de Shack-Hartman [Harder-t-99, Harder-a-00]. Bien que la méthode proposée par Jean-Pierre Véran permette une estimation bien plus précise de la FEP du système que l'utilisation de FEP obtenue pour une étoile de référence elle comporte certaines limitations. Ces dernières sont dues essentiellement au rapport signal à bruit sur l'analyseur (estimation de moins en moins performante avec l'augmentation de la magnitude) et au temps de pose fini de l'image qui introduit un bruit de Speckle. De plus, cette méthode n'est, à ma connaissance, implantée que sur un seul système d'OA à l'heure actuelle (PUEO).

Cette estimation imparfaite de la FEP, que ce soit par l'une ou l'autre des méthodes, peut entraîner des erreurs importantes lors du processus de déconvolution. En effet, on essaye alors de déconvoluer l'image avec un modèle faux, l'erreur sur la FEP va donc se "propager" dans le processus de déconvolution pour dégrader l'objet restitué.

En reprenant les simulations du paragraphe 1.2 mais en considérant une FEP légèrement différente de la FEP vraie (on suppose que le seeing a évolué de 0.73 à 0.79 secondes d'arc, soit un passage de 2.1 à 1.3 % de rapport de Strehl). Dans ce cas on observe sur la figure 1.19 une dégradation notable des résultats entre la déconvolution avec la vraie FEP du système et la déconvolution avec une FEP légèrement différente. En particulier, on constate que l'objet estimé a un support plus petit que l'objet vrai et on note l'apparition d'artefacts sur ce dernier.

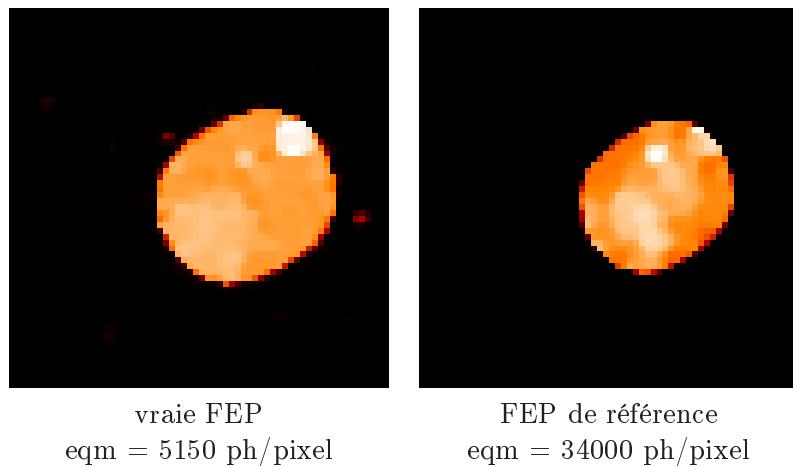


FIG. 1.19 – Comparaison entre la déconvolution classique avec la vraie FEP et une FEP de référence légèrement différente. On utilise le cas de régularisation L1-L2.

Pour pallier cette connaissance partielle de la FEP, on propose de modifier l'approche de la déconvolution présentée jusque là pour prendre en compte les possibles évolutions de la FEP. On ne recherche plus alors simplement à estimer l'objet mais aussi la FEP à partir de l'image, en introduisant un terme supplémentaire de régularisation sur la FEP. Ce dernier utilise des connaissances *a priori* obtenues à partir de la FEP de référence. On parlera alors de déconvolution "myope"¹⁷

1.5 La déconvolution myope

Pour traiter le problème de la déconvolution à FEP non connue, plusieurs auteurs ont proposé des déconvolutions "aveugles" [Ayers-a-88, Holmes-a-92, Lane-a-92, Schultz-a-93, Jefferies-a-93,

¹⁷ Le terme "myope" est ici à opposé à la déconvolution dite "aveugle" où l'on cherche à estimer l'objet et la FEP sans introduire aucune connaissance *a priori* sur cette dernière.

Thiebaut-a-95, Sheppard-a-98], c'est-à-dire une recherche conjointe de l'objet et de la FEP (cette dernière étant supposée totalement inconnue) en ne rajoutant comme *a priori* sur cette dernière qu'une contrainte de positivité et pour certains [Holmes-a-92, Jefferies-a-93, Sheppard-a-98] de support limité dans le plan fréquentiel. L'augmentation du nombre d'inconnues et le peu de régularisations introduites par ces approches conduisent, en général à des estimations peu satisfaisantes tant de l'objet que de la FEP.

En reprenant l'approche Bayesienne présentée au paragraphe 1.4, nous nous proposons d'introduire une régularisation sur la FEP tenant compte des informations *a priori* notamment fournies par la FEP de référence. On modifie l'équation 1.6 pour tenir compte du fait que l'on cherche à estimer conjointement l'objet et la FEP. On recherche alors l'objet et la FEP les plus probables sachant l'image, soit à maximiser la loi de probabilité *a posteriori* suivante

$$p(o, h|i) = \frac{p(i|o, h) \times p(o) \times p(h)}{p(i)} \quad (1.22)$$

ce qui conduit à la minimisation selon o et h du critère

$$\left\{ \hat{o}, \hat{h} \right\}_{\text{map}} = \arg \min_{o, h} [J_b(o, h) + J_o(o) + J_h(h)]. \quad (1.23)$$

Les expressions de $J_b(o, h)$ et $J_o(o)$ selon les statistiques des bruits présents dans l'image et le type d'objet observé ont déjà été présentés au paragraphes 1.4, il s'agit donc d'exprimer $p(h)$ en fonction des connaissances que l'on a sur la FEP (notamment les mesures de FEP de référence) pour avoir une expression de $J_h(h)$ et donc du critère global à minimiser.

En supposant que h suit une probabilité Gaussienne (la FEP longue pose est la somme d'événements indépendants) et que $h - h_m$ est stationnaire, on peut exprimer le terme $J_h(h)$ dans le plan de Fourier en fonction des deux premiers moments de h : sa moyenne $\tilde{h}_m(\mathbf{f})$ et sa densité spectrale de puissance DSP_h . Il vient alors

$$J_h(h(\mathbf{f})) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{f}} \frac{|\tilde{h}(\mathbf{f}) - \tilde{h}_m(\mathbf{f})|^2}{DSP_h(\mathbf{f})} \quad (1.24)$$

où DSP_h peut être vue comme la variance fréquence à fréquence des fluctuations de \tilde{h} autour de sa moyenne \tilde{h}_m . Ce terme d'erreur va donc permettre à \tilde{h} d'évoluer autour d'une valeur moyenne \tilde{h}_m avec "une force de rappel" liée à la DSP_h . DSP_h est définie par l'équation suivante :

$$DSP_h(\mathbf{f}) = E \left[|\tilde{h}(\mathbf{f}) - \tilde{h}_m(\mathbf{f})|^2 \right] = E \left[|\tilde{h}(\mathbf{f})|^2 \right] - |\tilde{h}_m(\mathbf{f})|^2 \quad (1.25)$$

Il ne reste plus alors qu'à estimer $\tilde{h}_m(\mathbf{f})$ et DSP_h . Pour cela deux approches sont envisageables selon le type de données à notre disposition. Soit une série de FEP de référence est obtenue par images d'un objet non résolu par le télescope (voir paragraphe 1.5.1), on estime alors $\tilde{h}_m(\mathbf{f})$ et DSP_h à partir de ces images, soit la FEP de référence est estimée à partir des données de l'ASO (voir paragraphe 1.5.1) et dans ce cas, $\tilde{h}_m(\mathbf{f})$ et DSP_h seront eux aussi estimés à l'aide de ces données d'analyse.

1.5.1 Estimation de h_m et DSP_h

Utilisation d'une étoile de référence

La première approche pour calculer h_m et DSP_h est d'utiliser une étoile de référence. L'idée est alors d'obtenir plusieurs images de cette dernière avant et après l'observation de l'objet d'intérêt.

Comme on l'a vu au paragraphe précédent et comme on le reverra au paragraphe 1.7.2 dans le cadre du traitement de données réelles, les FEP de référence ainsi acquises sont sensibles aux fluctuations temporelles des paramètres atmosphériques (r_0 , L_0 , vitesse du vent). L'acquisition de la série de n FEP de référence $\{h_i(\mathbf{r})\}_n$ avant et après l'observation de l'objet d'intérêt permet de tenir compte de cette variabilité temporelle. À partir de cette série de FEP, on calcule une FEP moyenne, soit dans le plan de Fourier

$$\tilde{h}_m(\mathbf{f}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{h}_i(\mathbf{f}) \quad (1.26)$$

et une DSP_h à partir de l'équation 1.25 :

$$DSP_h(\mathbf{f}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\tilde{h}_i(\mathbf{f})|^2 \right) - |\tilde{h}_m(\mathbf{f})|^2 \quad (1.27)$$

Cette DSP va rendre compte des fluctuations des FTO de référence autour de la FTO moyenne $\tilde{h}_m(\mathbf{f})$, comme le montre la figure 1.20. A partir des FEP de référence présentées en figure 1.18, on calcule, suivant les équations 1.26 et 1.27, une FTO moyenne et une DSP.

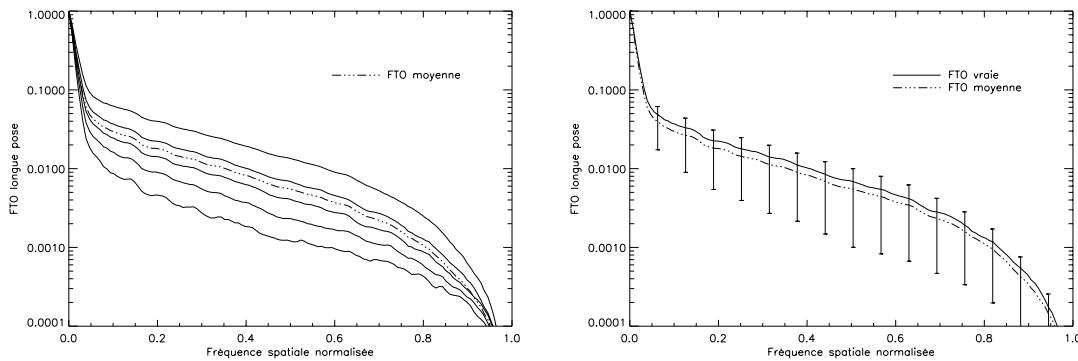


FIG. 1.20 – Figure de gauche : FTO associées aux FEP de la figure 1.18. Les FTO sont estimées pour différentes valeurs du seeing : de haut en bas, 0.65, 0.73, 0.79, 0.85 et 0.93 arcsec. La FTO moyenne (moyenne des 5 FTO) est tracée pour comparaison [tirets]. **Figure de droite :** la FTO vrai [trait plein], la FTO moyenne [tirets-points] et les valeurs de la $\sqrt{DSP(\mathbf{f})}$ (barres d'erreurs fréquentielles) sont représentés. Pour chaque cas, une moyenne circulaire est considérée.

On compare alors, en figure 1.21, les résultats obtenus en utilisant une déconvolution classique (en supposant que la FEP moyenne est la vraie FEP du système) et une déconvolution myope. On remarque notamment que même si la FEP moyenne est très proche de la FEP vraie, cette petite erreur d'estimation suffit, en se propageant dans la déconvolution classique, à dégrader de façon quasi rédhibitoire l'estimation de l'objet ($eqm = 23\,000\ photons/pixel$). L'introduction de l'aspect myope dans le problème et donc la prise en compte des variations de la FEP permet de s'affranchir de ces erreurs et d'obtenir une très bonne estimation de l'objet ($eqm = 6\,800\ photons/pixel$) proche de la solution obtenue en déconvoluant avec la vraie FEP ($eqm = 5\,150\ photons/pixel$).

Utilisation des données ASO

Une autre approche pour obtenir les données nécessaires à la déconvolution myope est d'utiliser les données fournies par l'analyseur de front d'onde [Veran-t-97, Veran-a-97]. On règle ainsi la majorité

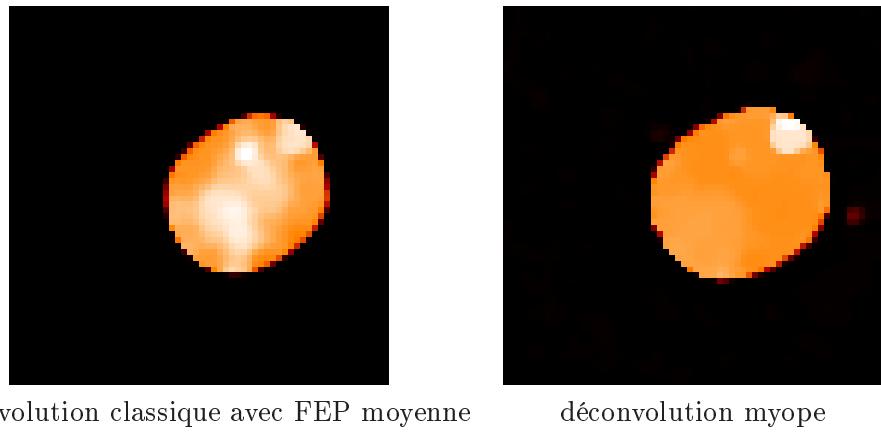


FIG. 1.21 – *Déconvolution classique avec la FEP moyenne et déconvolution myope.* pour chaque cas, l’eqm est respectivement de 23 000 and 6 800 photons/pixel.

des problèmes soulevés par l’acquisition de FEP de référence sur objets ponctuels (pas d’évolution de paramètres atmosphériques du système et de l’objet observé). Toutefois, l’estimation de Jean-Pierre Véran donne une FEP de référence, qui bien que très proche de la vrai FEP du système, peut encore présenter des différences non négligeables quand on s’intéresse à des précisions de restitution importantes.

- En effet l’estimation de la FEP à partir des données ASO est soumise à 3 limitations fondamentales :
- le bruit sur l’analyseur de front d’onde qui va dégrader la qualité de reconstruction. Cette limitation sera considérée comme négligeable pour des magnitudes inférieures à 13 [Veran-t-97].
 - le temps de pose fini de l’image. En effet, la méthode donne une FEP ayant un temps de pose infini (en fait il nous fournit directement h_m pour un temps de pose infini). Elle ne prend donc pas en compte le bruit de turbulence présent dans l’image et dû au temps de pose fini lors de l’acquisition de l’image. Cette erreur est évidemment d’autant plus importante que le temps de pose de l’image est court.
 - les aberrations fixes (ou lentement variables) non vues par l’ASO et non calibrées.

Comme on l’a dit précédemment, ces erreurs d’estimation sur la FEP de référence bien que généralement faibles, sont susceptibles de dégrader les résultats. Je propose donc d’utiliser les données ASO dans le cadre d’une déconvolution myope. Cette étude est présentée dans l’article :

“Myopic deconvolution method for adaptive optics images of stellar fields” (T. Fusco, J.-P. Véran, J.-M. Conan et L. Mognier) publié dans A& A sup. ser., **134**, jan 1999, pp 1-10.

Je présente dans cet article une généralisation myope de la déconvolution de champs stellaires présenté au paragraphe 1.4.3. L’approche proposée, utilisant les données de front d’onde pour calculer h_m et DSP_h est appliquée à la fois sur des données simulées et sur des données réelles.

Il s’agit donc dans un premier temps d’estimer h_m et DSP_h à partir des données ASO. Dans ce cas, h_m est calculé en utilisant l’approche proposée par Jean Pierre Véran [Veran-a-97] :

$$\tilde{h}_m(\mathbf{f}) = \exp\left(-\frac{1}{2}D_{\Phi_r}(\lambda\mathbf{f})\right) \times FTO_{tel}(\mathbf{f}) \quad (1.28)$$

où $FTO_{tel}(\mathbf{f})$ ($OTF_{free}(\mathbf{f})$ dans l’article) est la FTO du télescope en l’absence de turbulence, et $D_{\Phi_r}(\lambda\mathbf{f})$ la fonction de structure de la phase résiduelle (voir paragraphe 4.3.2 de la première partie). h_m correspond à l’obtention d’une image avec un temps de pose infini. Elle diffère donc de la FEP de l’image observée par la présence d’un bruit de turbulence résiduel. Plus le temps de pose sera

court plus ce bruit de turbulence sera important et plus la différence entre h_m et la vrai FEP sera importante. En conséquence, DSP_h qui correspond à la variance de ce bruit de turbulence, est donnée par l'expression suivante [Conan-t-94] :

$$DSP_h(\mathbf{f}) = \frac{\tau_s}{T_i} (FTS(\mathbf{f}) - |\tilde{h}_m(\mathbf{f})|^2) \quad (1.29)$$

avec $FTS(\mathbf{f})$ ($STF(\mathbf{f})$) la fonction de transfert speckle (voir paragraphe 2.3.2 de la première partie) calculée à partir des courtes poses corrigées, T_i le temps de pose et τ_s le temps d'évolution des courtes poses corrigées par OA. Dans l'article on suppose, en première approximation que ce temps d'évolution est donné par l'expression suivante [Roddier-a-82b]:

$$\tau_s = 0.36 \frac{r_0}{\bar{v}} \quad (1.30)$$

où r_0 est le paramètre de Fried et \bar{v} une vitesse de vent moyenne pour les différentes couches de la turbulence (notons que dans l'expression de Roddier, \bar{v} est en fait un écart type de la vitesse du vent à travers les différentes couches turbulentes). r_0 aussi bien que \bar{v} peuvent être calculés à partir des données de l'ASO [Veran-a-97, Madec-p-92]. L'estimation de τ_s peut aussi être grandement améliorée en utilisant les développements théoriques proposés au paragraphe 4.6 de la partie I sur le calcul des corrélations angulaires des courtes poses corrigées par OA et en les transposant au cas temporel.

Le gain à utiliser l'aspect myope est démontré, dans un premier temps, sur simulations numériques (les conditions de simulation sont précisées au paragraphe 5 de l'article). Ces simulations sont le plus réalistes possibles et prennent en compte tous les aspects d'un système d'OA. L'image considérée est une étoile double ayant une séparation de 10.4 pixels sur l'image (soit 0.34 secondes d'arc) et une différence de magnitude de 1 ($\Delta m = 1$). Le temps de pose est de 2 secondes. Les résultats sont présentés dans l'article en Table 1 (résultats sur l'estimation des paramètres de l'objet) et en figures 2 et 3 (restitution précise de la FTO). Ces simulations démontrent l'intérêt d'une approche myope vis à vis d'une approche classique même dans le cas d'une reconstruction de la FEP à partir des données ASO.

L'algorithme est ensuite appliqué sur des données expérimentales (étoile binaire HD203024) obtenues en bande H avec le système PUEO au CFHT¹⁸. Les images, mais aussi les estimations de h_m et de DSP_h ont été fournies par Jean-Pierre Véran. Pour ce jeu de données, une aberration statistique non vue par l'analyseur vient dégrader l'image (apparition d'une sur-intensité au niveau du premier anneau de la tache d'Airy). Or cette dégradation n'apparaît pas sur la FEP reconstruite à partir des données ASO ce qui va entraîner des erreurs lors de la déconvolution par des méthodes classiques. En utilisant l'approche myope on réussit à faire apparaître la sur-intensité sur la FEP estimée après déconvolution (voir figure 5 de l'article), et on obtient ainsi des résultats plus précis sur l'estimation des paramètres de l'objet (en particulier les intensités de chaque étoile).

18. CFHT : Canada-France-Hawaii Telescope

Myopic deconvolution method for Adaptive Optics images of stellar fields

T. Fusco^{1,2}, J.-P. Véran³, J.-M. Conan¹, L. M. Mugnier¹

¹ O.N.E.R.A, B.P. 72, 92322 Chatillon Cedex

² Département d'Astrophysique, U.R.A. 709 du C.N.R.S, U.F.R. Faculté des Sciences, Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex, France

³ Herzberg Institute of Astrophysics, Dominion Astrophysical Observatory, 5071 west Saanich Road, Victoria, B.C. V8X 4M6, Canada

Astron. Astrophys. suppl. ser., **134**, , Jan 1999, pp. 1-10

Abstract. The atmospheric turbulence severely limits the angular resolution of ground based telescopes. When using Adaptive Optics compensation, the wavefront sensor data permit the estimation of the residual PSF. Yet, this estimation is imperfect. A “myopic” deconvolution method which takes into account this estimation and its associated noise is presented. This technique is applied to adaptive optics corrected images of star fields. It is based on a stochastic approach which uses the available information about the object and about the PSF. This technique allows the simultaneous restoration of star parameters (position with sub-pixel precision and accurate photometry) and of the PSF. The algorithm is successfully applied both to simulated and to experimental data.

wave front. This compensation enables the recording of high spatial resolution long exposure images. However, even if the object's spatial frequencies are preserved up to the diffraction limit of the telescope, they are often severely attenuated since the AO correction is only partial. It is therefore necessary to use image processing techniques to improve the quality of the recovered object (Thiébaut and Conan, 1995), (Christou et al., 1997).

We consider here stellar fields. The main problem with images of such objects is that the AO partial correction induces a halo around each star. When two stars are too close, their halos overlap, and photometric and astrometric measurements are difficult. Different post-processing algorithms have been proposed to deal with this problem (CLEAN (Hogbom, 1974), DAOPHOT (Stetson, 1987), P-Lucy algorithm (Lucy, 1994), (Hook and Lucy, 1994)) but they all require that the PSF be pre-determined accurately. In certain cases, especially with a short exposure time, very partial AO correction or uncalibrated aberrations, the determination of the PSF is too rough to yield good astrometric and photometric results.

In this paper, we propose a deconvolution method for such star field observations. This deconvolution technique permits the restoration of both the object and the PSF. We call it a “myopic” deconvolution, because it incorporates the knowledge of the Point Spread Function [PSF] structure and variability (as opposed to “blind” deconvolution where the PSF is assumed to be completely unknown). The strong knowledge of the object (point-like object) is also used, which allows a sub-pixel and a good photometric restoration.

In section two, an overview of the formation of AO corrected images is presented. In section three, the myopic deconvolution is introduced. In section four, the method used to estimate the average and the variability of the PSF is detailed. This method is based on the processing of the wavefront sensor data recorded simultaneously with the AO image. In section five simulation results are presented. They show that our method is able to accurately recover

Key words: high resolution imaging, Adaptive Optics, deconvolution, regularization, photometry

1. Introduction

Atmospheric turbulence severely limits the angular resolution of ground based telescopes. Many techniques have been proposed to reach the diffraction limit of large optical instruments. A. Labeyrie (Labeyrie, 1970) suggested to record series of short exposure images to freeze the turbulence effects. Various numerical post-processing methods (Knox and Thompson, 1974), (Weigelt, 1977) then permit the reconstruction of the observed object.

As an alternative, Adaptive Optics [AO] (Babcock, 1953), (Rousset et al., 1990) is a real-time technique which compensates for the random variation of the turbulent

Send offprint requests to: T. Fusco

Correspondence to: authors:

Phone: (33) 1 46 73 40 40 ; fax: (33) 1 46 73 41 71.

Email: {NAME}@onera.fr

URL: <http://www.onera.fr/activites/iogr/en>

the object parameters (astrometry and photometry) and the PSF even in unfavorable cases (low flux, very partial AO correction).

In the last section experimental results acquired with the Canada-France-Hawaii Telescope adaptive optics system are presented. The myopic deconvolution allows a good restoration despite the static aberrations present in the true PSF but not measured by the wavefront sensor.

2. Image formation in Adaptive Optics

Within the isoplanatic patch, the AO corrected image is a convolution of the true object ($o(\mathbf{r})$) with a residual PSF ($h(\mathbf{r})$) characterizing the turbulence, the telescope and the AO bench. The detected intensity distribution $d(\mathbf{r})$ of the corrected image is given by :

$$d(\mathbf{r}) = o(\mathbf{r}) * h(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}) \quad (1)$$

$n(\mathbf{r})$ is an additive zero mean random process that accounts for the noise affecting the image (photon and detector noise). The AO correction is always partial and does not provide a full compensation for the atmospheric turbulence. The correction performance depends on the observing conditions: turbulence strength characterized by the Fried parameter (r_o) (Fried, 1965), magnitude and angular size of the source used for wavefront sensing. It also depends on the AO system itself: number of corrected modes, servo-loop bandwidth etc... (Rousset et al., 1990),(Rigaut et al., 1991),(Conan, 1994). The partially corrected image can be fully characterized by the PSF $h(\mathbf{r})$.

A *posteriori* deconvolution is therefore required to estimate the object $o(\mathbf{r})$ from the data $d(\mathbf{r})$.

3. The myopic deconvolution method

It is well-known that image restoration is an ill-posed problem which needs to be regularized through the use of additional *a priori* information (Tikhonov and Arsenin, 1977), and (Demoment, 1989) for a review.

The goal of myopic deconvolution is to restore both the object and the PSF knowing the image intensity measurements and the *a priori* information.

We model our observed object (field of stars) by a sum of Dirac functions (Gunsay and Jeffs, 1995). Its intensity is then given by :

$$o(\mathbf{r}) = \sum_i^n \alpha_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) \quad (2)$$

where \mathbf{a}_i and α_i are the position vector and the intensity of the i^{th} star respectively and are the object parameters we are seeking. We consider that n , the number of stars, is a known parameter.

A constant or slowly variable parameter can also be added

to account for sky background and underlying emission (Lucy, 1994).

The deconvolution method we use is based on a stochastic approach i.e., we consider object parameters and PSF as outcomes of stochastic processes (Conan et al., 1998). Bayes' rule combines the likelihood of the data with the *a priori* distribution of the parameters (object and PSF, which are decorrelated processes) into the *a posteriori* probability distribution of the unknowns (\mathbf{a}_i, α_i and h):

$$p(\mathbf{a}_i, \alpha_i, h | d) \propto p(d | \mathbf{a}_i, \alpha_i, h) \times p(\mathbf{a}_i, \alpha_i) \times p(h) \quad (3)$$

where $p(A|B)$ means conditional probability of A given B. $p(d | \mathbf{a}_i, \alpha_i, h)$ corresponds to the noise probability law (likelihood term) and accounts for the noise affecting the image: photon and detector noise. In a first approximation we choose a stationary white gaussian statistics for the noise probability, although a non-stationary gaussian or poisson plus gaussian statistics would be more accurate. $p(\mathbf{a}_i, \alpha_i)$ reflects the *a priori* knowledge (or prior) on the object parameters. In addition to the reparametrization itself, which contains a strong constraint on the object, we also use:

- the positivity of the star intensities, enforced in our case by a reparametrization of intensities by magnitudes. $\alpha_i = 10^{-0.4*m_i}$ where m_i is the star magnitude.
- an upper limit on the star intensities
($\sum_i \alpha_i < \text{whole image flux}$).

Similarly, $p(h)$ reflects the *a priori* knowledge on the PSF. It can be reasonably assumed to be Gaussian and is therefore characterized by its first and second moments (Conan et al., 1998): a mean PSF (h_m) and a Power Spectral Density [PSD] (PSD_h). This PSD can be viewed as a per frequency variance of the Optical Transfer Function [OTF] (Fourier Transform of the PSF) around its mean value.

The method used to calculate h_m and PSD_h using the Wave-front sensor (WFS) data or the image of a reference star will be described in section 4.

Following the Maximum *A Posteriori* (MAP) approach, a set of estimated parameters is given by the maximization of $p(\mathbf{a}_i, \alpha_i, h | d)$, the *a posteriori* probability law:

$$[\hat{\alpha}_i, \hat{\mathbf{a}}_i, \hat{h}]_{map} = argmax_{\alpha_i, \mathbf{a}_i, h} [p(\mathbf{a}_i, \alpha_i, h | d)] \quad (4)$$

In this case, maximizing the probability corresponds to minimizing the following criterion ($-\log p(\mathbf{a}_i, \alpha_i, h | d)$) in the Fourier domain:

$$\begin{aligned} J(\alpha_i, \mathbf{a}_i, \tilde{h}(\mathbf{f})) = & \sum_{\mathbf{f}=0}^{N^2} \frac{1}{\sigma^2} |\alpha_i \exp\left(\frac{-2j\pi}{N} \mathbf{f} \mathbf{a}_i\right) \times \tilde{h}(\mathbf{f}) - \tilde{d}(\mathbf{f})|^2 \\ & + \sum_{\mathbf{f}=0}^{N^2} \frac{|\tilde{h}(\mathbf{f}) - \tilde{h}_m(\mathbf{f})|^2}{PSD_h(\mathbf{f})} \end{aligned} \quad (5)$$

where $\tilde{\cdot}$ denotes a Fourier transform, N^2 the pixel number, σ^2 the noise variance and \mathbf{f} the spatial frequency.

The first term of equation 5, is the likelihood term which takes into account the object reparametrisation. The second term is a regularization term on the PSF. It draws the actual OTF towards its mean value \tilde{h}_m with a stiffness related to its PSD. This term avoids a noise propagation and amplification on the PSF (cf section 5) as well as the trivial solution ($\text{PSF} = \text{image}$ and all the sources = 0 except one delta function)

This leads to a strong decrease of the number of parameters. In the case of a 128×128 pixels image of a binary star, the number of parameters drops from 16384 (if the object parameters are the intensity on each pixel) to 6 (two intensities, two position vectors). It therefore allows a better precision on these parameters; in particular, a sub-pixel determination of star position — meaning a fraction of $\frac{\lambda}{2D}$ for Shannon sampled images — and an accurate photometry measurement.

Also, fewer parameters to estimate lead to a faster convergence.

We now turn to the different ways of estimating the PSF and its associated PSD.

4. Mean PSF and PSD estimation

The correction achieved by adaptive optics depends on the magnitude and angular size of the reference object, as well as on the strength of atmospheric turbulence. As a result, the PSF evolves both in time and space. Each image has a different PSF, which is difficult to determine.

One possibility to estimate the PSF, is to image a star near the observed object (Northcott, 1994). This technique however presents some major problems: waste of observation time, small sky coverage, evolution of the turbulence between object and reference star acquisition.

Recently, a method has been proposed to accurately retrieve the mean PSF (\tilde{h}_m) from the data accumulated by the AO control system during the acquisition (Véran et al., 1997). This mean PSF however corresponds to an image with an infinite integration time. \tilde{h}_m is obtained using the theoretical expression:

$$\tilde{h}_m(\mathbf{f}) = \exp\left(-\frac{1}{2}D_{\phi_r}(\lambda\mathbf{f})\right) \times OTF_{free}(\mathbf{f}) \quad (6)$$

where $D_{\phi_r}(\lambda\mathbf{f}) = <[\phi_r(\rho) - \phi_r(\rho + \lambda\mathbf{f})]^2>$ is the residual phase structure function estimated from the AO data and OTF_{free} is the aberration-free OTF. Note that, in practice, the WFS data never allow the calculation of the true ϕ_r but give a noisy measurement of this phase (Véran et al., 1997).

\tilde{h}_m differs from the actual finite time PSF because of the so-called turbulence noise, related to the residual

speckles in the AO corrected images. The shorter the integration time, the larger the turbulence noise. The variance of this noise on the optical transfer function for an integration time T_i can be estimated at each spatial frequency by (Conan, 1994):

$$\sigma_{turb}^2(\mathbf{f}) = \frac{\tau_s}{T_i}(STF(\mathbf{f}) - |\tilde{h}_m(\mathbf{f})|^2) \quad (7)$$

where $STF(\mathbf{f})$ is the Speckle Transfer Function (Roddier, 1981) and τ_s is the coherence time characterizing the turbulence evolution. Using some approximations, the STF can be expressed as a function of \tilde{h}_m (Conan, 1994) and can therefore be also estimated from the AO loop data.

The difficulty lies in the estimation of the coherence time τ_s . It corresponds roughly to the turbulence evolution time. Without AO correction, τ_s is the so-called speckle boiling time characterizing the speckle life time. An approximate value is given by Roddier (Roddier et al., 1982). It could be different in the case of AO correction and certainly depends on the correction degree. However we assume, in a first approximation, that the expression given by Roddier is valid here:

$$\tau_s = 0.36 \frac{r_0}{\bar{v}} \quad (8)$$

where r_0 is the Fried parameter of the turbulence and \bar{v} is the mean wind speed across the different turbulence layers. r_0 can be computed from the AO loop data (Véran et al., 1997) as well as \bar{v} (Conan et al., 1995).

With accurate models of the servo-loops, WFS, deformable mirror, a bright enough object, the error on the PSF estimated from the AO loop data is dominated by the turbulence noise (Véran et al., 1997). Therefore, we have:

$$PSD_h(\mathbf{f}) = \sigma_{turb}^2(\mathbf{f}) \quad (9)$$

However, if some other errors are introduced in the calculation of \tilde{h}_m (unexpected fixed aberrations for example), $PSD_h(\mathbf{f})$ should be increased accordingly.

5. Simulation Method and Results

In this section, the myopic deconvolution performance is studied. In order to show the influence of the turbulence noise on the deconvolution process and the gain brought by a myopic regularization, a very partial AO correction has been simulated as following.

We have considered an AO system operating on a $D = 3m$ telescope with a $1m$ central obstruction diameter. The turbulence is characterized by a single layer with a Fried parameter equal to $10cm$ at the imaging wavelength $\lambda = 0.5\mu m$, a $\bar{v} = 20m/s$ wind velocity. The AO system is made up of a 9×9 Shack-Hartmann wavefront sensor,

and a 88 piezo-stack mirror. The servo-loop bandwidth is 80 Hz. The simulation tool used was developed at ONERA (Rousset et al., 1991). 1024 instantaneous phase screens are simulated. Each wavefront gives a short exposure PSF. The sample frequency (500 hz) leads to a total integration time of 2 seconds. With such a short integration time, the turbulence noise is not negligible. In these conditions, and for a 11.5 magnitude object (corresponding to 55 detected photons per sub-aperture and per frame), we obtain a very partial correction characterized by its PSF with a Strehl ratio of 0.03 (ratio between the intensity at the center of the corrected PSF and the intensity of the diffraction limited PSF).

\tilde{h}_m is directly deduced from the simulated wavefronts using equation 6. Note that, in this case, we have an ideal measurement of the residual wavefront and therefore an ideal estimation of \tilde{h}_m .

The STF is computed by the average of the 1024 square moduli of the short exposure OTFs. The PSD is therefore deduced from equation 7.

The corrected image of a binary star, including photon noise, is shown in fig 1 (10^6 detected photons in the whole image). We consider a 128×128 image sampled at the Nyquist frequency, i.e. with a pixel angular size $\frac{\lambda}{2D} = 0.033 \text{ arcsec}$ (field of view = 4.2 arcsec).

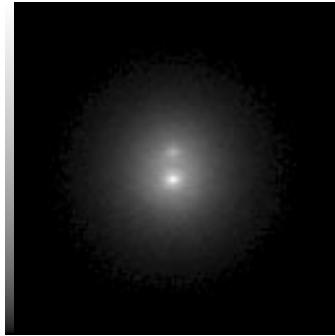


Fig. 1. AO corrected image of a binary star (simulation with Strehl ratio equal to 0.03). Total flux 10^6 photons, only photon noise in the image

The separation of the two components is $\Delta\text{sep} = 10.4$ pixels, i.e., an angular separation of 0.34 arcsec . The intensity of two components are $7.153 \cdot 10^5$ and $2.847 \cdot 10^5$ photons i.e., a magnitude difference equal to $\Delta m = 1$.

The image presented in figure 1 clearly shows the need of a deconvolution process for the estimation of the star positions and magnitudes. A pixel-by-pixel deconvolution (no reparametrization of the object) gives good results (Conan et al., 1997), (Mugnier et al., 1998), but the star positions are known only within a pixel and the photometry measurement is not very accurate because of the residual flux in the background after deconvolution. The multiple-star object model avoids both of these limitations. Note, however, that the number of stars is assumed to be known. In practice, this number may be difficult to estimate from the long exposure image, in particular in low Signal to Noise Ratio (SNR) conditions. In this case, it is possible to perform a two step deconvolution process : a pixel-by-pixel deconvolution to estimate the number of star and a “multiple-star object model” deconvolution to improve the astrometry and the photometry. The ultimate performance in case of very low flux SNR are currently being investigated. A more sophisticated scheme would involve the simultaneous detection of the number of stars and the estimation of their parameters (Champagnat et al., 1996)

Comparison between pixel-by-pixel and reparametric deconvolution are presented in (Mugnier et al., 1998). In the following, one will focus on the reparametric deconvolution and especially the gain brought by a myopic deconvolution.

Table 1 shows the statistics of the deconvolved parameters over 50 different photon noise realizations. The results are obtained by processing the image with the following techniques:

- a crude estimation (value and position of the two maxima in the image)
- a classical deconvolution. The first term of the criterion defined in equation 5 is minimized assuming that PSF is constant and equal to h_m .
- a blind deconvolution. The sole first term of the criterion defined in equation 5 is minimized with respect to the object parameters and PSF (i.e., no PSF regularization)
- a myopic deconvolution, as presented above (the sum of all terms of equation 5 are minimized).

It shows that a deconvolution and especially a myopic deconvolution method increases the accuracy of the parameter estimation.

The classical deconvolution gives a very good result on the star separation: a sub-pixel precision, no bias and an accuracy (standard deviation) about 66 times lower than the diffraction limit ($\frac{\lambda}{D}$). Nevertheless, the problem of the classical deconvolution lies in the deficiency of the flux estimation ($\simeq 7\%$). This error is mostly due to a bad restitution of the global flux ($\alpha_1 + \alpha_2$) which is a free parameter in the deconvolution process. This evolution may be important to take into account the possible loss of flux in the image, due to stars bordering the field of view.

The introduction of the myopic deconvolution leads to better photometric results (a better restitution of the global flux). The error on α_{1es} and α_{2es} is significantly reduced (2.64%).

The separation estimation, which is already good for the

	$\langle \Delta \text{sep} \rangle$ (pix)	$\sigma_{\Delta \text{sep}}$ (pix)	$\langle \Delta I \rangle$ (%)	σ_I (%)
crude estimation	10.66	0.47	76.64	6.64
classical deconvolution	10.40	0.03	6.69	0.16
blind deconvolution	10.41	0.23	2.95	0.96
myopic Deconvolution	10.40	0.04	2.64	0.32
True object parameters	10.40			

Table 1. Simulation results: $\langle \Delta \text{sep} \rangle$ and $\sigma_{\Delta \text{sep}}$ are the average and the standard deviation of the separation (pixel unit and arcsecond unit) between the two components calculated on 50 different noise realizations. $\langle \Delta I \rangle$ and σ_I are the average and the standard deviation of the global error between the true and estimated intensities of the two components in photon unit. They are calculated on 50 different noise realizations ($\Delta I = 100 \sqrt{|\alpha_1 - \alpha_{1es}|^2 + |\alpha_2 - \alpha_{2es}|^2} / (\alpha_1 + \alpha_2)$). Recall that 1 pix = $\frac{\lambda}{2D} = 0.033$ arcsecond.

classical case is not improved by the myopic one. The accuracy is even slightly lower than in the classical case (about $\frac{\lambda}{50D}$) but it is not significant. The good estimation, obtained here in the classical case, is most likely due to the fact that the mean PSF is a good estimate of the simulated PSF (circular symmetry, no static aberrations, only turbulent noise) and is good enough for the estimation of the separation. Yet, the accuracy of the star positions should be increased by the myopic deconvolution in the case of a badly estimated PSF.

The blind deconvolution, which is not regularized, is markedly less stable than the myopic one, in the sense that estimated object parameters are more dependent on the noise outcomes on the image (important increase of the standard deviations) and are consequently less accurate.

In short, the classical deconvolution is good enough for an astrometric estimation, but the myopic deconvolution is needed to improve the object photometry (by a factor 3.5 in our case). As described below, it also leads to a better PSF estimation. A good PSF determination is important because the myopic deconvolution is a joint estimation on the object and the PSF. Therefore, an accurate PSF restitution leads to an accurate estimation of the object parameters.

Figure 2 shows a cut of the different normalized OTF. It shows that a blind or a myopic deconvolution improves the accuracy of the OTF at low frequencies (where the signal to noise ratio is high). But the blind deconvolution is limited by the photon noise. The noise has been propagated, and amplified, from the image to the estimated PSF (the expected behavior in a non-regularized case). On the other hand, the myopic deconvolution allows a bet-

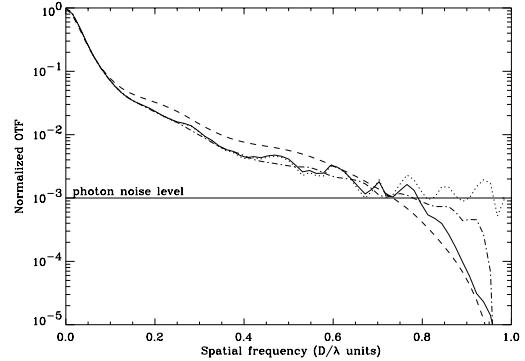


Fig. 2. Cut off normalized Optical Transfer Function versus spatial frequency: true AO corrected OTF (dashed-dotted line), mean OTF (dashed line), Blind deconvolved OTF (dotted line) and Myopic deconvolved OTF (solid line) are shown for comparison. The spatial frequency is normalized to the telescope cutoff frequency. The photon noise level $\frac{1}{N}$ is indicated for comparison.

ter restitution of the PSF even at high frequencies, and avoid the noise propagation and amplification.

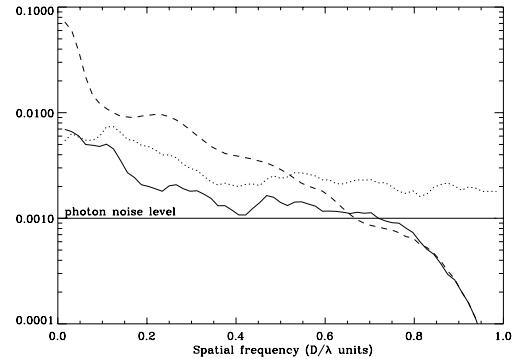


Fig. 3. Circular average of the modulus of the difference between: true OTF and mean OTF (dashed line), true OTF and Blind deconvolved OTF (dotted line), true OTF and Myopic deconvolved OTF (solid line). The photon noise level $\frac{1}{N}$ is indicated for comparison.

Figure 3 allows a frequency to frequency assessment of the gain brought by the myopic deconvolution on the PSF. The influence of the regularization is visible at high frequencies, where the myopic deconvolved OTF follows the mean OTF and decreases below the photon noise level.

The average distance between the true PSF and its different estimations, $\langle \sqrt{|PSF_{true} - PSF_{est}|^2} \rangle$, is a

good summary of the figures 2 and 3 and quantifies the gain brought by the myopic deconvolution on the PSF:

- distance between the true and the mean PSF : $2.72 \cdot 10^{-5}$
- average and standard deviation of the distance between the true and the blind deconvolved PSF: $2.22 \pm 0.08 \cdot 10^{-5}$
- average and standard deviation of the distance between the true and the myopic deconvolved PSF: $1.05 \pm 0.03 \cdot 10^{-5}$

The values are given for a unit energy PSF.

The simulations have shown that, in the case of very partial AO correction (ie a strong turbulent noise), a myopic deconvolution increases the accuracy of the joint estimation on the object parameters and the PSF. It leads, in particular, to good photometry estimation.

6. Experimental results

We have applied our myopic deconvolution method to real images acquired with PUEO, the Canada-France-Hawaii Telescope adaptive optics system operated at the top of Mauna Kea in Hawaii. PUEO is a low order (19 actuators) curvature based system. Figure 4 shows the image of binary star HD203024 in H band ($1.65 \mu\text{m}$). This image was acquired in June 1996 using the 256x256 Monica near infrared camera provided by University of Montreal. The plate scale is 0.034 arcsec/pixel and the integration time was 3 minutes. The object was bright enough ($m_R = 9.5$) to be also used as the reference for AO guiding and the WFS could be used at its nominal 1 kHz sampling frequency. During the acquisition, the estimated seeing was 0.76 arcsec ($r_0 = 13.5 \text{ cm}$ at $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$). At the top of Mauna Kea, the wind speed is typically $\bar{v} = 20 \text{ m/s}$. A flat field and a background are subtract from the image. The “bad” pixels (cosmic ray events, aberrant pixels of the camera ...) are replaced by a mean of the neighbouring pixels before deconvolution.

The PSF associated with the image was retrieved from the loop data using the method described in (Véran et al., 1997). The estimated Strehl ratio is 33%. For an object of this magnitude, the precision of the estimated PSF is normally limited by the turbulence noise. The PSF estimated from the loop data should be accurate enough for a classical deconvolution. In this particular case however, uncalibrated static aberrations degrade the reconstruction and a myopic deconvolution is necessary.

Using the reconstructed PSF and a classical pixel to pixel deconvolution algorithm such as Lucy-Richardson, the deconvolved object presents two sources which seem to have a faint companion at the very same relative position. This is bound to be an artifact. This artifact can be traced to the presence of a bump on the first Airy ring of the real PSF which does not appear in the reconstructed PSF.

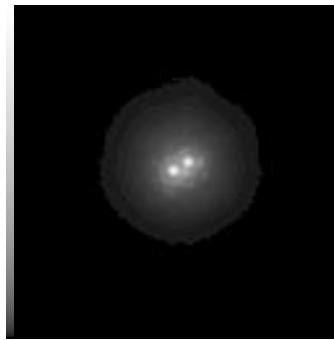


Fig. 4. AO corrected image of binary star HD203024 in H band (SR $\simeq 33\%$). 128 \times 128 pixels image corresponding to a 4.35 arcsec field of view.

The classical deconvolution (i.e, the deconvolution method using the object reparametrization but assuming that the mean PSF — estimated with WFS data — is the real one) allows, of course, the restoration of a binary star (object reparametrization). The problem is that the PSF artifacts are not taken into account. It leads to errors on the estimation of the parameters, especially on the flux.

As shown on figure 5, the real PSF can nevertheless be retrieved using our myopic deconvolution algorithm, in spite of the fact that equation 9 under-estimates PSD_h (the static aberrations are not taken into account in the PSD, because they are not seen by the WFS). After myopic deconvolution, a bump clearly appears at the first Airy ring in the the estimated PSF. We have generally noticed that with our stochastic approach no hyper-parameter is needed. Yet, in this particular case of an under-estimated PSD, one could add an *ad-hoc* hyper-parameter smaller than 1 on the PSF regularization term in equation 5 to loosen the constraint.

An even better accuracy might be obtained, if we were able to quantify the static aberration effects in the Fourier domain in order to add them in the regularization term.

In table 2, we compare the results of the classical and the myopic deconvolution method. If the estimated star separation is nearly the same in both cases, a significant difference is found in the estimated flux. According to the simulation results, the myopic deconvolution improves the global flux, and therefore the accuracy of the magnitude restoration of each star. It would be useful to have a photometric calibration star to obtain the atmospheric coefficient of absorption and to give the real magnitude of each star; unfortunately no such data are available for this observing night.

In short, the myopic deconvolution allows to take into account unpredictable phenomenons (turbulence noise, uncalibrated static aberrations ...) for a better accuracy of the object photometry.

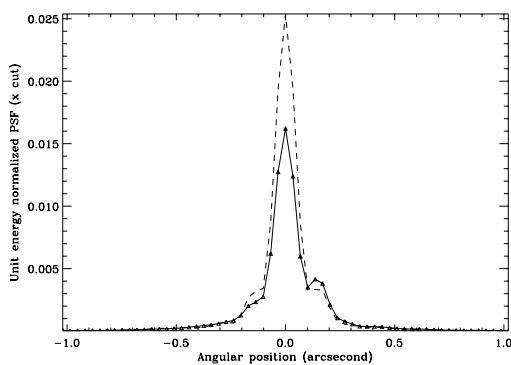


Fig. 5. Comparison of the WFS reconstructed mean PSF (dotted line) and the myopic estimated PSF (solid line). Normalized square root of x-axis cut are represented.

	Δ_{sep} (pixel)	Δ_{sep} (as)	Δm	total flux
classical deconvolution	6.58	0.224	0.10	$3.97 \cdot 10^8$
myopic deconvolution	6.58	0.224	0.13	$4.86 \cdot 10^8$

Table 2. Experimental results: Δ_{sep} is the separation between the two components, pixel unit (first column) and arcsecond units (second column), Δm the magnitude difference. Last column gives the total flux of the two components (in detected photons). In comparison, the total flux in the image is $4.86 \cdot 10^8$ detected photons.

7. Conclusions

The AO correction of an image theoretically allows to reach the diffraction limit of ground based telescope. Unfortunately this correction is always partial and the image is still blurred by the residual PSF.

In this article, we have presented a myopic deconvolution method for stellar fields based on the *a priori* knowledge we have of the object and the PSF. The object knowledge leads us to reparametrize our object model. The structure and variability of the PSF given by the WFS measurements are introduced as first (mean) and second (PSD) order moments in an *a priori* probability law.

We have shown on simulations that this technique allows a good restoration of the object (position and photometry) and of the PSF. Experimental data have been also successfully processed.

Future work should implement other probability statistics. Non-stationary Gaussian or Poisson plus Gaussian statistics should be used in order to provide a better noise model.

A current limitation of our method is that it does not include a systematic detection of stars. Up to now, the number of star is first estimated on the image then the residual of the deconvolution is checked for missed stars.

A Bernouilli-Gaussian or P-Gaussian statistic should permit the inclusion of an automatic star detection in the algorithm.

Also, the estimation of a theoretical error calculation on the star parameters should be added to better quantify the precision of the estimations.

Lastly, in the case of a field larger than the isoplanatic path, a space variant PSF could be introduced to take into account anisoplanatic effects. The advantage of our multiple-star object model in addition with a myopic approach is that one can easily incorporate one PSF for each star as additional unknowns. In that case, another regularization term should be added to account for the angular correlation of the PSF in the field.

Acknowledgements. The authors wish to thank V. Michau and G. Rousset for fruitful discussions and helpful comments.

References

- Babcock, H. W.: 1953, *Pub. Astron. Soc. Pacific* **65**, 229
- Champagnat, F., Goussard, Y., and Idier, J.: 1996, *IEEE S. P.* **44**(12), 2988
- Christou, J. C., Bonaccini, D., and Ageorges, N.: 1997, in *Adaptive Optics and Applications*, vol. 3126, SPIE , pp 68–80
- Conan, J.-M.: 1994, *Ph.D. thesis*, Université Paris XI Orsay
- Conan, J.-M., Mugnier, L., Fusco, T., Michau, V., and Rousset, G.: 1997, in *Adaptive Optics and Applications*, vol. 3126, SPIE, pp 56–67
- Conan, J.-M., Mugnier, L., Fusco, T., Michau, V., and Rousset, G.: 1998, *Appl. Opt.* **37**(21), submitted
- Conan, J.-M., Rousset, G., and Madec, P.-Y.: 1995, *J. Opt. Soc. Am. A* **12**(7), 1559
- Demoment, G.: 1989, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **37**(12), 2024
- Fried, D. L.: 1965, *J. Opt. Soc. Am.* **55**(11), 1427
- Gunsay, M. and Jeffs, D.: 1995, in *IEEE Trans. Image Proc.*, Vol. 4, pp 1602–1612, IEEE
- Hogbom, J.: 1974, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **15**, 417
- Hook, R. and Lucy, L.: 1994, in R. Hanish and R. White (eds.), *The Restoration of HST Image and Spectra II*, pp 86–92
- Knox, K. T. and Thompson, B. J.: 1974, *Astrophys. J. Lett.* **193**, L45
- Labeyrie, A.: 1970, *Astron. Astrophys.* **6**, 85
- Lucy, L.: 1994, in R. Hanish and R. White (eds.), *The Restoration of HST Image and Spectra II*, pp 79–85
- Mugnier, L. M., Conan, J.-M., Fusco, T., and Michau, V.: 1998, in *Bayesian Inference for Inverse problems*, SPIE, San Diego, CA (USA)
- Northcott, M.: 1994, in M. A. Ealey and F. Merkle (eds.), *Adaptive Optics in Astronomy*, Vol. 2201, pp 129–136, SPIE
- Rigaut, F., Rousset, G., Kern, P., Fontanella, J.-C., Gaffard, J.-P., Merkle, F., and Léna, P.: 1991, *Astronomy and Astrophysics* **250**, 280
- Roddier, F.: 1981, in E. Wolf (ed.), *Progress in Optics*, Vol. XIX, pp 281–376, North Holland, Amsterdam
- Roddier, F., Gilli, J.-M., and Lund, G.: 1982, *J. Optics (Paris)* **13**(5), 263

- Roussel, G., Fontanella, J.-C., Kern, P., Gigan, P., Rigaut, F., Léna, P., Boyer, C., Jagourel, P., Gaffard, J.-P., and Merkle, F.: 1990, *Astronomy and Astrophysics* **230**, 29
- Roussel, G., Madec, P.-Y., and Rabaud, D.: 1991, in J. M. Beckers and F. Merkle (eds.), *High-Resolution Imaging by Interferometry II*, No. 39 in ESO Conference and Workshop Proceedings, pp 1095–1104, ESO, ESO, Garching Germany
- Stetson, P.: 1987, *Publ. Astr. Soc. Pac.* **99**, 465
- Thiébaut, E. and Conan, J.-M.: 1995, *Journal of the Optical Society of America A* **12**(3), 485
- Tikhonov, A. and Arsenin, V.: 1977, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, DC
- Véran, J.-P., Rigaut, F., Maître, H., and Rouan, D.: 1997, *J. Opt. Soc. Am. A* **14**(11), 3057
- Weigelt, G.: 1977, *Opt. Commun.* **21**(1), 55

Commentaires sur l'article

Il faut noter que le critère d'attache aux données présenté dans l'article est un simple critère de moindres carrés, l'étude amenant l'utilisation d'une statistique gaussienne non uniforme pour modéliser un bruit mixte Poisson + détecteur n'ayant pas encore été menée lors de l'écriture de l'article. L'introduction de la statistique Gaussienne non-uniforme présentée au paragraphe 1.4.1 dans la méthode permet d'atteindre des précisions encore meilleures sur l'estimation des paramètres de l'objet.

De plus, si l'on suppose que l'erreur dominante dans la reconstruction de la FEP provient du bruit de turbulence, alors au vu des études menées dans l'article [Fusco-a-00b] présenté au paragraphe 4.5.1 de la partie I, on peut remarquer que l'hypothèse de stationnarité faite sur la grandeur $h(\mathbf{r}) - h_m(\mathbf{r})$ n'est pas complètement vérifiée. Ainsi, la prise en compte d'une statistique gaussienne non stationnaire pour la loi de probabilité de la FEP permettrait sans doute d'améliorer encore les résultats.

Malgré ces quelques hypothèses simplificatrices on peut noter la grande précision de restitution amenée par l'utilisation, dans la méthode de déconvolution, à la fois de la régularisation sur l'objet (reparamétrisation) et de l'aspect myope.

1.6 De la théorie à la pratique : l'algorithme MISTRAL

1.6.1 L'algorithme MISTRAL

Toutes les études que je viens de présenter ont trouvé leur application dans le développement d'un algorithme de traitement d'images corrigées par optique adaptative. Cet algorithme, appelé MISTRAL (Myopic Iterative SStep-preserving ALgorithm) est pour le moment plus spécifiquement réservé à la déconvolution myope d'objets présentant de fort contrastes (satellites naturels ou artificiels, astéroïdes, ou encore disque de matière autour d'étoiles) et consiste à minimiser le terme d'erreur (défini à partir des termes proposés aux paragraphes 1.4.1, 1.4.2 et 1.5) soit

$$J(o(\mathbf{r})) = \frac{1}{\sigma^2(\mathbf{r})} \sum_r ((h * o)(\mathbf{r}) - i(\mathbf{r}))^2 + \mu \sum_{\mathbf{r}} \left[\left(\frac{\Delta o(\mathbf{r})}{\delta} \right) - \ln \left(1 + \frac{\Delta o(\mathbf{r})}{\delta} \right) \right] + \sum_{\mathbf{f}} \frac{|\tilde{h}(\mathbf{f}) - \tilde{h}_m(\mathbf{f})|^2}{DSP_h(\mathbf{f})} \quad (1.31)$$

vis à vis de o et de h . Notons que l'on peut aussi remplacer, dans MISTRAL la régularisation L1-L2 de l'objet par une régularisation quadratique ou par une régularisation L_p ¹⁹. Une contrainte de positivité par reparamétrisation ($o = a^2$) est aussi intégrée dans l'algorithme.

1.6.2 Améliorations possibles

Bien évidemment les études sur le sujet continuent et plusieurs améliorations sont susceptibles d'être apportées au programme.

- Incorporation, dans l'algorithme, de la détection et de l'élimination des pixels aberrants dans l'images (pixels morts, rayons cosmiques ...)[Freudling-a-95]
- Introduction des hyperparamètres en tant qu'inconnues supplémentaires à estimer.
Comme on l'a vu dans le paragraphe 1.4.2, il est nécessaire d'ajuster à la main, les hyperparamètres de la régularisation par norme L1-12 (bien qu'une première estimation de leur valeur soit possible directement à partir de l'image). Il paraît alors souhaitable, de les intégrer dans le problème en tant qu'inconnues à estimer au même titre que l'objet (et la FEP).

19. La régularisation "champ stellaire" est un programme à part entière.

- Intégration de la FEP hors du problème.

On a proposé, au paragraphe 1.5 une estimation conjointe de l'objet et de la FEP à partir de l'image pour résoudre les problèmes liés à la méconnaissance de la FEP. Or seul l'objet nous intéresse. Une autre approche consiste alors intégrer la FEP hors du problème, c'est-à-dire à considérer une loi de probabilité intégrée sur toutes les FEP possibles ($\int p(h)dh$). On peut montrer ([Blanc-p-00]) que dans ce cas le critère a un meilleur comportement asymptotique.

- Études des possibilités d'obtenir de la super-résolution avec Mistral.

On a vu au paragraphe 1.4.3 que l'utilisation d'un bon modèle d'objet permet d'obtenir une précision de restitution bien supérieure à la résolution théorique du télescope. Il faudrait donc envisager de modéliser l'objet avec un échantillonnage spatial plus fin que celui de l'image. Idéalement on voudrait tendre vers la modélisation d'un objet continu. L'utilisation d'approches non-linéaires pour la déconvolution (en particulier la régularisation par la norme L1-L2) devrait alors permettre une extrapolation partielle du spectre de l'objet et donc une restitution de détails au-delà de la fréquence de coupure du télescope.

Il faut toutefois faire attention, et ne pas sur-échantillonner l'image elle même (vis-à-vis de l'échantillonnage du détecteur) avant le processus de déconvolution. En effet, dans ce cas, on introduit un lien entre pixels voisins et donc des corrélations spatiales sur le bruit (ce dernier n'est plus indépendant pixel à pixel et ne suit plus une statistique de Poisson ou de Gauss). L'idée est donc de conserver l'image avec l'échantillonnage du détecteur mais de rechercher un objet sur-échantillonné par rapport à cette dernière.

1.7 Application à des données astronomiques réelles

Le développement de MISTRAL et les performances de l'algorithme m'ont conduit à collaborer avec plusieurs astronomes et permis de déconvoyer un grand nombre de données réelles. Je ne présente ici, à titre d'exemple, qu'une partie de ces déconvolutions effectuées sur des données fournies par Franck Marchis et Claude et François Roddier. De nombreuses autres données sont en cours de traitement ou d'interprétation (observation de Titan [Coustenis-a-00, Coustenis-p-00a, Coustenis-p-00b] et de l'astéroïde Kleopatra [Hestroffer-a-00] par exemple)

1.7.1 Pré-traitements

Les données acquises au cours d'une d'observation en imagerie à haute résolution avec correction par OA sont classiquement : l'image de l'objet d'intérêt et une ou plusieurs images d'un objet non résolu par le télescope (afin d'obtenir une estimation de la FEP). Bien évidemment ces données nécessitent d'être pré-traitées avant qu'un processus de déconvolution leur soit appliqué. Les pré-traitements nécessaires pour nettoyer l'image sont :

- correction du fond de ciel et du "flat" de la caméra d'imagerie;
- correction des pixels morts ou aberrants, par application d'un filtre médian (par exemple);
- correction du bruit coloré (dû à la lecture du CCD). Cette dernière ce fait en localisant et éliminant des pics dans le plan de Fourier;
- conversion de l'image en photons (i.e multiplication par le gain de la caméra);
- estimation du bruit de détecteur et du bruit de fond de ciel (utilisation des caractéristiques du détecteur et d'une étude statistique du fond de ciel). Notons que si ces données ne sont pas disponibles, une estimation de la variance de ces bruits peut se faire en utilisant l'image elle même. Pour cela, on considère qu'après soustraction du fond, les 2 bruits ont une statistique gaussienne à moyenne nulle. Dans ce cas, on peut aisément montrer que l'écart-type de la loi de

probabilité peut être estimé sur les pixels de l'image ayant une valeur négative en utilisant la relation suivante²⁰:

$$\sigma_{detect}^2 = \frac{\pi}{2} \left(\langle \mathbf{i}(r) \rangle_{(r; \mathbf{i}(r) \leq 0)} \right)^2. \quad (1.32)$$

Cette valeur de σ_{detect}^2 est alors utilisée pour l'estimation globale du bruit dans le processus de déconvolution (voir équation 1.13).

1.7.2 L'astéroïde Vesta observé à l'Observatoire de Haute Provence

Ce paragraphe reprend, en les développants les résultats présentés sur l'astéroïde Vesta dans [Conan-p-98]. J'ai choisi de détailler plus spécifiquement cet exemple de traitement par rapport à ceux présentés dans les paragraphes suivants car j'ai ici, à la fois participé à la campagne d'observation (définition des observations et acquisition des images sur site) et au pré-traitement des images obtenues, puis j'ai déconvolué et interprété les résultats afin de les valider et de démontrer ainsi l'intérêt de l'utilisation de MISTRAL. Les résultats, bien que moins impressionnantes que ceux obtenus, par la suite, sur des télescopes de plus grands diamètres, sont les premiers obtenus sur données réelles par MISTRAL et ont en grande partie permis de donner confiance en la méthode et en ses possibilités.

Rappels sur Vesta

Vesta est le troisième Astéroïde par ordre de tailles (Céres, Pallas, Vesta). D'un diamètre moyen de 520 km, il se situe à une distance moyenne de 2.4 U.A du soleil dans la ceinture d'astéroïdes. C'est un ellipsoïde qui a une période de rotation de 5.34 heures. Vesta est l'astéroïde ayant la composition géologique la plus diversifiée. Son albédo moyen (0.38) est relativement élevé par rapport aux autres astéroïdes. Sa composition n'est pas uniforme, si bien que son albédo varie de manière significative sur la surface. Ces différences d'albédo sont assimilées à des cratères d'impacts ou des coulées de lave. L'étude de Vesta, qui est resté quasiment intact depuis la formation des planètes, permet d'obtenir des connaissances essentielles sur l'évolution du système solaire.

Les observations

L'astéroïde Vesta a été observé à l'Observatoire de Haute Provence (OHP) dans la nuit du 27 au 28 septembre 1997 sur le télescope de 1.52 m au foyer duquel se trouvait le Banc d'Optique Adaptative (BOA) [Madec-a-97]. L'asservissement a été effectué sur Vesta lui-même (magnitude visuelle = 6.6). Vesta a été observé 8 fois durant 3 heures et 27 minutes. Le temps de pose de chaque run d'observation était 6 minutes (temps max pour éviter un effet de bouger dû à la rotation de l'astéroïde). Entre chaque acquisition de Vesta, l'image d'une étoile de référence (soit 7 images) (63 Ceti) a été obtenue (une densité (0.4) sur l'étoile de référence permet d'égaliser les flux) ainsi qu'une acquisition de fond de ciel et une mesure des paramètres atmosphériques en boucle ouverte (permettant l'estimation du L_0 , r_0 etc ...). Les observations ont été effectuées à $0.85\mu\text{m}$ soit près de la bande d'absorption du pyroxène et de l'olivine. Cela va traduire par un albédo faible, dans les zones riches en diogénite, c'est-à-dire les zones où la croûte a été partiellement ou totalement détruite, laissant apparaître les couches plus profondes du manteau [Dumas-p-96, Dumas-a-96a, Dumas-a-96b].

La série d'images de Vesta corrigées par OA est présentée en figure 1.22. Chaque image (et chaque FEP) est corrigée de la rotation de champ due au télescope (360 degrés en 24 heures). De même, je présente en figure 1.23 les images de l'étoile de référence 63-Ceti prises entre 2 acquisitions de Vesta.

20. On suppose ici que les pixels dont les valeurs sont inférieures à zéro en présence de bruit vaudraient zéro en cas d'absence de bruit.

Les images de Vesta et de 63-Ceti sont pré-traitées (soustraction de fond, éliminations des pixels morts et des pixels aberrants, conversion en nombre de photons).

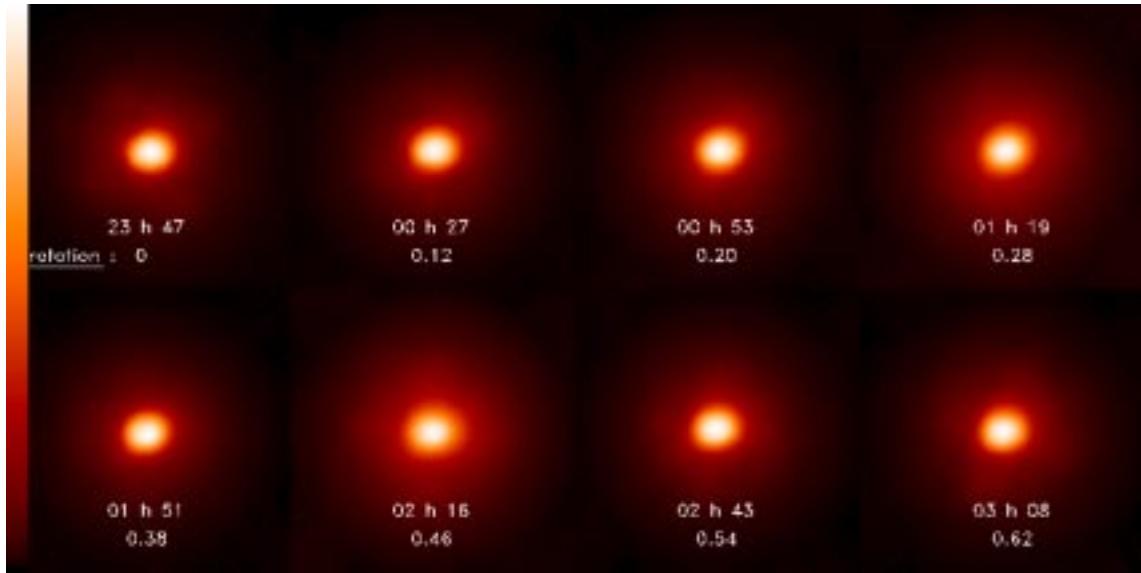


FIG. 1.22 – *Images de Vesta corrigées par OA.* Ces images sont corrigées de la rotation de champ. Le champ total de chaque image est de 3.5 arcsec, D/r_0 de 20 à la longueur d'onde d'imagerie (0.85 μm) , Le rapport de Strehl évolue entre 10 et 2 %

63 Ceti étant une étoile non-résolue, on peut aisément estimer le rapport de Strehl pour chaque image de l'étoile de référence. On peut avoir ainsi une idée de l'évolution du Strehl au cours des 3 heures d'acquisitions (voir figure 1.24). Cette variation est assez importante pour 2 valeurs avec une chute d'un facteur 5 par rapport à sa valeur maximale (de 0.1 à 0.02). Cette variation est aussi visible sur la série d'images de Vesta où certaines images sont moins bien corrigées (c'est-à-dire plus étendues) que d'autres (en particulier la 4^{ième} et la 6^{ième}).

Pour comprendre ces variations du rapport de Strehl, je vais me pencher sur l'étude des différents paramètres qui pourraient influencer la qualité de correction (flux reçu, r_0). La méthode de correction étant la même pour toutes les séries d'images, les seuls facteurs susceptibles de faire évoluer le Strehl sont les paramètres atmosphériques. Intéressons nous, dans un premier temps à l'évolution de r_0 durant la période d'acquisition. Les valeurs de r_0 sont calculées à partir de données en boucle ouverte enregistrées par l'ASO avant chaque acquisition. Ces valeurs sont présentées en figure 1.25. On remarque que, si r_0 est important en début de nuit (aux alentours de 6 cm), il chute à 4 cm après environ une heure d'observation puis reste globalement constant. La chute observée du Strehl n'est donc pas uniquement due à une chute de r_0 . L'évolution de la qualité de correction est donc, vraisemblablement, la conséquence d'une combinaison de la chute de r_0 et d'une perte de flux. Cette perte ne peut être expliquée, sur l'étoile de référence (dont la magnitude est constante à la différence de Vesta dont l'albédo évolue) que par une absorption plus importante lors de la traversée de l'atmosphère (évolution de l'angle zénithal au cours du temps, apparition de brume ...). Cette perte de flux se vérifie sur la courbe 1.26²¹. A partir des séries d'images et de FEP obtenues, il semble évident qu'une déconvolution myope va être nécessaire pour obtenir une bonne restauration de Vesta.

21. Au vue de ces résultats, il faudra estimer le pourcentage de perte de flux subit par 63 Ceti et l'extrapoler sur Vesta pour pouvoir remonter à une bonne photométrie entre les différentes images de Vesta.

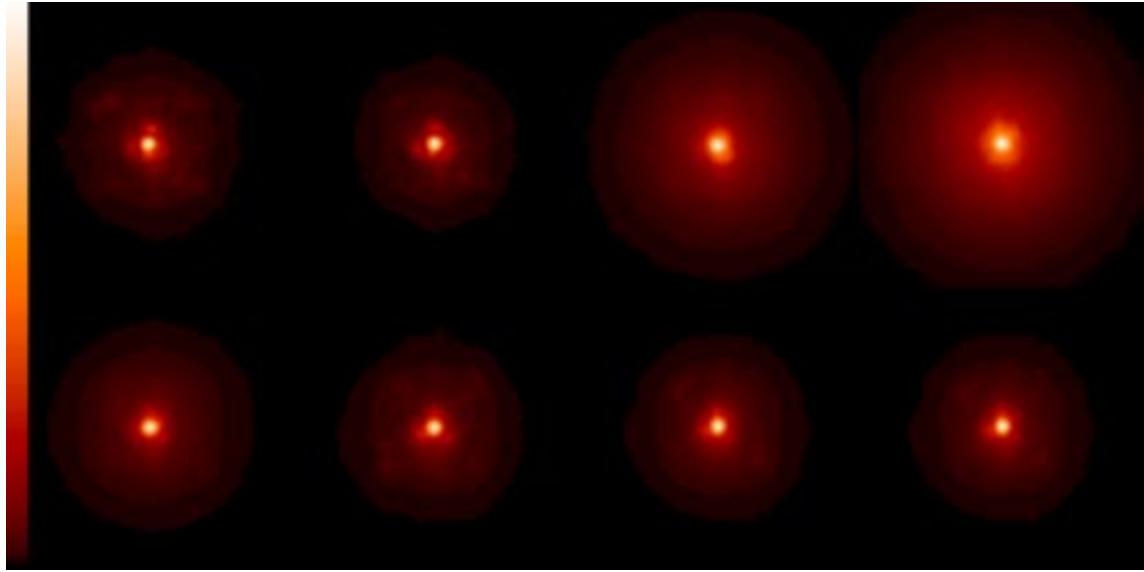


FIG. 1.23 – images de l'étoile de référence 63-Ceti corrigées par OA.

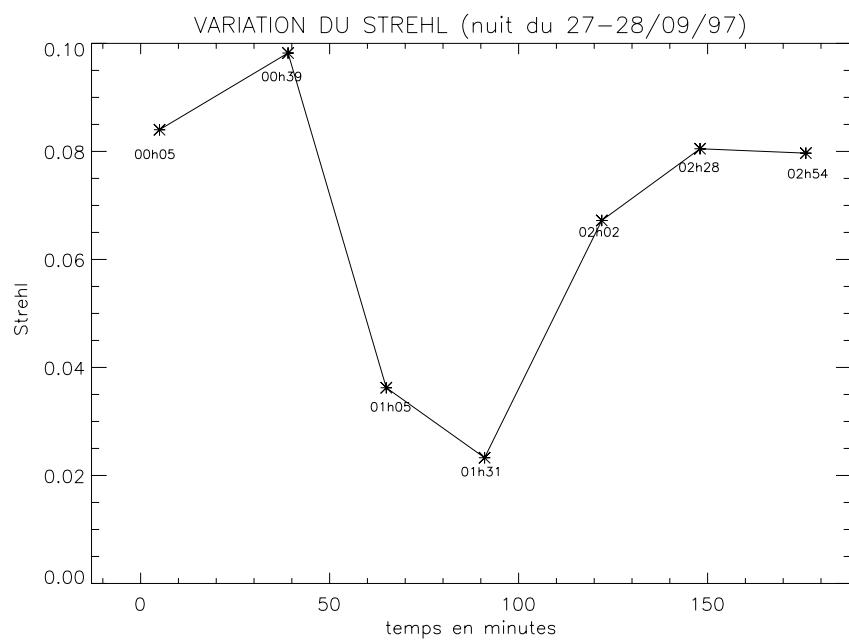


FIG. 1.24 – Évolution du rapport de Strehl durant la nuit du 27 au 28/09/1998. Le SR est estimé sur les images de la PSF de référence.

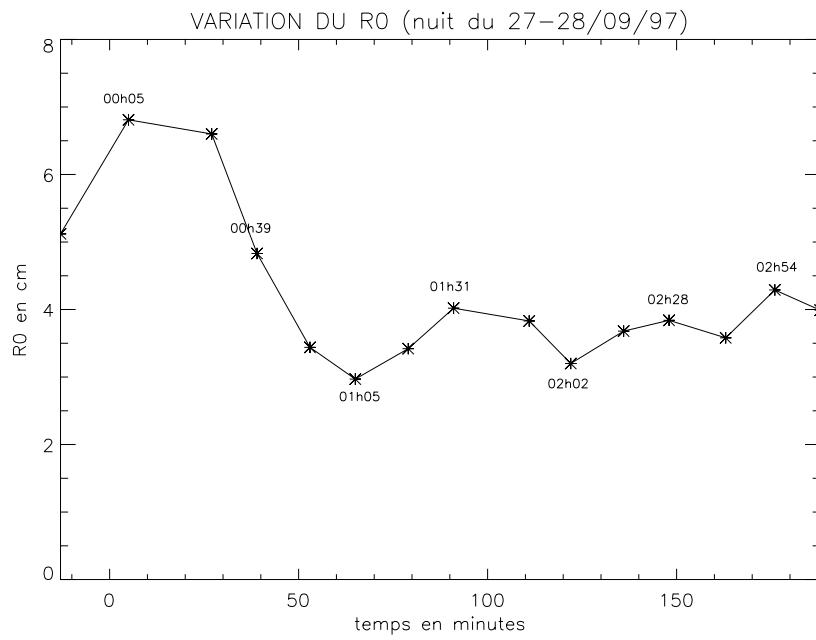


FIG. 1.25 – Évolution de r_0 (à 0.5 μm) durant la nuit du 27 au 28/09/1998. r_0 est estimé grâce aux données de l'analyseur en boucle ouverte

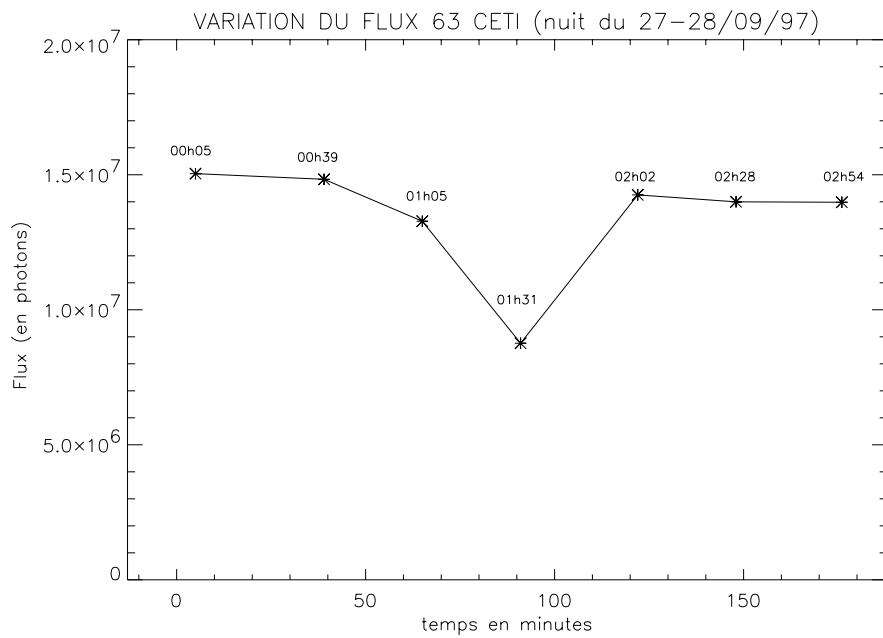


FIG. 1.26 – Évolution du flux de 63 Ceti durant la nuit du 27 au 28/09/1998.

La déconvolution myope

Pour effectuer cette déconvolution myope, j'utilise, dans un premier temps la série de FEP de référence pour calculer une FTO moyenne et une DSP comme décrit dans les équations 1.26 et 1.27 du paragraphe 1.5.1 de cette partie. Un bruit gaussien uniforme est considéré (à l'époque du traitement (mi-1998), seul ce terme d'attache aux données était disponible). Enfin, Vesta étant un objet à bord franc, on utilise une régularisation L1-L2. Les hyperparamètres μ et δ sont directement calculés à partir de l'image comme présenté au paragraphe 1.4.2. Il faut remarquer, que la première estimée des hyperparamètres était suffisamment précise pour que ce choix initial soit retenu. Une légère variation des valeurs de μ et δ a été effectuée (dans une gamme de l'ordre d'une décade), sans que cela ne dégrade ou n'améliore sensiblement les résultats. Cela confirme, sur données réelles les comportements déjà observés sur simulations, à savoir que l'estimation "grossière" des hyperparamètres directement sur l'image est suffisamment précise pour donner de bons résultats et que la sensibilité des résultats vis-à-vis de ces hyperparamètres n'est pas très importante (dans une gamme de l'ordre de quelques unités). Il va donc être relativement facile, avec un peu d'expérience, de fixer les hyperparamètres adéquats pour un type d'objet observé.

Les résultats de la déconvolution de la série d'images de Vesta sont présentés sur la figure 1.27.

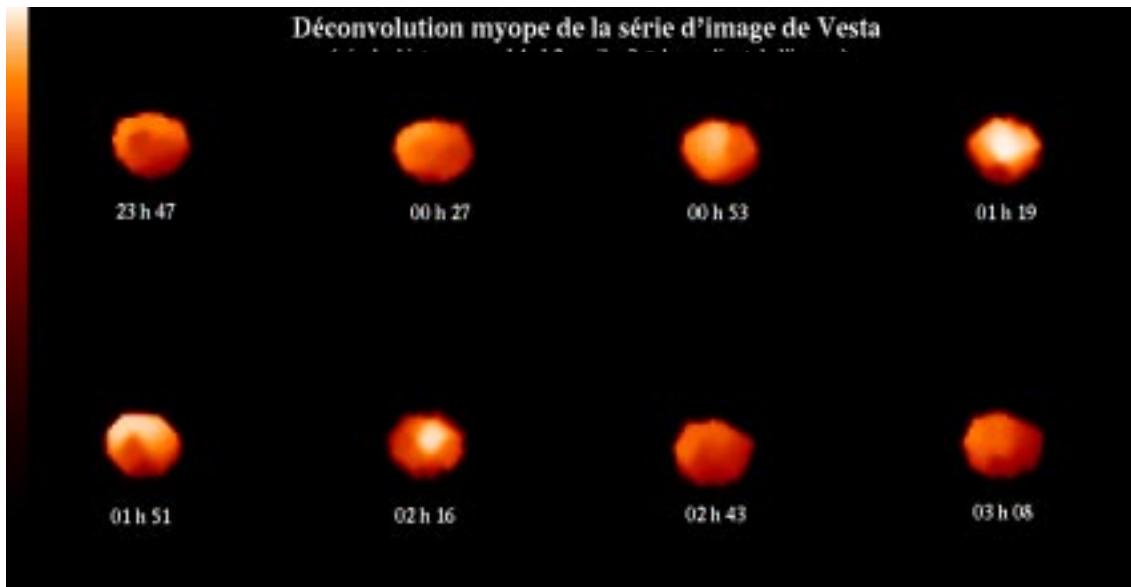


FIG. 1.27 – Série d'images de Vesta déconvoluées par la méthode myope avec une régularisation par norme L1-L2. Le champ total par image est de 1.74 arcsec.

On constate sur cette série de résultats l'apparition de structures sur Vesta, et notamment des zones sombres (dues à la présence de pyroxène et d'olivine). On observe, en outre, l'évolution de ces structures au cours du temps (et donc de la rotation de l'astéroïde). Il est alors intéressant, à partir des résultats obtenus d'étudier les variations du flux et de la surface de l'astéroïde (Vesta n'est pas une sphère mais un ellipsoïde) .

Évolution du flux et de la forme de Vesta au cours d'une rotation

Intéressons nous dans un premier temps aux variations de l'aire de Vesta. On peut espérer avoir une bonne estimation de l'aire avec nos techniques de déconvolution. En effet, cette estimation requiert

une bonne restitution des bord francs de l'objet, l'utilisation de MISTRAL est donc particulièrement adaptée pour ce genre d'étude. Les différentes images de Vesta déconvolées vont donc nous fournir une estimation des variations de l'aire (nombre de pixels au dessus d'un certain seuil). La figure 1.28 montre les variations relatives de l'aire de Vesta, exprimées en magnitude (i.e $-2.5 * \log_{10}(\frac{\text{aire}}{\text{aire moy}})$). Elles sont bien périodiques, la période étant d'une demi-rotation (soit 2.67 heures). Notons que cette

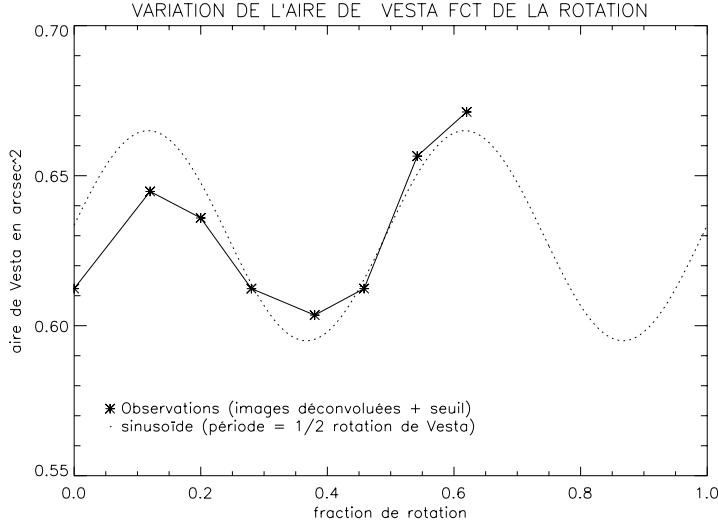


FIG. 1.28 – variations relatives de l'aire de Vesta au cours du temps (exprimées en écart de magnitude)

courbe est en accord avec la courbe 15 de l'article de Drummond [Drummond-a-97].

Intéressons nous, à présent aux variations du flux de Vesta au cours du temps. Il s'agit, avant tout, de corriger les variations de flux dues à l'absorption atmosphérique. Pour ce faire, j'utilise les images de 63-Ceti. La magnitude de cette étoile étant constante, le flux reçu par le détecteur devrait l'être également si aucun paramètre extérieur ne vient troubler la mesure. Or on peut observer sur la figure 1.26, que le flux de 63 Ceti varie. Il y a deux phénomènes qui interviennent :

- une décroissance faible et linéaire qui est probablement due à la baisse de 63-Ceti sur l'horizon. La lumière traverse plus d'atmosphère, elle est donc plus absorbée, le flux reçu diminue en conséquence.
- en plus de la décroissance linéaire, il y a une chute brutale et limitée dans le temps aux alentours de 1h30 qui est probablement due à un sirus qui a masqué l'étoile et a absorbé une partie du flux.

On peut tracer la correction à apporter au flux de 63-Ceti en fonction du temps pour que ce dernier soit uniforme. Cette correction est représentée sur la figure 1.29. Le facteur de correction à appliquer à Vesta est calculé à partir des valeurs données en figure 1.29 (le pic de 1h30 a été exclu lors du calcul de l'interpolation des valeurs).

Les variations du flux de Vesta estimé ici sont compatibles avec celles présentées par Drummond [Drummond-a-97]. On peut donc étudier à présent sur la figure 1.30 les variations relatives du flux de Vesta ainsi corrigé (en magnitude) en regard des variations d'aire. Les images déconvolées sont ainsi exploitables pour une étude de la surface de Vesta, les variations de flux sur l'astéroïde donnant des informations sur sa composition géologique et donc des informations sur la formation et l'évolution du système solaire.

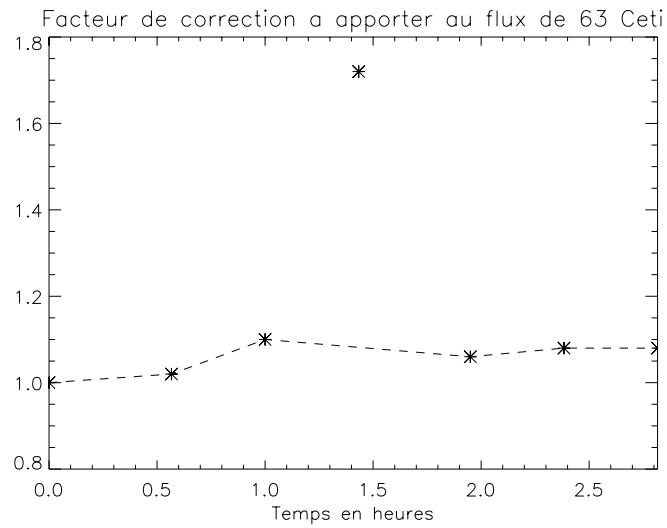


FIG. 1.29 – Facteur multiplicatif de correction à apporter au flux pour que ce dernier soit constant au cours du temps. En pointillé la courbe interpolée à partir des mesures.

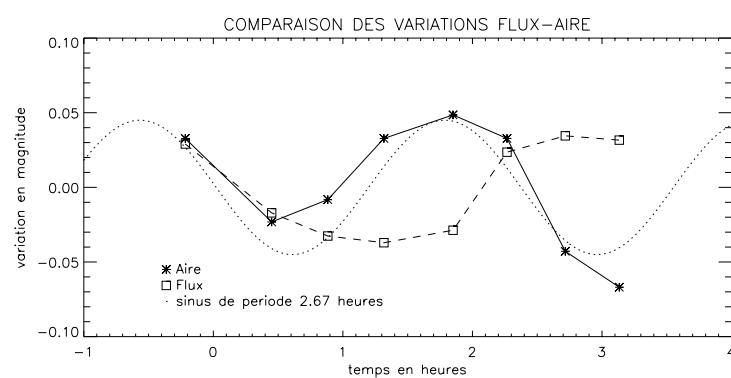


FIG. 1.30 – Comparaison des variations de flux et d'aire (exprimées en écart de magnitude)

1.7.3 Ganymède

Ganymède a été découvert en 1610 par Simon Marius et Galileo Galilei. Ganymède est non seulement la plus grande des lunes de Jupiter mais aussi la plus grande lune de tout le système solaire. Son diamètre est de 5 262 km²². Le cœur du satellite est rocheux, son manteau est essentiellement composé de glace et de silicates, et il est probablement recouvert, en surface d'une mince couche de glace. De part son évolution géologique tourmentée, la surface de Ganymède est composée de montagnes, vallées, cratères et coulées de lave, si bien que des régions brillantes et sombres sont observables à sa surface.

Une observation de Ganymède a été effectuée, comme pour Vesta, sur le 1.52 m de l'OHP avec BOA, le 28 septembre 1997 à 20:18 UT. Ganymède lui-même a été utilisé pour l'analyse de surface d'onde ($m_v = 4.6$, diamètre angulaire $\simeq 1.7$ secondes d'arc). Les conditions d'observation étant particulièrement mauvaises ($D/r_0 \simeq 23$ à la longueur d'onde d'imagerie $\lambda = 0.85 \mu\text{m}$), le rapport de Strehl estimé n'est que de 5%. Le temps de pose est de 100 secondes. On présente sur la figure 1.31 l'image corrigée



Image corrigée par OA

image déconvolée par MISTRAL

Base de donnée du JPL
remerciements à NASA/JPL/Caltech

FIG. 1.31 – *Ganymède observé à l’OHP avec BOA et déconvolée par MISTRAL. On présente, pour comparaison, une image en bande large issue de la banque de données du JPL (<http://space.jpl.nasa.gov/>) et provenant du survol de Ganymède par les sondes spatiales Voyager et Galileo.*

par OA, l'objet restitué par MISTRAL et, pour comparaison une vue calculée à partir d'images de sondes spatiales et obtenue sur le site de JPL²³ (<http://space.jpl.nasa.gov/>). Bien évidemment l'image de sonde a une résolution bien meilleure que celle obtenue depuis le sol par un télescope de 1.52 mètre (même en l'absence de turbulence). On remarque, néanmoins, la bonne correspondance entre les zones brillantes et sombres, en particulier le point brillant en bas du satellite, la zone sombre en haut à droite et la bande brillante en haut gauche.

1.7.4 Io

Comme Ganymède, Io a été découvert par Simon Marius et Galileo Galilei. Io est le 3^{ième} satellite de Jupiter par ordre de taille (Ganymède, Callisto, Io, Europe). Il en est aussi le plus proche (421 600 km en moyenne). Il est ainsi soumis à de forts effets de marées qui provoquent une activité volcanique intense à sa surface. Un grand nombre de volcans (21 volcans actifs) ont été mis en évidence lors du survol du satellite par les sondes spatiales Voyager 1 et 2. Toutefois, les survols par des sondes

22. Soit un diamètre seulement 2.5 fois plus petit que celui de la terre et légèrement plus grand que celui de Mercure.

23. JPL : Jet Propulsion Laboratory

(ponctuels et très peu nombreux) ne permettent pas une étude de l'évolution temporelle de l'activité volcanique de Io. Cette étude, nécessaire à la compréhension des phénomènes complexes liant Jupiter à son satellite, ne peut se faire que depuis la terre. A ce titre, une OA et un algorithme de traitement d'images performant sont nécessaires pour obtenir à la fois la résolution angulaire et la photométrie précise indispensables à ce genre d'études.

Io a été observé par l'optique adaptative ADONIS [Beuzit-p-94] (système à 52 actionneurs) sur le télescope de 3.6 m de l'ESO à La Silla (Chili). Le système d'OA est couplé avec la caméra d'imagerie thermique COMIC. Les observations ont eu lieu entre Octobre 1996 et Décembre 1999 [Marchis-t-00, Marchis-a-00a]. Classiquement, Io est observé alors qu'il se trouve dans l'ombre de Jupiter. Cela permet éviter le phénomène d'émission de Jupiter et donc augmenter la sensibilité des détecteurs infrarouges. Pour les observations présentées ici, Io n'est pas observé en éclipse ce qui nous permet d'étudier les 2 faces du satellite.

Pour chaque nuit d'observation, des séries d'images de Io et des séries de FEP de référence ont été obtenues. Un exemple d'image et de FEP de référence est présenté en figure 1.32. Cette image a été obtenue en bande L'²⁴, l'analyse de front d'onde a été effectuée sur Io lui-même (le satellite a une magnitude visuelle de 5 et une taille angulaire d'environ une seconde d'arc). Le rapport de Strehl est estimé sur une FEP de référence acquise après l'observation et vaut 48 %. Le seeing est de 0.8 seconde d'arc.

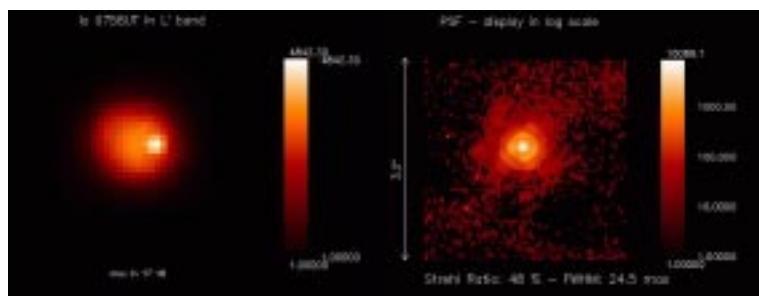


FIG. 1.32 – Un exemple de données : Image de Io et d'une FEP de référence obtenue à l'observatoire de La Silla avec ADONIS. Il faut noter que seul le volcan Loki est détecté sur la surface du satellite. L'observation est effectuée en bande L' (3.8 μ m) et le rapport de Strehl estimé sur la FEP de référence est d'environ 48 %.

Les données acquises aux cours des 3 ans d'observations ont ensuite été traitées avec MISTRAL. Afin de valider les résultats obtenus sur données réelles des simulations ont été effectuées par F. Marchis [Marchis-a-00b], notamment en ce qui concerne la photométrie.

Je présente en figure 1.33 un exemple de déconvolution sur deux images de Io obtenues durant une même nuit. La présence de Loki (volcan très actif) déjà visible sur les images brutes est bien sûr confirmée, mais l'aspect myope et la régularisation L1-L2 préservant les bords francs de l'objet permettent de détecter plusieurs points chauds secondaires tel que Pele-Pillan et Kanehikili. Les résultats sont en adéquation avec ceux obtenus par la sonde Galilé munis du spectrographe NIMS.

Le traitement et l'étude de la totalité des images de Io a permis une étude des variations de l'activité volcanique sur Io au cours de 3 années observations. Les simulations, résultats et interprétations sont présentés dans [Marchis-a-00a] et [Marchis-a-00b], mais ont aussi fait l'objet de plusieurs communications dans différentes conférences [Prangé-p-99, Marchis-p-00b, Marchis-p-00c] ou workshops [Marchis-p-00a].

24. Bande L': 3.8 ± 0.2 μ m

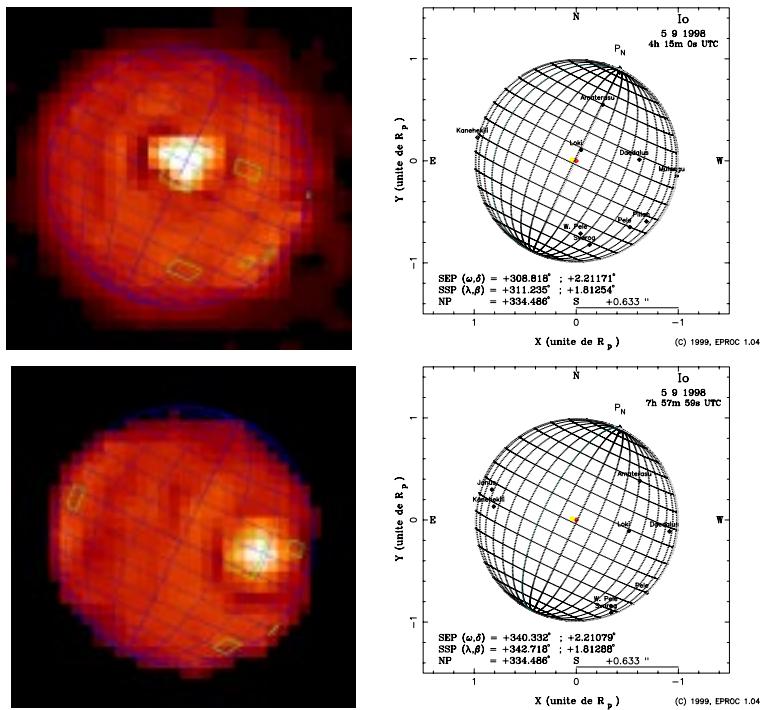


FIG. 1.33 – Un exemple de résultats : 2 images consécutives de Io déconvoluées par MISTRAL.

1.7.5 Uranus

Découverte par William Herschel en 1781, Uranus est la 3^{ième} plus grosse planète du système solaire avec son diamètre équatorial de 51 800 km²⁵. Uranus, comme toutes les géantes gazeuses possède des anneaux (ces derniers n'ayant été découverts qu'en 1977). La première étude de ces anneaux a été faite au cours de leur survol par les sondes Voyager. L'atmosphère d'Uranus est essentiellement composée d'hydrogène (83 %), d'hélium (15%) et de méthane (2%). L'atmosphère est formée de nuages dont la latitude est constante²⁶.

Uranus a de nombreux satellites, certains relativement gros (entre 471 et 1 580 km de diamètre) ont été découverts par W. Herschel (Titania et Obéron), W. Lassell en 1851 (Umbriel et Ariel) et G. Kuiper en 1948 (Miranda). D'autres, bien plus petits, n'ont été découverts que lors du survol d'Uranus par Voyager 2. Ces lunes, dont la plus grosse (Puck) a un diamètre de 144 km et la plus petite (Cordélia) un diamètre de 26 km ont des magnitudes visuelles fortes (supérieures à 20) mais surtout sont situées proches du disque planétaire et donc très difficilement observables en imagerie directe depuis le sol.

Pour étudier à la fois son atmosphère, ses anneaux et pour tenter d'imager ses petits satellites, Uranus a été observé, le 2 mai 1999, par ADONIS en utilisant la caméra SHARP+ (Rockwell NICMOS3 entre 1.2 et 5 μm). L'analyse de front d'onde est faite sur la planète elle-même (3.5 arcsec d'étenue spatiale, magnitude visuelle : 5.52). Le seeing particulièrement favorable de 0.5 arcsec a permis d'atteindre d'excellents degrés de correction (un rapport de Strehl de 48 % en bande K). Les images d'Uranus ont été obtenues pour différentes bandes (J, H et K)²⁷. L'utilisation d'un objet étendu dé-

25. 4 fois le diamètre terrestre

26. Uranus ayant une axe de rotation particulièrement incliné, on remarquera sur les images que les bandes de nuages suivant les latitudes sont orientées quasiment nord-sud.

27. bande J = $1.25 \pm 0.15 \mu m$, bande H = $1.65 \pm 0.175 \mu m$ et bande K = $2.20 \pm 0.2 \mu m$

grade les performances de l'ASO, et donc la mesure de FEP de référence sur un objet ponctuel entraîne une estimation imprécise de la FEP du système. La déconvolution myope est alors nécessaire pour obtenir une bonne restitution de l'objet. On présente en figure 1.34 3 images d'Uranus après déconvolution pour les 3 bandes d'imagerie J, H et K. On observe, en bande J et H, les bandes nuageuses sur la planète elle même alors qu'en bande K, l'absorption par le méthane présent dans l'atmosphère d'Uranus permet de faire ressortir les anneaux et les satellites de la planète. En particulier on observe sur l'anneau *epsilon* (anneau extérieur) une anomalie longitudinale.

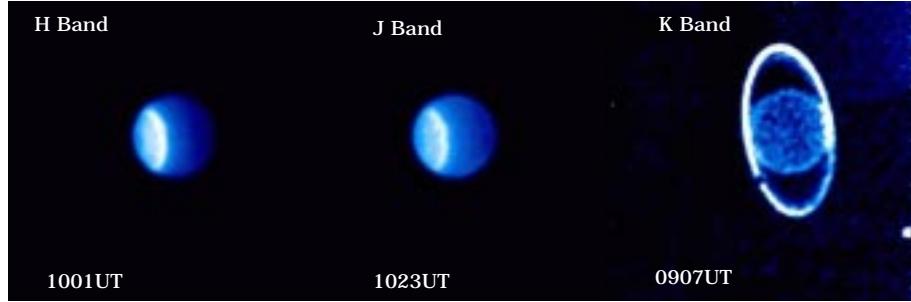


FIG. 1.34 – *Uranus observé par ADONIS et déconvolué par MISTRAL en bande J, H et K. La taille du pixel est de 100 marcsec.*

En étudiant les faibles niveaux d'intensité des images déconvolues en bande J et H (affichage logarithmique avec saturation de la planète) on voit clairement apparaître (voir figure 1.35) l'anneau *epsilon* ainsi que d'autres anneaux intérieurs. La déconvolution par MISTRAL permet en outre de mettre en évidence la présence de satellites extérieurs tels Ariel, Miranda et Puck (ces derniers étant aussi observées sur des images déconvolues avec des algorithmes plus “classiques” du type Richardson Lucy), mais aussi de satellites plus proches de la planète (Portia, Rosalinda, Bianca et Juliet) et de magnitudes encore plus fortes (magnitude visuelle supérieure à 21). C'est, à ma connaissance, la première observation directe de ces satellites depuis le passage de la sonde Voyager 2. Leur observation est importante car la comparaison de leur position avec celle prévue par les éphémérides pourrait permettre de contraindre certains modèles physiques et permettre une avancée dans la théorie du mouvement des satellites [Marchis-p-99].

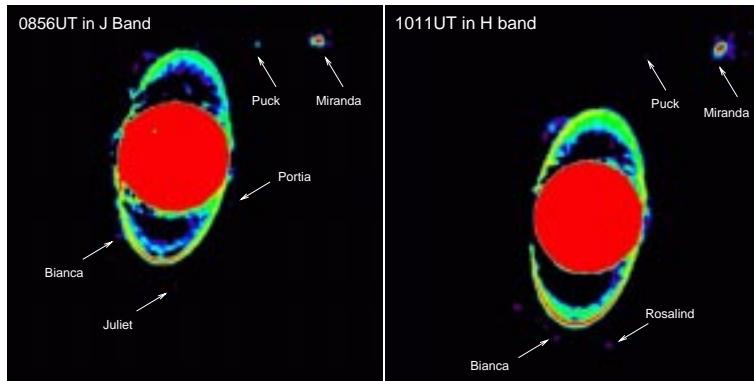


FIG. 1.35 – *Images d'Uranus (bande J et H) déconvolues par MISTRAL et affichées en échelle logarithmique pour faire ressortir les bas niveaux d'intensité. On observe notamment plusieurs anneaux et des satellites de très fortes magnitudes (observés pour la première fois grâce à Voyager en 1986).*

1.7.6 Neptune

Neptune est la plus éloignée des planètes géantes gazeuses. Elle fut découverte le 23 septembre 1846 par Johann G. Galle grâce aux prédictions mathématiques de Urbain Le Verrier. Son diamètre équatorial est de 9 500 km²⁸. Neptune est essentiellement composée d'un mélange de roche fondue, d'ammoniac, d'eau et de méthane (c'est d'ailleurs ce dernier qui lui donne sa couleur bleue). Neptune est une planète dynamique dont l'atmosphère est, à l'instar de celle de Jupiter, le théâtre de phénomènes climatiques impressionnantes, avec des vents soufflant jusqu'à 2 000 km/heure.

Neptune a été observé par Claude et François Roddier en novembre 1997 et juillet 1998 au CHFT²⁹ (télescope de 3.6 de diamètre) avec l'optique adaptative "Hokupa'a" [Roddier-p-94](OA à courbure possédant 36 actionneurs). La très bonne qualité des images obtenues a permis d'observer pour la première fois depuis le sol l'activité atmosphérique de Neptune. La figure 1.36 montre 3 images de Neptune prises le 6 juillet 1998 dans la bande d'absorption du méthane ($1.72 \mu m$) et déconvoluée par MISTRAL. Pour cette bande, l'atmosphère吸 une grande partie de la lumière permettant ainsi d'obtenir de forts contrastes sur les nuages. Les trois images permettent de suivre l'évolution de structures fines dans les formations nuageuses. On remarque en particulier des séries de points brillants situés sous la bande nuageuse la plus au sud. Ces motifs réguliers n'avait jamais été observés jusqu'ici et il pourrait s'agir, d'après F. Roddier et C. Roddier d'indications sur la présence d'ondes de gravité dans l'atmosphère de Neptune. Afin d'améliorer le rapport signal à bruit et de vérifier

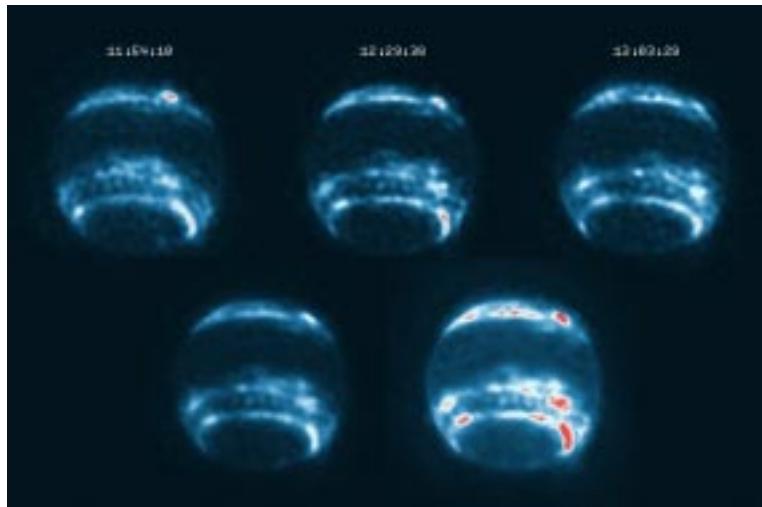


FIG. 1.36 – *Images déconvolées par MISTRAL de Neptune. Les images ont été obtenues avec Hokupa'a au CFHT. En haut : 3 images de 600 secondes de temps de pose, prisent respectivement à 11:51, 12:29 et 13:03 UT. En bas : addition des 3 images du haut corrigées de la rotation de la planète. L'intensité dans l'image de droite a été diminuée pour faire ressortir les bas niveaux.*

que les structures fines ne sont pas des artefacts de déconvolution, les 3 images déconvolées ont été additionnées après avoir été corrigées de l'effet de rotation de la planète. L'image ainsi obtenue est présentée en bas à gauche de la figure 1.36, la racine carrée de cette image est présentée en bas à droite de la figure pour faire ressortir les détails les plus faibles.

28. soit presque 4 fois le diamètre de la terre.

29. Canada-France-Hawaii Telescope

1.8 Conclusion

J'ai présenté dans ce chapitre une approche probabiliste du problème de déconvolution. Cette approche dite "maximum *a posteriori*" (MAP), consiste à estimer l'objet le plus probable connaissant l'image. Elle conduit à la minimisation d'un critère composé d'un terme d'attache aux données (obtenu à partir de connaissances sur les statistiques des différents bruits présents dans l'image) et d'un terme de régularisation portant sur l'objet. Ce dernier permet d'éviter l'amplification du bruit lors du processus de reconstruction. Il permet aussi selon le type d'objet observé, de prendre en compte certaines de ses caractéristiques (bords francs, points sources ...) pour améliorer la restitution et éviter les artefacts classiques de la déconvolution (effet de Gibbs notamment). Enfin, dans certains cas, une résolution spatiale bien meilleure que la résolution théorique du télescope peut être obtenue.

Dans le cas d'observations réelles, la FEP du système n'est jamais connue parfaitement. Des estimations plus ou moins précises de cette dernière sont possibles mais cette méconnaissance de la FEP peut entraîner des erreurs importantes sur l'objet estimé. Ainsi, nous proposons ici une généralisation de notre approche probabiliste de la déconvolution à la recherche conjointe de l'objet et de la FEP. Dans ce cadre de déconvolution "myope" les estimations imparfaites de la FEP sont utilisées pour calculer un terme de régularisation permettant de contraindre le problème d'obtenir une très bonne restitution à la fois de l'objet et de la FEP.

A partir de ces études, un algorithme de déconvolution MISTRAL a été développé. MISTRAL (Myopic Iterative STep-preserving ALgorithm) contient une grande partie des développements théoriques présentés dans ce chapitre. Un effort particulier a été fait pour rendre l'utilisation de cet algorithme la plus aisée possible. J'ai utilisé MISTRAL sur des données expérimentales provenant de divers télescopes et de divers systèmes d'OA (BOA à l'OHP, ADONIS à la Silla, PUEO et Hokupa'a au CFHT). Ces traitements de données réelles ont produit des très bons résultats (bien supérieurs à ceux obtenus en utilisant des algorithmes plus classiques de déconvolution). Ces résultats, ont fait ou vont faire l'objet de nombreuses publications astrophysiques.

Pour finir, il convient de rappeler que tous les développements proposés dans ce chapitre ne sont valables que si la FEP est invariante par translation dans le champ, ou autrement dit si l'on peut effectivement assimiler l'image observée à un produit de convolution entre l'objet d'intérêt et la FEP du système (plus du bruit, bien évidemment). Or ceci n'est vrai que pour des champs de vue relativement réduits de l'ordre de quelques secondes d'arc aux longueurs d'onde visibles jusqu'à quelques dizaines de secondes d'arc aux longueurs d'onde infrarouges. Il est donc nécessaire, si on veut traiter des images à grand champ corrigées par OA de développer de nouvelles méthodes de traitement d'image permettant de prendre en compte la variabilité spatiale de la FEP.

Chapitre 2

Traitemet d'images anisoplanétiques corrigées par OA

2.1 Introduction

Si le chapitre 1 de cette deuxième partie traite de nouvelles méthodes de déconvolution permettant de restituer l'objet observé à partir des images corrigées par OA, ces méthodes sont limitées à un champ réduit dans lequel la FEP peut être supposée invariante par translation, c'est-à-dire un champ où la correction par OA est supposée identique en tout point. Or, comme on l'a vu au chapitre 4 de la partie I, l'évolution spatiale de la phase turbulente rend ce domaine relativement restreint. Il est donc impossible d'appliquer, en l'état, les méthodes proposées au chapitre 1 sur des images à grand champ corrigées par OA.

Je vais, dans ce chapitre, m'intéresser au problème du traitement *a posteriori* de ces images à grand champ. Après avoir présenté, au paragraphe 2.2, les effets de la variation de la FEP dans le champ sur la déconvolution et avoir introduit la définition d'un angle isoplanétique pour la déconvolution d'images corrigées par OA, je m'intéresse, au paragraphe 2.3, au cas du traitement d'images¹ longue pose corrigées par OA. Cette étude a fait l'objet d'un article présenté à la fin de ce paragraphe. Elle se base sur l'obtention d'une formule analytique permettant de décrire l'évolution de la FEP du système d'OA en fonction de la position dans le champ. Cette expression analytique est ensuite intégrée dans l'algorithme de traitement de champs stellaires (voir paragraphe 1.4.3 du chapitre 1) et permet d'obtenir, tant sur simulation que sur données réelles, de très bonnes précisions sur la restauration de l'objet, et ce pour des domaines bien plus grands que les domaines isoplanétiques "classiques".

Je présente ensuite, quelques études complémentaires sur le traitement d'images longue pose, en particulier en ce qui concerne le traitement d'images continues (que j'oppose ici au traitement d'images de champs stellaires, c'est-à-dire d'objets ponctuels).

Pour finir, je discute, au paragraphe 2.5, du type de traitement à appliquer dans le cas d'acquisition d'images courte pose à grand champ derrière l'OA.

2.2 Effet de l'anisoplanétisme sur la déconvolution

Intéressons nous, dans un premier, temps aux effets de l'anisoplanétisme et donc de la variabilité spatiale de la FEP sur la précision de la déconvolution. Je vais reprendre, en le commentant et le développant, le cas proposé dans l'article [Fusco-a-00a] présenté au paragraphe suivant.

1. on ne peut, bien évidemment, plus parler ici de déconvolution.

Afin de faciliter la compréhension et la mise en évidence du phénomène, je m'intéresse au cas d'un champ d'étoiles. Je simule donc 20 étoiles de même magnitude disposées toutes les secondes d'arc le long de l'axe des abscisses (voir figure 2.1). Le profil de turbulence est constitué de 3 couches, une dans la pupille, une à 1 km et la dernière à 10 km d'altitude. La force de la turbulence sur chacune des couches est respectivement de 20, 60 et 20 %. Les écrans de phases sont simulés en utilisant la méthode proposée par N. Roddier (présentée au paragraphe 1.7.1 de la première partie) en utilisant les 861 premiers polynômes de Zernike. Le diamètre du télescope est de 4 mètres et le D/r_0 global vaut 10.

La correction par OA se fait sur l'étoile de gauche (position $\alpha = 0$) dans la figure 2.1. Pour cette direction, le rapport de Strehl est de 43% (on suppose une correction parfaite des 21 premiers polynômes de Zernike). On observe, sur la figure 2.1, la dégradation de la correction en fonction de l'angle. La FEP² associée à la 20^{ième} étoile ($\alpha = 20$ arcsec) n'a qu'un rapport de Strehl de 9%.

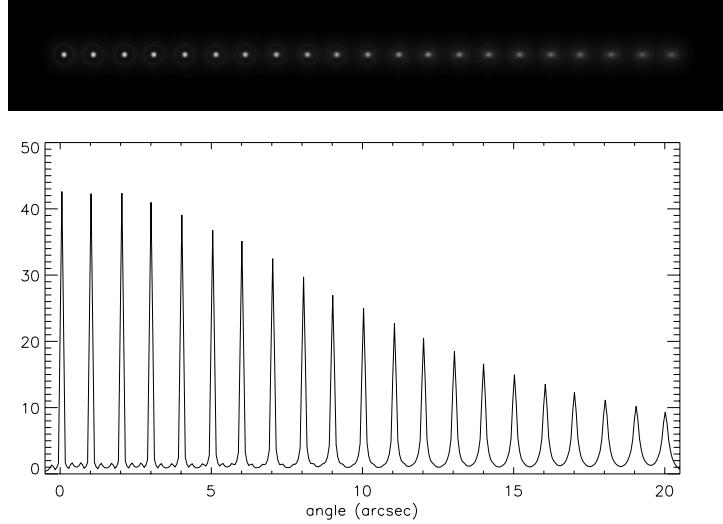


FIG. 2.1 – *Évolution de la FEP en fonction de l'angle. Figure du haut: images de FEP simulées pour chaque seconde d'arc. Figure du bas: coupe selon l'axe des abscisses de l'image. Les FEP sont normalisées à leur rapport de Strehl (donné en pourcent).*

Il s'agit à présent, de déconvoluer l'image présentée en figure 2.1. J'utilise pour ce faire l'algorithme basé sur la modélisation de "champs stellaires" présenté au paragraphe 1.4.3 et dans l'article [Fusco-a-99a]. La FEP est alors supposée invariante dans le champ (ce qui n'est clairement pas le cas ici) et égale à celle de la direction d'analyse ($\alpha = 0$). Plusieurs niveaux de bruit dans l'image sont considérés :

- une image sans bruit; on est alors uniquement sensible, lors de la déconvolution, à l'erreur due à la variabilité spatiale de la FEP;
- des images avec du bruit de photons pour respectivement 10^6 , 10^5 , 10^4 et 10^3 photons dans l'image.

Dans tous les cas, on trace l'erreur commise sur l'estimation de la magnitude de chaque étoile. Pour ce faire, 10 déconvolutions sont effectuées pour 10 réalisations de bruit (et ceci pour chaque cas de flux). On remarque sur la figure 2.2 que la variabilité spatiale de la FEP est d'autant plus limitante que le niveau de bruit est faible. En effet, dans ces cas là, l'erreur due à l'anisoplanétisme devient

2. Chaque FEP est la somme de 1000 courtes poses corrigées et temporellement décorrélatées.

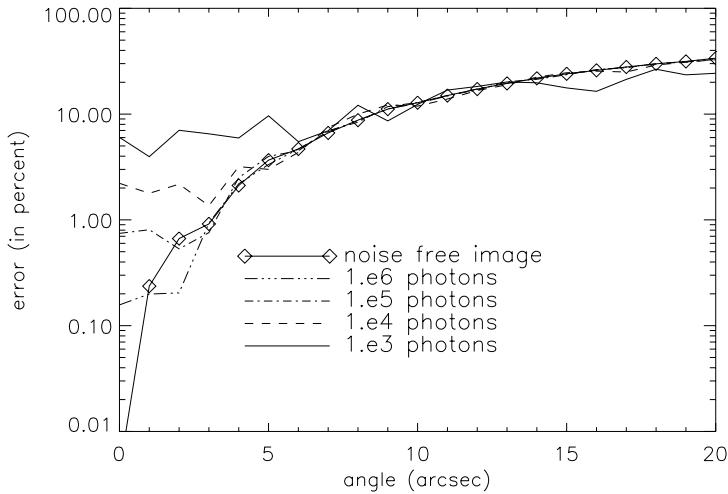


FIG. 2.2 – Erreur (en pourcent) sur l'estimation de la magnitude de chaque étoile en utilisant l'algorithme de déconvolution “champs stellaires” avec comme FEP globale la FEP estimée au centre du champ (direction d’analyse, $\alpha = 0$). Cinq cas sont considérés : un cas sans bruit, et 4 cas avec respectivement un bruit de photon correspondant à 10^6 , 10^5 , 10^4 et 10^3 photons dans l'image. Les erreurs sont calculées pour 10 réalisations de bruit pour chaque cas de flux.

très rapidement dominante vis-à-vis de l'erreur d'estimation due au bruit de photons dans l'image. Si pour le cas 10^3 photons l'erreur due à la variabilité de la FEP ne devient prépondérante que pour $\alpha \geq 7$ secondes d'arc environ, dans le cas d'un flux plus important (et donc d'un niveau de bruit plus faible) cet angle limite va diminuer pour n'être plus que de l'ordre de 2 secondes d'arc pour un flux de 10^6 photons. On peut alors ici définir un angle isoplanétique pour la déconvolution : c'est l'angle pour lequel l'erreur sur l'objet estimé après déconvolution est dominée par l'erreur d'anisoplanétisme (variabilité spatiale de la FEP). Cet angle sera fonction à la fois du niveau de bruit présent dans l'image et de la rapidité d'évolution de la FEP (c'est-à-dire à la fois du profil de Cn^2 et du degré de correction de l'OA). Il est intéressant de remarquer que pour cette définition, plus le rapport signal à bruit dans l'image sera élevé, plus l'angle isoplanétique sera faible !

2.3 Traitement d'images longue pose anisoplanétiques

Comme on vient de le voir, le phénomène d'anisoplanétisme dégrade de manière importante les résultats des algorithmes de déconvolution lorsqu'il s'agit de traiter des images à grand champ. Pour résoudre ce problème, il faut pouvoir connaître, en tout point du champ la FEP et pouvoir ainsi, effectuer un traitement global de tous les couples pixel de l'image-FEP. On peut, bien évidemment, tenter d'effectuer un traitement global en recherchant conjointement l'objet et les FEP associées à chacun des points. Hélas la multiplication du nombre d'inconnues et la complexification de l'algorithme rend cette solution inenvisageable.

Pour palier à ce problème, je propose dans l'article [Fusco-a-00a] qui suit, une approche analytique permettant de caractériser l'évolution de la FEP en tout point du champ. Cette expression analytique est ensuite intégrée dans l'algorithme de déconvolution “champs stellaires” et permet d'obtenir, pour des images grand champ, des précisions bien supérieures à la déconvolution classique. Il faut aussi noter que ces résultats ont fait l'objet de communications à la fois lors de la conférence sur le traitement du

signal et des images (GRETSI) à Vannes en septembre 1999 [Fusco-p-99b] et de la conférence SPIE de San-Diego en Août 2000 [Fusco-p-00c].

La Fonction de Transfert Anisoplanétique (FTA)

Il s'agit dans un premier temps (et dans la première partie de l'article) de caractériser analytiquement la dégradation de la FEP dans le champ.

En faisant une hypothèse de stationnarité, déjà discutée au paragraphe 4.3.2 de la première partie du mémoire, la fonction de transfert optique, pour un angle donné, s'exprime simplement comme le produit de la fonction de transfert au centre du champ (dans la direction d'analyse), par une fonction de transfert appelé Fonction de Transfert Anisoplanétique (FTA), ou Anisoplanatic Transfer Function en anglais (ATF). On a donc la relation

$$FTO_\alpha(\mathbf{f}) = FTO_0(\mathbf{f})FTA(\mathbf{f}, \alpha). \quad (2.1)$$

En supposant une décomposition de la phase sur la base des polynômes de Zernike et une correction parfaite des i_0 premiers polynômes je montre que la FTA ne dépend que des corrélations entre coefficients de Zernike (ces corrélations sont données par l'équation 1.46 de la première partie du mémoire) et du degré de correction du système (nombre de polynômes de Zernike corrigés). Le calcul de la FTA ne nécessite donc que la connaissance du profil de $C_n^2(h)$, du nombre de modes corrigés par le système et de D , soit

$$FTA(\mathbf{f}, \alpha) = \text{Fct}(C_n^2(h), D, i_0) \quad (2.2)$$

L'expression exacte de la FTA est donnée par les équations 8, 12 et 14 de l'article et les calculs intermédiaires sont présentés en Annexe A. Notons que les études menées au paragraphe 1.8.3 de la première partie montrent qu'une connaissance grossière du profil de turbulence suffit pour obtenir une bonne précision sur le calcul de la FTA.

Les résultats présentés dans l'article montrent la très bonne concordance entre les expressions analytiques et les simulations numériques (figures 2 et 3 de l'article). En particulier, la capacité de l'expression analytique à restituer l'effet d'anisotropie de la FTA (et donc l'effet d'elongation de la FEP [Voits-a-99, Close-p-98]) est démontrée. De plus, le traitement de données expérimentales vient confirmer et appuyer les résultats précédents. En effet la figure 6 de l'article montre que, malgré les hypothèses simplificatrices effectuées dans l'expression théorique de la FTA (correction parfaite de i_0 polynômes de Zernike, connaissance approximative du profil de C_n^2 ...), les résultats obtenus sur des données réelles acquises à l'OHP avec le Banc d'Optique Adaptative de l'ONERA (BOA) sont particulièrement probants.

Modification de l'algorithme de déconvolution “champs stellaires”

J'ai ensuite intégré l'expression de la FTA dans l'algorithme de déconvolution “champs stellaires” pour permettre à ce dernier de prendre en compte les variations spatiales de la FEP dans le champ. Dans ce cas, à chaque étoile est associée une FEP calculée en utilisant la formule analytique de la FTA. Comme pour le cas de déconvolution, le nombre et la position de chaque étoile sont préalablement estimés en utilisant une déconvolution pixel à pixel (comme présenté au paragraphe 1.4.3). Cette première estimation de la position des étoiles, bien que peu précise, est largement suffisante pour calculer la FTA et donc la FEP associée à chaque étoile. On peut alors utiliser l'algorithme “champs stellaires” modifié (que j'appellerai “déconvolution anisoplanétique”³) pour traiter l'image et pour affiner l'estimation des positions et magnitudes de chaque étoile.

3. Ceci est bien entendu un abus de langage, les images anisoplanétiques n'étant plus une convolution simple de l'objet par une FEP.

L'algorithme de “déconvolution anisoplanétique” est, tout d'abord, validé sur simulations numériques. On reprend l'exemple proposé au paragraphe 2.2 et on traite l'image du champ d'étoiles en utilisant l'algorithme. Comme pour le cas de la déconvolution, on effectue le traitement dans un premier temps sur une image en l'absence de bruit, puis sur des images bruitées avec 10^6 , 10^5 , 10^4 et 10^3 photons. Les résultats sont présentés en figures 7 et 9 de l'article. Le gain apporté par l'utilisation de l'expression analytique de la FTA dans le processus de traitement est démontré. L'erreur d'estimation sur l'étoile la plus éloignée de l'axe optique ($\alpha = 20$ secondes d'arc) n'est plus que de 1% au lieu de près de 35% dans le cas d'une simple déconvolution. Cette erreur résiduelle de 1% dans le cas des simulations, où tout est supposé connu, est due à l'hypothèse de stationnarité qui nous a permis d'obtenir l'expression analytique simple de la FTA (voir équation 2.1). Cette hypothèse n'est pas complètement vérifiée dans le cas d'une correction par OA [Conan-t-94, Veran-t-97] et conduit à une légère sous estimation de la FTA⁴ (comme le montre la figure 2 de l'article).

L'ajout de bruit dans l'image permet de montrer (figure 9) l'augmentation importante du domaine isoplanétique défini au paragraphe précédent. Pour 10^3 photons et même 10^5 photons, c'est l'erreur due au bruit de photons qui domine, et ce pour toute l'image (l'angle isoplanétique est alors supérieur à 20 secondes d'arc). Dans ce cas, grâce à l'utilisation des FTA et à la “déconvolution anisoplanétique” on atteint de nouveau, pour un grand champ la limitation ultime due au niveau de bruit présent dans l'image.

L'algorithme est ensuite appliqué à des données réelles obtenues à l'OHP avec le banc d'optique adaptative de l'ONERA. Et encore une fois, les résultats sont très encourageants.

L'article

Characterisation of adaptive optics point spread function for anisoplanatic imaging. Application to stellar field deconvolution

T. Fusco, J.-M. Conan, L. Mugnier, V. Michau et G. Rousset

Publié dans A&A Supplement Series **142** pp. 149-156.

Errata:

- dans l'équation 12, il faut remplacer $i = 1$ et $j = 1$ par $i = 2$ et $j = 2$
- dans la table 2, il faut remplacer dans la 2^{ème} ligne, 3^{ème} colonne 7.7 par 0.77

4. On approxime la moyenne d'un exponentielle par l'exponentielle de la moyenne.

A&A manuscript no.
(will be inserted by hand later)

Your thesaurus codes are:
missing; you have not inserted them

**ASTRONOMY
AND
ASTROPHYSICS**

Characterization of adaptive optics point spread function for anisoplanatic imaging. Application to stellar field deconvolution

T. Fusco, J.-M. Conan, L. M. Mugnier, V. Michau, G. Rousset

O.N.E.R.A,
B.P. 72, 92322 Chatillon Cedex,
France

A&A sup. ser., **142**, Feb. II, pp 149-156
Received November 10; accepted December 22, 1999

Abstract. The point spread function (PSF) of an adaptive optics system evolves in the Field Of View (FOV). This variation strongly limits the conventional deconvolution methods for the processing of wide FOV images. A theoretical expression of this PSF variation is derived. This expression is both validated on simulations and experimental data. It is then applied to the *a posteriori* processing of stellar fields. Using the available prior information about the object (point-like sources), this technique allows the restoration of the star parameters (positions and intensities) with a precision much better than the conventional methods, in a FOV much larger than the isoplanatic field.

Key words: high resolution imaging, anisoplanatism, adaptive optics, deconvolution, astrometry, photometry

often severely attenuated since AO correction is only partial. A degraded point spread function (PSF) still blurs the object. It is therefore necessary to use image processing techniques to improve the quality of the recovered object (Lucy, 1994; Thiébaut and Conan, 1995; Christou et al., 1997; Conan et al., 1998b). Nevertheless, all these techniques are based on the assumption that the field of view (FOV) of interest is smaller than the so-called isoplanatic patch (Fried, 1982). Wavefronts, coming from angularly separated points, do not cross the same part of the atmosphere and are not identically disturbed. In the visible, the isoplanatic patch is about a few arcseconds (Fried, 1982). If the FOV is greater than this field, the AO correction, which is optimal on the optical axis, is degraded as a function of angle (Chassat, 1989; Sasiela, 1995; Molodij and Rousset, 1997). The residual PSF is no longer space invariant: this fundamentally limits the performance of all the deconvolution techniques.

1. Introduction

Atmospheric turbulence severely limits the angular resolution of ground based telescopes. Adaptive Optics (AO) (Rousset et al., 1990; Roddier, 1999) is a powerful technique to overcome this limitation and to reach the diffraction limit of large telescopes. AO compensates, in real-time, for the random fluctuation of the wavefront induced by the turbulent atmosphere. The turbulent wavefront is measured by a wavefront sensor (WFS) and optically corrected by a deformable mirror. This compensation allows to record high spatial resolution long exposure images. However, even if the object spatial frequencies are preserved up to the diffraction limit of the telescope, they are

We present here a simple and analytical expression of this PSF degradation in the FOV and an application to *a posteriori* processing of wide FOV images.

After a short presentation of the image formation in a wide FOV, a theoretical calculation of the PSF angular dependence is presented in Section 2. The results are validated on simulations in Section 3 and on experimental data in Section 4. In Section 5, an example of application is proposed: post processing of an AO corrected image of a stellar field. A deconvolution algorithm, presented in (Fusco et al., 1999b), is modified to include the theoretical expression of the PSF spatial variation, in order to obtain accurate photometric and astrometric estimations for wide FOV images. This algorithm is then tested on simulated and experimental data.

Correspondence to: authors:
Phone: (33) 1 46 73 40 40 ; fax: (33) 1 46 73 41 71.
Email: {NAME}@onera.fr
URL: <http://www.onera.fr/dota>

2. Theoretical estimation of the PSF angular dependence

Let $o(\alpha')$ be the object of interest. For wide FOV, the AO corrected image is given by :

$$i(\alpha) = \int o(\alpha') h(\alpha - \alpha', \alpha') d\alpha' + b(\alpha) \quad (1)$$

where α is the angle in the FOV, $h(\alpha, \alpha')$ the space variant long exposure PSF and b an additive zero mean noise. Note that, within the isoplanatic patch, Equation 1 becomes a convolution between the object and the PSF. In order to well estimate the object $o(\alpha')$ an accurate knowledge of the PSF $h(\alpha, \alpha')$ in the whole FOV, is needed.

The computation of the PSF requires the use of the residual phase second order statistics. The long exposure Optical Transfer Function (OTF) (Fourier transform of the PSF) is given by:

$$\text{OTF}_\alpha(\mathbf{f}) = \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle [\Phi_{\text{res},\alpha}(\rho) - \Phi_{\text{res},\alpha}(\rho + \lambda\mathbf{f})]^2 \rangle \right\} P(\rho) P(\rho + \lambda\mathbf{f}) d\rho \quad (2)$$

where $P(\rho)$ is the telescope pupil function, $\Phi_{\text{res},\alpha}(\rho)$ the residual phase in the pupil after AO correction and $\langle \cdot \rangle$ denotes the expectation over turbulence realizations. The stationarity of the turbulent phase on the telescope pupil is well known. J.-M. Conan (Conan, 1994) and J.-P. Véran (Véran, 1997) have shown that the AO corrected phase is still quasi-stationary. Then, with this assumption, the OTF expression becomes:

$$\text{OTF}_\alpha(\mathbf{f}) \simeq T_0(\mathbf{f}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_\alpha(\lambda\mathbf{f}) \right\} \quad (3)$$

where $T_0(\mathbf{f})$ is the telescope transfer function without atmospheric turbulence, and with $D_\alpha(\lambda\mathbf{f})$ the spatially average residual phase structure function:

$$D_\alpha(\lambda\mathbf{f}) = \frac{\int \langle [\Phi_{\text{res},\alpha}(\rho) - \Phi_{\text{res},\alpha}(\rho + \lambda\mathbf{f})]^2 \rangle P(\rho) P(\rho + \lambda\mathbf{f}) d\rho}{\int P(\rho) P(\rho + \lambda\mathbf{f}) d\rho} \quad (4)$$

in a direction α and for a wavelength λ . Introducing the on-axis structure function Equation 4 can be re-written as

$$D_\alpha(\lambda\mathbf{f}) = D_0(\lambda\mathbf{f}) + D_{\text{ani}}(\lambda\mathbf{f}, \alpha). \quad (5)$$

where D_{ani} is defined as follows:

$$D_{\text{ani}}(\lambda\mathbf{f}, \alpha) = \left(\int \left\langle [\Phi_{\text{res},\alpha}(\rho) - \Phi_{\text{res},\alpha}(\rho + \lambda\mathbf{f})]^2 - [\Phi_{\text{res},0}(\rho) - \Phi_{\text{res},0}(\rho + \lambda\mathbf{f})]^2 \right\rangle \times P(\rho) P(\rho + \lambda\mathbf{f}) d\rho \right) / \left(\int P(\rho) P(\rho + \lambda\mathbf{f}) d\rho \right) \quad (6)$$

OTF_α is the product of OTF_0 , the OTF on the optical axis, with a term which can be called “anisoplanatic transfer function” (ATF) and reads:

$$\text{OTF}_\alpha(\mathbf{f}) = \text{OTF}_0(\mathbf{f}) \text{ATF}(\mathbf{f}, \alpha) \quad (7)$$

with

$$\text{ATF}(\mathbf{f}, \alpha) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_{\text{ani}}(\lambda\mathbf{f}, \alpha) \right\} \quad (8)$$

Note that, on-axis means here: on the wavefront sensor optical axis. $\text{OTF}_0(\mathbf{f})$ can be estimated using the method proposed by J.-P. Véran (Véran *et al.*, 1997) which is based on real-time data statistics accumulated by the AO control system during the observation. To obtain a theoretical expression of the ATF, $D_{\text{ani}}(\lambda\mathbf{f}, \alpha)$ must be computed.

Let us use the modal decomposition of the turbulent phase onto the Zernike polynomial basis :

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i Z_i(\rho) \quad (9)$$

The properties of turbulence in this particular basis are described by Noll (Noll, 1976). In a first approximation, the AO correction can be seen as a high-pass filter which provides a full correction of all the Zernike polynomials up to a given number. With this assumption and for an AO correction up to the polynomial number i_0 , we have:

$$\Phi_{\text{res},0}(\rho) = \sum_{i=i_0+1}^{\infty} a_i(0) Z_i(\rho) \quad \text{and} \quad (10)$$

$$\Phi_{\text{res},\alpha}(\rho) = \sum_{i=2}^{i_0} (a_i(\alpha) - a_i(0)) Z_i(\rho) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} a_i(\alpha) Z_i(\rho) \quad (11)$$

where $a_i(0)$ and $a_i(\alpha)$ are the Zernike coefficients of the phase expansion on the optical axis and for a direction α respectively. Using this expansion, a theoretical expression of $D_{\text{ani}}(\lambda\mathbf{f}, \alpha)$ can be obtained :

$$D_{\text{ani}}(\lambda\mathbf{f}, \alpha) = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{\infty} 2 [C_{i,j}(0) - C_{i,j}(\alpha)] U_{ij}(\lambda\mathbf{f}) \quad (12)$$

where $C_{i,j}(\alpha)$ are the angular correlation of the Zernike coefficients a_i and a_j ,

$$C_{i,j}(\alpha_2 - \alpha_1) = C_{i,j}(\alpha_1 - \alpha_2) = \langle a_i(\alpha_1) a_j(\alpha_2) \rangle \quad (13)$$

and U_{ij} are functions defined as:

$$U_{ij}(\lambda\mathbf{f}) = \frac{\int [Z_i(\rho) - Z_i(\rho + \lambda\mathbf{f})] [Z_j(\rho) - Z_j(\rho + \lambda\mathbf{f})] P(\rho) P(\rho + \lambda\mathbf{f}) d\rho}{\int P(\rho) P(\rho + \lambda\mathbf{f}) d\rho} \quad (14)$$

The angular correlations $C_{i,j}(\alpha)$ can be theoretically computed (Chassat, 1989) assuming that the C_n^2 profile is known. Note that a crude estimation of the C_n^2 is enough because of the weak dependency of the angular correlation of the phase with the atmospheric profile (Chassat, 1989; Molodij and Rousset, 1997). Nevertheless, a good estimation of the C_n^2 profile can be obtained by a SCIDAR measurement (Fuchs et al., 1998), for example.

Equation 12 is a generalization of the expression given by Voitsekhovich and Bara (Voitsekhovich and Bara, 1999) who consider the case of a perfect correction ($\Phi_{res,0}(\rho) = 0$) on the optical axis. Note that, because of the difference between the correlations $C_{2,2}(\alpha)$ and $C_{3,3}(\alpha)$ (Chassat, 1989), Equation 12 gives an anisotropic ATF which leads to an elongated PSF (Voitsekhovich and Bara, 1999; Close et al., 1998).

Using equations 7, 8 and 12, the OTF in the whole field of view can be theoretically computed, assuming an infinite exposure time.

3. Comparison between theory and simulation

3.1. Turbulence simulation method

In order to validate the Equations 5 and 12 derived in Section 2, wide FOV AO images are simulated. We consider a three layer C_n^2 profile: one on the pupil, the second at one km and the third at ten km with respectively 20, 60 and 20 % of the turbulence. Using the so-called near-field approximation (Roddier, 1981), the scintillation effects are neglected and the phase on the telescope pupil for a given direction α is simply the sum of the corresponding part of each phase screen in each turbulent layer:

$$\Phi_\alpha(\rho) = \sum_{j=1}^3 \varphi_j(\rho + h_j \alpha) \quad (15)$$

where φ_j and h_j are respectively the phase screen and the height of the j^{th} layer. Each phase screen is simulated by N. Roddier's method (Roddier, 1990) using the 861 first Zernike polynomials (radial order up to 40). The size of these phase screens corresponds to a 20 arcseconds FOV radius and a telescope diameter of 4 m. The overall D/r_0 is 10.

3.2. Long exposure PSF simulation

Let us consider an adaptive optics system which can perfectly correct the i_0 first Zernike polynomials, in our case, $i_0 = 21$. We have simulated a PSF at every arcsecond in the FOV (20 arcseconds). Each PSF is the sum of 1000 time-decorrelated short exposures which are deduced from $\Phi_{res,\alpha}(\rho)$. If we consider that the speckle lifetime is about 10 ms, the simulation are roughly equivalent to a 10 second long exposure. Figure 1 shows the PSF evolution as a

function of angle. Note that the PSF does not vary significantly within 3 arcseconds, which roughly corresponds to the isoplanatic angle given by F. Roddier (Roddier, 1981):

$$\theta_0 = 0.314 \frac{r_0}{\bar{h}} = 1.64'' \quad (16)$$

with \bar{h} given by (Fried, 1982)

$$\bar{h} = \left[\frac{\int_0^\infty h^{\frac{5}{3}} C_n^2(h) dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right]^{\frac{3}{5}} = 3953m$$

In this field, the PSF variations are only due to the turbulence noise (finite number of short exposures in the PSF calculation). Outside the isoplanatic field, the PSF degra-

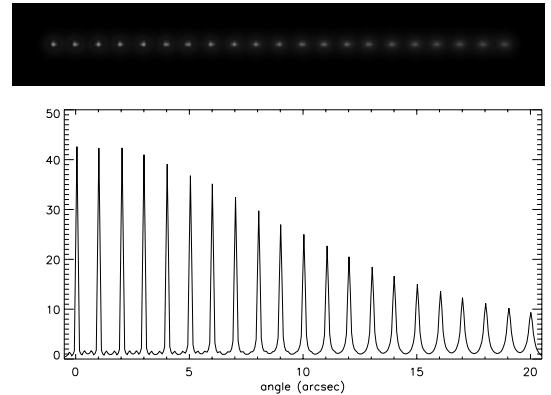


Fig. 1. PSF in the FOV versus angle. On the top: 2D images of the simulated PSF's for each arcsecond. On the bottom: X-cut of the images. The PSF's normalized by the diffraction (in percent).

dation is important, the Strehl Ratio goes from 43% at the center of the field to less than 10% at the border of the field. Of course, a deconvolution scheme, assuming that the PSF is constant in the whole field of view, would lead to a poor restoration. Note that the non-circularity of the off-axis PSF's appears in figure 1.

3.3. Results

For each angle, we compare the theoretical OTF (see equations 7 and 8) to the simulated one. A very good estimation for each OTF is obtained, even in the case of large values of α (see Figure 2).

Because we only consider a Y-cut of the OTF's in Figure 2, the anisotropic (elongation) effect is not visible. In Figure 3 we only consider one angle ($\alpha = 20''$) but we plot two cuts (X and Y axis) of the simulated and theoretical OTF. In that case, the anisotropic effect and its good restitution by the analytical ATF is shown.

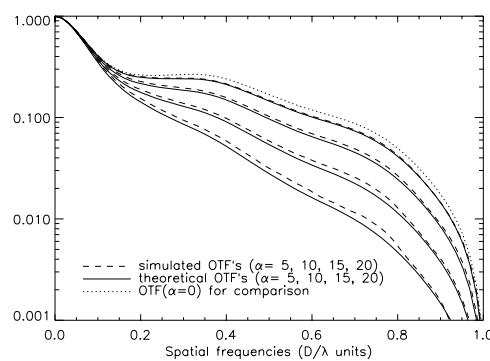


Fig. 2. Y-cut of the simulated OTF (dashed line) and theoretical OTF given by Eq. 7 (solid line) for $\alpha = 5, 10, 15$ and $20''$. The OTF for $\alpha = 0$ is shown for comparison.

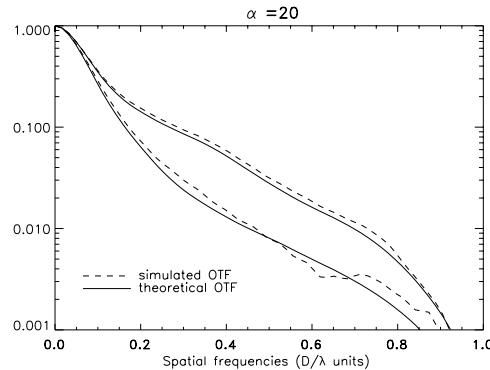


Fig. 3. Y-cut and X-cut of the simulated OTF (dashed line) and the theoretical OTF (solid line) for $\alpha = 20''$.

A small under-estimation of the OTF can be seen in each case with the analytical method. The difference between the simulated and theoretical OTF's is due to the phase non-stationarity error. In Section 2 we have assumed the phase stationarity on the telescope pupil. This assumption corresponds to approximate the mean of the exponential of function by the exponential of the mean of the function. Even if this approximation is quite good (Véran, 1997), it leads, nevertheless, to a small under estimation of the theoretical OTF. This error gives the fundamental limitation of the method, but in experimental data processing, other error sources may also degrade the results, such as:

- atmospheric parameter estimation errors on : r_0 , L_0 , C_n^2 profile,
- AO full correction of the first Zernike modes which is only an approximation of a real system.
- turbulent noise: finite exposure time which leads to a residual speckle pattern in the long exposure image.

But we show in the next Section, that in a real case, all these errors do not significantly influence the ATF estimation.

4. Experimental results

4.1. Observations

The theoretical estimation of OTF angular variation is compared with experimental data recorded in September 1997 with the ONERA adaptive optics bench installed on the 1.52 m telescope at the Observatoire de Haute Provence (Conan et al., 1998a). The Adaptive Optics Bench (BOA) is a 88 actuator system, with a Shack-Hartmann wave-front sensor (64 sub-apertures). Two images of two separated binary stars (ξ Cephee and Θ Orionis) were acquired at 850 nm, with a 10 second integration time, on the 29 September 1997 at 00 h 02 and 04 h 27 (UT). The visual magnitude of the two components are : 4.6, 6.5 for ξ Chepee and 5.1, 6.7 for Θ Orionis. The separation of these binary stars is large enough (about 8 and 13 arcseconds) to obtain two PSF's with no overlap (see Figure 4). In each case, the brightest star is used for the wave-front sensing. During the same night at 21 h 21 (UT), a

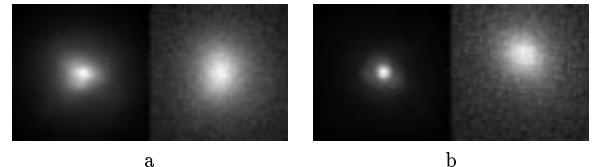


Fig. 4. Images of the two components of: (a) ξ Cephee (separation $\simeq 8''$) (b) Θ Orionis (separation $\simeq 13''$). 1 pixel = 0.027 arcseconds, image size = 64 pixels.

C_n^2 profile measurement was obtained by M. Azouit from Université de Nice (France) (see Figure 5) using balloon probes (Vernin and Munoz-Tunón, 1992). For the two im-

	r_0 (in m) (@500 nm)	L_0 (in m)	D/r_0 (@850 nm)
ξ Cephee	0.055	4	14.6
Θ Orionis	0.06	4	13.4
	θ_0 (arcsec) (@850 nm)	SR PSF 1	SR PSF 2
ξ Cephee	1.53	4%	2%
Θ Orionis	1.66	8%	3%

Table 1. Observing conditions for ξ Cephee and Θ Orionis. In the two cases, the sampling frequency is equal to 264 Hz. θ_0 is the isoplanatic angle defined with Equation 16, L_0 is the outer scale, and SR the Strehl ratio given in percent.

ages the observing conditions are summarized in Table

1. r_0 has been estimated using open-loop Shack Hartmann data recorded shortly before the corrected images and θ_0 has been computed using r_0 , measured C_n^2 profile and Equation 16.

4.2. ATF computation

We have approximated this C_n^2 profile by 3 “equivalent layers” (EL) (Fusco et al., 1999a). The true C_n^2 profile is divided in 3 slabs (0 to 1 km, 1 to 10 km and 10 to 27 km), for each slab an EL is located at an equivalent height defined as the weighted mean height of the slab: $h_{eq} = \left(\int_{h_{min}}^{h_{max}} C_n^2(h) h dh \right) / \left(\int_{h_{min}}^{h_{max}} C_n^2(h) dh \right)$ and with an associated strength given by the total strength of the slab ($\int_{h_{min}}^{h_{max}} C_n^2(h) dh$). All the values are summarized in Table 2:

	h_{min} (in km)	h_{max} (in km)	equivalent height (in km)	equivalent strength (in %)
layer 1	0	1	7.7	56.5
layer 2	1	10	3.3	33.5
layer 3	10	27	14.1	10

Table 2. Results of the equivalent layer calculations

Because of the weak dependency of the angular decorrelation of the phase with the atmospheric profile, this C_n^2 approximation is enough to obtain a good estimate on the phase angular decorrelation. We checked that an increase of the layer number (three to one hundred) do not significantly change the results.

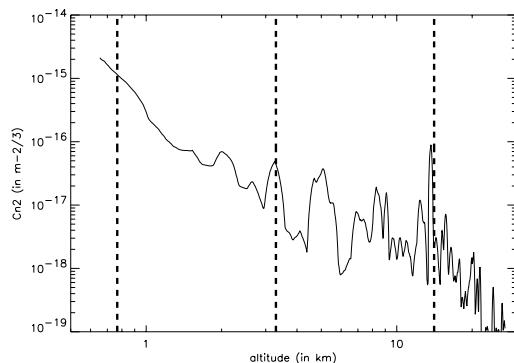


Fig. 5. C_n^2 profile measurements obtained with balloon probes by M. Azouit [solid line] and position of the 3 equivalent layers [dashed line].

In order to estimate the OTF, the AO system is assumed to provide a perfect correction of a given number

of Zernike polynomials. This number N is defined so that the N first modes have a wavefront reconstruction SNR higher than 1. For this purpose, we use the theoretical behavior of the turbulent and of the noise variance (Rigaut and Gendron, 1992). These variances are scaled using the measured values of r_0 and L_0 for the Zernike turbulent variance and by the propagation of the photon and detector noise in the wavefront sensor through the reconstruction matrix for the Zernike noise variance (Rousset, 1999).

With the observing conditions, the correction in terms of Zernike polynomials is efficient ($SNR \geq 1$) about up to the 10th Zernike for ξ Cephee and the 15th Zernike for Θ Orionis.

Now, we compute the OTF for each binary star component (Eq. 7): the theoretical ATF is given by Equations 12 and 8 using:

- the 3 EL’s profile for the computation of the angular correlation of the Zernike
- the first 10th (resp. 15th) Zernike coefficients
- the known separation between the two stars.

The on-axis OTF is given by the first component of each binary star (brightest star).

The comparison between the measured OTF and the computed OTF is shown in Figure 6

In the two cases, a good accordance between measured and computed OTF is found although a large number of assumptions has been made to compute the ATF:

- C_n^2 constant during the whole night (3h 40mn and 8h between the C_n^2 measurement and the two observations). Even if we know that the sensitivity to this profile is low
- r_0 and L_0 estimation from the WFS noisy data assumed to be perfect
- efficient correction of respectively the first 10 and 15 Zernike coefficients, which is a crude approximation of the AO system.

These results are very encouraging and allow to be optimistic for large FOV image post-processing.

Now, let us use the theoretical model of the PSF degradation for the post-processing of AO wide FOV images of stellar fields.

5. Application to stellar field post-processing

One of the first applications of wide FOV imaging in astronomy is the observation of large stellar fields. In this case, we have a strong *a priori* information on the object: it is a sum of Dirac functions (Gunsay and Jeffs, 1995; Fusco et al., 1999b):

$$o(\alpha) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \delta(\alpha - \alpha_k) \quad (17)$$

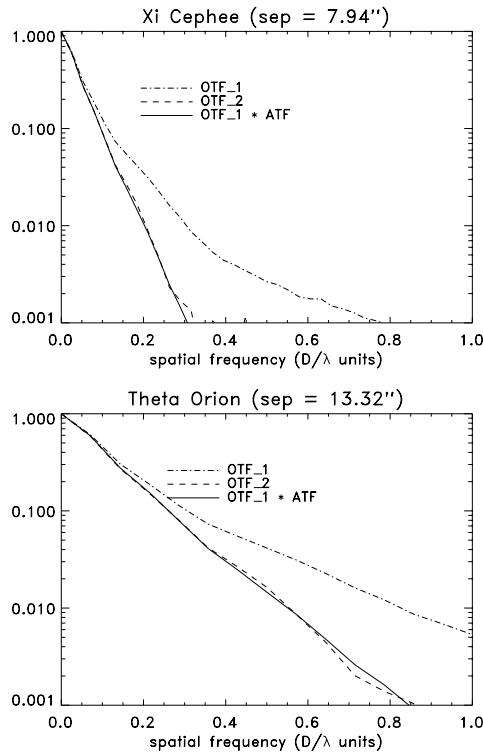


Fig. 6. Comparison between the measured [dashed line] and the computed [solid line] off-axis OTF. The measured OTF for $\alpha = 0$ (brightest star) [dotted-dashed line] is given for comparison: (top) ξ Cephee and (bottom) Θ Orionis. The circular average of each OTF is plotted.

where α_k and γ_k are the position vector and the intensity of the k^{th} star respectively. They are the object parameters we are seeking. We consider that n , the number of stars, is a known parameter. Note that, using appropriate prior statistics (Bernouilli Gaussian or Poisson-Gaussian for example), it is possible to generalize the method and to incorporate n as an unknown of the problem.

5.1. The deconvolution method

To solve this inverse problem, i.e., estimate the unknowns (α_k, γ_k) , we use the approach presented in (Fusco et al., 1999b) with a isoplanatic PSF, but modified to include the anisoplanatic effects. Note that this approach can be seen as a “PSF fitting” in the Fourier domain.

The criterion to be minimized with respect to α_k and γ_k can be written in the Fourier domain as:

$$J(\gamma_k, \alpha_k) = \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k \exp(-2j\pi\mathbf{f}\cdot\alpha_k) \times \text{OTF}_{\alpha_k}(\mathbf{f}) - \tilde{i}(\mathbf{f}) \right\|^2 \quad (18)$$

where $\text{OTF}_{\alpha_k}(\mathbf{f})$ is the OTF for the k^{th} star and \mathbf{f} the spatial frequency and $\tilde{\cdot}$ denotes a Fourier transform. $\text{OTF}_{\alpha_k}(\mathbf{f})$ is slowly variable with α_k . Then a crude estimation of α_k using a first deconvolution with a constant PSF in the whole field of view allows the calculation of the associated ATF's. In a first approximation, these ATF estimates are assumed to be the true ones and are not adjusted in the deconvolution process. The criterion to be minimized is then :

$$\begin{aligned} J(\gamma_k, \alpha_k) = & \\ & \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k \exp(-2j\pi\mathbf{f}\cdot\alpha_k) \times \text{OTF}_0(\mathbf{f}) \times \text{ATF}_{\alpha_k}(\mathbf{f}) - \tilde{i}(\mathbf{f}) \right\|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Note that a more complete, but more complex approach should consider $\text{ATF}_{\alpha_k}(\mathbf{f})$ as unknown of the problem.

This minimization is done using a conjugate gradient method. The object reparametrization allows an accurate precision on the parameters (sub-pixel precision on the star positions). Nevertheless, the criterion is not convex and a good first initialization for the star positions is suitable to avoid problems related to local minima. This initialization is made using a pixel by pixel deconvolution (Wiener filter or Lucy Richardson Algorithm for example).

Let us consider an object which is a field of 21 stars with the same magnitude. The separation between each stars is one arcsecond (see Figure 1). In order to focus on the limitation induced by the anisoplanatic problem and the gain brought by the ATF estimation, we first consider a noise free image, but the noise influence will be discussed later in the paper.

5.2. Noise free image

We compare, on a noise free image (see Figure 1), the gain brought by the ATF introduction in the image processing. ATF's for each star are computed using an estimation of α_k given by the first pixel by pixel deconvolution (Wiener filter). OTF_0 is simply given by the fourier transform of the on-axis PSF. We plot in Figure 7 the error, given in percent, on the stars magnitude estimate using “isoplanatic” deconvolution process (deconvolution using criterion defined in Equation 18 but assuming that the PSF is constant in the whole FOV) and our modified approach using the ATF estimation for each star position Equation 19. Figure 7 shows the gain brought by the use of the ATF in the *a posteriori* processing. The error, which increases as a function of angle, in the “isoplanatic” deconvolution case, up to 34% for $\alpha = 20''$, is close to be constant and only about 1% when we use the ATF estimation. We believe that this residual error is due to the non-stationarity assumption made in the ATF estimation (see Section 3.3).

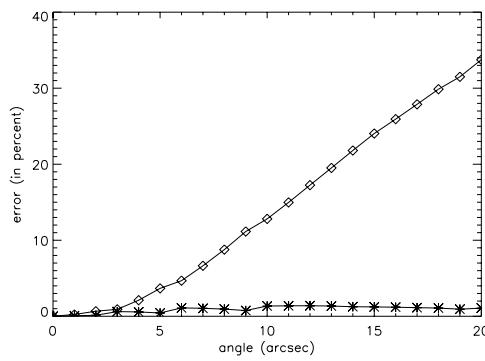


Fig. 7. Error in percent on the magnitude estimation for each star in the case of a noise free image. [◊] estimation using the same PSF ($\alpha = 0$) for the whole FOV, [*] estimation using the ATF associated to each star

5.3. Influence of the photon noise

Of course, in a realistic case, the image is not only degraded by the turbulence effect but also affected by photon and detector noise. Let us assume that in the case of AO long exposures, the dominant noise is the photon noise. It leads to an error on the parameter estimation.

In the case of a “isoplanatic” deconvolution (PSF constant in the whole FOV), for a given flux (that is for a given noise level), a limit angle can be defined below which the anisoplanatic error is lower than the noise error. The lower the flux, the greater the limit angle (see Figure 8). For example, in the case of 10^3 photons the anisoplanatic error becomes greater than the noise error for $\alpha \geq 7''$. This limit angle can be seen as a definition of an isoplanatic angle for our deconvolution method.

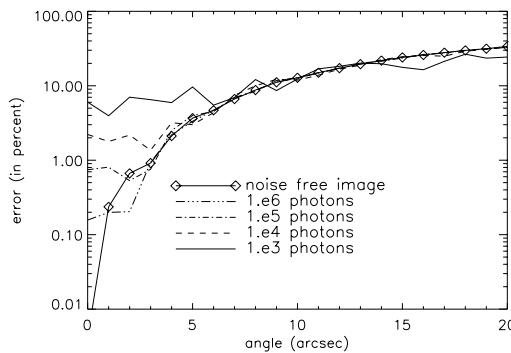


Fig. 8. Error in percent on the magnitude estimation using the same OTF ($\alpha = 0$) in the whole FOV, in the case of a noise free image, and in the case of photon noise with 10^6 , 10^5 , 10^4 and 10^3 photons in the whole image respectively. The error is only averaged on 10 noise outcomes for each flux case.

Now, let us use the ATF correction of the OTF in the post-processing. In that case, the noise error is dominant for the whole FOV, as soon as it is of the order or greater than 1% which corresponds to 10^5 photons in our case (see figure 9). Even if the ATF under-estimation due to

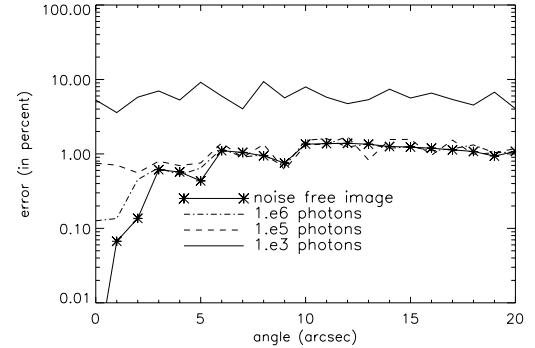


Fig. 9. Error in percent on the magnitude estimation using the ATF correction of the OTF in the post processing in the case of a noise free image, and in the case of photon noise with 10^6 , 10^5 and 10^3 photons in the whole image respectively. The error is only averaged on 10 noise outcomes for each flux case.

the phase non-stationarity error is the dominant noise for a flux greater than 10^5 photons, the gain brought by the use of the ATF is still very important with respect to a “isoplanatic” deconvolution (see Figures 8 and 9). And, at low flux, the error in the FOV is only limited by the photon noise.

5.4. Experimental results

Let us now apply the wide FOV deconvolution method (Equation 19) on the two experimental images of ξ Cepheo and Θ Orionis presented in Section 4. In these two cases, because of the large angular separation between the two components, an accurate estimation of the magnitude difference and of the separation can be obtained using the sole images and computing a center of gravity and an integral of the flux for each image. Since we have a good estimation of the parameters of interest by this aperture photometry method, it is interesting to validate our deconvolution approach on this data and to evaluate the gain brought by the ATF estimation.

The results of the estimation of the separations and the magnitude differences are summarized in Table 3 for each processing case:

- a crude aperture photometry for the magnitude estimation plus a center of gravity estimation for the separation estimation.

- a deconvolution with a sole PSF (on axis PSF, that is the brighter star image) for the whole image (“isoplanatic” deconvolution)
- and the use of the ATF model in the deconvolution process.

ξ Cephee	Center of gravity	“Isoplanatic” deconvolution	ATF estimation deconvolution
Angular separation	7.95''	7.94''	7.95''
Magnitude difference	1.89	2.01	1.87
Θ Orionis	Center of gravity	“Isoplanatic” deconvolution	ATF estimation deconvolution
Angular separation	13.30	13.45	13.41
Magnitude difference	1.48	1.96	1.50

Table 3. Angular separation and magnitude difference estimation for ξ Cephee and Θ Orionis using a center of gravity calculation, a “isoplanatic” deconvolution (a sole PSF for the whole image) and a deconvolution with the anisoplanatic OTF.

These results clearly show the gain brought by the ATF correction of the OTF on the estimation of star parameters: mainly on the magnitude estimation. The “isoplanatic” deconvolution process, which is not efficient in the case of large FOV, because of the PSF variation, is strongly improved by the introduction of the theoretical degradation of this PSF as a function of angle.

6. Conclusion

Anisoplanatism is one of the most important limitation of large FOV high resolution imaging. We present a simple and analytical expression to model the OTF variation as a function of field angle. The OTF for an angle α is the product of the on-axis OTF by an anisoplanatic transfer function (ATF) which only depends on the angular decorrelation of the phase. The incorporation of this ATF in a post processing of large FOV images corrected by AO leads to good accuracy on the object parameter estimation. This method has been validated both on simulated and experimental data. In the case of a stellar field, the relative error on the magnitude estimation can be divided by more than an order of magnitude for large angles.

Nevertheless, the OTF estimation is never perfect and a residual error still limits the post-processing performance (error $\simeq 1\%$). This residual error is due both to the non-stationarity of the AO compensated phase in the pupil and to the turbulence noise (finite exposure time). Furthermore, the C_n^2 profile must be known to compute the ATF, even if there is a weak dependency of the results

with this profile. A SCIDAR (Fuchs et al., 1998) on the astronomic site may provide such an information, but this C_n^2 knowledge may be difficult to obtain in all cases. Another solution to these problems could be to use an approximated parametric model of the ATF in order to perform a joint estimation of the object and of the ATF parameters.

Acknowledgements. This work was supported by contracts from Service Technique des Technologies Communes, Ministère de la Défense, France. The authors wish to thank J.-P. Vérat, F. Charbonnier and A. Blanc for fruitful discussions. Many thanks also to M. Azouit for the C_n^2 data acquisition and to P.-Y. Madec, D. Rabaud and B. Fleury who took part to the AO observing run.

References

- Chassat, F.: 1989, *J. of Optics (Paris)* **20(1)**, 13
 Christou, J. C., Bonaccini, D., and Ageorges, N.: 1997, in R. K. Tyson and R. Q. Fugate (eds.), *Adaptive Optics and Applications*, Vol. 3126, pp 68–80, SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Washington
 Close, L. M., Roddier, F., Roddier, C., Graves, J. E., Northcott, M., and Potter, D.: 1998, pp 406–415, SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Kona, Hawaii
 Conan, J.-M.: 1994, *Ph.D. thesis*, Université Paris XI Orsay
 Conan, J. M., Fusco, T., Mugnier, L., Kersalé, E., and Michau, V.: 1998a, in *Astronomy with adaptive optics: present results and future programs*, ESO/OSA, Sonthofen
 Conan, J.-M., Mugnier, L. M., Fusco, T., Michau, V., and Rousset, G.: 1998b, *Appl. Opt.* **37(21)**, 4614
 Fried, D. L.: 1982, *J. Opt. Soc. Am.* **72(1)**, pp 52
 Fuchs, A., Tallon, M., and Vernin, J.: 1998, *pasp* 110(86)
 Fusco, T., Conan, J.-M., Michau, V., Mugnier, L., and Rousset, G.: 1999a, *Opt. Lett.* **24(21)**
 Fusco, T., Vérat, J.-P., Conan, J.-M., and Mugnier, L.: 1999b, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **134**, 1
 Gunsay, M. and Jeffs, D.: 1995, in *IEEE Trans. Image Proc.*, Vol. 4, pp 1602–1612, IEEE
 Lucy, L.: 1994, in R. Hanish and R. White (eds.), *The Restoration of HST Image and Spectra II*, pp 79–85
 Molodij, G. and Rousset, G.: 1997, *J. Opt. Soc. Am. A* **14(8)**, 1949
 Noll, R. J.: 1976, *J. Opt. Soc. Am.* **66(3)**, 207
 Rigaut, F. and Gendron, E.: 1992, *Astron. Astrophys.* **261**, 677
 Roddier, F.: 1981, in E. Wolf (ed.), *Progress in Optics*, Vol. XIX, pp 281–376, North Holland, Amsterdam
 Roddier, F. (ed.): 1999, *Adaptive Optics in Astronomy*, Cambridge University Press
 Roddier, N.: 1990, *Opt. Eng.* **29(10)**, 1174
 Rousset, G.: 1999, in (Roddier, 1999), Chapt. 5, pp 91–130
 Rousset, G., Fontanella, J.-C., Kern, P., Gigan, P., Rigaut, F., Léna, P., Boyer, C., Jagourel, P., Gaffard, J.-P., and Merkle, F.: 1990, *Astron. Astrophys.* **230**, 29
 Sasiela, R. J.: 1995, *Electromagnetic Wave propagation in Turbulence Evaluation and Application of Mellin Transforms*, Springer-Verlag

2.4 Cas d'objets continuement étendus

L'étude présentée dans l'article [Fusco-a-00a] a été menée, pour des raisons à la fois didactiques, de simplicité de mise en oeuvre mais aussi à cause de l'intérêt astronomique important que suscite ce type d'objet, sur une image anisoplanétique de champs d'étoiles. Dans ce cas, le problème de l'anisoplanétisme consiste "seulement" à associer à chaque étoile une FEP. Le nombre de FEP (et donc de FTA) à calculer est donc restreint au nombre d'étoiles étudiées.

Par contre, dans le cas d'un objet continu, le problème est bien plus délicat. En effet, il faut, en toute rigueur, définir une FEP par pixel. Un petit calcul rapide nous montre alors que pour un champ de 20 secondes d'arc, un télescope de 4 m et une longueur d'onde d'imagerie de $2.2\mu m$, le nombre de pixels pour un bon échantillonnage est de 353×353 soit 124 609 FTA à calculer !

Pour réduire ce nombre qui rend tout traitement d'images grand champ irréaliste, l'idée est de diviser l'image en zones que l'on va pouvoir considérer comme étant isoplanétiques. À chaque zone sera associée une FEP (et donc une FTA). C'est l'expression analytique des FTA, associée à la connaissance du niveau de bruit dans l'image qui va permettre de définir l'étendue de ces zones isoplanétiques. Pour notre cas, en supposant que la taille des zones isoplanétiques est de 2 secondes d'arc, on passe de 124 609 seulement 100 FTA à calculer. De plus, les FTA ne dépendent que de l'éloignement vis-à-vis de la direction d'analyse ($\alpha = 0$), il suffit donc de calculer les FTA pour une direction en fonction de l'éloignement à $\alpha = 0$ (soit 10 FTA dans notre cas) et appliquer à chacune la rotation appropriée pour obtenir les 90 autres! (voir figure 2.3).

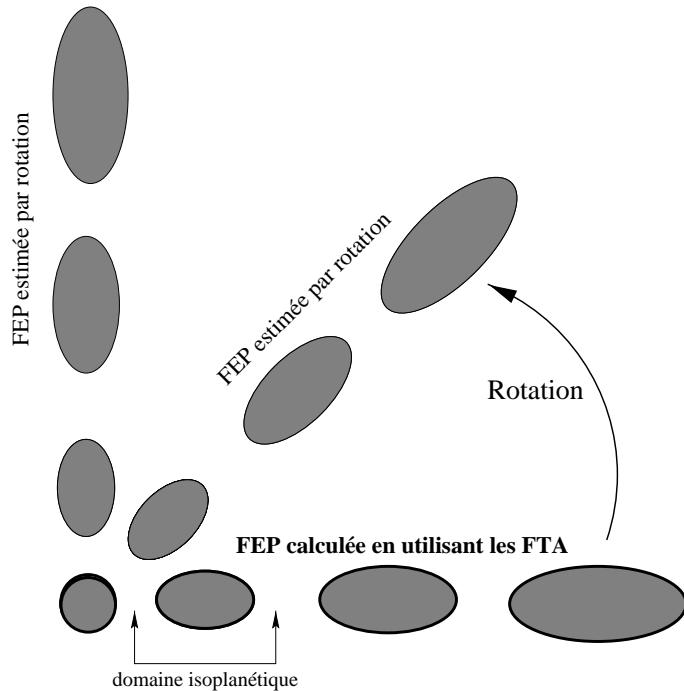


FIG. 2.3 – Représentation schématique du calcul des FEP à partir des FTA pour chaque zone isoplanétique. On a représenté symboliquement l'allongement typique des FEP dans le sens de l'écartement entre la position dans l'image et la position de la direction de l'étoile servant à l'analyse de front d'onde

Dans chaque zone, une déconvolution pixel à pixel utilisant les algorithmes présentés au chapitre 1 sera alors effectuée. Cette approche qui paraît simple et prometteuse est actuellement en cours d'étude, quelques problèmes restent encore à régler notamment en ce qui concerne la gestion des "effets de bords" pour chaque zone isoplanétaire. Ces effets de bords sont liés :

- d'une part à des problèmes de périodisation intervenant lors de l'utilisation de transformées de Fourier discrètes (phénomène de repliement). On utilise alors une bande de garde autour de chaque zone de l'image (la bande de garde rajoutée doit avoir une taille au moins égale à l'étendue spatiale de la FEP) [Seldin-p-94].
- d'autre part au problème de raccordement de l'objet entre chaque zone. Pour obtenir une meilleure estimation globale de l'objet, un maillage redondant est utilisé. Pour la même image, 2 maillages décalés l'un par rapport à l'autre vont être considérés⁵ (voir figure 2.4).

Chaque zone isoplanétaire (pour les deux maillages) sera déconvoluée et l'objet final sera reconstruit en interpolant les résultats de chaque maillage.

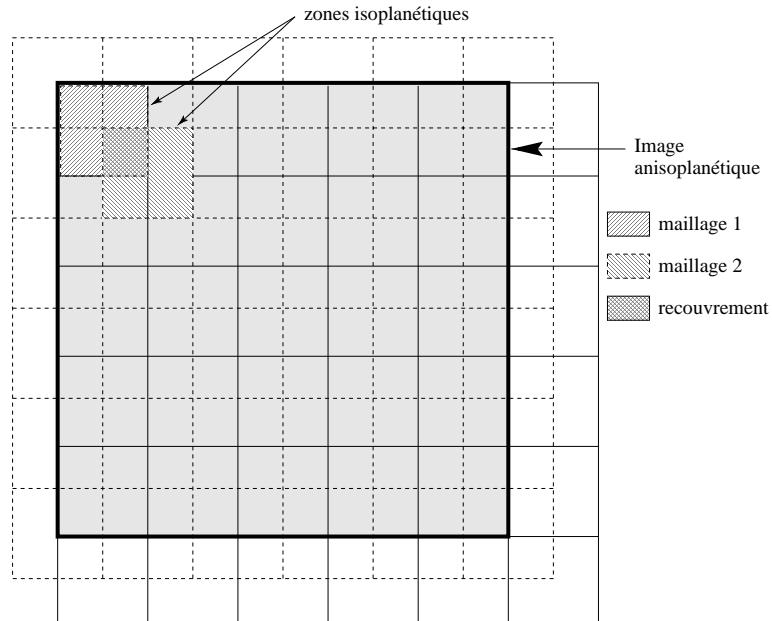


FIG. 2.4 – Schéma de principe du découpage d'une image anisoplanétaire en zones isoplanétiques. On remarquera le maillage redondant permettant une meilleure reconstruction de l'objet après déconvolution de chacune des zones.

Si cette approche paraît intéressante, elle est toutefois limitée à des objets ayant de faibles différences de magnitude (typiquement l'observation du soleil). En effet, pour les objets à forte dynamique, un point très brillant va non seulement influencer sa zone isoplanétaire mais aussi les zones alentour d'autant plus que l'intensité de l'objet dans ces zones adjacentes sera faible. Avec l'approche de traitement parallèle présentée plus haut, la zone brillante sera bien restituée, alors que les zones de faible intensité seront, elles, mal estimées (à cause de l'influence de la zone brillante qui n'est pas prise en compte par la méthode). Une solution consiste en un traitement global des zones isoplanétiques de l'image. On restreint toujours le problème de la variabilité spatiale de la FEP en découplant les zones isoplanétiques, mais le traitement global permet de considérer l'objet dans son ensemble et de pouvoir gérer au mieux les différences d'intensités sur ce dernier.

5. On a alors 20, et non plus 10 FTA à calculer dans notre exemple, ce qui, malgré tout reste très raisonnable.

2.4.1 limitations actuelles et perspectives

Plusieurs limitations sont pour l'instant à prendre en compte lors de l'utilisation de l'approche FTA pour traiter des images longue pose anisoplanétiques corrigées par OA. La toute première est la modélisation simpliste d'un système d'OA par une correction parfaite des premiers polynômes de Zernike. Bien que les résultats semblent robustes et paraissent utilisables sur des systèmes réels (comme le montre le traitement de données réelles acquises à l'OHP), il serait intéressant, à terme, de pouvoir introduire dans l'expression analytique de la FTA, une correction partielle des premiers polynômes de Zernike. De plus, le calcul analytique donne une estimation de la FEP pour un temps de pose infini et ne prend donc pas en compte la possibilité d'un bruit de turbulence résiduel dû au temps de pose fini des images réelles. Enfin, dans certains cas, une connaissance trop partielle du profil de turbulence pourrait aussi introduire des erreurs d'estimation sur la FTA.

Pour toutes ces raisons, une approche myope du problème doit être envisagée. Dans ce cas, une estimation de chaque FTA et donc de chaque FTO associée à chaque zone isoplanétique (ou à chaque étoile dans le cas de l'algorithme champ d'étoile) sera effectuée. Une DSP prenant en compte les erreurs possibles d'estimation des FTA sera aussi calculée. Utilisant ces deux entrées, une déconvolution myope de chaque zone sera alors effectuée (en utilisant les algorithmes proposés au paragraphe 1.5).

2.5 Traitement d'images courte pose anisoplanétiques

Je viens de présenter une approche pour résoudre le problème du traitement d'images longue pose anisoplanétiques corrigées par OA. Or dans certains cas, en particulier si le rapport de Strehl est faible, il est parfois préférable en terme de rapport signal à bruit, d'acquérir des courtes poses plutôt que des longues poses derrière de l'OA [Conan-p-93, Conan-t-94, Fusco-n-96]. L'acquisition de pose courte derrière l'OA permet de figer les effets de la turbulence (ici la turbulence résiduelle). L'idée est alors, comme pour le cas longue pose présenté plus haut, de découper ces images en zones isoplanétiques. Chaque zone est ensuite traitée par un algorithme de déconvolution. Il est intéressant de noter, que les études menées au paragraphe 4.5.3 de la première partie du mémoire sur les corrélations angulaires des courtes poses corrigées par OA trouvent ici une application directe dans le calcul des "zones isoplanétiques" à considérer.

Le problème majeur reste, néanmoins, la méconnaissance de la phase résiduelle (et donc de la FEP courte pose) pour chacune des zones. On peut envisager un traitement de type déconvolution multitrame aveugle [VanKampen-p-98] où l'objet et la phase du front d'onde sont estimés conjointement à partir d'une série d'images courte pose. Les données de fronts d'onde dans la direction d'analyse couplées avec une connaissance statistique de l'évolution spatiale de la phase (si elle est disponible) devrait permettre de régulariser suffisamment le problème pour obtenir une bonne restauration de l'objet. Une autre technique prometteuse semble être la diversité de phase [Gonsalves-a-82]. L'idée est alors d'acquérir non pas une, mais plusieurs (en général 2) images au même instant, les images étant reliées par des relations connues (défocalisation d'une distance connue par exemple). Cette technique de diversité de phase a déjà été utilisée avec succès pour traiter des images courte pose anisoplanétiques non corrigées par OA (essentiellement des images du soleil) [Paxman-a-94, Seldin-p-94, Paxman-a-96, Seldin-p-99, Thelen-p-99]. J. Seldin et R. Paxman [Seldin-p-99] ont récemment utilisé ce type d'approche sur des images courte pose corrigées par OA (images obtenue sur la soleil par l'OA de Sacramento Peak [Rimmele-p-98]) et obtenu des résultats en tous points remarquables.

2.6 Conclusion

J'ai présenté dans ce chapitre des approches permettant de traiter des images anisoplanétiques corrigées par optique adaptative.

Je me suis essentiellement intéressé au cas de l'imagerie longue pose pour laquelle j'ai développé une expression analytique de l'évolution de la FEP dans le champ. Cette approche analytique, basée sur le calcul d'une Fonction de Transfert Anisoplanétique (FTA) ne dépendant que du degré de correction de l'OA et du profil de turbulence, a été intégrée dans un algorithme de traitement de champs d'étoiles. La validation du concept tant sur données simulées que sur données réelles a été effectuée avec succès. Les résultats ont été publiés dans un article *d'Astronomy & Astrophysics supplement series* en février 2000.

Des développements supplémentaires sont actuellement en cours, ils consistent à appliquer cet approche sur des images anisoplanétiques d'objets continus. Pour ce faire, une segmentation de l'image en zones isoplanétiques est proposée, puis un traitement en parallèle des différentes zones isoplanétiques par les méthodes de déconvolution présentées au chapitre 1 est effectué. Enfin l'objet total est reconstruit à partir des objets estimés pour les différentes zones.

Pour finir, une discussion a été proposée pour le cas du traitement d'images courte pose anisoplanétiques corrigées par OA. En particulier, il semble que dans ce cas, l'utilisation d'une technique de diversité de phase soit particulièrement adaptée.

Si toutes les approches proposées pour traiter *a posteriori* des images corrigées par OA sont prometteuses et vont permettre d'augmenter sensiblement le champ d'intérêt d'une OA classique, elles n'en demeurent pas moins limitées en terme de rapport signal à bruit par la dégradation de la qualité de correction de l'OA en fonction de l'angle. Même si on est capable de modéliser la FEP pour de grands angles, la très faible correction de cette dernière va induire un très mauvais rapport signal à bruit sur les hautes fréquences spatiales de l'objet (dans les zones éloignées de la direction d'analyse) et donc entraîner une restitution de ces hautes fréquences peu efficace.

Pour s'affranchir de cette limitation fondamentale, une nouvelle approche de la correction par optique adaptative doit être envisagée. L'approche qui semble aujourd'hui la plus prometteuse pour s'affranchir des effets de l'anisoplanétisme sur la correction par OA (et obtenir une bonne correction dans un très grand champ) est le concept d'optique adaptative multiconjuguée que je vais présenter et étudier en détail dans la troisième partie du mémoire.

Troisième partie

UNE TECHNIQUE D'IMAGERIE À GRAND CHAMP : L'OPTIQUE ADAPTATIVE MULTICONJUGUÉE

Chapitre 1

Optique Adaptative Multiconjuguée & reconstruction de front d'onde à grand champ

1.1 Introduction

Comme on l'a vu au cours des deux premières parties de ce mémoire, l'une des limitations fondamentales de l'optique adaptative est le phénomène d'anisoplanétisme (voir paragraphe 4.7 de la première partie) qui réduit le champ de correction des systèmes à quelques secondes d'arc aux longueurs d'onde visibles et quelques dizaines de secondes d'arc dans l'infrarouge. En effet, pour obtenir une bonne correction par OA, il faut avoir un flux suffisant sur l'ASO ce qui suppose une source guide de magnitude relativement faible (à l'heure actuelle les magnitudes limites sont de l'ordre de 16 à 17¹ sur des télescopes de quatre mètres). Dans la plupart des cas, l'objet d'intérêt a une magnitude trop élevée pour servir à l'analyse de front d'onde, il faut donc utiliser une étoile de référence. Or, à cause du phénomène d'anisoplanétisme, cette source de référence brillante doit être située au plus proche possible de l'objet. Hélas, la quantité d'étoiles suffisamment brillantes est bien trop faible pour permettre une bonne couverture du ciel, et actuellement seule une portion réduite de la voûte céleste est accessible aux systèmes d'OA [Allen-a-73, Bahcall-a-81, Rigaut-a-92a].

Une approche pour résoudre les problèmes liés au phénomène d'anisoplanétisme consiste à modifier le concept d'OA existant pour leur permettre de corriger la phase dans un grand champ de vue. C'est le concept de l'optique adaptative multiconjuguée (OAMC). L'idée [Dicke-a-75, Beckers-p-88] est d'utiliser plusieurs directions d'analyse pour obtenir des mesures du front d'onde dans différentes directions et plusieurs miroirs déformables conjugués à différentes altitudes pour corriger la phase dans le volume de turbulence et réduire ainsi les dégradations de la correction dues au phénomène d'anisoplanétisme. L'intérêt majeur de tels systèmes est une augmentation sensible de couverture de ciel, le champ où la correction par le système est efficace étant bien plus important que pour l'OA classique (cette augmentation peut dépasser le facteur dix, comme on le verra par la suite). Certains auteurs suggèrent même qu'avec un système d'OAMC, l'utilisation d'étoiles naturelles seules pourra permettre une couverture quasi complète du ciel [Ragazzoni-a-99b].

Les problèmes soulevés par le concept d'OAMC sont nombreux. Dans cette dernière partie du mémoire je ne m'intéresserai qu'au problème de la reconstruction spatiale de la phase pour un grand champ de vue (c'est-à-dire de la commande spatiale des différents miroirs déformables du système), qui

1. Pour ces magnitudes limites on a une perte importante en qualité de correction.

est un des points clés d'un système d'OAMC. Ainsi, les aspects temporels et les contraintes spécifiques liées à la boucle fermée du système ne seront pas abordés ici, si ce n'est sous forme de discussions et en guise de perspectives. La reconstruction de front d'onde pour un grand champ représente la première difficulté à résoudre lorsque l'on s'intéresse à l'étude d'un système d'OAMC. Sa résolution fixe les premiers dimensionnements des différents composants du système (nombre de miroirs, d'actionneurs, de directions d'analyse ...) et permet d'obtenir une première étape dans l'étude de la faisabilité globale des systèmes d'OAMC.

Après une présentation générale de l'optique adaptative multiconjuguée au paragraphe 1.2, une approche tomographique de la reconstruction de la phase, est présentée au paragraphe 1.3. Le problème majeur consiste à reconstruire le volume de turbulence, c'est-à-dire la phase dans chacune des couches atmosphériques à partir de mesures de la phase résultante² obtenues sur la pupille du télescope pour différentes directions d'analyse. Cette approche tomographique est étendue, au paragraphe 1.3.3, au cas réaliste où le nombre de miroirs déformables est inférieur au nombre de couches turbulentes. Cela est obtenu par une modélisation de la turbulence, à l'aide de la notion des couches équivalentes (voir paragraphe 1.8.3 de la première partie).

L'approche tomographique et sa généralisation par le concept des couches équivalentes permet d'étudier, au paragraphe 1.3.3 l'influence de deux paramètres essentiels en OAMC que sont le nombre de miroirs déformables et le nombre de directions d'analyse nécessaires à une bonne qualité de correction dans un grand champ. Ces études ont fait l'objet d'un article [Fusco-a-99b] et de deux conférences [Fusco-p-99a, Fusco-p-00a]. Toutefois, cette approche est basée sur une approximation du modèle direct dans laquelle on suppose que l'ensemble de la turbulence est répartie au niveau des miroirs déformables. Cette approximation limite dans certains cas les performances du systèmes (notamment quand on ne dispose que d'un seul, voire deux miroirs et que l'on s'intéresse à de très grands champs de vue). Ainsi, au paragraphe 1.4 une optimisation de la loi de commande est proposée. Cette dernière permet en utilisant le vrai profil de turbulence de gérer au mieux le faible nombre de miroirs en spécifiant les zones du champ dans lesquelles on veut optimiser la correction.

1.2 Principe de l'optique adaptative multiconjuguée

1.2.1 Présentation générale

L'optique adaptative multiconjuguée (OAMC) est une généralisation de l'OA classique. Comme on l'a vu précédemment, le problème de l'OA "classique"³ provient de la position du miroir déformable qui est conjugué avec la pupille du télescope. Avec un système classique, on obtient une correction optimale de la phase résultante sur la pupille du télescope pour une direction (la direction d'analyse). Cette correction est ensuite appliquée à tout le champ ce qui conduit à une dégradation des performances du système en fonction de la position angulaire dans le champ. Cette dégradation est due au volume de turbulence qui introduit des effets d'anisoplanétisme (voir paragraphe 1.5.3 de la première partie) qu'un système classique est incapable de prendre en compte. Pour résoudre ce problème il faut pouvoir analyser et corriger ce volume de turbulence d'où le concept d'OAMC. Un tel système se compose de :

- plusieurs étoiles guides permettant d'analyser la phase résultante dans plusieurs directions et de remonter ainsi à une information sur le volume de turbulence;
- plusieurs miroirs déformables optiquement conjugués à différentes altitudes (voir la figure 1.1).

2. Dans toute la suite j'appellerai phase résultante le phase obtenue dans la pupille du télescope pour une direction donnée (somme des phases dans les différentes couches turbulentes).

3. Jusqu'à la fin du mémoire j'opposerai l'OA "classique" (une unique direction d'analyse et un miroir déformable dans la pupille) à l'OAMC.

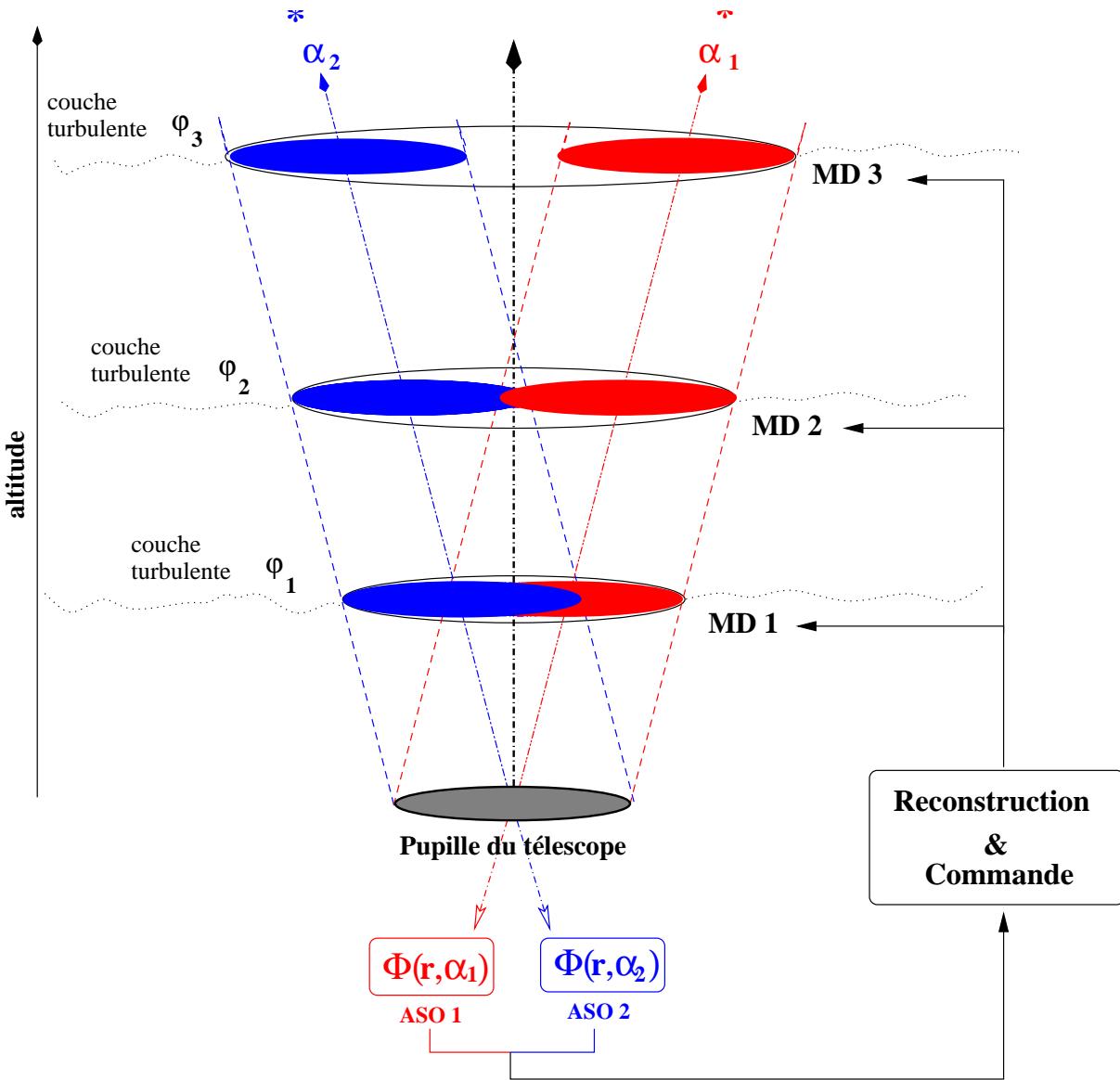


FIG. 1.1 – Schéma de principe d'une optique adaptative multiconjuguée. Le but est de corriger la phase dans le volume de turbulence pour réduire les effets d'anisoplanétisme. Sur cet exemple on considère deux directions d'analyse α_1 et α_2 et trois miroirs déformables MD1, MD2 et MD3.

A partir des mesures dans les différentes directions, une reconstruction de la phase dans le volume de turbulence est effectuée puis une correction est appliquée à chacun des miroirs déformables. Si l'on est capable de reconstruire correctement la phase dans chacune de ces couches, on obtiendra alors une correction uniforme dans tout le champ de vue.

1.2.2 Un peu d'histoire ...

Le concept d'optique adaptative multiconjuguée (OAMC) (ou Multiconjugate Adaptive Optics [MCAO] en anglais), comme celui de l'OA "classique" a été proposé bien avant que les possibilités technologiques soient disponibles. L'idée originale, proposée par R. Dicke date de 1975 [Dicke-a-75]. L'idée de Dicke a été ensuite reprise, en 1988 par Jacques Beckers [Beckers-p-88, Beckers-p-89] et depuis par de nombreux auteurs [Tallon-a-90, Tallon-p-92, Ellerbroek-a-94, Johnston-a-94, Baharav-a-95]. Toutefois, l'OA classique étant à peine naissante et les problèmes posés par cette dernière si nombreux, que l'OAMC n'est restée pendant longtemps qu'un concept certes séduisant mais sans application directe. Depuis quelques années et l'arrivée à maturité de l'OA classique, la résolution des problèmes liés aux effets d'anisoplanétisme est devenu le défi des nouvelles générations d'OA. Ainsi de nombreuses études à la fois théoriques mais aussi basées sur des simulations numériques (une partie de ces travaux sera présenté dans ce chapitre) sont menées actuellement sur le sujet; elles permettent d'avancer vers la future réalisation de systèmes d'OAMC [Fusco-a-99b, Fusco-p-99a, Ragazzoni-a-99a, Fusco-p-00a, Fusco-a-00c, Flicker-p-00, Tokovinin-a-00, Lelouarn-t-00]. Dans la lignée de ces développements, la première validation sur la ciel de la faisabilité d'une estimation de front d'onde pour un grand champ a été effectuée par R. Ragazzoni [Ragazzoni-a-00].

En ce qui concerne l'aspect pratique et la construction d'un système d'OAMC utilisable en astronomie, il faut se projeter dans le futur.

Au début 2001, le premier des deux télescopes de 8 mètres du projet Gemini (Gemini nord) situé au Mauna Kea (Hawaii) devrait être équipé du premier système d'optique adaptative (Altair) comportant un miroir conjugué en altitude (6.5 km) [Herriot-p-98]. Ce système peut être vu comme le premier ordre d'un système d'OAMC puisque il ne comporte qu'une seule direction d'analyse et qu'un seul MD⁴. Une étude sur plusieurs années du profil de turbulence sur site [Racine-p-95] a permis de déterminer la position optimale de ce miroir. Le choix judicieux de l'altitude de conjugaison couplé à l'utilisation d'un algorithme de commande optimisé [Saddlemeyer-p-98, Veran-a-00] devrait permettre d'obtenir des images bien corrigées dans un champ plus important que celui des systèmes classiques.

Suite aux différentes études récentes menées sur le sujet qui ont montré la faisabilité et les performances à attendre d'un système d'OAMC, le deuxième télescope du projet Gemini, en cours de construction au Cerro Pachon (Chili) devrait être équipé d'une OAMC⁵. Le champ d'intérêt du système (dans lequel la correction sera optimisée) sera de 1×1 minute d'arc, toutefois le champ total du système sera de 2 minutes d'arc (limité par la mécanique). Derrière ce système, on trouvera une caméra d'imagerie⁶ et un spectrographe à intégral de champ. La première lumière de ce système est prévue pour fin 2004.

Dans le même temps un démonstrateur de la faisabilité du concept d'OAMC devrait être installé sur un des télescopes de 8 mètres du VLT. Ce démonstrateur sera le fruit d'une collaboration entre plusieurs organismes Européens dont l'ESO, l'ONERA et les observatoires D'Arcetri et de Padova (Padoue) en Italie entre autres.

Enfin, à plus long terme encore, les futurs très grands télescopes [Gilmozzi-p-98, Dierickx-p-00] (télescopes de 100 mètres de diamètre) devraient aussi être équipés d'OAMC [Ragazzoni-a-99b, Ellerbroek-p-00],

4. On peut parler ici d'optique adaptative **monoconjuguée** (AOMC) :-)

5. Voir le site <http://www.gemini.edu/sciops/instruments/adaptiveOptics/AOIndex.html> pour plus de détails.

6. La caméra sera composée de 4000×4000 pixels.

Lelouarn-t-00]. Bien entendu, pour ce type de télescopes, nombre de problèmes spécifiques sont à prendre en compte. Mais, si les difficultés techniques semblent importantes, les possibilités observationnelles et les avancées scientifiques associées, à partir de tels télescopes, seront exceptionnelles [Gilmozzi-p-00].

1.2.3 Position du problème

Pour un profil de turbulence donné, composé de N_t couches turbulentes, la phase résultante pour une direction donnée α dans le champ se déduit de la phase dans le volume par la relation :

$$\Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \quad (1.1)$$

où φ_j représente la phase turbulente pour la couche j située à l'altitude h_j . \mathbf{r} est le vecteur des coordonnées spatiales dans la pupille. Grâce à cette équation on voit clairement apparaître le problème majeur que va s'efforcer de résoudre un système d'OAMC, à savoir le problème de l'anisoplanétisme. En effet pour différents angles les portions de φ_j interceptées par la pupille du télescope seront différentes (d'autant plus que l'écran est situé en altitude et que α est grand). La phase résultante sur la pupille sera donc différente en fonction de l'angle.

Le but d'un système d'OAMC est d'obtenir une bonne correction dans un champ de vue donné (plus grand que le domaine isoplanétique classique), c'est-à-dire d'obtenir une bonne correction de $\Phi_{\alpha}(\mathbf{r})$ pour l'ensemble des directions $\{\alpha\}_{fov}$ d'un champ donné. Deux types d'approches sont envisageables pour résoudre ce problème :

- La première se base sur une correction du volume de turbulence et donc sur la correction de la phase dans chacune des couches responsables de la dégradation de la phase résultante dans la pupille du télescope. Cette approche appelée approche tomographique [Tallon-p-92, Ragazzoni-a-99a, Fusco-a-99b, Fusco-p-99a, Fusco-p-00a] sera présentée au paragraphe 1.3.
- La deuxième, qui sera présentée au paragraphe 1.4, se base sur un critère minimisant en moyenne la variance de la phase résultante **dans la pupille du télescope** pour l'ensemble des directions d'intérêt dans le champ [Ellerbroek-a-94, Fusco-a-00c, Fusco-p-00b]. Cette approche appelée par la suite MMSE $_{\alpha}$ (minimum mean square error) permet de gérer au mieux les différents problèmes soulevés par un système d'OAMC. On verra au paragraphe 1.4 que des liens forts existent entre les 2 approches mais que la tomographie ne représente qu'un cas particulier de l'approche MMSE $_{\alpha}$.

1.2.4 La mesure

Quelle que soit l'approche choisie, pour obtenir une correction efficace, il faut disposer de mesures et en particulier de mesures de la phase dans le volume turbulent. Cette mesure peut s'effectuer en utilisant des étoiles lasers [Foy-a-85] et/ou des étoiles naturelles (le problème pour ces dernières résidant dans la quantité de sources suffisamment brillantes présentes dans le champ). Le concept d'étoile laser repose sur l'utilisation d'une source laser pour créer une étoile artificielle suffisamment brillante pour pouvoir effectuer l'analyse de front d'onde sur le flux rétro-diffusé. On pourra trouver dans [Sandler-l-99] une revue sur le sujet et en particulier des problèmes liés à ce type d'étoiles (indétermination du tilt[Rigaut-a-92a], effet de cône). On pourra noter que si le concept d'OAMC permet de résoudre l'effet de cône par l'utilisation de plusieurs étoiles et une reconstruction du volume de turbulence [Tallon-a-90, Tyler-a-94, Ragazzoni-a-99a, Lelouarn-t-00] il ne résoud en rien l'indétermination du tilt. Ainsi, l'utilisation couplée d'étoiles lasers et d'étoiles naturelles pour la mesure du tilt

semble souhaitable⁷.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le problème de la reconstruction de la phase et de la commande spatiale en OAMC. Les problèmes spécifiques liés à l'utilisation d'étoiles lasers ne seront pas pris en compte et les concepts seront développés dans le cas d'une analyse de front d'onde effectuée sur étoiles naturelles. Dans de nombreux cas, l'utilisation seule d'étoiles naturelles devrait s'avérer suffisante [Ragazzoni-a-99b, Fusco-p-99a]. Une autre application ne nécessitant pas d'étoiles lasers et bien sûr le cas de l'observation du soleil.

Toutefois les résultats obtenus dans le cas des étoiles naturelles sont transposables au cas d'étoiles lasers en tenant compte des particularités géométriques (onde sphérique) et des problèmes de mesures spécifiques liés à ce type d'étoiles guides (voir la thèse de M. LeLouarn [Lelouarn-t-00] pour plus de détails à ce propos).

Dans tous les cas pour effectuer la mesure du volume turbulent, deux types d'approches ont été proposées :

- Mesurer directement la phase dans le volume de turbulence. Il s'agit ici de mesurer la turbulence dans chacune des couches atmosphériques. Différents types de systèmes de mesure sont envisageables (études de franges d'interférences créées sur la couche de sodium [Baharav-a-95], utilisation de la scintillation sur un SH [Glindemann-p-96]). Récemment, R. Ragazzoni a proposé d'utiliser le nouveau concept d'analyseur pyramidal (voir paragraphe 3.4) pour mesurer la phase dans différentes couches turbulentes. Il propose, en utilisant toutes les étoiles disponibles dans le champ (quelles que soit leurs magnitudes), de discréminer la phase dans différentes couches par des effets de moyenne. Cette solution paraît élégante, et semble comporter de nombreux avantages, elle mérite donc d'être étudiée avec attention.
- Mesurer la phase résultante dans la pupille pour différentes directions. Dans ce cas, on a une mesure intégrée de la phase résultante sur la pupille et il faut inverser le problème pour remonter à la phase dans le volume. L'avantage de cette approche est qu'elle ne nécessite pas le développement de nouveaux concepts et que les analyseurs existants (type Shack Hartmann par exemple) peuvent être utilisés quasiment en l'état. C'est cette approche qui a été choisie ici pour étudier la commande spatiale des MD⁸. Toutefois, le formalisme qui sera développé par la suite peut s'adapter aux autres types d'analyseurs y compris ceux qui seraient à même d'identifier la contribution de chaque couche turbulente.

Dans le cadre d'une mesure de la phase résultante obtenue dans la pupille pour différents angles, la phase résultante mesurée, pour un angle α_i s'écrit

$$\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha_i) + n_i(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

où $n_i(\mathbf{r})$ est le bruit affectant la mesure. Pour faciliter la compréhension, je vais considérer que la mesure du système dans une direction α_i est directement la phase résultante dans cette direction (cette supposition n'enlève toutefois rien à la généralité des approches présentées ici⁹). Le terme de bruit n_i dépend de l'analyseur utilisé (dans notre cas un Shack-Hartmann¹⁰). En conséquence, le bruit n_i sur notre mesure (i.e. sur la phase résultante dans la pupille pour les directions d'analyse) sera le bruit du SH propagé à travers le processus de reconstruction (voir paragraphe 3.7.4 de la première partie).

7. On peut noter que plusieurs techniques ont été proposées pour mesurer le tilt sur des étoiles lasers (étoiles polychromatiques [Foy-a-95], utilisation de télescopes auxiliaires [Ragazzoni-a-95a, Ragazzoni-a-95b]).

8. Ce type de mesures est aussi celui envisagé pour le système d'OAMC du télescope Gemini Sud.

9. Elle permet seulement de simplifier à la fois les calculs et les notations.

10. L'utilisation d'un autre type d'analyseur aura pour seul effet de modifier la statistique du bruit $n_i(\mathbf{r})$ entachant les mesures et donc de modifier les matrices de covariance \mathbf{C}_i de l'équation 1.10.

Une fois la phase résultante mesurée, il faut, bien évidemment, pouvoir la corriger. Pour cela l'OAMC dispose, comme on l'a vu, de plusieurs miroirs déformables conjugués à différentes altitudes.

1.2.5 La correction

Le système correcteur se compose donc de plusieurs miroirs déformables conjugués optiquement à différentes altitudes (voir figure 1.2). La conjugaison optique se fait en déplaçant la position physique des miroirs vis-à-vis du plan focal du télescope (si le MD est sur le plan focal, il sera conjugué à l'infini, s'il est placé à l'infini, il sera conjugué dans la pupille).

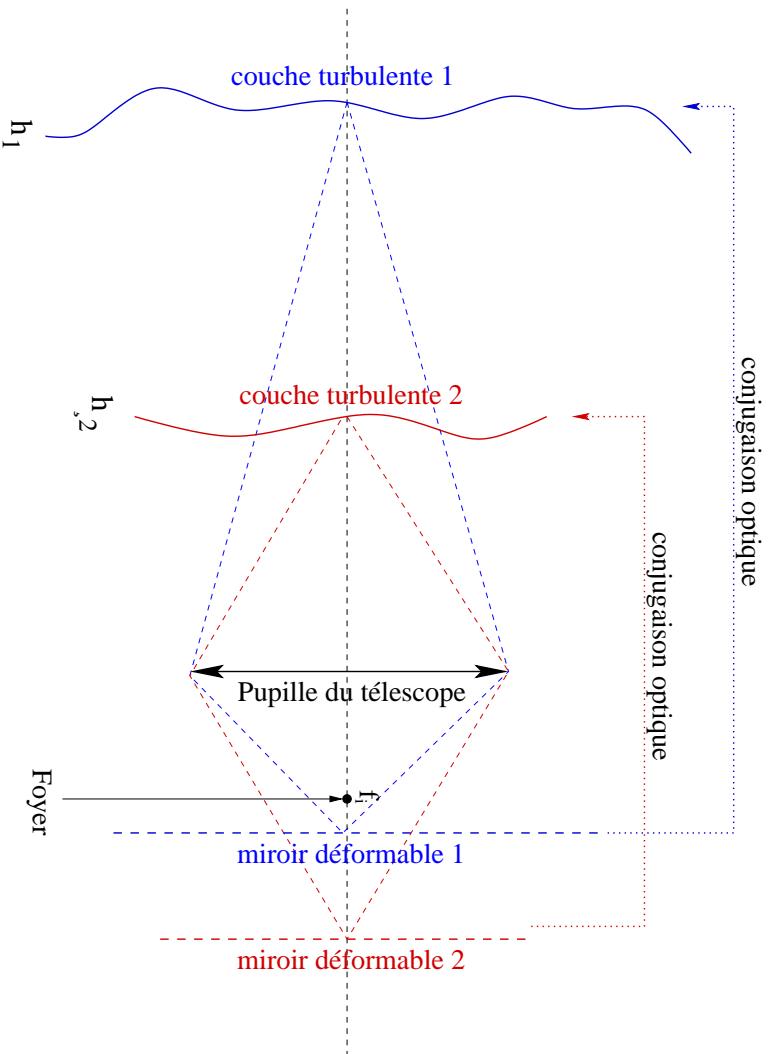


FIG. 1.2 – Schéma de principe de la conjugaison optique des miroirs déformables sur des couches turbulentes.

Il s'agit à présent d'estimer au mieux, à partir des mesures obtenues dans les différentes directions d'analyse, les déformées à appliquer à chacun de ces miroirs déformables pour obtenir la meilleure correction possible dans tout le champ d'intérêt.

1.3 L'approche tomographique: une reconstruction du volume de turbulence

La première approche proposée pour résoudre le problème posé, à savoir obtenir une bonne correction dans un grand champ de vue, est de tenter de corriger l'ensemble du volume de turbulence pour le champ d'intérêt. On corrige ainsi les effets d'anisoplanétisme à leur source (voir équation 1.1), c'est-à-dire dans chacune des couches turbulentes φ_j responsables de la dégradation du front d'onde. Le but de cette approche, appelée approche tomographique [Tallon-p-92, Ragazzoni-a-99a] est donc

une minimisation du critère suivant :

$$\sigma_{tomo}^2 = \sum_{j=1}^{N_t} \sigma_{\varphi_j - \hat{\varphi}_j}^2 = \sum_{j=1}^{N_t} \left\langle \|\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j) - \hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\rho}_j)\|^2 \right\rangle_{\varphi, \text{ bruit}} \quad (1.3)$$

où $\hat{\varphi}_j$ représente les corrections à appliquer (déformations du miroir) à chaque couche turbulente j et $\boldsymbol{\rho}_j$ les coordonnées spatiales dans l'écran de phase considéré pour la couche turbulente j . On suppose en outre que les couches sont statistiquement indépendantes. Pour des raisons pratiques, $\|\varphi_j - \hat{\varphi}_j\|^2$ est calculé sur un support limité de diamètre D_j . Ce diamètre D_j du support du $j^{\text{ème}}$ écran est obtenu en fonction de la taille de la pupille du télescope (D), du champ de vue maximum considéré $2 * \alpha_{max}$ et de l'altitude h_j de la couche, soit

$$D_j = D + 2 * \alpha_{max} h_j \quad (1.4)$$

L'estimation des couches turbulentes peut également se faire en minimisant la variance résiduelle de la phase résultante sur la pupille du télescope dans tout le champ d'intérêt qui est *in fine*, pour l'imagerie, la grandeur d'intérêt :

$$\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \left\langle \int_{\{\boldsymbol{\alpha}\}_{fov}} \left\| \hat{\Phi}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) - \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}) \right\|^2 d\boldsymbol{\alpha} \right\rangle \quad (1.5)$$

Avec un profil de C_n^2 composé de N_t couches discrètes turbulentes

$$\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \left\langle \int_{\{\boldsymbol{\alpha}\}_{fov}} \left\| \sum_{j=1}^{N_t} (\hat{\varphi}_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}) - \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha})) \right\|^2 d\boldsymbol{\alpha} \right\rangle \quad (1.6)$$

soit en supposant l'indépendance statistique des différentes couches turbulentes :

$$\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \int_{\{\boldsymbol{\alpha}\}_{fov}} \sum_{j=1}^{N_t} \left\langle \|\hat{\varphi}_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}) - \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha})\|^2 \right\rangle d\boldsymbol{\alpha} \quad (1.7)$$

ce qui revient donc à minimiser la variance de la phase dans chacune des couches turbulentes sur le support $\{\mathbf{r} + h_k \boldsymbol{\alpha}\}_{fov}$. En particulier une solution possible (mais ce n'est évidemment pas la seule) est alors la minimisation globale de chaque couche turbulente. On a donc

$$\arg \min_{\varphi} \sigma_{tomo}^2 \subset \arg \min_{\varphi} \sigma_{\boldsymbol{\alpha}}^2 \quad (1.8)$$

C'est-à-dire que la solution minimisant le critère tomographique (équation 1.3) est une des solutions minimisant le critère défini par l'équation 1.7.

Le critère tomographique répond donc bien au besoin de l'imagerie. Par contre, on verra au paragraphe 1.4 que ce critère n'est qu'un cas particulier d'une approche plus globale.

Je vais, dans la suite de ce paragraphe dériver, à partir du critère défini en équation 1.3, un estimateur permettant de reconstruire au mieux la phase dans le volume à partir des phases résultantes mesurées dans les différentes directions d'analyse. Une reconstruction optimale sera proposée au paragraphe 1.3.1. Elle sera ensuite comparée au paragraphe 1.3.2 avec une approche plus classique basée sur une minimisation au sens des moindres carrés. L'importance d'utiliser un critère régularisé en utilisant les connaissances *a priori* disponibles sur le volume turbulent sera démontré. Enfin, pour tenir compte du fait qu'en pratique le nombre de couches turbulentes est très supérieur au nombre de miroirs déformables d'un système d'OAMC, une généralisation de l'approche tomographique est proposée au paragraphe 1.3.3. L'utilisation de "couches équivalentes" pour modéliser le problème direct permet avec un faible nombre de miroirs d'atteindre des performances, en terme de correction, proches du cas optimal (nombre de miroirs égal au nombre de couches turbulentes).

1.3.1 Approche de type Maximum *A Posteriori*

Il s'agit donc d'estimer la meilleure phase de reconstruction possible à appliquer à chacun des miroirs. En supposant que la statistique du bruit sur les mesures ainsi que la statistique de la phase turbulente sont gaussiennes, l'approche MMSE définie par la minimisation du critère présenté en équation 1.3 est équivalente à une approche de type Maximum *A Posteriori* (MAP) [VanTrees-l-68]¹¹. On recherche ainsi les phases les plus probables dans chacune des couches turbulentes compte tenu des mesures obtenues dans les différentes directions d'analyse. Cela revient à maximiser la loi de probabilité suivante :

$$P\left(\{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j \mid \{\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})\}_i\right) \propto P\left(\{\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})\}_i \mid \{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j\right) P\left(\{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j\right) \quad (1.9)$$

où $\{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j$ correspond à l'ensemble des N_t phases à estimer et $\{\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})\}_i$ l'ensemble des N_{mes} mesures dans les différentes directions $\{\alpha_i\}_i$. La probabilité $P\left(\{\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})\}_i \mid \{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j\right)$ correspond au terme de vraisemblance vis-à-vis des mesures. Comme on l'a vu au chapitre 3.7.3 de la première partie, le bruit après reconstruction de la phase résultante sur la pupille à partir des pentes du SH est gaussien avec une matrice de covariance $\mathbf{C}_{n,i}$ pour la direction α_i ¹². En supposant en outre que le bruit sur les mesures dans chaque direction est décorrélé on obtient :

$$P\left(\{\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})\}_i \mid \{\varphi_j(\mathbf{r})\}_j\right) \propto \prod_{i=1}^{N_{mes}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha_i) \right)^T \mathbf{C}_{n,i}^{-1} \left(\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha_i) \right) \right] \right\} \quad (1.10)$$

La probabilité $P\left(\{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j\right)$, elle, rend compte des connaissances *a priori* que l'on a sur les inconnues (ici la phase dans chacune des couches turbulentes) et va permettre de régulariser le problème et d'aider à l'inversion. Les écrans de phase sur chaque couche étant supposés statistiquement indépendants [Roddier-l-81], il vient :

$$P\left(\{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j\right) = \prod_{j=1}^{N_t} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varphi_j^T(\boldsymbol{\rho}_j) \mathbf{C}_{kol,j}^{-1} \varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j) \right\} \quad (1.11)$$

où les matrices $\mathbf{C}_{kol,j}$ sont les matrices de covariance de la phase pour chaque couche turbulente (on suppose que chaque écran suit une statistique de Kolmogorov ou de Von Karman). Pour chaque couche turbulente, cette matrice $\mathbf{C}_{kol,j}$ est définie en fonction du $r_{0,j}$ (paramètre de Fried) de la couche considérée.

La maximisation de l'équation 1.9 revient à minimiser son antilogarithme, soit à minimiser le critère suivant en fonction des φ_j :

$$\{\hat{\varphi}_j\} = \arg \min_{\{\varphi_j\}} J\left(\{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j\right) \quad (1.12)$$

11. Je choisis ici d'établir l'estimateur à partir du formalisme MAP plutôt que MMSE pour des raisons de simplicité mathématique et de cohérence avec l'article présenté au paragraphe 1.3.3.

12. Si on suppose que toutes les étoiles guides ont la même magnitude et que les analyseurs pour chaque direction sont identiques alors $C_{n,i}$ sera identique quelle que soit la direction α_i .

avec

$$J\left(\{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j\right) = \sum_{i=1}^{N_{mes}} \left[\left(\Phi_{\boldsymbol{\alpha}_i}^m(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}_i) \right)^T \mathbf{C}_{n,i}^{-1} \left[\left(\Phi_{\boldsymbol{\alpha}_i}^m(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}_i) \right) \right] \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)^T \mathbf{C}_{kol,j}^{-1} \varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j) \right] \quad (1.13)$$

En détaillant l'expression de droite dans l'équation 1.13, on retrouve un terme d'attache aux données¹³ et un terme de régularisation. L'intérêt de ce deuxième terme est triple :

- il permet d'éviter l'amplification du bruit sans avoir recours à une méthode ad hoc de type SVD tronquée (voir paragraphe 3.7.2);
- il permet d'aider à discriminer les phases à appliquer aux différentes couches en utilisant la connaissance *a priori* du poids de chacune des couches turbulentes donné par le profil de C_n^2 (grâce aux différentes valeurs de $r_{0,j}$ appliquées à chacune des matrices de covariance $\mathbf{C}_{kol,j}$);
- il permet enfin d'extrapoler en partie la phase dans des zones non mesurées par les différentes directions d'analyse (voir paragraphe 1.3.2). Cette extrapolation est possible grâce à la connaissance *a priori* des corrélations spatiales sur chaque couche turbulente introduite par les matrices $\mathbf{C}_{kol,j}$. Elles permettent de connaître, en moyenne, l'évolution spatiale de la phase et donc de relier les zones non mesurées à celles qui le sont effectivement.

En décomposant les écrans de phase sur une base donnée, l'équation 1.1 peut se réécrire sous une forme matricielle :

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\varphi} \quad (1.14)$$

où $\boldsymbol{\varphi}$ est un vecteur contenant l'ensemble des paramètres pour toutes les couches turbulentes (ensemble des paramètres à estimer)

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_{N_t} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

et $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\alpha}}$ une matrice permettant de calculer la phase résultante $\Phi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{r})$ en fonction des écrans de phase $\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)$. De même l'équation 1.2 devient

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha}_i}^m = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\alpha}_i} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{n}_i \quad (1.16)$$

où $\Phi_{\boldsymbol{\alpha}_i}$ est un vecteur contenant les mesures de la phase résultante dans la direction $\boldsymbol{\alpha}_i$ et \mathbf{n}_i le vecteur de bruit.

En utilisant cette notation matricielle, l'équation 1.13 se réécrit de la façon suivante :

$$J(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{i=1}^{N_{mes}} [\Phi_{\boldsymbol{\alpha}_i}^m - \mathbf{M}_{\boldsymbol{\alpha}_i} \boldsymbol{\varphi}]^T \mathbf{C}_{n,i}^{-1} [\Phi_{\boldsymbol{\alpha}_i}^m - \mathbf{M}_{\boldsymbol{\alpha}_i} \boldsymbol{\varphi}] + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C}_{kol}^{-1} \boldsymbol{\varphi} \quad (1.17)$$

13. Ce terme seul (terme de régularisation nul) va correspondre au cas d'une approche de type maximum de vraisemblance (MV).

où \mathbf{C}_{kol} est une “meta-matrice” contenant toutes les matrices de covariances $\mathbf{C}_{kol,j}$:

$$\mathbf{C}_{kol} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{kol,1} & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{C}_{kol,2} & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \mathbf{C}_{kol,N_t} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

En minimisant l'équation 1.17 vis-à-vis de φ on obtient le résultat suivant (voir [Fusco-p-99a] en Annexe C)

$$\hat{\varphi} = \left(\sum_{i=1}^{N_{mes}} \left(\mathbf{M}_{\alpha_i}^T \mathbf{C}_{n,i}^{-1} \mathbf{M}_{\alpha_i} \right) + \mathbf{C}_{kol}^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N_{mes}} \mathbf{M}_{\alpha_i}^T \mathbf{C}_{n,i}^{-1} \Phi_{\alpha_i}^m \right) \quad (1.19)$$

Cette équation peut se réécrire de manière plus compacte :

$$\hat{\varphi} = ((\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{C}_{n,tot}^{-1} \mathbf{M}_{tot}) + \mathbf{C}_{kol}^{-1})^{-1} \mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{C}_{n,tot}^{-1} \Phi^m \quad (1.20)$$

avec \mathbf{M}_{tot} la matrice définie comme suit

$$\mathbf{M}_{tot} = (\mathbf{M}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{M}_{\alpha_i}, \dots, \mathbf{M}_{\alpha_{N_{mes}}}) \quad (1.21)$$

$\mathbf{C}_{n,tot}$ définie par

$$\mathbf{C}_{tot} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{n,1} & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{C}_{n,2} & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \mathbf{C}_{n,N_{mes}} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

et

$$\Phi^m = \begin{pmatrix} \Phi_{\alpha_1}^m \\ \vdots \\ \Phi_{\alpha_i}^m \\ \vdots \\ \Phi_{\alpha_{N_{mes}}}^m \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

\mathbf{M}_{tot} peut alors être vue comme la matrice d'interaction du système qui, à partir des phases dans le volume (que l'on va chercher à estimer et à reconstruire) permet d'obtenir le jeu de mesures de phases résultantes sur la pupille du télescope dans les différentes directions d'analyse.

En l'absence de régularisation ($\mathbf{C}_{kol}^{-1} = 0$), on retombe sur une reconstruction de type moindres carrés dont la solution est donnée par une décomposition en valeurs singulières tronquée (voir paragraphe 3.7.2 de la première partie).

1.3.2 Influence de la régularisation de type Kolmogorov

Un exemple de gain apporté par l'approche MAP vis-à-vis d'une simple méthode des moindres carrés tronquée est proposée dans ce paragraphe et dans l'article [Fusco-a-00b] présenté au paragraphe 1.4. Une étude plus complète du gain apporté par le MAP est menée au chapitre 2.

Je considère ici le cas trivial d'un profil de turbulence à deux couches : une couche dans la pupille du télescope et une à dix kilomètres d'altitude. La force de la turbulence est également répartie sur ces deux couches. Le diamètre du télescope est de 4 m et le r_0 global de 0.1 m à 0.5 μm soit 0.59 m à 2.2 μm (longueur d'onde d'imagerie). Les écrans de phase pour les différentes couches sont simulés en utilisant la méthode Fourier (voir paragraphe 1.7.2 de la première partie) avec une taille d'écran 8 fois supérieure à la taille de la pupille ce qui permet d'obtenir un L_0/D de l'ordre de 4. L'angle isoplanétique, défini au sens de Fried [Fried-a-82] est égal à 1 seconde d'arc à 0.5 μm et 5.7 arcsec à 2.2 μm . Ces conditions de turbulence sont résumées dans le tableau 1.1

Paramètres atmosphériques :	C_n^2	$r_0 @ 0.5 \mu\text{m}$	$r_0 @ 2.2 \mu\text{m}$	$\theta_0 @ 0.5 \mu\text{m}$	$\theta_0 @ 2.2 \mu\text{m}$
	2 couches	0.1 m	0.59 m	1 arcsec	5.7 arcsec

TAB. 1.1 – Résumé des paramètres atmosphériques utilisés dans ce paragraphe. D/r_0 à la longueur d'onde d'imagerie est égal à 6.8. La première couche est située sur le télescope et la deuxième à couche à 10 km. L'énergie de la turbulence est équi-repartie sur les 2 couches. Le paramètre θ_0 est l'angle isoplanétique défini au sens de Fried (voir paragraphe 4.7 de la première partie).

Le système correcteur est composé de 2 miroirs déformables conjugués des deux couches turbulentes. Le premier pouvant corriger les polynômes de Zernike jusqu'à l'ordre radial 14 et le deuxième jusqu'à l'ordre radial 20. Idéalement, comme on l'a vu au paragraphe 3.7 de la première partie, le nombre de modes devrait être infini. Pour des raisons pratiques évidentes, on doit se restreindre à un nombre fini pour résoudre numériquement le problème. Bien sûr ce nombre fini de modes va introduire une erreur absolue de modélisation numérique. On choisira donc ce nombre selon les conditions d'observation ainsi que le système pour que la variance résiduelle due à la sous modélisation puisse être supposée négligeable. Le diamètre du second miroir déformable projeté sur la couche en altitude (8 mètres) permet la correction sur un champ total de 80 × 80 secondes d'arc (voir figure 1.3).

L'analyse se fait grâce à trois étoiles guides situées aux sommets d'un triangle équilatéral de 69 secondes d'arc de côté (voir figure 1.3). Avec ce type de configuration, une partie non négligeable de la phase dans la haute couche ne sera pas mesurée (voir figure 1.3). La mesure est effectuée par 3 SH de 7×7 sous-pupilles avec un rapport signal à bruit (défini au paragraphe 3.4.2 de la première partie) égal à 10 (ce qui correspond pour le type de système considéré à une étoile de magnitude 12 environ).

A partir de ces mesures, deux types d'estimateurs sont considérés pour reconstruire le front d'onde :

- une reconstruction au sens des moindres carrés (MC). Dans ce cas, on minimise uniquement un critère d'attache aux données pour obtenir $\hat{\varphi}$ soit le critère :

$$\hat{\varphi} = \arg \min_{\varphi} \|\Phi^m - \mathbf{M}_{tot}\varphi\|^2 \quad (1.24)$$

$\hat{\varphi}_{mc}$ est alors donné par l'équation :

$$\hat{\varphi}_{mc} = (\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot})^\dagger \mathbf{M}_{tot}^T \Phi^m \quad (1.25)$$

rappelons que \mathbf{M}_{tot} représente la matrice d'interaction du système qui permet de passer des phases dans chaque couche aux mesures de la phase résultante dans la pupille pour différentes

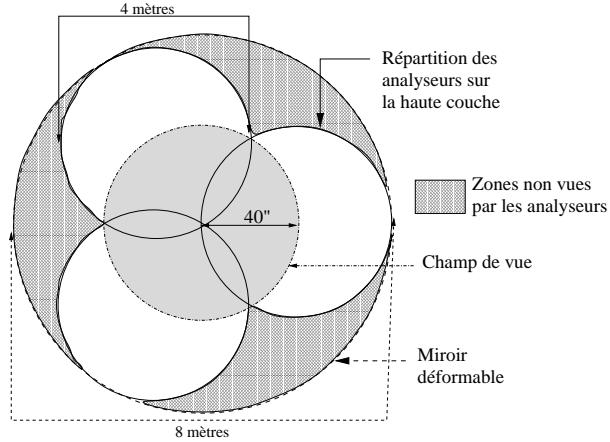


FIG. 1.3 – *Représentation des zones analysées (zones vues) et non analysées (zones non vues) par les différents ASO dans la haute couche turbulente.*

directions. La matrice $\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot}$ étant mal conditionnée (on reviendra au chapitre suivant sur les raisons de ce mauvais conditionnement), ces valeurs propres faibles vont conduire à une amplification du bruit lors de la reconstruction. Pour éviter ce problème on calcule une matrice pseudo-inverse $(\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot})^\dagger$ par une méthode de TSVD¹⁴. Comme on l'a dit au paragraphe 3.7.2 de la première partie, un des problèmes de ce type de reconstruction est le choix du seuil de troncature. Dans la suite, plusieurs seuils de troncature ont été étudiés et seul celui donnant les meilleurs résultats est considéré.

- une reconstruction MAP en utilisant l'équation 1.19 présentée au paragraphe précédent. Dans ce cas, l'introduction de la régularisation par la matrice de covariance de la phase permet d'éviter le choix ad hoc de la troncature et conduit à une bien meilleure restauration.

Je compare, sur la figure 1.4 les écrans de phases sur les 2 miroirs déformables aux écrans reconstruits par la méthode MAP et par la méthode MC. On remarque que si l'approche MAP permet une bonne reconstruction de chacun des écrans de phase, y compris dans les zones non mesurées par les analyseurs, la méthode MC, est, quant à elle, bien moins performante et la qualité de reconstruction, en particulier sur la haute couche est sérieusement dégradée.

Intéressons nous, à présent à la qualité de correction obtenue, pour les 2 types de reconstructeurs, dans la pupille du télescope en fonction de la position dans le champ. Dans le cadre de l'imagerie, c'est bien cette grandeur qui va nous intéresser. La reconstruction du volume de turbulence n'est qu'un moyen d'obtenir cette bonne correction dans le pupille pour toutes les directions du champ d'intérêt¹⁵. Pour caractériser la qualité de correction du système, le critère utilisé est la variance résiduelle sur la pupille du télescope pour une direction α donnée par :

$$\sigma^2(\alpha) = \left\langle \frac{1}{S} \int_S \left[\Phi(\mathbf{r}, \alpha) - \sum_{j=1}^{N_t} \hat{\varphi}_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \right]^2 d\mathbf{r} \right\rangle \quad (1.26)$$

avec S la surface de la pupille du télescope, et $\hat{\varphi}_j$ les phases de correction à appliquer à chaque MD.

14. Je rappelle que TSVD est l'acronyme anglais pour décomposition en valeurs singulières tronquées.

15. Nous verrons au paragraphe 1.4 toutes les implications contenues dans cette simple phrase.

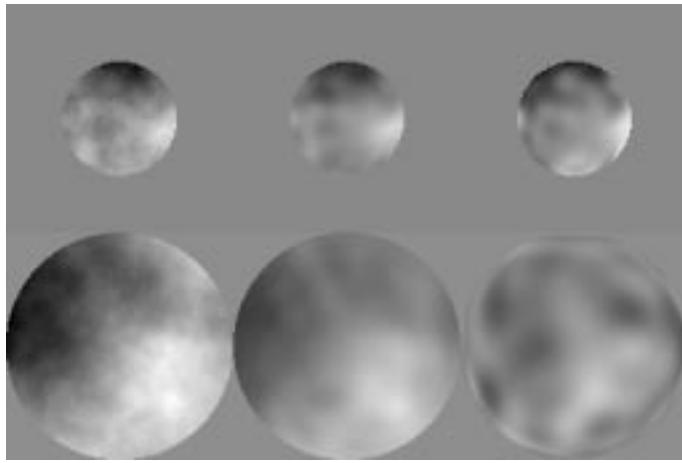


FIG. 1.4 – Reconstruction de la phase sur les 2 couches turbulentes dans le cas d'un système comportant 3 directions d'analyse. De gauche à droite : les phases turbulentes pour chacune des couches, le résultat d'une reconstruction en utilisant le MAP et le résultat d'une reconstruction en utilisant les moindres carrés tronqués.

Il faut noter que dans les articles et sur les figures on effectue l'approximation $\exp(-\sigma^2(\alpha)) \simeq \text{RS}_\alpha$ (rapport de Strehl dans la direction α) et les résultats sont généralement donnés dans cette unité et en pourcent.

Je trace en figure 1.5 une coupe selon l'axe des abscisses de l'évolution ce rapport de Strehl en fonction de l'angle et ce pour les 2 types de reconstructeur considérés. Le cas d'une OA classique (un seul analyseur et un miroir déformable dans la pupille corrigéant 14 ordres radiaux) est tracé pour comparaison. On observe sur cette figure le gain important , en terme de qualité de correction, qu'apporte une reconstruction tomographique (et donc un système d'OAMC) vis-à-vis d'une simple reconstruction de la phase résultante sur la pupille du télescope. Si le gain est notable grâce à l'utilisation de l'approche MC (on passe d'un rapport de Strehl de 0.5 % à 9% au centre du champ), il est encore nettement plus élevé pour l'estimateur MAP (on passe alors à 30 %).

Ce gain du MAP vis à vis des MC vient de l'introduction d'*a priori* sur la turbulence via la matrice \mathbf{C}_{kol} dans l'équation 1.20. Cette matrice nous donne une information sur la répartition statistique de la turbulence sur chacune des couches (par l'intermédiaire des matrices $\mathbf{C}_{kol,j}$). Cela permet à partir des mesures de "distribuer" au mieux la phase reconstruite sur chacun des miroirs. Ainsi, la diversité des mesures (mesures obtenues dans différentes directions) et les *a priori* sur le volume turbulent permettent une reconstruction optimale. En particulier, les zones de la haute couche non vues par les analyseurs seront en partie estimées en utilisant l'information statistique donnée par la matrice de covariance spatiale de la phase $\mathbf{C}_{kol,j}$. Les liens statistiques entre un point mesuré et un point non mesuré vont permettre au reconstructeur d'extrapoler une partie de la phase non mesurée (voir figure 1.4 où même les zones non mesurées dans la haute couche sont bien restituées par le MAP) et ainsi d'obtenir un correction quasi-uniforme dans tout le champ d'intérêt.

Ceci n'est bien sûr pas le cas pour l'approche MC où seules les mesures sont utilisées. Pour améliorer la qualité et l'uniformité de la solution , il est alors nécessaire d'augmenter le nombre de directions d'analyse, c'est-à-dire d'introduire une plus grande diversité dans les mesures.

On considère à présent une configuration à six étoiles guides: cinq situées aux sommets d'un pentagone inscrit dans un cercle de 80 secondes d'arc de diamètre et une au centre du champ (centre du même cercle). La figure 1.6 montre l'amélioration de la qualité de restitution de la phase dans chacune des couches. Cette amélioration est en particulier visible, dans le cas de l'approche MC, pour

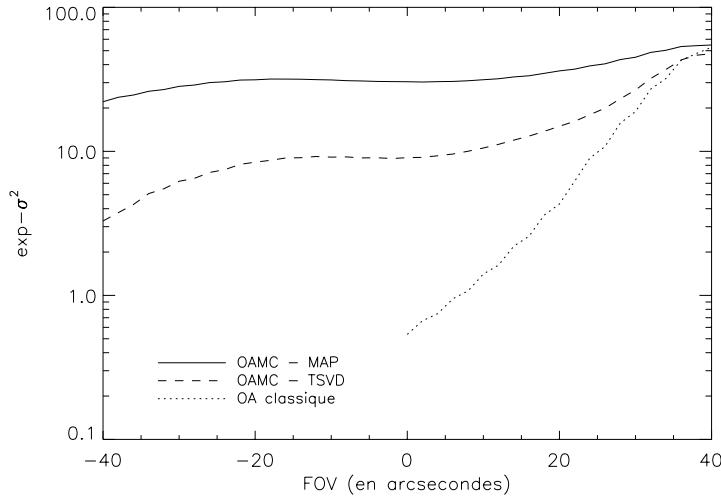


FIG. 1.5 – Comparaison de la qualité de correction pour différentes directions du champ dans le cas d'un système comportant 3 directions d'analyse. [trait plein] : reconstruction tomographique utilisant l'approche MAP, [tirets] : reconstruction tomographique utilisant l'approche MC (à seuil de troncature optimal). Le cas d'une OA classique est présentée [pointillés] pour comparaison.

la haute couche. En effet, pour cette configuration de mesure, les zones non vues sont extrêmement réduites ce qui permet une bonne estimation dans l'ensemble de la couche. Dans le cas du MAP, l'amélioration de la restitution est aussi présente, mais dans une moindre mesure, les résultats étant déjà excellents pour la configuration précédente.

Ces résultats se traduisent (voir figure 1.7), sur la pupille du télescope, par une correction uniforme dans l'ensemble du champ (de 80×80 secondes d'arc de diamètre), que ce soit tant dans le cas du MAP que pour le MC. Toutefois, on peut noter le léger gain global en terme de qualité de correction apporté par le MAP.

En résumé, une reconstruction de front d'onde tomographique basée sur l'approche Maximum *A Posteriori* permet d'obtenir de très bon résultats tant en terme de qualité que d'uniformité de correction dans le champ. Par définition, cette approche est celle qui donnera les meilleurs résultats puisqu'elle minimise (en moyenne) la variance résiduelle dans chacune des couches. Le gain apporté par le MAP est très significatif vis à vis d'une approche MC (plus classique) pour des cas où le nombre de mesures (nombre de directions d'analyse) est faible. En effet, dans ce cas, l'utilisation d'*a priori* sur la phase, permet d'estimer au mieux une partie du volume de turbulence non mesuré (la connaissance des corrélations spatiales du front permet d'extrapoler en partie la phase dans les zones non mesurées à partir de celle des zones effectivement mesurées par les analyseurs). On voit ici apparaître clairement un des intérêts majeurs de l'utilisation d'une approche MAP pour la tomographie, à savoir la réduction du nombre de directions d'analyse (et donc du nombre d'étoiles guides) nécessaires à l'obtention d'une uniformité de correction dans un champ de vue donné.

1.3.3 L'approximation des couches équivalentes

J'ai, jusqu'à présent, pour valider l'approche de reconstruction choisie et pour en quantifier l'intérêt, considéré le cas simpliste d'un système ayant autant de miroirs que l'atmosphère a de couches turbulentes (deux pour deux dans l'exemple précédent). En pratique, le profil de turbulence est une

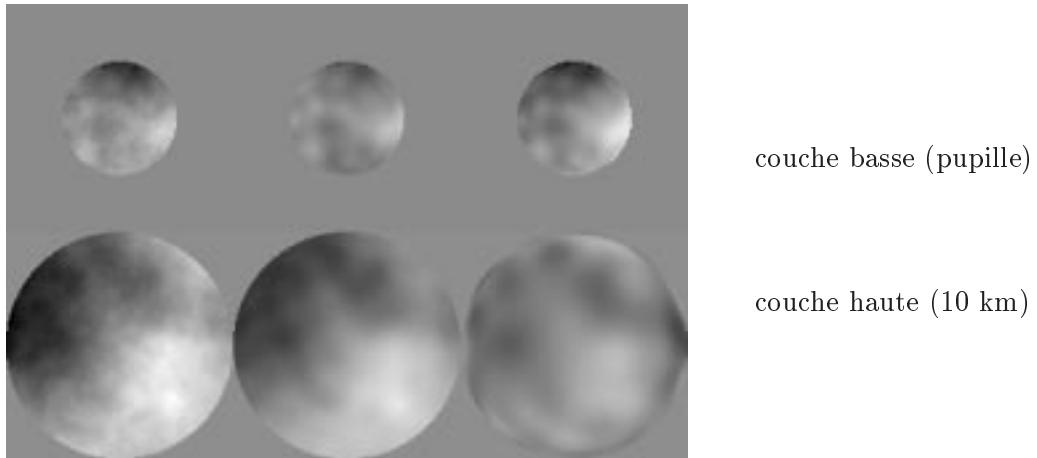


FIG. 1.6 – Reconstruction de la phase sur les 2 couches turbulentes dans le cas d'un système comportant 6 directions d'analyse. À gauche les phases turbulentes pour chacune des couches, au centre le résultat d'une reconstruction en utilisant le MAP, à droite le résultat d'un reconstruction en utilisant les moindres carrés tronqués (le seuil choisi est celui donnant les meilleures performances)

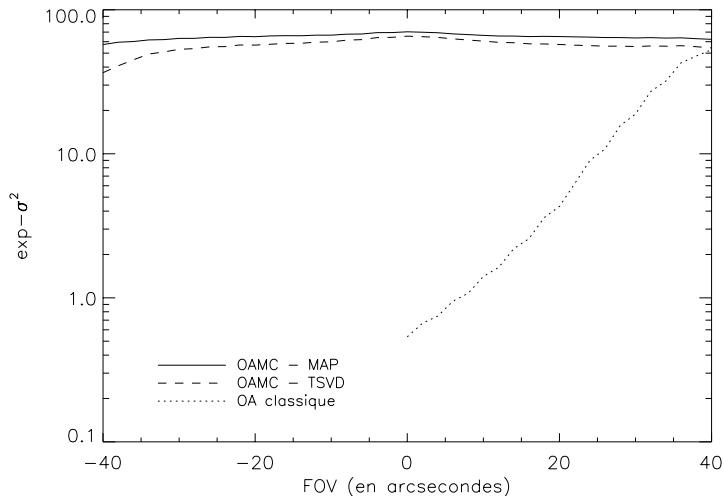


FIG. 1.7 – Comparaison de la qualité de correction de la phase résultante sur la pupille du télescope pour différentes directions du champ dans le cas d'un système comportant 6 directions d'analyse. [trait plein] : reconstruction tomographique utilisant l'approche MAP, [tirets] : reconstruction tomographique utilisant l'approche MC (à seuil de troncature optimal). Le cas d'une OA classique est présentée [pointillés] pour comparaison.

fonction continue vis à vis de l'altitude. On peut bien évidemment discréteriser ce profil de turbulence, comme on l'a vu au paragraphe 1.8.3 de la première partie. Cependant, un système d'OAMC ne pourra pas, pour des raisons purement techniques, être composé d'un grand nombre de MD (problèmes mécaniques et optiques). On ne peut donc modéliser un volume de turbulence constitué d'un grand nombre de couches qu'en utilisant quelques MD. On se trouve, ici, devant la première interrogation clé lors de la conception d'un système d'OAMC: "Combien faut-il de MD pour obtenir une correction efficace dans un champ donné?" (avec une question subsidiaire qui est: "Où doit-on placer ces miroirs").

Dans le même ordre d'idée, le nombre de directions d'analyse sera lui aussi limité (faible nombre de sources disponibles dans le champ d'intérêt, problème technologique lié à la multiplication du nombre d'étoiles lasers ...), on est alors amené à se poser une deuxième question d'importance: "Combien d'étoiles guides seront nécessaires à une mesure et une inversion efficace du profil de turbulence?".

Une étude de ces questions a fait l'objet d'une publication intitulée [Fusco-a-99b] :
"Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics"
T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L.M. Mugnier et G. Rousset
dans Optics Letters, vol. **24**, No. 21., Nov. 1999.

Cette lettre est présentée à la fin de ce paragraphe. Cette étude a aussi fait l'objet d'un article de conférence [Fusco-p-99a] présentée en Annexe C. En particulier, dans cet communication, une expression de la matrice de reconstruction dans le cadre d'une décomposition sur la base des polynômes de Zernike est proposée.

On a vu, au paragraphe 1.8.3 de la première partie, qu'une discréétisation très lâche du profil de turbulence permettait une bonne représentation des effets de l'anisoplanétisme en terme de corrélations angulaires de la phase. L'idée est ici d'appliquer la même approche et de vérifier que le même type de démonstration sera obtenue en terme de variance résiduelle en fonction de la direction dans le champ.

On est donc conduit à modifier le problème direct et à supposer que la phase turbulente arrivant sur la pupille n'est plus le résultat de la propagation à travers les N_t couches turbulentes du vrai profil de turbulence mais seulement le résultat de la propagation à travers N_{el} couches équivalentes Soit :

$$\Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}) \simeq \sum_{k=1}^{N_{el}} \varphi_k(\mathbf{r} + h_k \boldsymbol{\alpha}) \quad (1.27)$$

Les couches équivalentes sont calculées, comme proposé au paragraphe 1.8.3 de la première partie. Le vrai profil de turbulence est découpé en zone, et pour chaque zone on définit une EL positionnée à une altitude donnée par une moyenne pondérée par le C_n^2 des altitudes de chaque couche turbulente de la zone. Chaque miroir du système d'OAMC est alors conjugué à une couche équivalente. Vis à vis de ce nouveau modèle (qui n'est bien sûr qu'une approximation du vrai modèle de turbulence) on peut alors appliquer la technique de reconstruction de phase MAP présentée au paragraphe 1.3.1.

Dans la lettre, les résultats sont présentés pour un profil de turbulence qui correspond à un profil moyen au Mauna Kea calculé à partir des mesures effectuées par R. Racine [Racine-p-95]. Il est décrit avec 16 couches turbulentes (voir figure 1 de la lettre), soit $N_t = 16$. Ce nombre est choisi suffisamment grand vis à vis du nombre de miroirs qui seront utilisés par le système. Les écrans de phases sur chaque couche sont simulés par la méthode de N. Roddier (voir paragraphe 1.7.1 de la première partie) en utilisant les 300 premiers polynômes de Zernike. Le champ total considéré est de 56 secondes d'arc. Le télescope a un diamètre de 4 mètres et le D/r_0 global est de 6 (à $2.2\mu\text{m}$), ce qui correspond à un seeing de 0.92 seconde d'arc.

Paramètres atmosphériques :	C_n^2	$r_0 @ 0.5 \mu m$	$r_0 @ 2.2 \mu m$	$\theta_0 @ 0.5 \mu m$	$\theta_0 @ 2.2 \mu m$
Profil moyen au Mauna Kea	16 couches	0.11 m	0.67 m	1 arcsec	5.7 arcsec

TAB. 1.2 – Résumé des paramètres atmosphériques utilisés pour les simulation numériques présentées dans la lettre. D/r_0 à la longueur d'onde d'imagerie est égal à 6. Le profil de turbulence est présenté sur la figure 1 de la lettre. Le paramètre θ_0 est l'angle isoplanétique défini au sens de Fried.

Influence du nombre de miroirs

Pour se focaliser sur l'influence du nombre de miroirs dans le problème de la reconstruction de la phase, on considère dans un premier temps, un système composé d'un grand nombre de directions d'analyse (5 étoiles guides naturelles sont considérées). Chaque mesure obtenue est bruitée. On suppose pour ce faire que l'on a un analyseur de SH par direction et que chacun est constitué de 7×7 sous pupilles avec un RSB de 1.8 (voir paragraphe 3.4.2 de la première partie pour la définition du RSB d'un SH). Le nombre de sous-pupilles est choisi en fonction de D/r_0 considéré, et le RSB de 1.8 correspond, pour le système considéré, à des étoiles guides de magnitude 14 environ.

J'étudie alors la qualité de reconstruction de la phase dans le champ en fonction du nombre de MD (c'est-à-dire du nombre de couches équivalentes utilisées pour modéliser le vrai profil de turbulence). Le résultat principal est présenté en figure 2 :

- un seul MD permet une correction quasiment uniforme dans le champ au prix d'une perte relativement importante en qualité de correction;
- deux MD permettent d'obtenir une correction uniforme dans le champ avec une bonne correction;
- trois MD permettent une correction uniforme et quasi optimale dans le champ. En effet, une augmentation du nombre de miroirs (on passe de 3 à 5) ne modifie pas sensiblement la qualité de correction. Cette dernière est alors uniquement limitée par le rapport signal à bruit sur les mesures des analyseurs et non plus par la sous modélisation du profil de turbulence par les couches équivalentes.

Je montre ainsi que pour un télescope de 4 mètres (les mêmes résultats se retrouvent sur un télescope de 8 mètres en multipliant le champ par le rapport des diamètres et en augmentant le nombre de modes pour obtenir le même degré de correction) un nombre réduit de couches équivalentes (c'est-à-dire de MD) est suffisant pour obtenir une correction uniforme de la phase résultante dans un grand champ (1×1 minute d'arc pour un télescope 4 mètres soit 2×2 minutes d'arc si on avait considéré un 8 mètres).

Enfin, tous les résultats ont été présentés pour un profil de turbulence particulier, toutefois, les conclusions obtenues sont sensiblement les mêmes quelque soit le profil de turbulence considéré (des tests ont été effectués sur toute une série de profils allant du profil constant en fonction de l'altitude au profil avec quelques couches dominantes et un continuum de turbulence faible entre elles). Ces résultats se retrouvent dans les différents articles présentés dans ce chapitre ou sont considérés successivement un profil moyen au Mauna Kea (voir la lettre présenté à la fin de ce paragraphe), un profil typique Paranal (voir la conférence présenté au paragraphe 1.3.5) et un profil constant (voir l'article présenté au paragraphe 1.4). D'autres profils ont encore été étudiés mais ne sont pas présentés ici car les résultats obtenus sont identiques aux précédents et n'apportent pas d'enseignements supplémentaires.

Tous ces résultats sont essentiels pour le développement des futurs systèmes d'OAMC car ils permettent d'envisager sereinement la construction de systèmes "relativement simples".

Influence du nombre de directions d'analyse

La deuxième partie de l'étude proposée dans la lettre est consacrée au problème du nombre de directions d'analyse nécessaires à une bonne correction (c'est-à-dire au nombre minimum de mesures nécessaires à une bonne inversion de problème).

Le résultat majeur, illustré par la figure 3, est encore une fois le faible nombre de directions d'analyse pour obtenir une bonne correction. 3 étoiles dans le champ suffisent à assurer une bonne uniformité de la correction sur le champ de 56 secondes d'arc. Bien sûr, une augmentation du nombre d'étoiles permet de relâcher les contraintes sur la magnitude limite de ces dernières pour obtenir une correction équivalente. Toutefois, cela n'influe en rien sur l'uniformité de la correction. Il est important de noter qu'un tel résultat n'est possible que par l'utilisation de l'approche MAP pour la reconstruction. En effet, comme on l'a vu au paragraphe 1.3.2 l'emploi d'une méthode plus classique (moindres carrés) nécessite la présence de plus de directions d'analyse pour arriver aux mêmes performances et à la même uniformité de correction.

Une analyse plus fine du problème sera proposée au paragraphe 1.3.5 mais aussi au chapitre 2 lors de l'étude de la propagation du bruit dans un système d'OAMC.

Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics

T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. M. Mugnier, G. Rousset *

*Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA)
Département d'Optique Théorique et Appliquée
BP 72, F-92322 Châtillon cedex, France*

November 1, 1999 / Vol. 24, No. 21 / OPTICS LETTERS

We propose a “Maximum *A Posteriori*-based” estimation of the turbulent phase in a large field of view (FOV) to overcome the anisoplanatism limitation in adaptive optics. We show that, whatever the true atmospheric profile, a small number of equivalent layers (2 or 3) is required to obtain an accurate restitution of the phase in the whole FOV. The implications on multiconjugate adaptive optics are discussed in terms of number and conjugated heights of the deformable mirrors. The number of guide stars for the wavefront measurements in the field is also discussed: 3 (or even 2) guide stars are sufficient to obtain good performance.

Anisoplanatism is one of the most severe limitations of the phase correction by adaptive optics after propagation through the turbulent atmosphere. In order to obtain high resolution images in a large field of view (FOV), new approaches for a good estimation of the phase in the whole field are required. Tallon & Foy¹ and Ragazzoni² suggest a tomographic approach which consists in a reconstruction of the whole turbulence volume using several natural or laser guide stars (GS) for wavefront sensing. Based on the same idea, a multiconjugated adaptive optics (MCAO) system has been studied by Beckers³, Ellerbroek⁴ and Johnston & Welsh⁵, using several conjugated mirrors to compensate for the turbulence at different heights. For practical reasons, it is impossible to consider a large number of mirrors, which leads to the critical question: “Can we model the phase variation in the field using an atmospheric model based on a very small number of thin layers?”. This is the key issue addressed in this letter. We consider here, for a sake of simplicity, natural guide stars, but the case of laser guide stars is discussed in conclusion.

We present a method to estimate the phase in a large FOV through a model incorporating a small number of turbulent layers. This method is validated on simulation. The implications in a MCAO system are then discussed.

Let us consider a true C_n^2 profile sampled by N_{true} thin layers. In practice, the C_n^2 profile can be measured by a SCIDAR before the observations⁶. In the so-called small perturbation approximation, the phase $\Phi_\alpha(\mathbf{r})$ on the telescope pupil in the angular direction α is given by

:

$$\Phi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{true}} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \quad (1)$$

where φ_j and h_j are respectively the phase screen and the height of the j^{th} layer. \mathbf{r} is the position vector in the telescope pupil. Considering that radius of the FOV is α_{max} , the support of φ_j is a disk of diameter $D_j = D + 2h_j\alpha_{max}$ in a given layer j , where D is the telescope diameter. Let ρ_j be the position vector in this disk.

A crude turbulent distribution model by only N_{el} equivalent layers (EL) (with $N_{el} \leq N_{true}$) is proposed. The true C_n^2 is divided into N_{el} slabs. For the first slab of 2 km thickness for the simulations in this paper, an EL is placed on the telescope pupil in order to model the turbulence near the ground. The other slabs are regularly spaced. For each slab, lying between $h_{j,min}$ and $h_{j,max}$, an EL is placed at an equivalent height $h_{eq,j}$ defined as the weighted mean height of the j^{th} slab: $h_{eq,j} = \left(\int_{h_{j,min}}^{h_{j,max}} C_n^2(h) dh \right) / \left(\int_{h_{j,min}}^{h_{j,max}} C_n^2(h) dh \right)^{3/5}$ with an associated $r_{0,j} \propto \left(\int_{h_{j,min}}^{h_{j,max}} C_n^2(h) dh \right)^{-3/5}$.

The idea is to use this N_{el} EL's model in a Maximum *A Posteriori* (MAP) based approach in order to estimate the phase in a large FOV. The goal of this approach is to find the unknowns, i.e. the N_{el} phase screens $\varphi_j(\rho_j)$ that are the most likely, given the data $\{\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})\}_i$, i.e. the pupil phase maps $\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})$ measured for a discrete set of

* Additional author information:

Phone: (33) 1 46 73 40 40 ; fax: (33) 1 46 73 41 71. Email: {NAME}@onera.fr
URL: <http://www.onera.fr/dota>

GS directions α_i . By applying Bayes' rule, the so called *a posteriori* probability is shown to be proportional to the product of the likelihood of the data by the *a priori* probability of the unknowns. Therefore, the probability law that must be maximized with respect to $\{\varphi_j(\rho_j)\}_j$ (with $j \in [0, N_{el}]$) reads:

$$P\left(\{\varphi_j(\rho_j)\}_j \mid \{\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})\}_i\right) \propto P\left(\{\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})\}_i \mid \{\varphi_j(\rho_j)\}_j\right) P\left(\{\varphi_j(\rho_j)\}_j\right)$$

The likelihood term, which accounts for the noise affecting the wavefront measurements, can be re-written as:

$$P\left(\{\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})\}_i \mid \{\varphi_j(\mathbf{r})\}_j\right) \propto \prod_{i=1}^{N_{GS}} \exp\left\{-\frac{1}{2} [\Psi_{\alpha_i}(\mathbf{r})]^T \mathcal{C}_i^{-1} [\Psi_{\alpha_i}(\mathbf{r})]\right\} \quad (2)$$

where $\Psi_{\alpha_i}(\mathbf{r}) = (\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_{el}} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha_i))$ and N_{GS} is the number of GS's, i.e of wavefront measurements. \mathcal{C}_i^{-1} is the covariance matrix of the noise for the GS i , which is assumed to be gaussian and decorrelated between measurements.

The *a priori* term includes the prior knowledge on the phase statistics. Assuming a gaussian statistics, it is given by:

$$P\left(\{\varphi_j(\rho_j)\}_j\right) = \prod_{j=1}^{N_{el}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \varphi_j^T(\rho_j) \mathcal{C}_{kol,j}^{-1} \varphi_j(\rho_j)\right\} \quad (3)$$

where the N_{el} phase screens are assumed to be statistically independent. Each phase screen follows a Kolmogorov statistics hence a covariance matrix $\mathcal{C}_{kol,j}$ scaled according to $r_{0,j}$. Finally, the phase is estimated by the minimization of

$$J\left(\{\varphi_j(\rho_j)\}_j\right) = \sum_{i=1}^{N_{GS}} [\Psi_{\alpha_i}(\mathbf{r})]^T \mathcal{C}_i^{-1} [\Psi_{\alpha_i}(\mathbf{r})] + \sum_{j=1}^{N_{el}} \varphi_j(\rho_j)^T \mathcal{C}_{kol,j}^{-1} \varphi_j(\rho_j) \quad (4)$$

with respect to the phase screens φ_j . Note that the minimization of such a criterion is quadratic and thus leads to an analytical solution.

In order to study the influence of the number of EL's to be considered, i.e the influence of the sampling step,

a simulation has been performed with different atmospheric profiles. We present here the results obtained with a profile inspired from measurements made at Mauna Kea (Hawaii) by Racine and Ellerbroek⁸ (see Figure 1). The true profile is constituted here of $N_{true} = 16$ layers. Other profiles, including a constant C_n^2 between 0 and 15 km have also been studied to test the robustness of the method. The results are very similar to the ones presented here.

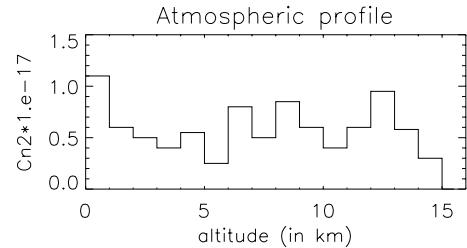


Fig. 1. C_n^2 true profile used in the simulation, $C_n^2 = 0$ above 15 km. 0 km = telescope altitude.

The phase screens on each layer are simulated by N. Roddier's method¹¹ using the first 300 Zernike polynomials (radial order up to 23). The size of these phase screens corresponds to a 56 arcsec FOV ($\alpha_{max} = 28$ arcsec) and a telescope diameter of 4 m. The overall D/r_0 is 6 (typical result in K-band for a 0.92 arcsec seeing). The phase measurements are made at five field positions $\{\alpha_i\}$ located at the five vertices of a regular pentagon inscribed in a circle of radius α_{max} . The GS's are assumed to be natural GS's, that is the laser GS specific problems, cone effect and tilt estimation, are not taken into account. This rather favorable GS configuration¹, allows us to first study the phase error due to the sole undersampling of the turbulence profile. The measurements are the true phases plus a noise. The noise level corresponds to 7×7 sub-aperture Shack-Hartmann sensor with a Signal to Noise Ratio (SNR) equal to 1.8 (ratio between the turbulent variance of the angle of arrival in a sub-aperture to the noise variance). The noise variance on the Zernike coefficients evolves⁹ as (radial order)⁻² and, for the considered SNR, it becomes greater than the Kolmogorov turbulent variance¹⁰ (which evolves as (radial order)^{-11/3}) after the 21th Zernike polynomial. For the restoration in each layer, we denote by $\hat{\varphi}_j$ the estimated phase, which is expanded on the first 300 Zernike. Equation 4 is easily transposed in this particular basis. The use of Zernike coefficients allows us to incorporate the Kolmogorov statistics⁷, on each EL.

The MAP-based restoration is applied for different numbers of EL. The performance of the method is eval-

uated in terms of Strehl Ratio: $SR = \exp(-\sigma_{err}^2(\alpha))$, where $\sigma_{err}^2(\alpha)$ is computed by

$$\sigma_{err}^2(\alpha) = \left\langle \frac{1}{S} \int_S \left(\Phi(\mathbf{r}, \alpha) - \sum_{j=1}^{N_{el}} \hat{\varphi}_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \right)^2 d\mathbf{r} \right\rangle \quad (5)$$

with S the pupil surface. In Figure 2, we present the SR variation as a function of α . Considering the particular GS geometry, we have chosen a cut of the field including the worst and the best SR in the field.

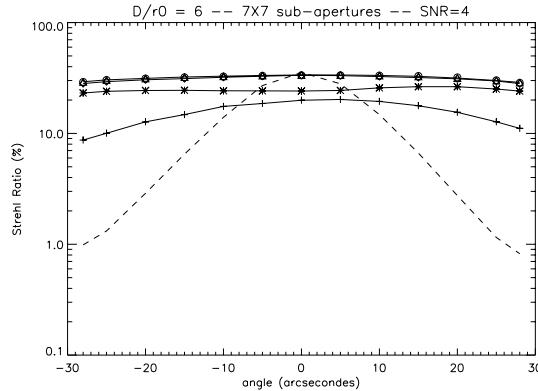


Fig. 2. Influence of the number of EL's on $SR(\alpha)$ (in percent). [dashed line] conventional on-axis single GS and 1 EL on the telescope pupil. With 5 GS's : [+] 1 EL at 6.5 km, [*] 2 EL's (0 and 8.5 km), [\diamond] 3 EL's (0, 5.4 and 11.7 km), [Δ] 4 EL's (0, 4.2, 8.4 and 12.5 km), [\circ] 5 EL's (0, 3, 6.8, 10.7 and 13.7 km).

This figure shows the good restitution of the phase in the whole FOV using 5 GS's and our approach. The curves for 3, 4 and 5 EL's are indistinguishable. The SR is high and close to be constant. For comparison, we show a conventional MAP estimation with a single on-axis GS ($\alpha = 0$) and 1 EL on the telescope pupil: phase optimized for on-axis observation and applied in the whole FOV. In that case, the SR decreases rapidly as a function of angle beyond 10 arcsec because of the anisoplanatism effects. Note that, in this conventional case, we have chosen a SNR equal to four on the Shack-Hartmann sensor to insure the same maximum SR as the optimal EL case.

The other important point is that an increase of the number of EL's (N_{el}) does not significantly improve the phase restitution as soon as $N_{el} \geq 3$, even if, when $N_{el} \rightarrow N_{true}$, this approach tends to the true MAP and leads to the tomographic scheme^{1,2}. The key-point to be emphasized is that only a few EL's (2 or 3), i.e a

loose sampling of the turbulence profile, is necessary to model precisely the phase in a large FOV. Of course, this results depend on the ratio between FOV times h_{max} (here 15 km) times $1/\cos z$ (z is the zenithal angle) over the pupil diameter. When this ratio decreases, the gain brought by the use of 3 EL's is reduced compared to 2 EL's.

Such a result is particularly important in the case of MCAO systems^{4,5,8}. We have demonstrated that even with rather uniform C_n^2 profiles, it is not necessary to estimate (and thus to correct) the phase in each turbulent layer of the profile but only in a very small number of EL's. The number of required conjugate mirrors in a MCAO system is therefore very limited, 2 mirrors already allow a very good correction and 3 provide a quasi-optimal correction. Note that, 1 mirror conjugated at 6.5 km^8 and 5 GS's already leads to a substantial gain in the whole FOV even if the SR on axis is lower than in the conventional case.

Another scaling parameter to study, for the design of a large FOV high resolution system, is the number of GS's that are necessary to obtain a good estimation of the phase for a given FOV. We apply our approach with 3 EL's and a variable number of GS's. One on axis, two (at ± 28 arcsec) and from three to eight at the vertices of regular polygons inscribed in the FOV (radius 28 arcsec). For each configuration, we estimate the maximum and the minimum SR in the whole field. Again, the SNR for each GS configuration is therefore chosen to obtain the same maximum SR. The results are presented in Figure 3.

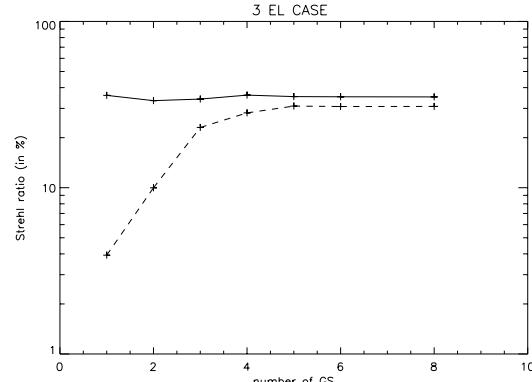


Fig. 3. SR (in percent) versus the number of GS's : the max[solid line], min[dashed line] values in the FOV. 3 EL's considered here.

As soon as the number of GS's is greater than 2, the phase estimation quality is close to be uniform in the

whole field and an increase of this number does not significantly improve the performance. Tallon & Foy¹ proposed 4 guide stars, but the present study shows that 3 (or even 2 for an elongated FOV) may be enough depending on the SR requirements in the field. Note that an array of laser guide stars may be used for the wavefront measurements, if no natural guide star is available^{1,2,4,5}. In that case, the conical effect and the tilt estimation problem must be addressed. These specific limitations might degrade the performance, but the reconstruction principle is still valid and the conclusion concerning the number of required mirrors should be unchanged.

This study allows us to define the characteristics and the expected performance of large FOV high resolution imaging systems. We have shown that, whatever the true C_n^2 profile, 3 EL's provide a quasi-optimal restitution of the phase in the whole FOV, and that even only 2 layers are enough to obtain a good and near to uniform restitution. Therefore, a full tomography of the atmosphere is not necessary. In addition, only 3 (or even 2) GS's are required for such an imaging system. Because of the weak dependency of the angular decorrelation of the phase with the atmospheric profile, the positions of the EL's are not critical, i.e a low precision is required on the C_n^2 profile. A change of a few km in the EL positions, only leads to a SR variation of the order of 1 %, considering the same noise level as presented above. The presented MAP-based approach can be directly applied for image post-processing (deconvolution from wavefront sensing¹², phase diversity¹³), and the results can be generalized to MCAO systems. We are currently studying the optimal number of actuators for each conjugated deformable mirrors and a prior for the closed loop phase

statistics.

Acknowledgments: The authors wish to thank M. Tallon and R. Ragazzoni for their fruitful comments on this work.

-
1. M. Tallon and R. Foy, Astron. Astrophys. **235**, 549 (1990).
 2. R. Ragazzoni, E. Marchetti, and F. Rigaut, Astron. Astrophys. **342**, 53 (1999).
 3. J. M. Beckers, in ESO conf. on "Very Large Telescopes and their Instrumentation", ed. M.-H. Ulrich, p. 693 (1989)
 4. B. L. Ellerbroek, J. Opt. Soc. Am. A **11**, 783 (1994).
 5. D. C. Johnston and B. M. Welsh, J. Opt. Soc. Am. A **11**, 394 (1994).
 6. A. Fuchs, M. Tallon and J. Vernin, Publ. Astron. Soc. Pac. **110**, 86 (1998).
 7. R. J. Noll, J. Opt. Soc. Am. **66**, 207 (1976).
 8. R. Racine and B. L. Ellerbroek, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., R. K. Tyson and R. Q. Fugate, eds., **2534**, 248, (San Diego, California, 1995).
 9. F. Rigaut and E. Gendron, Astron. Astrophys. **261**, 677 (1992).
 10. G. Rousset, In Adaptive Optics for Astronomy, NATO ASI Series C, **423**, 115, (Cargèse, France, 1993)
 11. N. Roddier, Opt. Eng. **29**, 1174 (1990).
 12. J. Primot, G. Rousset, and J.-C. Fontanella, J. Opt. Soc. Am. A **7**, 1598 (1990).
 13. R. G. Paxman, B. J. Thelen, and J. H. Seldin, Opt. Lett. **19**, 123 (1994).

1.3.4 Compléments sur la lettre

Influence de la position des miroirs

On vient de voir qu'un petit nombre de MD (typiquement 2 ou 3) permettait une correction quasi optimale de la phase résultante pour un grand champ. Le positionnement de ces miroirs a été effectué de manière empirique en reprenant les études menées, au paragraphe 1.8.3 de la première partie, sur les couches équivalentes. Il est donc intéressant d'étudier l'influence de l'évolution de l'altitude de conjugaison d'un miroir sur la qualité des résultats. Pour cela, je considère un système à 2 MD, l'un conjugué sur la pupille et l'autre à une altitude h pouvant varier. Tous les autres paramètres de simulation sont les mêmes que ceux présentés dans la lettre (5 étoiles guides, profil de C_n^2 , champ de 56 secondes d'arc ...). Pour caractériser la qualité de la correction dans tout le champ, je considère ici une moyenne de l'énergie cohérente (équivalente au Strehl pour les conditions de correction considérée) dans le champ (soit $Sr(moy) = \frac{1}{S_{fov}} \int_{fov} Sr(\alpha) d\alpha$). Je trace sur la figure 1.8 l'évolution de cette qualité de correction dans le champ en fonction de la position du second MD.

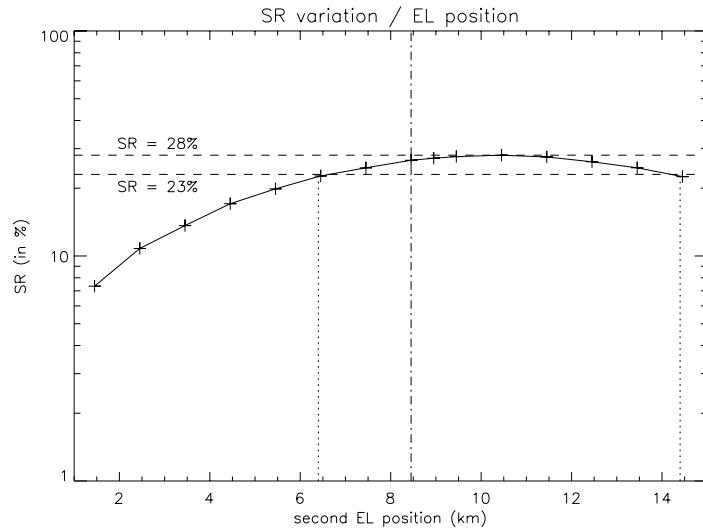


FIG. 1.8 – *Influence de la position des MD sur la qualité de correction. On considère un système d'OAMC à 2 MD, le premier est supposé fixe sur la pupille alors que l'altitude de conjugaison du second évolue. On trace le SR moyen dans le champ en fonction de la position de ce deuxième miroir. Les conditions de turbulence sont celles présentées dans le tableau 1.2.*

On constate que l'évolution de la qualité de correction est très peu sensible à une évolution de l'altitude de conjugaison du MD. En particulier une évolution de cette altitude sur quasiment 8 km (entre 6 et 14 km) n'introduit qu'une variation du rapport de Strehl moyen dans le champ de quelques pourcents. On peut toutefois remarquer que, si notre calcul empirique de l'altitude de conjugaison (par une moyenne pondérée) n'est pas optimal (l'altitude optimale est de 10.5 km au lieu de 8.5 km), la perte de qualité de correction est inférieure au pourcent et donc largement acceptable. Cette faible dépendance de la position des couches est importante car elle permet de relâcher les contraintes sur l'optimisation de l'altitude de conjugaison des MD. En particulier, lors de la poursuite d'un objet sur un temps long, les couches turbulentes changent d'altitude apparente pour le faisceau lumineux, mais

les résultats obtenus ici montrent qu'il ne sera pas nécessaire de tenir compte de cette variation et d'ajuster en temps réel la position des miroirs.

On verra au paragraphe 1.4 que l'utilisation d'une approche plus subtile pour la reconstruction de front d'onde permet de relaxer encore plus cette contrainte sur la position des MD et de rendre la qualité de correction peu dépendante de l'altitude de conjugaison.

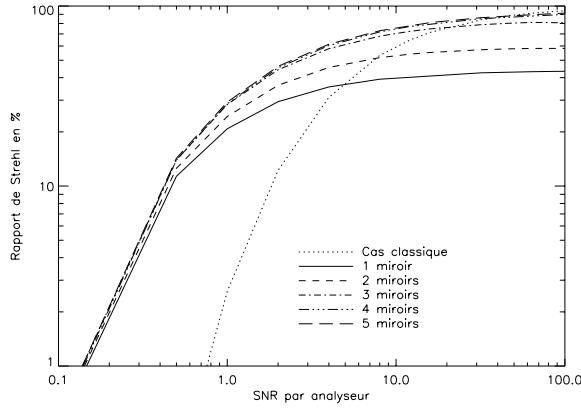
Notons enfin qu'une approche analytique du problème de la position et du nombre de MD pour une OAMC a été récemment proposée par A. Tokovinin [Tokovinin-a-00]. Ce dernier, en considérant un système d'OAMC parfait, c'est-à-dire un système pouvant analyser et corriger parfaitement la turbulence, généralise l'angle isoplanétique de Fried [Fried-a-82] et définit un domaine isoplanétique Θ_M dépendant uniquement du nombre de miroirs et du profil de turbulence. La position des miroirs est optimisée pour obtenir l'angle Θ_M le plus grand possible. Cette étude permet de donner des tendances et de comparer les différents types de profils et donc les différents sites en terme de performances pour les futurs systèmes d'OAMC. Sur le même profil de C_n^2 , les résultats obtenus par A. Tokovinin et ceux présentés dans la lettre sont cohérents. Toutefois, pour obtenir une comparaison plus fine, il faut se rapprocher des hypothèses effectuées dans [Tokovinin-a-00], en particulier celle d'une analyse parfaite du volume de turbulence. Je présente donc au paragraphe suivant l'influence du bruit d'analyse sur la qualité de correction et sur le nombre de miroirs nécessaires pour obtenir une correction optimale.

Influence du bruit d'analyse

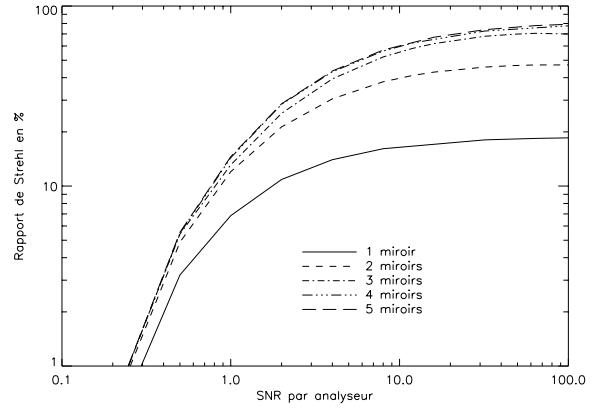
Comme on l'a vu dans la lettre, la qualité de correction, à partir de 3 MD n'est plus limitée par la sous modélisation de la turbulence avec un nombre de MD limité mais uniquement par le bruit d'analyse et de reconstruction des fronts d'onde. On a donc ici une "compétition" entre le problème de sous modélisation de la turbulence par les couches équivalentes et l'erreur de reconstruction due au bruit sur les mesures de fronts d'onde. En résumé, plus on a de bruit sur la mesure (c'est-à-dire plus les magnitudes des étoiles guides sont élevées) plus le nombre de couches équivalentes (c'est-à-dire le nombre de miroirs déformables) utiles sera faible. Ceci est illustré sur la figure 1.9 où l'on trace l'évolution du rapport de Strehl maximum (figure de gauche) et minimum (figure de droite) dans le champ en fonction du rapport signal à bruit sur les analyseurs, et ce pour des systèmes composés de 1, 2, 3, 4 et 5 MD. Le profil de turbulence est le même que celui considéré dans la lettre. De même l'analyse de front d'onde est effectuée sur 5 étoiles guides. On constate que pour les faibles rapports signal à bruit (RSB), et donc les faibles corrections, l'influence du nombre de MD sur la qualité de reconstruction est négligeable et ce jusqu'à un RSB de l'ordre de 0.5, puis un gain notable apparaît à utiliser 2 MD vis à vis de 1, puis 3 vis à vis de 2. Par contre le gain à augmenter le nombre de MD au delà de 3 reste quasiment négligeable sauf pour les très forts RSB (très supérieur à 10) où un gain commence à apparaître (on passe d'un rapport de Strehl de 80 % pour 3 MD à 90 % pour 4 MD pour la maximum). Pour le Strehl minimum, le rapport de Strehl sature à 80 % à cause des zones du champ non analysées qui elle ne peuvent pas être parfaitement reconstruites (même à RSB infini).

Les résultats obtenus dans la lettre en ce qui concerne le nombre de MD, pour un cas de RSB donné, sont donc toujours valides quel que soit le RSB et sont même relativement pessimistes si l'on considère des RSB plus faibles. Seuls les cas d'étoiles guides de très faibles magnitudes (RSB supérieur à 10) seront sensibles à l'augmentation du nombre de miroirs au delà de trois (on passe de 80 % à 90 % de Strehl).

Intéressons nous, à présent à l'autre paramètre important à étudier et quantifier, à savoir le nombre et la position des étoiles guides dans le champ.



Rapport de Strehl maximum dans le champ



Rapport de Strehl minimum dans le champ

FIG. 1.9 – *Influence du rapport signal à bruit de l’analyse de front d’onde sur l’estimation de la phase résultante dans le champ de vue. Cas de 5 étoiles guides. Pour chacune des figures on trace le rapport de Strehl maximum [figure de gauche] et minimum [figure de droite] dans le champ en fonction du rapport signal à bruit par analyseur. Différents systèmes d’OAMC sont considérés avec 1, 2, 3, 4 et 5 MD. Le rapport de Strehl maximum pour une OA classique (1MD dans la pupille et une seule direction d’analyse) est tracé pour comparaison. Les conditions de turbulence sont celles présentées dans le tableau 1.2. Notons que sur la figure de droite le rapport de Strehl minimum pour une optique adaptative classique est toujours très largement inférieur au pourcent quel que soit le RSB considéré.*

1.3.5 Séparation optimale entre étoiles guides

On vient de voir, au paragraphe précédent, qu’un faible nombre de MD est suffisant pour bien modéliser le volume de turbulence et donc pour obtenir une bonne correction dans un grand champ.

D’autre part, tant au paragraphe 1.3.2 que dans la lettre, j’ai montré que l’approche MAP ne nécessitait l’utilisation que d’un nombre réduit d’étoiles guides pour obtenir une correction quasi uniforme pour un champ donné. Or, l’un des facteurs les plus limitant en OA est le problème de la couverture de ciel, c’est-à-dire du faible nombre d’étoiles brillantes dans un champ donné. Si bien qu’il est essentiel de pouvoir connaître la quantité d’étoiles guides permettant une bonne correction dans un champ donné ou, autrement dit, le champ de correction maximum possible à nombre d’étoiles fixé.

Dans ce paragraphe, je vais étudier l’évolution de la correction par un système d’OAMC en fonction de la séparation entre étoiles guides. Pour cela un système utilisant 3 étoiles d’analyse est considéré (chaque étoile se trouve au sommet d’un triangle équilatéral comme présenté sur la figure 1.3).

Cela va me permettre de définir une séparation optimale entre ces étoiles pour un système et un profil de turbulence donnés. Cette étude a fait l’objet d’une publication dans la conférence “*Astronomical Telescope and Instrumentation*” SPIE/ESO qui a eu lieu à Munich en mars 2000. Cette publication [Fusco-p-00a] intitulée :

“Isoplanatic angle and optimal guide star separation for multiconjugate adaptive optics”
T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, G. Rousset, et L.M. Mugnier
est présentée en fin de paragraphe.

Dans un premier temps, une expression analytique de l’erreur résiduelle d’un système d’OAMC due à la séparation entre étoiles guides est proposée. Pour ce faire, on considère une situation idéale où les perturbations de phase produites par chaque couche turbulente sont parfaitement connues dans

les zones mesurées par les différents analyseurs¹⁶. Cela suppose que

- la méthode de reconstruction utilisée (tomographie) est suffisamment efficace pour reconstruire la phase dans chacune des couches turbulentes à partir des données fournies par l'analyseur;
- le nombre de MD est égal au nombre de couches (ou du moins suffisant pour supposer une reconstruction tomographique parfaite de la turbulence).

Dans ce cas, l'erreur résiduelle dans la pupille du télescope, pour une direction α donnée, est uniquement due à la partie de la couche turbulente non vue (c'est-à-dire non analysée) par les différents analyseurs. Cette erreur peut s'exprimer de façon analytique (voir la démonstration développée des équations 2 à 9 dans l'article) :

$$\text{var}_{res}(\alpha) = F(\alpha, C_n^2(h), \lambda, D, \alpha_{gs}) \quad (1.28)$$

où D est le diamètre du télescope, α_{gs} la séparation entre étoiles guides, et α la direction de visée considérée.

À partir de cette équation, une étude de l'évolution de la variance résiduelle (voir figure 3) selon les conditions de turbulence et l'écartement entre étoiles guides est proposée pour un télescope de 8 mètres. En définissant un angle isoplanétique pour l'OAMC comme l'angle limite pour lequel la variance résiduelle atteint une certaine valeur (1 rad^2 par exemple), cette étude permet alors de définir une séparation optimale entre étoiles guides pour laquelle cet angle isoplanétique est maximum (voir figure 4).

Les différentes conditions de turbulences utilisées dans l'article sont résumées dans le tableau suivant. Pour un télescope de 8 mètres, un r_0 de 0.15 cm à $0.5 \mu\text{m}$ et une longueur d'onde d'imagerie de

Paramètres atmosphériques :	C_n^2	$r_0 @ 0.5 \mu\text{m}$	$r_0 @ 2.2 \mu\text{m}$	$\Theta_0 @ 0.5 \mu\text{m}$	$\Theta_0 @ 2.2 \mu\text{m}$
Profil Paranal	29 couches	0.15 m	0.89 m	2.6 arcsec	15.5 arcsec
Profil Mauna Kea	16 couches	0.15 m	0.89 m	1.36 arcsec	7.77 arcsec
Profil test	2 couches	0.15 m	0.89 m	1.97 arcsec	11.68 arcsec

TAB. 1.3 – Résumé des paramètres atmosphériques utilisé pour les simulations numériques présentés dans la conférence de Munich. Dans les 3 cas le D/r_0 à la longueur d'onde d'imagerie est de 9. Les profils de turbulences sont présentés en figure 1 de l'article. Le paramètre Θ_0 est l'angle isoplanétique défini au sens de Fried.

$2.2 \mu\text{m}$, un critère de définition de l'angle isoplanétique pour une valeur limite de 1 rad^2 et un profil typique de C_n^2 obtenu au Cerro Paranal (voir tableau 1.3 et figure 1.a de la conférence), la valeur de la séparation optimale entre étoiles est de 88 secondes d'arc, ce qui conduit à un angle isoplanétique maximum de 130 secondes d'arc. Pour les mêmes conditions mais un profil typique du Mauna Kea (voir tableau 1.3 figure 1.b de la conférence) la séparation optimale entre étoiles est de 60 secondes d'arc et l'angle isoplanétique de 110 secondes d'arc. Pour le profil de Cerro Paranal, l'évolution de l'angle isoplanétique et de la séparation optimale entre étoiles guides est étudiée en fonction du diamètre du télescope (voir figures 5 et 6).

Afin de valider les hypothèses simplificatrices effectuées lors des calculs analytiques, une comparaison entre les résultats obtenus avec l'équation 1.28 et ceux obtenus par simulations numériques en utilisant l'approche MAP présentée aux paragraphes précédents est proposée. Dans un premier temps, un simple profil de turbulence à 2 couches est utilisé (voir tableau 1.3). Puis le cas du profil Cerro Paranal (tableau 1.3 et figure 1.a) est considéré. Pour les deux types de profil, une bonne adéquation entre l'expression analytique et les simulations numériques est obtenue.

16. Une discussion sur cette supposition est proposée dans l'article.

Isoplanatic angle and optimal guide star separation for multiconjugate adaptive optics

T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, G. Rousset and L.M. Mugnier

ONERA, Département d'Optique Théorique et Appliquée,
B.P. 72, 92322 Châtillon Cedex, France ({name}@onera.fr)

ABSTRACT

We propose a first order performance estimation of multiconjugate adaptive optics (MCAO) systems. An important and restrictive parameter is the angular guide star (GS) separation for a field of view (FOV) of interest to be compensated. An analytical approach is proposed to estimate the residual variance of a MCAO systems for a given position in the FOV as a function of GS separation. This approach allows us to define expected isoplanatic angles for MCAO systems as a function of the atmospheric and observing conditions (turbulence profile, telescope diameter and GS separation). The analytical results are also compared with the numerical simulation of a MCAO system, in which a great care has been taken in the 3D wavefront reconstruction from 2D wavefront sensor (WFS) measurements. For a 8m telescope, we show that 3 GS's and 3 deformable mirrors provides very good performance in a 200 arcseconds FOV at 2.2 μ m.

keywords: high resolution imaging, adaptive optics, atmospheric turbulence, anisoplanatism.

1. INTRODUCTION

Atmospheric turbulence severely limits the angular resolution of ground based telescopes. Adaptive Optics (AO)¹⁻³ is a powerful technique to overcome this limitation and to reach the diffraction limit of large telescopes. AO compensates, in real-time, for the random fluctuations of the wavefront induced by the turbulent atmosphere. The turbulent wavefront is measured by a wavefront sensor (WFS) and optically corrected by a deformable mirror (DM) located in the pupil. This compensation allows to record long exposure images with a resolution close to the diffraction limit of the telescope. Nevertheless, the AO approach is based on the assumption that the field of view (FOV) of interest is smaller than the so-called isoplanatic field, that is the field where the wavefronts, coming from angularly separated points, are assumed to be identically disturbed. In the visible, the isoplanatic field is about a few arcseconds.⁴ If the FOV is greater than this field, the AO correction, which is optimal in the WFS analysis direction, is degraded as a function of angle.⁵ Even if post-processing treatments have been proposed to deal with the spatial variations of AO PSF,⁶ a more promising solution is to use a more sophisticated AO approach to allow a good correction in a large FOV using several guide stars (GS), that is several WFS measurements, and several DM conjugated at different heights in the atmosphere. It is the concept of Multiconjugate Adaptive Optics (MCAO).^{7,8} With such a system, the turbulence effects are corrected not only on the telescope pupil but in the turbulence volume. The key points to be considered for the design of such a system are the number of GS's and DM's. This DM number has already been discussed in previous papers⁹⁻¹¹ and the main result is that only a small number of DM's (typically 2 or 3) is required to obtain a quasi-optimal correction in a large FOV for 4 or 8 meter class telescopes in K band. An important and restrictive parameter is therefore, for this class of telescope, the angular GS separation for a given FOV. We propose a first order performance estimation of MCAO systems depending on the GS separation and assuming that the DM number is not a limiting factor.

After a presentation of the two atmospheric profiles used in this paper in Section 2 and a comparison of several isoplanatic criteria in Section 3, we briefly recall the MCAO principle in Section 4. We propose in Section 5 an analytical expression of the residual error of a MCAO system assuming that we only have 3 GS's and that the number of DM's is large enough to provide an optimal correction of the turbulent volume. This approach allows us to define expected isoplanatic angle for MCAO system as a function of the atmospheric and observing conditions: turbulence profile, wavelength, FOV, telescope diameter and GS separation. In order to validate this analytical expression and to study more precisely the behavior of a MCAO system for a 8 meter telescope, a 3D phase estimation approach^{9,12} is used in Section 6. The 3D estimation of the wavefront in turbulent layers is derived using 2D WFS data and measuring wavefronts in the GS directions.

2. THE C_n^2 PROFILES

The C_n^2 profile is a key-element for the study of anisoplanatism problems. In the present paper, we focus on two different profiles:

- a typical Cerro Paranal profile coming from the PARSCA 92 campaign measurements and composed of a strong near-ground layer (about 70% of the turbulence) and several layers which are spread out between 5 and 17 km
- an average Mauna Kea profile coming from measurements made by R. Racine¹³ and which is closed to be a constant- C_n^2 profile between 4.3 and 18 km.

The two profiles presented here are, in fact, sampled versions of these measured profiles with respectively 30 and 15 layers.

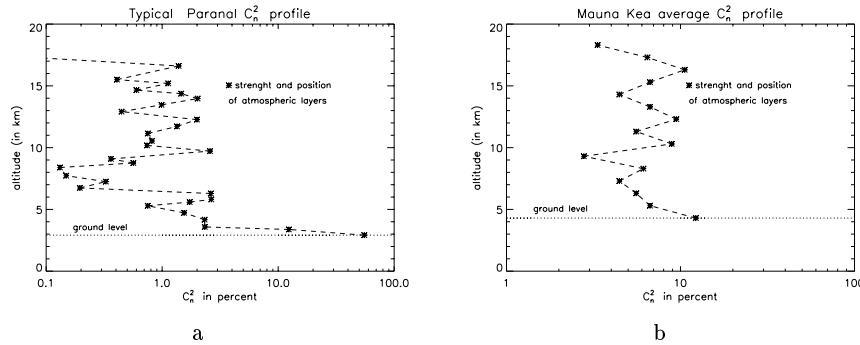


Figure 1. a: typical atmospheric profile at Paranal (Chili). b: average atmospheric profile at Mauna Kea (Hawaii)

3. DEFINITION OF AN ISOPLANATIC ANGLE FOR ADAPTIVE OPTICS

Due to the residual anisoplanatism problems, the phase variance evolves in the FOV and the isoplanatic FOV is defined as the FOV where the residual variance is smaller than a given upper value. The isoplanatic angle is the radius of this FOV. It seems clear that this variance upper value (so-called limit variance) must be defined as a function of the user requirements and then, the isoplanatic angle will depend on the AO system and on the application.

We will use in this paper two limit variance criteria: an absolute one, that is a fixed limit variance (1 rad^2 for example) which does not depend on the system performance, and a relative one depending on the best performance of the AO system (1 rad^2 greater than the variance obtained in the best performance direction, for example). Note that the absolute and the relative criterion are equivalent for a perfect AO correction (in that case the best variance is null).

Note also that, if the correction is partial the absolute criterion may lead to an isoplanatic angle equal to zero (if the minimal residual variance is larger than the limit variance). On the other hand, with the relative criterion definition, the isoplanatic angle increases when the AO correction decreases (the limit case is when there is no correction which leads to a infinite isoplanatic angle).

4. CONCEPT OF MULTICONJUGATE ADAPTIVE OPTICS

First proposed by Dicke in 1975⁷ and studied in the last ten years by many authors,^{8,10-12,14-19} the concept of such a system is that the phase is corrected not only on the pupil but also at different altitudes hence an increase of the

isoplanatic angle. MCAO systems therefore try to correct the turbulence effects in a whole atmospheric volume and not only its integrated effects on the telescope pupil. For an angle α , the phase on the telescope pupil is given by

$$\Phi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \quad (1)$$

where \mathbf{r} is the pupil coordinate, h_j is the height of the j^{th} atmospheric turbulent layer and N_t the number of these layers. The goal of a multi-conjugate adaptive optics (MCAO) system is to well estimate and then to well correct the phase for each α in a given angle much larger than the classical AO isoplanatic angle.

The wavefront is measured **on the telescope pupil** for a discrete set of direction $\{\alpha_i\}$. And the goal is then to correct the phase using all the data ($\{\Phi_{\alpha_i}^m\}$) on DM's located at different heights. Therefore, the key points for the design of a MCAO system are the number and position of DM's and the number of GS's for the large FOV wavefront analysis. In the present paper, we focus on the second point (GS separation) since the MCAO performance with respect to the DM number and positions has been already studied.^{9,12,10,11} The main results is that for a classical telescope diameters (4 to 8 meters) and K band imaging, only a small number of DM's is needed to obtain an quasi-optimal correction in a large FOV. Therefore, in that case the critical factor of the MCAO system is the separation between each GS used for the wavefront analysis.

5. ANALYTICAL EXPRESSION OF MCAO RESIDUAL ERROR DUE TO GS SEPARATION

Let us consider a MCAO system using 3 GS's. These GS's, used for wavefront sensing, are supposed to be natural GS's (i.e case of plane wave and no tilt estimation problem) and located at the vertices of a equilateral triangle (the center of gravity of this triangle defines the center of the field ($\alpha = 0$). The choice of 3 GS's is justified for a 8-m class telescope since the DM number needed to obtain an quasi-optimal correction is small (2 or 3). Note that in the case of a 100-m class telescope, this DM number may become larger and therefore the 3 GS hypothesis can be questionable. The analytical expression of the residual phase variance proposed here is based on the following assumptions:

- the phase estimation method is efficient enough to obtain a 3D phase repartition only using a set of 2D data measurements. This point will be discussed in Section 6.
- the number of DM's is large enough for a perfect correction where the wavefront is analyzed. This point will be discussed in Section 6.4.

With such a system, the turbulent effects are corrected where the wavefront is analyzed, that is in the turbulent volume "seen" by the 3 WFS, and uncorrected elsewhere. In that case, the largest residual variance for a given angle α is always on the bisector between two GS directions (see Figure 2). It is therefore possible to analytically obtain an expression of the residual variance on this GS bisector. Then, for one turbulent layer j and an angle α , this residual variance is given by:

$$\text{var}_{res,j}(\alpha) = \frac{1}{S_{pup}} \int_{S_{pup}(\alpha)} \langle \varphi_{res}(\mathbf{r})^2 \rangle d\mathbf{r} = \frac{1}{S_{pup}} \left[0 + \int_{S_j(\alpha)} \langle \varphi_{res}(\mathbf{r})^2 \rangle d\mathbf{r} \right] = \frac{S_j(\alpha)}{S_{pup}} \left[\frac{1}{S_j(\alpha)} \int_{S_j(\alpha)} \langle \varphi_{res}(\mathbf{r})^2 \rangle d\mathbf{r} \right] \quad (2)$$

where $S_{pup}(\alpha)$ is the integration domain on the layer j for an angle α (shift of the telescope pupil by $h_j \alpha$), $S_j(\alpha)$ the unseen surface (see Fig. 2). Then assuming that the turbulence follows a Kolmogorov statistics and that $S_j(\alpha)$ can be approximated as a disk surface with an equivalent-diameter, it comes:

$$\frac{1}{S_j(\alpha)} \int_{S_j(\alpha)} \langle \varphi_{res}(\mathbf{r})^2 \rangle d\mathbf{r} \simeq \left(\frac{4S_j(\alpha)}{\pi r_{0,j}^2} \right)^{\frac{5}{6}} \quad \text{and} \quad \text{var}_{res,j}(\alpha) \simeq \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{S_j(\alpha)}{S_{pup}} \right)^{\frac{11}{6}} \quad (3)$$

Note that, we have neglected, here, the differential piston between seen and unseen surfaces.

Assuming that all the turbulent layers are decorrelated, the total residual variance is given by

$$\text{var}_{res}(\alpha) = \sum_j \text{var}_{res,j}(\alpha) \quad (4)$$

In order to obtain this residual variance, $S_j(\alpha)$ must be computed for each atmospheric layer.

5.0.1. Unseen surface analytical expression

$S_j(\alpha)$ is the intersection of three disks of same surfaces (see Fig. 2). Let us define some useful notation of Figure 2 using in the surface calculation: O is the center of the FOV, C_1, C_2 and C_3 the 3 GS positions, C_4 is the pupil position for an angle α in the bisector of two GS's. With α_{gs} the angular separation between two GS's and h_j the height of the considered layer we have: $C_2C_1 = C_1C_3 = C_2C_3 = h_j\alpha_{gs} = d_{wfs}$, $OC_4 = h_j\alpha = a$ and $C_2C_4 = \sqrt{d_{wfs}^2/3 + a^2 - ad_{wfs}/\sqrt{3}}$.

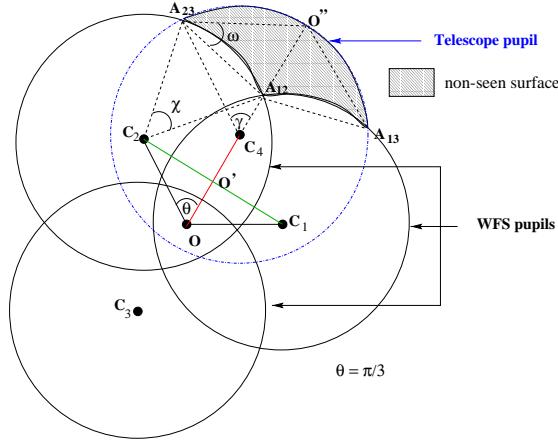


Figure 2. Position of WFS and telescope pupils in a turbulent layer.

With the configuration presented in Fig 2 the analytical expression of $S_j(\alpha)$ is :

$$S_j(\alpha) = D^2 \left\{ \frac{1}{4} [(\gamma - \chi) - (\sin \gamma - \sin \chi)] + \sin \frac{\chi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \omega \right\} \quad (5)$$

with the values of γ , χ and ω defined as

$$\gamma = \pi - \arccos \left(\frac{C_2C_4}{D} \right) - \arcsin \left(\frac{d_{wfs}}{2C_2C_4} \right) \quad (6)$$

$$\chi = \arccos \left(\frac{C_2C_4}{D} \right) - \arccos \left(\frac{d_{wfs}}{D} \right) + \arccos \left(\frac{d_{wfs}}{2C_2C_4} \right) \quad (7)$$

$$\omega = \frac{\pi + \gamma - \chi}{2} - \arccos \left(\frac{d_{wfs}}{D} \right) \quad (8)$$

Of course, Figure 2 is only one possible configuration, depending on the values of d_{wfs} , a and D , there are six analytical expression of $S_j(\alpha)$. In particular, if $d_{wfs} \leq D$ and $a \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{D^2 - d_{wfs}^2} + d_{wfs}/\sqrt{3} - D \right)$ then $S_j(\alpha) = 0$. The residual variance may be therefore denoted:

$$\text{var}_{res}(\alpha) = F(\alpha, C_n^2(h), \lambda, D, \alpha_{gs}) \quad (9)$$

where λ is the observing wavelength.

5.1. Optimal guide star separation and MCAO isoplanatic angles

5.1.1. Isoplanatic angles vs GS separation

Now, let us apply this analytical expression to the two atmospheric profiles defined in Section 2. Three absolute criteria are used to define isoplanatic angles (Θ_{iso}) (see Section 3): a limit variance equal to 0.5 rad^2 , 1 rad^2 and 1.5 rad^2 which corresponds to a minimal Strehl Ratio (SR) of about 60, 37 and 22 % respectively. The isoplanatic angle Θ_{iso} is defined by reference with the center of the FOV O (see Fig. 2). The angle evolution is studied along the GS bisector (OC_4 axis).

The telescope diameter is 8 meters, the $r_0 = 0.15 \text{ m}$ @ $0.5 \mu\text{m}$ and the imaging wavelength is $2.2 \mu\text{m}$ in both cases.

The residual variance evolution as a function of the FOV is plotted in Figure 3 for various GS separation (α_{gs}). The residual variance is relatively constant close to the FOV center and increases quickly with field angle for $\alpha \geq 50 \text{ arcsec}$, leading to a variance larger than the given limit variance.

Note that for large α_{gs} ($\alpha = 150 \text{ arcsec}$ for Mauna Kea profile) the residual variance may become greater than the limit variance for all angle on the GS bisector (even for $\alpha = 0$) that leads to $\Theta_{iso} = 0$ following our definition.

Θ_{iso} evolution as a function of α_{gs} is plotted in Figure 4 for the 3 criteria. First, Θ_{iso} increases with α_{gs} until a

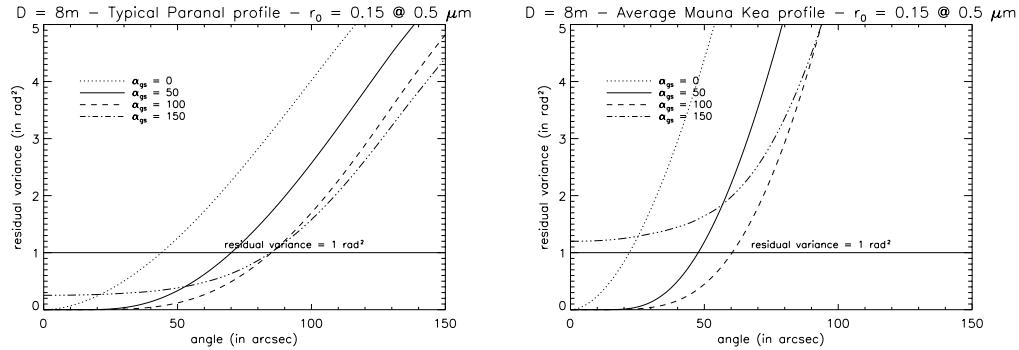


Figure 3. Residual variance evolution as a function of angle for various guide star separations

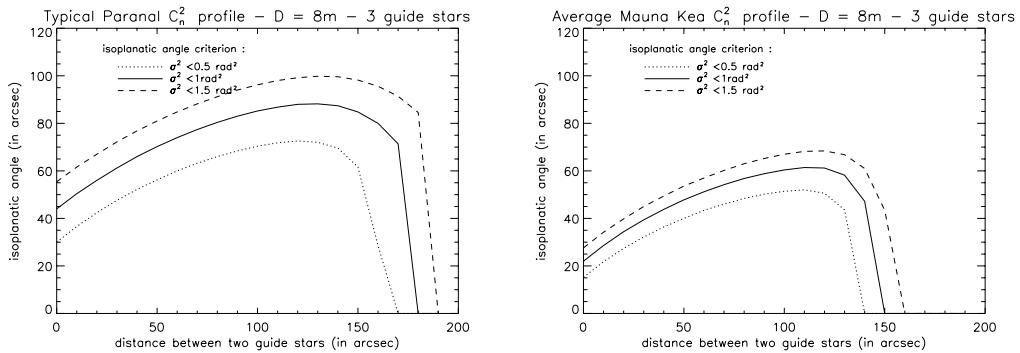


Figure 4. Isoplanatic angles evolution as a function of guide star separation for a 8 meters pupil diameter and 3 isoplanatic criteria: [dotted line] $\sigma_{res}^2 \leq 0.5$, [solid line] $\sigma_{res}^2 \leq 1$ and [dashed line] $\sigma_{res}^2 \leq 1.5 \text{ rad}^2$

maximal value (88 arcsecond for the Paranal profile) which defines an optimal GS separation (130 arcsec for the

Paranal profile). Then Θ_{iso} decreases and becomes null very quickly (that is the residual variance on the bisector is always greater than the limit variance).

With this simple geometric approach, one can estimate a first order performance of a simple MCAO system for a 8 meter telescope. For a typical Paranal profile the expected maximum isoplanatic angle is about 80 arcsec (depending on the criterion, 1 rad^2 in that case) and for the average Mauna Kea profile this isoplanatic angle is about 60 arcsec .

5.1.2. Telescope diameter influence

With this analytical approach, it is therefore very easy to study the influence of the telescope diameter on Θ_{iso} and α_{gs} . However, it must be kept in mind that we suppose here we have enough DM's to be only limited by the wavefront sensing error. Indeed, for extremely large telescope (100-m class), this DM number might be more important than for 8-m class and especially for visible wavelengths.¹¹ But here again, we consider only 3 GS's. This small number of GS's in the case of extremely large telescope should be studied in future works since it seems that, even using strong prior information, it could be difficult to control a large number of DM's with only a 3 GS's. Then, the results presented in this section are only preliminary results and should be taken with caution.

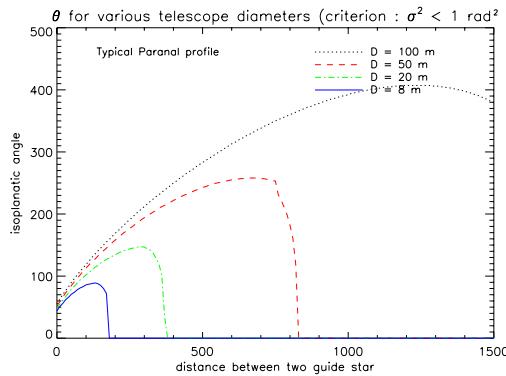


Figure 5. Isoplanatic angles evolution as a function of guide star separation for various pupil diameters (isoplanatic criteria = $\sigma_{res}^2 \leq 1 \text{ rad}^2$). GS separations nd isoplanatic angle are given in arcseconds.

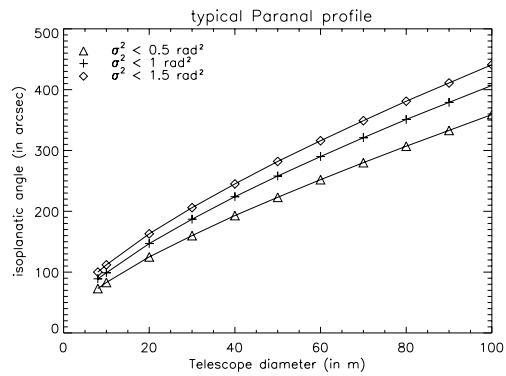


Figure 6. maximum isoplanatic angles as a function of pupil diameter for three isoplanatic criteria: [◊] $\sigma_{res}^2 \leq 0.5$, [+] $\sigma_{res}^2 \leq 1$ and [△] $\sigma_{res}^2 \leq 1.5 \text{ rad}^2$.

The expected isoplanatic angle for various α_{gs} and various pupil diameters is plotted in Figure 5. As expected with such a geometrical approach, the maximum isoplanatic angle as well as the optimal α_{gs} increase with the pupil diameter. The optimal α_{gs} is proportional to D as predicted by Ragazzoni²⁰ with a more simple (1 dimension) analytic approach, but the increase of the isoplanatic angle Θ_{iso} is proportional to D^β , with $\beta \simeq 0.7$ (fit on curves in Figure 6). Therefore Θ_{iso} (defined with a 1 rad² criterion) is 85 *arcsec* for a 8 meters telescope and 400 *arcsec* for a 100 meters (Paranal profile), that is only about a factor 4.7 (instead of a 100/8 = 12 factor). Let us remind that this result are obtained for only 3 GS's and may be different if one need to increase this number.

6. COMPARISON BETWEEN ANALYTICAL EXPRESSION AND WHOLE MCAO SYSTEM SIMULATION

6.1. Phase estimation algorithm

In the previous sections, we have obtained some results using a simple analytical expression based on very strong assumptions. We have, for instance, assumed that we can perfectly correct the turbulent phase where it is analyzed. Of course it is not so simple. Basically, the WFS's give us an integrated measurement of the turbulence over all the atmospheric layers (see Eq. 1):

$$\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}_i) + n_i(\mathbf{r}) \quad (10)$$

where N_t is the number of turbulent layers and n_i the WFS noise for each GS direction (in our case the noise variance is assumed to be equal for the 3 GS directions). The goal is then to minimize the average error variance between true and estimated phase in a given FOV:

$$\epsilon = \left\langle \int_{\alpha} \left\| \hat{\Phi}_{\alpha}(\mathbf{r}) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \right\|^2 d\alpha \right\rangle_{\varphi, noise} \quad (11)$$

where $\langle \cdot \rangle_{\varphi, noise}$ stands for a mathematical expectation both on noise and turbulence realizations.

In order to control the DM's, we propose⁹ to model the true C_n^2 profile by a small number of "equivalent layers" (N_{el}), in which are put our DM's. Then Equations 1 and 10 becomes, replacing N_t by N_{el} :

$$\Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \simeq \sum_{j=1}^{N_{el}} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}) \quad \text{and} \quad \Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r}) \simeq \sum_{j=1}^{N_{el}} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}_i) + n_i(\mathbf{r}) \quad (12)$$

and then Equation 11 could be rewritten as

$$\epsilon = \left\langle \int_{\alpha} \left\| \sum_{j=1}^{N_{el}} (\hat{\varphi}_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}) - \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha})) \right\|^2 d\alpha \right\rangle_{\varphi, noise} \quad (13)$$

where $\hat{\varphi}_j$ are the estimated correction to be applied on each deformable mirror. Assuming the statistical independence of each turbulent and then each equivalent layer, the minimization of Equation 13 is equivalent to the minimization of the wavefront in each equivalent layers (EL), that is the minimization of

$$\epsilon = \sum_{j=1}^{N_{el}} \left\langle \left\| \hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\rho}_j) - \varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j) \right\|^2 \right\rangle_{\varphi, noise} \quad (14)$$

with respect to $\{\hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j$. $\boldsymbol{\rho}_j$ are the spatial coordinate defined in a meta-pupil with a diameter $D_j = D + 2 * h_j * \alpha_{max}$ with h_j the EL height and α_{max} the maximum considered angle (FOV radius).

Because the probability law of the noise n_i and of the phase screens $\{\varphi_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j$ are both gaussian, minimizing equation 13 is equivalent to maximize the so-called *a posteriori* law which is proportional to the product of the likelihood of the data and the *a priori* law of the unknowns (phase screens). And the maximization of the probability

law is equivalent to the minimization of its negative-logarithm which leads to the following criterion to be minimized with respect to $\{\hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}_j$ ⁹:

$$J[\{\hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\rho}_j)\}] = \sum_{i=1}^{N_{GS}} \left[\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_{el}} \hat{\varphi}_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}_i) \right]^T \mathbf{C}_i^{-1} \left[\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_{el}} \hat{\varphi}_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}_i) \right] + \sum_{j=1}^{N_{el}} \hat{\varphi}_j^T(\boldsymbol{\rho}_j) \mathbf{C}_{Kol,j}^{-1} \hat{\varphi}_j(\boldsymbol{\rho}_j) \quad (15)$$

where \mathbf{C}_i is the noise covariance matrix for each GS direction and $\mathbf{C}_{Kol,j}$ the turbulent covariance matrix in each EL. This equation leads to an analytical solution (Wiener solution) presented in Ref¹² in the particular case of a Zernike decomposition of the phase screens. In our case, the number of Zernike used in the reconstruction algorithm is equal to 210 per DM.

6.2. Comparison between analytical approach and simulation

Now, let us apply the phase estimation approach defined in the previous section in order to simulate a MCAO system. We have considered two atmospheric profiles, first a two layer profile in order to validate and to compare the theoretical and the simulated results (DM number equal to atmospheric layer), and then a more realistic profile, that is the typical Paranal profile defined in Section 2.

The phase screens on each turbulent layer are simulated by McGlamery's method.²¹ The simulated phase screens are large enough with respect to the telescope pupil to ensure a $L_0/D \simeq 4$, where L_0 is the outer-scale of the turbulence, which leads to a 32 m L_0 for a 8 m telescope. The size of these phase screens corresponds to a 200 $arcsec$ FOV ($\alpha_{max} = 100 arcsec$). The overall D/r_0 is 9 (in K band) which corresponds to a 0.7 $arcsec$ seeing. The phase measurements are made on natural GS's (no tilt determination problem) at 3 field positions $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ that are located at the vertices of an equilateral triangle. The noise level on these measurements corresponds to a 14×14 sub-aperture Shack-Hartmann sensor, a 500 Hz sampling frequency and various signal-to-noise ratio (SNR) depending on the GS magnitudes. This SNR is defined as the ratio between the angle of arrival turbulent variance in a sub-aperture to the noise variance.

Our phase estimation approach is therefore applied for different number of DM's, or "equivalent layers", (two in the case of the two-layer profile, one, two, three, four and five in the case of the Paranal profile). The phase is reconstructed on each DM using a Zernike decomposition, and the number of reconstructed Zernike polynomials is equal to 210 for each DM. The performance of the method is evaluated in terms of SR approximated by $\exp[-\sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha})]$, which is valid for good corrections. $\sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha})$ is computed by:

$$\sigma_{res}^2(\boldsymbol{\alpha}) = \left\langle \frac{1}{S_{pup}} \int_{S_{pup}} \left[\Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_{EL}} \hat{\varphi}_j(\mathbf{r} + h_j \boldsymbol{\alpha}) \right]^2 d\mathbf{r} \right\rangle \quad (16)$$

where $\Phi_{\alpha}(\mathbf{r})$ represent the true phase in the direction α .

6.3. Two layer profile

Let us first consider an atmospheric profile composed of 2 two layers located at 0 and 10 km with respective strength of 70 and 30 % of the turbulence. The angular separation between the 3 GS's goes from 0 to 180 $arcsec$. The WFS SNR is about 50 which roughly corresponds to 10th magnitude guide stars. In such conditions a maximum SR equal to 80% is expected (assuming that 210 Zernike are reconstructed on each DM). In that case, we are very close to a perfect correction which justifies a direct comparison between analytical and simulated results. One can therefore check both the performance of the reconstruction algorithm and the validity of the analytical expression.

We plot in figure 7 a 2D map of the SR in a $200 \times 200 arcsec$ FOV for a $100 arcsec \alpha_{gs}$. One can see the GS positions (best correction, SR = 80%) and the very large well corrected domain.

Then, we consider various GS separations and we compare, in Figure 8 the isoplanatic angles given by the analytical expression and by the simulation.

The results are quite good with some slight differences for small and large α_{gs} . The under-estimation of Θ_{iso} by analytical formula in a large range of α_{gs} is due to the phase extrapolation induced by the Kolmogorov regularization

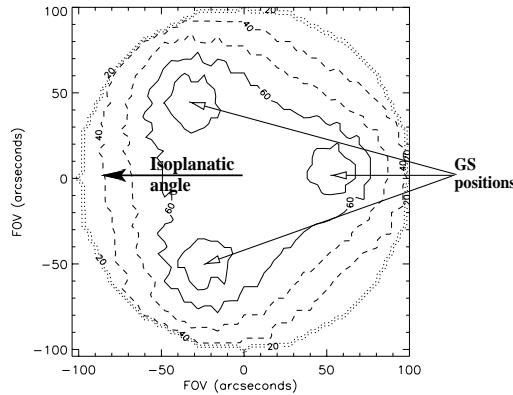


Figure 7. Iso-Strehl in a 200×200 FOV with 3 GS's and a $\alpha_{gs} = 100$ arcsec.

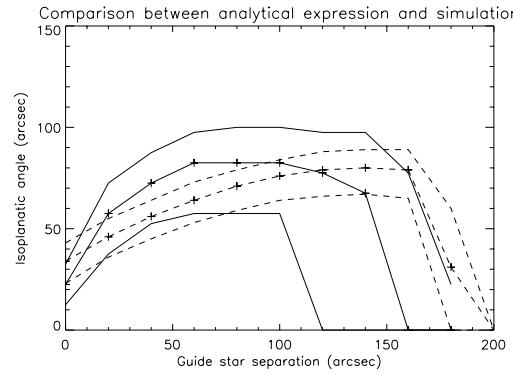


Figure 8. Comparison of isoplanatic angle between analytical expression [dashed lines] and simulation [solid lines]. Dispersion of the isoplanatic angle for various criterion. The lower lines: residual variance less than 0.5 rad^2 ($SR \simeq 60\%$), the medium lines: residual variance less than 1 rad^2 ($SR \simeq 37\%$), the upper lines residual variance less than 1.5 rad^2 ($SR \simeq 22\%$)

in the phase restoration algorithm. On the other hand, for large α_{gs} , the isoplanatic angle presents a lower cut-off in the simulation. When α_{gs} increase the regularization term (Kolmogorov regularization) becomes more important. However, the simulation also incorporates an implicit regularization due to the finite number of Zernike modes. This implicit regularization perturbs the physical regularization and limits the performance of the restoration algorithm for large GS separations.

In brief, with this 2 layer profile, we have both checked the validity of the analytical expression and the performance of our phase restoration algorithm. Particularly, the gain brought by the Kolmogorov regularization, but we have also presented a simulation limitation which is the problem of the number of degrees of freedom in each DM as a function of α_{gs} . This optimal degree of freedom per DM is under study.

6.4. Paranal profile

Now let us apply this algorithm in the more realistic case of the Paranal profile and with various GS magnitudes that is various correction degrees. The SNR on each WFS is directly linked to the GS magnitude, $D/r_0 = 9$, $D/L_0 = 4$ and the number of sub-apertures for the wavefront sensors (14×14 for each GS direction). With such conditions, a

given GS magnitude leads to a corresponding WFS SNR.²² Let us consider here four GS magnitudes which leads to four expected performance summarized in Table 1. Using the analytical expression, one can define an optimal

GS magnitude	11	12	13	14
corresponding SNR	20	7.5	2.3	0.7
max SR	75%	60%	30%	5%

Table 1. Evolution of the WFS signal to noise ratio and the corresponding expected Strehl Ratio ($= e^{-\sigma^2}$) for various guide star magnitudes in the case of a classical AO system (one DM in the pupil and one GS).

guide star separation ($\simeq 120 \text{ arcsec}$) and an expected isoplanatic angle ($\simeq 85 \text{ arcsec}$) (see Fig. 4). We consider several DM numbers (two to five). The height and the size of each DM are summarized in Table 2: The results for

number of DM's	position (in km) / physical size of the DM (in m)				
2	0.5/8.5m	9.8/17.5m			
3	0.45/8.4m	6.5/14.3m	10.8/18.5m		
4	0.25/8.2m	3.5/11.4m	7.9/15.7m	11.7/19.4m	
5	0.18/8.2m	3.0/10.9m	5.5/13.3m	7.6/15.4m	11.2/18.9m

Table 2. positions and diameters of the DM's (0 km = ground level, that is 2.635 km for the Paranal site).

different GS magnitudes are presented in Fig. 9. Considering the particular GS geometry, we have chosen a cut in the FOV including the worst and the best SR's (bisector defined in Fig. 2). 0 is the center of the FOV. On can see three important points in Figure 9:

- As expected, the DM number is not a critical parameter as soon as it becomes greater than two. In K band, the results for the 8 m telescope are similar to the ones for a four meters.⁹ Note that the smaller the SNR the smaller the difference between two, three and four DM's. Of course, in the case of very high SNR, the dominant error becomes the under-modelization due to the DM number. In that case, if a very high precision is required, four DM's should be needed.
- For high SNR (GS magnitude = 11), the isoplanatic angle $\Theta_{iso,abs}$ defined with the absolute criterion (limit variance = 1 rad²) is smaller than predicted by the analytical expression: about 60 arcsec instead of 85. This small under-estimation of $\Theta_{iso,abs}$ is due to the partial correction in the simulation: maximum SR only equal to 75 % while the analytical assumes a perfect correction (SR = 100%) in the GS directions. For more partial correction (GS magnitude = 12 or more) $\Theta_{iso,abs}$ is even zero since the SR value for $\alpha = 0$ is smaller than 37 %. In that case, it is more relevant to consider an isoplanatic angle $\Theta_{iso,rel}$ defined with the relative criterion (see Sec. 3). In all case, $\Theta_{iso,rel} \simeq 90 \text{ arcsec}$ which is very close to the analytical value.
- If, for high SNR (GS magnitudes = 11, 12), the best correction for MCAO system as well as for conventional AO system are close to be the same (SR = 75%), since the finite number of Zernike used in the phase estimation is the limiting parameter, for smaller SNR values (GS magnitudes = 13, 14) the best correction for MCAO system becomes more important than for the conventional AO system (15 % instead of 5% for a GS magnitude 14). Of course, in the MCAO case we use three GS's instead of one, thus the "global" SNR is greater. The SNR gain (turbulence variance over noise variance) tends to 3 when α_{gs} is small (it tends to the limit case of super-imposed stars). Of course this gain decreases when α_{gs} increases since, in that case, the analysis volume becomes more important. In our case, the SNR gain is only about 2.

7. CONCLUSION

We have proposed a simple analytical formula to estimate the residual phase variance in th eFOV due to the part of the turbulent phase which is not seen by the different wavefront sensors of a MCAO system. This expression is derived for a system using 3 GS's and a number of deformable mirrors which is supposed to be large enough to well

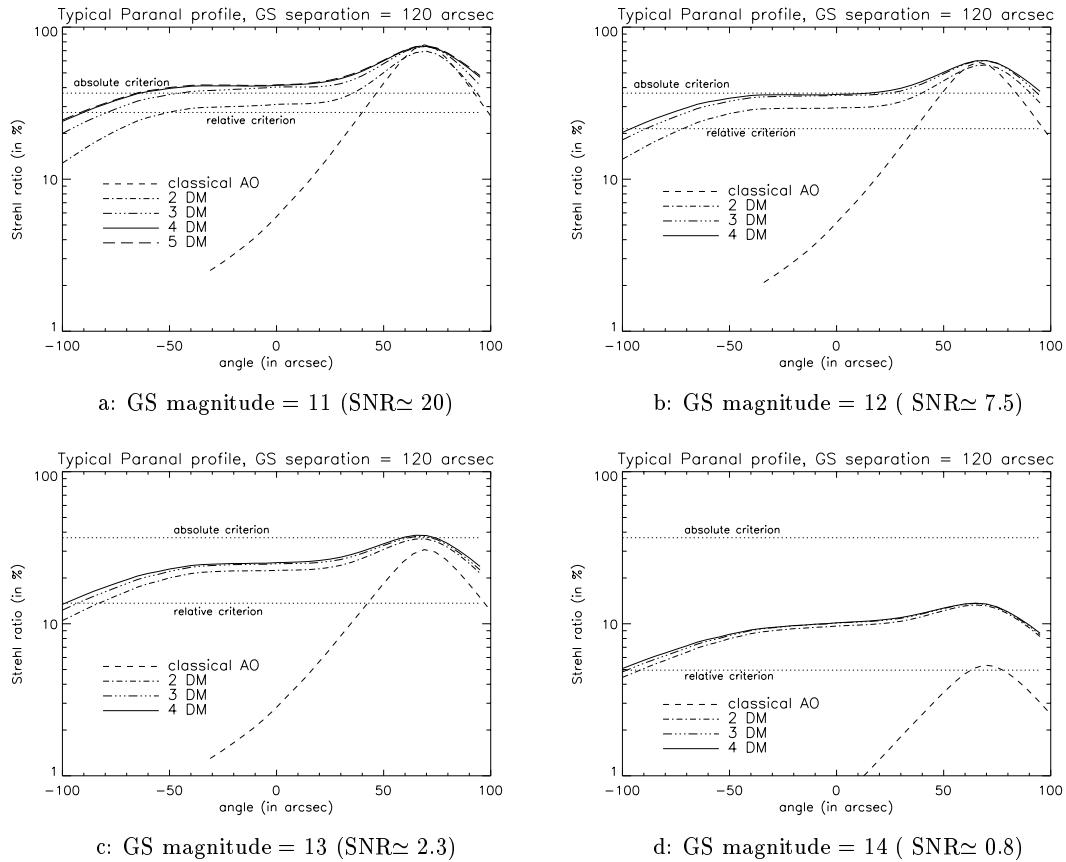


Figure 9. SR evolution as a function of angle for classical AO system [— —] and MCAO system with two [— · —], three [— · · —], four [— —], and five [— — —] DM's and for 4 GS magnitudes. Absolute and relative criteria (1 rad^2) are also plotted [· · ·] in each case.

model the atmospheric profile. Then, the formula allows us to estimate the optimal guide star (GS) separation that maximizes the isoplanatic FOV. The contribution of this residual variance to the global error budget of a MCAO system is discussed

In order to validate the analytical formula and to study more precisely the performance of MCAO, a whole system simulation is proposed. A phase estimation algorithm is used to allow a 3D phase reconstruction with the 2D WFS measurements.⁹ The reconstructed phase on each equivalent layer will give us the deformation to apply on each conjugated mirrors. The comparison between the analytical approach and a whole MCAO simulation using the phase reconstruction algorithm is quite good.

Using this numerical simulation, a MCAO system for a 8 m telescope with a typical Paranal profile is studied. It shows that a quasi-optimal correction for a FOV about 200 *arcsec* is achieved in K band with only 2 or 3 DM's and 3 GS directions (the optimal GS direction α_{gs} is equal to 120*arcsec*). The noise influence on the wavefront sensors is also considered. It is shown that the GS magnitude limitation (for a given performance) is less restrictive for MCAO systems than for classical AO systems since the number of WFS (that is the number of measurements) is more important. Even for high magnitude GS's, the SR is closed to be constant in the whole FOV (SR $\simeq 15\%$ for GS magnitude 14) and greater than for a classical AO (SR $\simeq 5\%$). All this results are very encouraging in term of sky coverage.

REFERENCES

1. J. W. Hardy, J. E. Lefebvre, and C. L. Koliopoulos, "Real time atmospheric compensation," *J. Opt. Soc. Am.* **67**(3), pp. 360–369, 1977.
2. G. Rousset, J.-C. Fontanella, P. Kern, P. Gigan, F. Rigaut, P. Léna, C. Boyer, P. Jagourel, J.-P. Gaffard, and F. Merkle, "First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics," *Astron. Astrophys.* **230**, pp. 29–32, 1990.
3. F. Roddier, ed., *Adaptive Optics in Astronomy*, Cambridge University Press, 1999.
4. D. L. Fried, "Anisoplanatism in adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am.* **72**, pp. 52–61, Jan. 1982.
5. F. Chassat, "Calcul du domaine d'isoplanétisme d'un système d'optique adaptative fonctionnant à travers la turbulence atmosphérique," *J. of Optics (Paris)* **20**(1), pp. 13–23, 1989.
6. T. Fusco, J.-M. Conan, L. Mugnier, V. Michau, and G. Rousset, "Characterisation of adaptive optics point spread function for anisoplanatic imaging. application to stellar field deconvolution.," *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **142**, pp. 149–156, 2000.
7. R. H. Dicke, "Phase-contrast detection of telescope seeing and their correction," *Astron. J.* **198**(4), pp. 605–615, 1975.
8. J. M. Beckers, "Increasing the size of the isoplanatic patch with multiconjugate adaptive optics," in *Very Large Telescopes and their Instrumentation*, ESO Conference and Workshop Proceedings, pp. 693–703, ESO, (Garching Germany), Mar. 1988.
9. T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. Mugnier, and G. Rousset, "Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics," *Opt. Lett.* **24**, Nov. 1999.
10. A. Tokovinin, M. Le Louarn, and M. Sarazin, "Isoplanatism in multi-conjugate adaptive optics system," *J. Opt. Soc. Am. A* , submitted.
11. M. Le Louarn, N. Hubin, M. Sarazin, and A. Tokovinin, "New challenges for adaptive optics: Extremely large telescopes," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , submitted.
12. T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. M. Mugnier, and G. Rousset, "Phase estimation for large field of view: application to multiconjugate adaptive optics," in *Propagation through the Atmosphere III*, vol. 3763, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., (Denver, CA (USA)), July 1999.
13. R. Racine and B. L. Ellerbroek, "Profiles of night-time turbulence above mauna kea and isoplanatism extension in adaptive optics," in *Adaptive Optical Systems and Applications*, R. K. Tyson and R. Q. Fugate, eds., vol. 2534, pp. 248–257, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., (San Diego, California), July 1995.
14. B. Beckers, "Detailed compensation of atmospheric seeing using multiconjugate adaptive optics," pp. 215–217, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 1989.
15. M. Tallon, R. Foy, and J. Vernin, "3-d wavefront sensing for multiconjugate adaptive optics," in *Progress in Telescope and instrumentation technologies*, ESO Conference and Workshop Proceedings, pp. 517–521, ESO, (Garching Germany), 1992.
16. B. L. Ellerbroek, "First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**(2), pp. 783–805, 1994.
17. D. C. Johnston and B. M. Welsh, "Analysis of multiconjugate adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, pp. 394–408, Jan. 1994.
18. B. Ellerbroek and F. Rigaut, "Optics adapt to the whole sky," *Nature (London)* **403**, pp. 25–26, Jan. 2000.
19. R. Ragazzoni, E. Marchetti, and G. Valente, "Adaptive-optics correction available for the whole sky," *Nature (London)* **403**, pp. 54–56, Jan. 2000.
20. R. Ragazzoni, "No laser guide stars for adaptive optics in giant telescopes?," *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **136**, pp. 205–209, Apr. 1999.
21. B. McGlamery, "Computer simulation studies of compensation of turbulence degraded images," in *Image processing*, vol. 74, pp. 225–233, SPIE, 1976.
22. G. Rousset, "Wavefront sensing," in *Adaptive Optics for Astronomy*, pp. 115–137, ASI, (Cargèse, France), 1993.

1.4 Reconstruction optimale en fonction du champ d'intérêt

Je vais essentiellement, dans ce paragraphe, résumer l'article
“Optimal wavefront reconstruction strategies for Multiconjugate Adaptive Optics”
T. Fusco, J.-M. Conan, G. Rousset, L.M. Mugnier et V. Michau
soumis à JOSAA et présenté à la fin du paragraphe.
Il est à noter qu'une partie des travaux présentés ici a été présentée à la conférence SPIE de San-Diego en Août 2000 ([Fusco-p-00b]).

On vient de voir qu'une approche possible pour la reconstruction de front d'onde à grand champ consiste à tenter de reconstruire au mieux le volume de turbulence (approche tomographique) et ce même si le nombre de MD est inférieur au nombre de couches turbulentes. Si cette approche tomographique, grâce à l'utilisation du concept des “couches équivalentes” donne de bons résultats et permet une correction quasi-uniforme dans un grand champ au prix d'un nombre de MD relativement réduit (2 ou 3), elle n'en demeure pas moins sous optimale puisque l'introduction des couches équivalentes a conduit à une approximation du modèle direct par un modèle simplifié (voir équation 1.27). Dans ce cas l'approche tomographique ne minimise pas exactement la grandeur d'intérêt c'est-à-dire la variance résiduelle de la phase résultante **sur la pupille du télescope et pour l'ensemble des directions d'intérêts** $\{\alpha\}_{fov}$ ¹⁷ **dans le champ**. Pour cette grandeur d'intérêt, le critère à minimiser est le suivant [Ellerbroek-a-94] :

$$\sigma_\alpha^2 = \epsilon = \left\langle \int_{\{\alpha\}_{fov}} \|\Phi(\mathbf{r}, \alpha) - \Phi(\mathbf{r}, \alpha)\|^2 d\alpha \right\rangle_{\varphi, bruit} \quad (1.29)$$

La minimisation de ce critère sur la variance de la phase résultante¹⁸ dans le champ d'intérêt ($MMSE_\alpha$) assure que l'on aura en moyenne sur toutes les réalisations du bruit et de la phase, une variance résiduelle minimale dans la pupille du télescope et pour un ensemble de directions dans le champ de vue.

Soit en supposant que l'on a un profil de C_n^2 composé de N_t couches turbulentes et un système utilisant N_{DM} miroirs :

$$\epsilon = \left\langle \int_{\{\alpha\}_{fov}} \left\| \sum_{k=1}^{N_{DM}} \hat{\varphi}_k(\mathbf{r} + h_k \alpha) - \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \right\|^2 d\alpha \right\rangle \quad (1.30)$$

Si $N_{DM} = N_t$, une des solutions de la minimisation de ϵ est alors effectivement donnée par l'approche tomographique c'est-à-dire la minimisation globale de chaque couche turbulente (voir paragraphe 1.3). Ainsi, la minimisation de ϵ est indépendante du domaine d'intégration $\{\alpha\}_{fov}$. Par contre, si $N_{DM} < N_t$ ce n'est plus le cas. La minimisation du critère défini en équation 1.30 conduit à une solution (voir paragraphe 2 de l'article) que l'on peut écrire, en utilisant les expressions matricielles définies en équations 7, 8 et 9 de l'article (ainsi que l'annexe), de la façon suivante :

$$\varphi = \mathbf{W}\Phi^m \quad (1.31)$$

17. Dans un soucis de cohérence, j'utiliserais ici les mêmes notations que dans l'article [Fusco-a-00c], soit FOV pour champ de vue, GS pour étoile guide, DM pour miroir déformable et ϵ en lieu et place de σ_α^2 . On notera également que $\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t}$ correspond au \mathbf{M}_{tot} du paragraphe 1.3.1 et que \mathbf{C}_φ correspond à \mathbf{C}_{kol} .

18. Minimum Mean Square Error (MMSE) estimator en anglais.

avec

$$\mathbf{W} = \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}} d\alpha \right)^\dagger \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} d\alpha \right) \\ \mathbf{C}_{\varphi} \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \right)^T \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \mathbf{C}_{\varphi} \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \right)^T + \mathbf{C}_n \right)^{-1} \quad (1.32)$$

où \mathbf{C}_{φ} et \mathbf{C}_n sont respectivement les matrices de covariance du volume de turbulence et du bruits dans les différentes directions d'analyse (voir équations 1.18 et 1.22 du paragraphe 1.3.1).

La matrice de reconstruction \mathbf{W} définie en équation 1.32 peut s'interpréter comme le produit de 2 termes :

- un terme de reconstruction tomographique où la phase est estimée sur chacune des couches turbulentes

$$\mathbf{W}_{tomo} = \mathbf{C}_{\varphi} \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \right)^T \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \mathbf{C}_{\varphi} \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \right)^T + \mathbf{C}_n \right)^{-1} \quad (1.33)$$

- un terme permettant de “projeter” cette solution tomographique générale sur l'espace des phases décrites par les miroirs déformables dans les zones d'intérêt du champ de vue. Cette projection se fait par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{P}_{N_{DM}, N_t} :

$$\mathbf{P}_{N_{DM}, N_t} = \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}} d\alpha \right)^\dagger \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} d\alpha \right) \quad (1.34)$$

Dans le cas réaliste où le nombre de miroirs est inférieur au nombre de couches turbulentes, optimiser une position particulière dans le champ conduit à une dégradation de la correction pour les autres directions. Un compromis doit être trouvé pour l'ensemble des directions d'intérêt. C'est la matrice de “projection” \mathbf{P}_{N_{DM}, N_t} qui permet d'optimiser ce compromis et d'obtenir en moyenne la variance résiduelle minimale dans la pupille du télescope dans les directions d'intérêt.

L'équation 1.32 fait clairement apparaître le fait que pour $N_{DM} = N_t$ une des solutions possibles de l'équation 1.32 est indépendante du champ d'intérêt (la matrice \mathbf{P}_{N_{DM}, N_t} étant alors égale à l'identité) et est donnée par l'approche tomographique.

On remarque ici l'analogie frappante entre la reconstruction du volume de turbulence sur un nombre fini de miroirs pour l'OAMC et la reconstruction de la phase turbulente à partir d'un nombre fini d'actionneurs proposée par Wallner [Wallner-a-83] dans le cadre de l'OA classique et présentée au paragraphe 3.7.5 de la première partie.

Après les développements théoriques permettant d'obtenir la solution présentée en équation 1.32, et une réécriture de l'approche tomographique appliquée aux couches équivalentes déjà présentée au paragraphe 1.3.3, une comparaison entre les 2 approches est proposée. Le gain qu'apporte l'estimation optimale définie par l'équation 1.32 et en particulier l'intérêt d'une spécification du champ de vue est démontré (voir figure 6, 7, 8, 9 et 10 de l'article).

En conclusion, la meilleure reconstruction possible de la phase quel que soit le champ d'intérêt est toujours donnée par une reconstruction tomographique lorsque le nombre de MD est égal au nombre de couches turbulentes (les performances étant alors, comme on l'a vu au paragraphe précédent, limitée par le nombre de directions d'analyse). Bien sûr, cette égalité entre nombre de miroirs et nombre de couches n'est jamais réalisable en pratique. Dans ce cas, si le profil de C_n^2 est connu,

l'approche minimisant la phase résiduelle résultante dans le champ d'intérêt (cf. équation 1.29) doit être préférée. La figure 9 montre les résultats obtenus par la reconstruction optimale vis-à-vis d'une reconstruction tomographique. En particulier il y a un gain sensible à utiliser l'approche optimale vis à vis de l'approche tomographie+“couches équivalentes”. Ainsi, les performances obtenues avec seulement 2 miroirs déformables sont identiques voire supérieures à celles obtenues avec 3 miroirs déformables et l'approche des “couches équivalentes” (approximation du modèle direct) présentée au paragraphe 1.3.3.

Optimal wavefront reconstruction strategies for Multiconjugate Adaptive Optics

T. Fusco, J.-M. Conan, G. Rousset, L.M. Mugnier, V. Michau *

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA)

Département d'Optique Théorique et Appliquée

BP 72, F-92322 Châtillon cedex, France

1. Introduction

Atmospheric turbulence severely limits the angular resolution of ground based telescopes. Adaptive optics (AO)^{1–3} is a powerful technique to overcome this limitation and to reach the diffraction limit of large telescopes. AO compensates, in real-time, for the random fluctuations of wavefronts induced by the turbulent atmosphere. The turbulent wavefront is measured by a wavefront sensor (WFS) and optically corrected by a deformable mirror (DM) located in a pupil conjugate plane. This compensation allows to record long exposure images with a resolution close to the diffraction limit. Nevertheless, the conventional AO approach is based on the assumption that the field of view (FOV) of interest is smaller than the so-called isoplanatic field, that is the field where the wavefronts, coming from angularly separated points, can be considered as identical. In the visible, the isoplanatic field is about a few arcseconds⁴. If the FOV is greater than this field, the AO correction, which is maximum in the WFS analysis direction, is degraded as a function of angle⁵. Even if post-processing methods have been proposed to deal with the spatial variation of such an AO PSF⁶, a more promising solution is to use a new AO approach to obtain a good correction in a large FOV through the use of several guide stars (GS), i.e. several WFS measurement directions, and by using several DM's which are conjugated at different heights in the atmosphere (see Figure 1). It is the concept of multiconjugate AO (MCAO)^{7,8}. With such a system, the turbulence effects are corrected not only on the telescope pupil but in the turbulence volume, hence the increase of the isoplanatic field. The choice of the number of GS's^{9–12} and DM's^{10,11,13,14} is crucial for the design of such systems. It is related to the turbulence profile $C_n^2(h)$, the telescope diameter and the observation goals.

We believe that one of the key-issues is the phase reconstruction in MCAO. It is linked to the capability of the phase reconstruction algorithm to find the best deformation to apply on each DM from a set of WFS measurements, in order to obtain the best correction in a given FOV of interest. Because the phase variance minimization in the pupil plane maximizes the image quality, we derive a Minimum Mean Square Error (MMSE) estimator that minimizes the mean phase variance in the FOV of interest¹⁵. It accounts for the C_n^2 profile in order to optimally estimate the correction wavefront to be applied to each DM. This optimal approach also accounts for the fact that the number of DM will always be smaller than the number of turbulent layers since the C_n^2 profile is a continuous function of the altitude h . Note that, *in fine*, we do not want to obtain a full tomographic reconstruction of the turbulent volume but rather only a minimum residual phase variance in the telescope pupil for all the direction of the specified FOV of interest. The case where the turbulent layers are assumed to match the mirror positions, which might be a crude approximation, is also considered for comparison. This model approximation approach will rely on the notion of equivalent turbulent layers¹⁰. In both approaches, the regularization of the ill-posed problem for the phase reconstruction is studied carefully, and the prior knowledge available both on turbulence and on noise statistics, has been incorporated in the reconstruction. Note that, we only consider in this paper open-loop conditions that is all the wavefront statistics are derived from the Kolmogorov or Von Karman theory. No temporal behavior is considered. This open-loop hypothesis is more restrictive than the study performed by B. Ellerbroek¹⁵ but allows us to obtain simple analytical formula and to propose physical interpretations of the results.

* Additional author information:

Phone: (33) 1 46 73 40 40 ; fax: (33) 1 46 73 41 71. Email: {NAME}@onera.fr
URL: <http://www.onera.fr/dota>

The theoretical development of the optimal approach for large FOV phase reconstruction is proposed in Section 2. The crude model approximation where the turbulence is assumed to match the DM position is considered in Section 3. A comparison of the performance of different phase reconstruction approaches (conventional truncated singular value decomposition, optimal and model-approximation) is then proposed in Section 4. We study the influence of a well-chosen regularization (Kolmogorov statistics) on the phase reconstruction for a large FOV. The interest of the optimal phase estimation approach, and then the need of accurate C_n^2 measurements during the observing runs, is demonstrated.

2. Optimal approach for large FOV phase reconstruction

The concept of MCAO has been studied in the last ten years by many authors⁷⁻²⁰. The goal of MCAO is to well compensate for the turbulent wavefronts not only in one direction but in a specified FOV of interest $\{\alpha\}_{fov}$ (larger than the classical isoplanatic patch⁴).

Let us assume that the turbulent atmosphere is composed of a discrete sum of thin turbulent layers located at different heights²¹. In the near field approximation²¹, the resulting phase $\Phi(\mathbf{r}, \alpha)$ in the telescope pupil is given, for a sky direction α , by

$$\Phi(\mathbf{r}, \alpha) = \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \quad (1)$$

where \mathbf{r} is the pupil coordinate, $\varphi_j(\rho_j)$ the phase perturbations in the j^{th} atmospheric turbulent layer located at the altitude h_j . N_t is the number of turbulent layers.

The wavefront is measured in the telescope pupil for the discrete set of GS directions $\{\alpha_i\}_{gs}$. The correction is computed using all these measurements ($\{\Phi^m(\mathbf{r}, \alpha_i)\}_{gs}$) and considering several DM's located at different heights. Therefore, the key points for the design of a MCAO system are the number and position of DM's and GS's and, of course, the phase reconstruction method which gives the correction phase for the different DM's. In the present paper, we focus on this phase estimation algorithm since the MCAO performance with respect to the DM and GS number and positions has been already studied¹⁰⁻¹³. The main result of these previous works is that for telescope diameters of 4 to 8 meters and for K band imaging, only a small number of DM's and GS's is needed to obtain quasi-uniform correction in a large FOV (typically larger than one arcminute).

A. Position of the problem

The goal of our approach is to minimize the residual phase variance in a specified FOV of interest, that is to derive a Minimum Mean Square Error (MMSE) estimator¹⁵. This phase estimator is defined as the one that minimizes a quadratic distance averaged on the FOV of interest $\{\alpha\}_{fov}$ between the resulting true and correction phases:

$$\epsilon = \left\langle \int_{\{\alpha\}_{fov}} \|\hat{\Phi}(\mathbf{r}, \alpha) - \Phi(\mathbf{r}, \alpha)\|^2 d\alpha \right\rangle_{\Phi, noise} \quad (2)$$

where $\langle \cdot \rangle_{\Phi, noise}$ stands for a mathematical expectation both on turbulence and WFS noise outcomes, $\|\cdot\|^2$ denotes the spatial variance in the telescope pupil, $\Phi(\mathbf{r}, \alpha)$ is the true phase in a given direction α in $\{\alpha\}_{fov}$ and $\hat{\Phi}(\mathbf{r}, \alpha)$ is the estimated correction phase in that direction α . All the problem is to estimate $\hat{\Phi}(\mathbf{r}, \alpha)$, under the constraint that it will be generated by a finite number of DM's, and by using not only the WFS measurements but also *a priori* information we have on the turbulent wavefront in the atmospheric volume.

Let us consider that we have N_{gs} GS's, i.e. N_{gs} WFS measurements. For each WFS, we assume that the measured phase can be expressed as

$$\Phi^m(\mathbf{r}, \alpha_i) = \Phi(\mathbf{r}, \alpha_i) + n_i(\mathbf{r}) \quad (3)$$

where α_i is the angular position of the i^{th} GS. For sake of simplicity, Eq. 3 assumes that the WFS directly gives phase map measurements and that n_i follows Gaussian statistics (central limit theorem). We suppose here that $\Phi^m(\mathbf{r}, \alpha_i)$ is measured on a basis with an infinite number of modes. The measurements are only limited by the noise. Indeed, this noise on slope measurements given by a Shack-Hartmann (SH) WFS is given by the sum of several pixels in the calculation of the center of gravity and through the reconstruction, the noise on the phase results from a large number of sub-aperture contributions. In order to account for the noise propagation through the reconstruction from SH data, this Gaussian noise $n_i(\mathbf{r})$ is colored with, in the Fourier domain, a power spectral density (PSD) following a f^{-2} law²². The turbulent phase on the telescope pupil is given by the sum of all the turbulent layer contributions (see Equation 1), then Equation 3 can be rewritten as

$$\Phi^m(\mathbf{r}, \alpha_i) = \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha_i) + n_i(\mathbf{r}) \quad (4)$$

The unknowns of the problem are the correction phases $\hat{\varphi}_k$ to be estimated for each deformable mirror so as to minimize the criterion defined in Equation 2. Of course, for practical reasons, the DM number (N_{DM}) will always be smaller than the number of turbulent layers(N_t). In that case, we have for a given direction α :

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r}, \alpha) = \sum_{k=1}^{N_{DM}} \hat{\varphi}_k(\mathbf{r} + h_k \alpha) \quad (5)$$

The DM positions h_k are, for instance, computed as presented in References^{10,11,13} using an average C_n^2 profile. Then, Equation 2 becomes

$$\epsilon = \left\langle \int_{\{\alpha\}_{fov}} \left\| \sum_{k=1}^{N_{DM}} \hat{\varphi}_k(\mathbf{r} + h_k \alpha) - \sum_{j=1}^{N_t} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \right\|^2 d\alpha \right\rangle_{\varphi, noise} \quad (6)$$

For the sake of clarity, let us rewrite all the equations defined above in a matrix form. Equations 1, 4 and 5 become respectively:

$$\Phi(\mathbf{r}, \alpha) = M_{\alpha}^{N_t} \varphi \quad (7)$$

$$\Phi^m(\mathbf{r}, \alpha_i) = M_{\alpha_i}^{N_t} \varphi + n_i \quad (8)$$

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r}, \alpha) = M_{\alpha}^{N_{DM}} \hat{\varphi} \quad (9)$$

with $M_{\alpha}^{N_t}$ and $M_{\alpha}^{N_{DM}}$ the matrices which perform the sum of the contributions of each wavefront $\varphi_j(\rho_j)$ and $\hat{\varphi}_k(\rho_k)$ on the telescope pupil for a given direction α . φ and $\hat{\varphi}$ are defined as:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_j \\ \vdots \\ \varphi_{N_t} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_k \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{N_{DM}} \end{pmatrix} \quad (10)$$

The criterion to be minimized is then

$$\epsilon = \left\langle \int_{\{\alpha\}_{fov}} \| M_{\alpha}^{N_{DM}} \hat{\varphi} - M_{\alpha}^{N_t} \varphi \|^2 d\alpha \right\rangle_{\varphi, noise} \quad (11)$$

B. Optimal solution

In general, the calculation of the MMSE estimator is not tractable unless the estimator is assumed to be linear with respect to the data (Linear MMSE estimator). It is important to note that in the case of joint Gaussian statistics for

the noise and the turbulence (which is the case in our problem), this linear estimator is identical to the true MMSE estimator²³.

We can therefore seek the MMSE solution in the form:

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{W} \boldsymbol{\Phi}^m \quad \text{with} \quad \boldsymbol{\Phi}^m = \mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{n} \quad (12)$$

where the new unknowns are the elements of the matrix \mathbf{W} . $\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t}$, $\boldsymbol{\Phi}^m$ and \mathbf{n} are matrices and vectors defined as

$$\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} = \left(\mathbf{M}_{\alpha_1}^{N_t}, \dots, \mathbf{M}_{\alpha_i}^{N_t}, \dots, \mathbf{M}_{\alpha_{N_{gs}}}^{N_t} \right) \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^m = \begin{pmatrix} \Phi^m(\mathbf{r}, \alpha_1) \\ \vdots \\ \Phi^m(\mathbf{r}, \alpha_i) \\ \vdots \\ \Phi^m(\mathbf{r}, \alpha_{N_{gs}}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ n_i(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ n_{N_{gs}}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (14)$$

\mathbf{W} is the reconstruction matrix

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_j \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{N_{DM}} \end{pmatrix} \quad \text{so that} \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j = \mathbf{W}_j \boldsymbol{\Phi}^m \quad (15)$$

Putting Equation 12 in Equation 11 yields

$$\epsilon = \int_{\{\alpha\}_{fov}} \left\langle \left\| \mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}} [\mathbf{W} \mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{W} \mathbf{n}] - \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} \boldsymbol{\varphi} \right\|^2 \right\rangle_{\varphi, noise} d\alpha \quad (16)$$

This equation must be minimized with respect to \mathbf{W} . The explicit minimization of Equation 16 is presented in Appendix A. The final result is :

$$\mathbf{W} = \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}} d\alpha \right)^+ \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} d\alpha \right) C_{\varphi} \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \right)^T \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} C_{\varphi} \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \right)^T + C_n \right)^{-1} \quad (17)$$

where C_{φ} and C_n , defined in Appendix A, are the generalization for several layers and several GS's of the classical turbulence and noise covariance matrices. The T and $+$ symbols denote the transpose and the generalized inverse matrix, respectively.

When $\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{DM}} = \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t}$ that is when the DM's are exactly located on the turbulent layers, Equation 17 simply reads :

$$\mathbf{W}_{(N_{DM}=N_t)} = C_{\varphi} \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \right)^T \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} C_{\varphi} \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \right)^T + C_n \right)^{-1} \quad (18)$$

Equation 11 then becomes :

$$\epsilon = \left\langle \int_{\{\alpha\}_{fov}} \left\| \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} (\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}) \right\|^2 d\alpha \right\rangle_{\varphi, noise} \quad (19)$$

In that case, it can be shown that minimizing the residual phase variance in the telescope pupil ϵ is equivalent to the minimization of

$$\epsilon' = \left\langle \|\hat{\varphi} - \varphi\|^2 \right\rangle_{\varphi, noise} \quad (20)$$

that is to the minimization of the residual phase variance in each layer (whatever the FOV of interest). Our estimator is therefore equivalent, in that case, to a tomographic approach¹⁹. In particular, there is no dependence on the field angle. Such a DM correction minimizes the phase residual variance whatever the FOV position. But this case is only idealistic. In fact, the number of DM's will always be smaller than the number of turbulent layers. It is however interesting to note that in the general case, the solution given in Equation 17 actually consists in this tomographic reconstruction on all turbulent layers corresponding to Equation 18 followed by a "projection" onto the solution space (corresponding to the small number of altitudes where the DM's are located). The "projection" operator is therefore:

$$P_{N_{DM}, N_t} = \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (M_{\alpha}^{N_{DM}})^T M_{\alpha}^{N_{DM}} d\alpha \right)^+ \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (M_{\alpha}^{N_{DM}})^T M_{\alpha}^{N_t} d\alpha \right) \quad (21)$$

This projection matrix is directly linked, through the integral in α , to the FOV of interest $\{\alpha\}_{fov}$ where the correction is optimized. Indeed, when the mirror positions do not match the turbulence layers ($N_{DM} < N_t$) an overall correction in the FOV is not possible. Optimizing for a particular FOV position may degrade the correction in other positions. Trade-offs have to be made for a specified set of FOV positions. The "projection" P_{N_{DM}, N_t} performs optimally this trade-offs.

One can also show from Equation 16 that, whatever the position in the FOV, the residual phase variance is minimal for one DM per layer ($N_{DM} = N_t$). However we will see in Section 4 that this ultimate performance is almost reached with a small number of DM's when considering a reasonable FOV of interest.

Note that there is an analogy between the MCAO correction of the turbulence volume with a finite number of DMs presented here, and the correction of the turbulent phase in classical AO with a finite number of actuator proposed by Wallner²⁴.

With the matrix W one can compute $\hat{\varphi} = W\Phi^m$ which gives the estimated correction phase on each DM that ensures a minimal residual phase variance for all the directions of the specified FOV $\{\alpha\}_{fov}$. Of course, the computation of Equation 17 requires the knowledge of the turbulence profile for the computation of $M_{\alpha}^{N_t}$ and C_{φ} . A real time measurement of the C_n^2 profile can, for instance, be obtained with a generalized SCIDAR²⁵. In the following Section, a second approach based on a cruder turbulence model is presented.

3. The model-approximation approach

In this approach, we assume that all the turbulence is located on the DMs. The C_n^2 profile is only modeled by a small number (N_{el}) of turbulent layers, called "equivalent layers" (EL) in which are located the $N_{DM} = N_{el}$ DM's. The computation of the EL position and strength is done by a sampling of the C_n^2 profile into N_{el} slabs^{10,11}.

Using this simplified turbulence model one can estimate the correction phase with the approach proposed in Section 2 B. All the equations remain valid with N_t and N_{DM} replaced by N_{el} . Therefore, the direct problem can be rewritten as :

$$\Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \simeq \sum_{j=1}^{N_{el}} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \quad \text{and} \quad \Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r}) \simeq \sum_{j=1}^{N_{el}} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha_i) + n_i(\mathbf{r}) \quad (22)$$

Consequently, reconstruction matrix is deduced from Equation 18:

$$W_{MA} = C_{\varphi} \left(M_{N_{gs}}^{N_{el}} \right)^T \left(M_{N_{gs}}^{N_{el}} C_{\varphi} \left(M_{N_{gs}}^{N_{el}} \right)^T + C_n \right)^{-1} \quad (23)$$

The reconstruction phases are therefore given by $\hat{\varphi} = W_{MA}\Phi^m$.

This model-approximation solution had already been derived in previous paper^{10,11} following a MAP approach. But MMSE and MAP estimators are anyway equivalent²³ here due to the Gaussian statistics of the noise and the turbulence.

Now, let us compare the two approaches and discuss their similarities and differences. They are both derived from the same theoretical development based on MMSE criterion. The only (but important) difference is that the model-approximation uses a simplified direct problem which leads to a sub-optimal solution.

4. Results and performance

A. Simulation tool

Let us consider a modal decomposition of the wavefronts on the Zernike basis. The phase screen on each turbulent layer j becomes:

$$\varphi_j(\rho_j) = \sum_{l=2}^{\infty} a_{l,j} Z_{l,j}(\rho_j) \quad (24)$$

where $Z_{l,j}(\rho)$ is the l^{th} Zernike polynomial defined on a meta-pupil of diameter D_j depending on the telescope diameter D , the layer altitude h_j and the maximal FOV angle considered α_{max} :

$$D_j = D + 2h_j\alpha_{max} \quad (25)$$

Of course, all the equations presented above are still valid in this basis. In particular, one can note that in Equation 10 the φ_j and φ_k are simply vectors of Zernike coefficients $a_{l,j}$ and $a_{l,k}$, C_φ is therefore a generalization of the Zernike covariance matrix given by Noll²⁶.

For a direction α_i , only a part of the meta-pupil associated to the layer j , is viewed: a disk of diameter D centered on $h_j\alpha_i$. In this particular basis, $M_{N_{gs}}^{N_{el}}$, $M_{N_{gs}}^{N_l}$, $M_{\alpha}^{N_l}$ and $M_{\alpha}^{N_{el}}$ are computed as presented in Ref.¹¹. It consists in the decomposition of each truncated Zernike polynomial ($Z_{l,j}(\mathbf{r} + \alpha h_j)$) onto a Zernike basis defined on the telescope pupil (see Figure 2). R. Ragazzoni²⁰ has shown that the number of modes required for such a decomposition is given by the number l of the meta-pupil Zernike. This result is very important since it ensures that the dimension of each matrix M will only be linked to the number of Zernike considered in each (turbulent or DM) layer. For example in the case of a two DM system where 66 Zernike are seek on the first and 135 on the second DM, the dimension of the matrix $M_{\alpha}^{N_{DM}}$ will only be $135 \times (66 + 135)$.

Ideally, the number of Zernike modes must be infinite but for practical reasons (computation time, matrix sizes) only a finite number of Zernike is considered both for the measured phases and for the DM's. These number are assumed to be large enough (in regards of the D/r_0) to ensure a negligible under modelization error.

B. Simulation parameters

Let us consider a four layer profile defined as follows:

layer number	1	2	3	4
position (in km)	0	2.5	5	7.5
strength (in percent)	25	25	25	25

The phase screens on each turbulent layer are simulated by McGlamery's method²⁷. The simulated phase screens are large enough with respect to the telescope pupil to ensure a $L_0/D \simeq 4$, where L_0 is the outer scale of the turbulence. The total r_0 is equal to 0.1m at $0.5\mu\text{m}$. This leads to an isoplanatic angle θ_0 (defined with the Fried formula⁴) equal to 1.44 arcsec @ $0.5\mu\text{m}$ and 8.52 arcsec @ $2.2\mu\text{m}$. We consider a 4m telescope, and several MCAO systems presented in Figure 3.

The several MCAO system are made of:

- a 1 GS on optical-axis and 1 DM (with 135 corrected modes) conjugated at 3.75 or 6.5 km (Sec. 4 D 1).
- b 1 GS on optical-axis and 4 DM (with respectively 66, 120, 135 and 230 corrected modes) conjugated on the 4 turbulent layers (Tomographic reconstruction) (Sec. 4 D 1)
- c 3 GS located at the vertices of a equilateral triangle with a separation equal to 70 *arcsec* and 2 DM (with respectively 66 and 135 corrected modes) conjugated at 1.25 and 6.25 km (Sec. 4 C and 4 D 2)
- d 3 GS located at the vertices of a equilateral triangle with a separation equal to 70 *arcsec* and 4 DM (with respectively 66, 120, 135 and 230 corrected modes) conjugated on the 4 turbulent layers (Tomographic reconstruction) (Sec. 4 D 2)

Ideally, a large number of the Zernike modes should be used, but for practical reasons the number of modes per DM considered here is quite reasonable.

First, it is important to note that, in the case (b and d) the number of DM is equal to the number of true layers, therefore these two cases can be seen as the ultimate performance of case (a and c) as mentioned in Section 2 B.

The two first cases (a) and (b) correspond to the first step of a MCAO system since they are composed of one or several conjugated DM's but they still only use one GS. Therefore, all the information on the off-axis phases is only given by the prior we have on the turbulent volume (the C_n^2 repartition and the Kolmogorov statistics of the phase). An example of such a system (case a) is under construction for the 8-m Gemini-North telescope³⁰. This AO system (Altair) can be seen as the first order of a MCAO system. In our case we have considered a 4 m telescope but all the results can easily be extended to a 8-m case by a simple scaling of the the FOV $\{\alpha\}_{fov}$ by the diameter ratio and the number of corrected modes by the square of this ratio.

Cases (b) and (d) represent more complex systems since they are composed of both several GS directions and several conjugated DM's.

SH WFS's are used to measure the wavefront in each GS direction. The signal to noise ratio on each SH (defined as the ratio between the turbulence variance and the noise variance) is computed for a 7×7 sub-aperture SH and is equal to 10. It roughly corresponds to a 11th GS magnitude. For each system the maximal considered FOV (which defines the physical size of each DM, see Figure 3) is equal to 150 *arcsec*.

The performance of the different methods is evaluated in terms of Strehl Ratio (SR) approximated by $\exp[-\sigma_{res}^2(\alpha)]$, which is valid for good corrections. $\sigma_{res}^2(\alpha)$ is computed by:

$$\sigma_{res}^2(\alpha) = \left\langle \left\| \Phi(\mathbf{r}, \alpha) - \hat{\Phi}(\mathbf{r}, \alpha) \right\|^2 \right\rangle \quad (26)$$

where $\langle . \rangle$ is an average on 100 decorrelated simulated phases.

First of all, a study of the gain brought by the regularization term (“Kolmogorov” regularization) in Equations 17 and 18, compared to a more classical approach based on a least square minimization is performed in Section 4 C.

C. Influence of the “Kolmogorov regularization”

Let us consider the two DM and 3 GS system (case c) presented above. The classical approach to inverse the ill-posed problem of the phase correction estimation in each DM is to use a least square minimization¹⁸, that is to consider a truncated singular value decomposition. With our notations, this wavefront estimator is therefore given by the well-known following relation:

$$\hat{\varphi} = \left(\left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_{el}} \right)^T \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_{el}} \right) \right)^+ \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_{el}} \right)^T \boldsymbol{\Phi}^m \quad (27)$$

where $\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_{el}}$ is the interaction matrix between the DM's and the WFS's. Because $\left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_{el}} \right)^T \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_{el}} \right)$ is an ill-conditioned matrix (see Figure 4), the inversion is made using a singular value decomposition (SVD) in which the lower values modes are set to zero in order to avoid the noise amplification. Of course, this truncation can be seen as a crude regularization, and it is easy to show that this approach is less optimal than the use of a well-chosen

regularization term (the Kolmogorov statistics in our case) as shown for various turbulence-related applications, in^{10,23,28,29}.

One can see in Figure 5, as expected, that the use of a Kolmogorov regularization (Model-approximation, Equation 23), where C_φ is computed assuming that all the turbulence is equally distributed on the two DM's gives better results than the classical truncated SVD (Equation 27) whatever the chosen truncation threshold (note that the “optimal” choice of this threshold is one of the major problem of the SVD approach). For the optimal SVD threshold ($\lambda_{max}/50$ here), only 72 modes are corrected from the available 199 modes of the system (the piston is not considered).

The great advantage of the well chosen regularization (as derived from a MMSE approach) is that one does not have to adjust any parameters since the optimal regularization is directly derived from the noise and the turbulence (on each EL) statistics.

It seems clear, on this example, that an adequate regularization of the inverse problem is required in a large FOV to obtain good performance. This Kolmogorov regularization avoids the noise amplification, but also allows a good phase extrapolation where the phase is not or partially measured.

Now let us compare the optimal approach defined in Equation 17 and the model approximation approach defined in Equation 23. In Section 4D1 the one GS and one DM system (case **a**) is studied. In Section 4D1 a 3 GS's and 2 DM's (case **c**) is considered. Note that, for each GS configuration we give the best possible performance obtained, as explained in Section 2, with one DM per turbulent layer, that is 4 DM's here (respectively case **b** and **d**).

D. Comparison of the optimal and the model-approximation approaches

We have just shown that a well-chosen Kolmogorov regularization always gives better results than a simple truncated SVD approach. Let us now compare the two phase estimation methods presented in Sections 2 and 3 using this regularization. More precisely, let us show the gain brought by the optimal phase estimation approach in which the prior information on the turbulence profile is more precise and for which an optimization in a given FOV of interest $\{\alpha\}_{fov}$ is performed.

1. Mono-GS and mono-DM system

Let us first consider the simple but illustrative case of a system composed by only one GS and one conjugated DM (case **a**). In such a configuration, two different cases can be studied.

- Case of a well-placed DM with respect to the turbulence profile. (Figure 6)

The DM is located at 3.75 km (center of gravity of the C_n^2 profile). If we use the model approximation method (all the turbulence supposed to be on the DM), because the DM position is well chosen, a good extrapolation is possible. Indeed as shown in Figure 6, a quasi-optimal (close to the ultimate 4 DM performance) SR is obtained in a 20×20 arcsec FOV. Beyond, if the science object is far from the optical axis (typically 50 arcsec), the degradation of the extrapolation between one and four DM's becomes important ($SR = 3\%$ for 1 DM and 8% for 4 DM's).

Now, we take into account the knowledge of the true C_n^2 profile for the optimization of the DM correction in the science object direction. In our example, we consider a 5×5 arcsec FOV around $\alpha = 50$ arcsec. The optimal approach given by Equation 17 is then used and we obtain with only one DM nearly the same results than for 4 DM's (the difference is only about 0.1 % on SR) in this particular portion of the FOV.

- Case of a misplaced DM with respect to the turbulence profile (Figure 7).

The atmospheric conditions are the same, the only difference is the DM position. Here, the DM is misplaced with respect to the turbulent profile (DM located at 6.5 km). Of course, the model approximation gives a poor extrapolation since considering that all the turbulence is concentrated at 6.5 km is a bad approximation. In Figure 7, the model-approximation results (dashed-lines) are strongly degraded compared to Figure 6. But it is shown that the optimal reconstruction approach still gives good results, similar to the well-placed DM case, in the specified 5×5 arcsec FOV around $\alpha = 50$ arcsec. Since we have taken into account the true C_n^2 profile the optimal approach is able to find the best DM deformation to optimize the correction in the direction of the science object, even if the DM position is far from the optimum.

To summarize, even if we have only one GS the best way to optimize the correction in a large FOV is to have the same number of DM that the number of turbulent layers. Of course, this is impossible for practical reason and then we have shown that the use of the information on the true C_n^2 profile in the reconstruction process allows impressive results even if we have only one DM. This approach could therefore be used in conventional AO systems (case of 1 DM at 0 km, that is in the pupil plane) to increase their performance in the field, when the C_n^2 measurements is available.

However high and quasi-uniform correction quality in the whole FOV can not be achieved with only one GS and in the following section 3 GS configurations are studied.

2. Multi-GS and multi-DM system

Now, let us consider a more complex MCAO system (case c) composed of 2 DM's and 3 GS's located on the vertices of a equilateral triangle (GS separation = 70arcsec). For the 2 DM system, we plot in Figures 8 and 9 a comparison between the optimal reconstruction (for different FOV of interest : 20, 60 and 120 arcsec) and the model-approximation reconstruction method. The best performance case, obtained with 4 DM's conjugated in the 4 turbulent layers (case d) is also plotted for comparison.

Figures 8 and 9 show the interest of the optimal phase reconstruction approach which allows, an optimal reconstruction in the FOV of interest $\{\alpha\}_{fov}$. For example, let us consider a FOV of interest centered on the optical axis and having a size of 20, 60 or 120 arcseconds. With only two DM's, the correction is nearly the same as the best performance obtained with the 4 DM system. The correction at the center of the FOV, which is only equal to 31% (in terms of Strehl ratio) with the model approximation approach, is equal to 49.3% for the $20 \times 20 \text{ arcsec}$ optimized area, 48.5% for the $60 \times 60 \text{ arcsec}$ optimized area and 47% for the $120 \times 120 \text{ arcsec}$ optimized area. The SR for the limit case of four DM is equal to 49.6%. We note the significant increase of the SR when using the true C_n^2 profile in the optimal approach. A very slow decrease of on-axis performance when increasing FOV of interest is observed.

Another example is presented in Figure 10 where the optimized FOV is made of two areas located at -60 and 60 arcsec (the size of each area is only 5 arcsec diameter). In that case, for the -60 arcsec position the SR goes from 7.2% (2-DM model-approximation reconstruction) to 23% (2-DM optimal reconstruction) and for the 60 arcsec position the SR goes from 27% to 44% respectively. Of course we have globally lost in the 150×150 FOV but we have optimized the correction in the two areas of interest.

5. Conclusion

We have presented, in this paper, an optimal phase reconstruction approach for MCAO systems. This optimal approach accounts for the fact that the number of deformable mirrors is always smaller than the number of atmospheric layers. The concept of this approach is that, we do not necessarily want to obtain a tomographic reconstruction of the turbulent volume but rather a minimum residual variance in the telescope pupil and for all the sky directions in a given FOV of interest. This optimal approach requires a good knowledge of the C_n^2 profile, and therefore a generalized SCIDAR must be coupled to the MCAO system. Because we deal with the true C_n^2 profile in the minimization, the fixed position of our DM's is not critical and therefore a strong evolution of the turbulence profile do not significantly change the system performance. Or in other words, in the case of reasonable FOV of interest, the DM positions is not critical in regards of C_n^2 profile. Moreover, the optimal approach, even with a low number of DM's, allows to obtain performance close to the best performance case corresponding to one DM per turbulent layer (full tomography) thanks to the minimization of the phase variance in the specified FOV of interest.

Nevertheless, if only poor knowledge of the C_n^2 is available (in particular when no measurement are performed before the observation run), a cruder approach could be used. In this approach, an equivalent C_n^2 profile composed of a small number of equivalent layer (equal to the number of DM) is computed. This cruder approach is nevertheless based on the same mathematical derivation than the optimal approach. In particular, a great care has been taken to optimally regularized the inverse problem. We show that a well-chosen regularization brings a non-negligible gain in the phase reconstruction for a large FOV, compared to a classical least-square estimation using a truncated singular value decomposition.

In the present paper, we only consider an open-loop case (which allows us to use the turbulent phase covariance

matrix), but future works should include a complete close-loop modelization.

Appendix A: MMSE solution

1. Matricial derivation

Let us first recall some important results, used in the article, on the theory of matrix derivation³¹. Let us define 2 matrices A et B , the first derivation of A with respect to B is defined as follows:

$$\frac{\partial A}{\partial B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial B_{11}} & \dots & \frac{\partial A}{\partial B_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial B_{m1}} & \dots & \frac{\partial A}{\partial B_{mn}} \end{pmatrix} \quad (\text{A1})$$

Properties: let us suppose that A, B, C are real matrices and x a vector.

- $(\partial A)/(\partial B^T) = [(\partial A^T)/(\partial B)]^T$
- $(\partial/\partial B) (\text{trace}(BA)) = (\partial/\partial B) (\text{trace}(A^T B)) = (\partial/\partial B) (\text{trace}(AB)) = A^T$
- $(\partial/\partial B) (\text{trace}(B^T A)) = (\partial/\partial B) (\text{trace}(BA^T)) = A$
- $(\partial/\partial B) (\text{trace}(ABC)) = A^T C^T$
- $(\partial/\partial B) (\text{trace}(BAB^T)) = 2BA$
- $(\partial/\partial B)(x^T BAB^T x) = 2xx^T BA$ which leads to $(\partial/\partial B) (\text{trace}(C^T BAB^T C)) = 2C^T CBA$

2. Optimal MMSE solution

The goal is to derive the MMSE criterion defined in Equation 16 with respect to W . First, let us remind that for a given matrix A and a given vector v , we have the following relation $\|Av\|^2 = \text{trace}\{Av(Av)^T\}$. Then, assuming that the noise and the turbulent phase statistics are independents, Equation 16 becomes

$$\epsilon = \int_{\{\alpha\}_{fov}} \text{trace} \left\{ \left(M_{\alpha}^{N_{el}} W M_{N_{gs}}^{N_t} - M_{\alpha}^{N_t} \right) \langle \varphi \varphi^T \rangle \left(M_{\alpha}^{N_{el}} W M_{N_{gs}}^{N_t} - M_{\alpha}^{N_t} \right)^T + M_{\alpha}^{N_{el}} W \langle nn^T \rangle (M_{\alpha}^{N_t} W)^T \right\} d\alpha \quad (\text{A2})$$

$\langle \varphi \varphi^T \rangle$ (resp. $\langle nn^T \rangle$) are noted C_{φ} (resp. C_n) and defined as

$$C_{\varphi} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1 \varphi_1^T \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \varphi_j \varphi_j^T \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \varphi_{N_t} \varphi_{N_t}^T \rangle \end{pmatrix} C_n = \begin{pmatrix} \langle n_1 n_1^T \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle n_i n_i^T \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \langle n_{N_{gs}} n_{N_{gs}}^T \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{A3})$$

which can be seen as a N_t layer (resp. N_{GS} GS) turbulent (resp. noise) covariance matrix. Note that each $\langle \varphi_j \varphi_j^T \rangle$ is the Kolmogorov covariance matrix defined for the j^{th} layer. Note that we have assumed that all the turbulent layers

are statistically independent²¹ as well as the noise on each GS measurements. Finally, the criterion to be minimized with respect to \mathbf{W} is

$$\begin{aligned} \epsilon = & \int_{\{\alpha\}_{fov}} \text{trace} \left\{ \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} \mathbf{C}_{\varphi} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_t})^T + \mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}} \mathbf{W} \mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \mathbf{C}_{\varphi} (\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t})^T \mathbf{W}^T (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}})^T \right. \\ & \left. - 2 \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} \mathbf{C}_{\varphi} (\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t})^T (\mathbf{W})^T (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}})^T + \mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}} \mathbf{W} \mathbf{C}_n (\mathbf{W})^T (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}})^T \right\} d\alpha \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Using the formulas of the matricial derivation described in the previous Section it comes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{W}} = & \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}} \mathbf{W} \mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \mathbf{C}_{\varphi} (\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t})^T - \right. \\ & \left. (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} \mathbf{C}_{\varphi} (\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t})^T + (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} \mathbf{W} \mathbf{C}_n \right) d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

where 0 is the null matrix (matrix with all elements equal to 0). Equation A5 leads to the final result:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = & \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}} d\alpha \right)^+ \left(\int_{\{\alpha\}_{fov}} (\mathbf{M}_{\alpha}^{N_{el}})^T \mathbf{M}_{\alpha}^{N_t} d\alpha \right) \\ & \mathbf{C}_{\varphi} (\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t})^T \left(\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t} \mathbf{C}_{\varphi} (\mathbf{M}_{N_{gs}}^{N_t})^T + \mathbf{C}_n \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

where \mathbf{A}^+ denotes the generalized inverse of the matrix \mathbf{A}

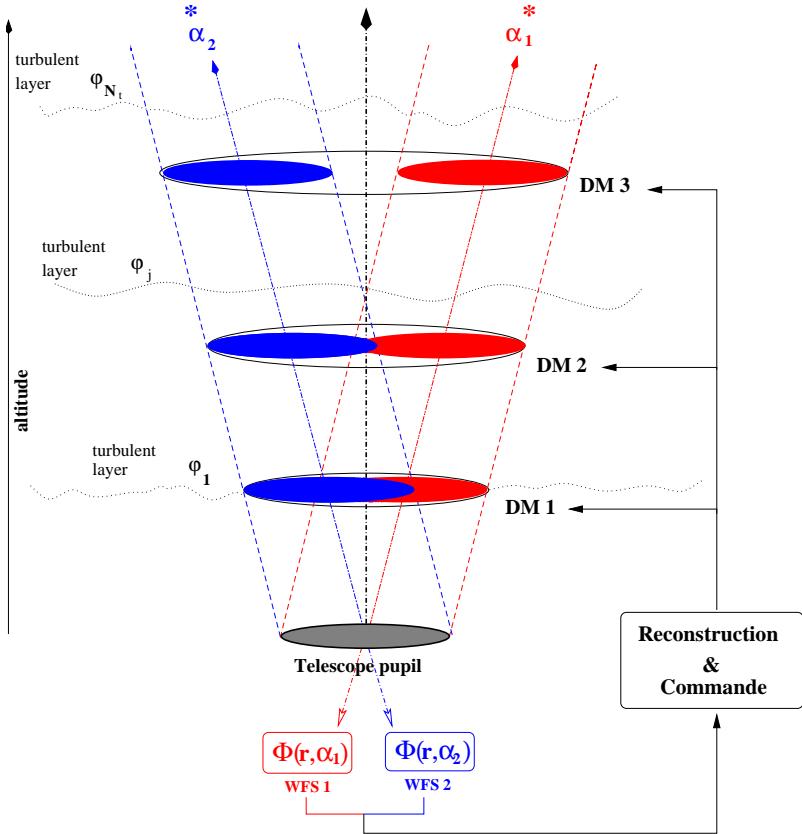


Fig. 1. Concept of a MCAO system. Several deformable mirrors are conjugated to different heights in the atmosphere. The wavefront analysis is made on several guide stars located in the field of view.

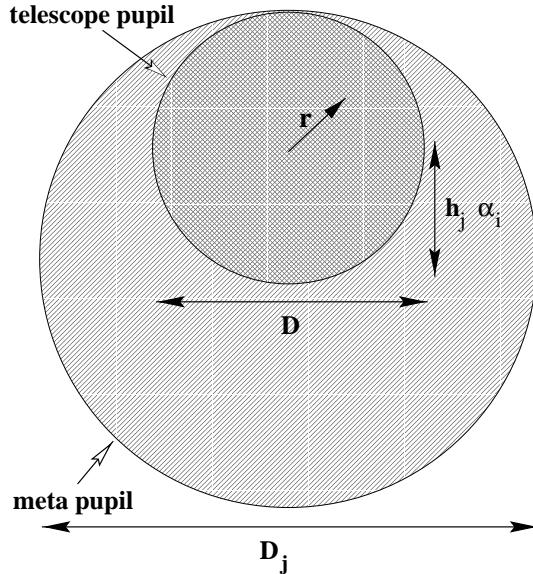


Fig. 2. Truncated part of the meta-pupil associated to the altitude h_j . The variable vector \mathbf{r} is defined on the telescope pupil. The zone of interest is centered on $h_j \alpha_i$.

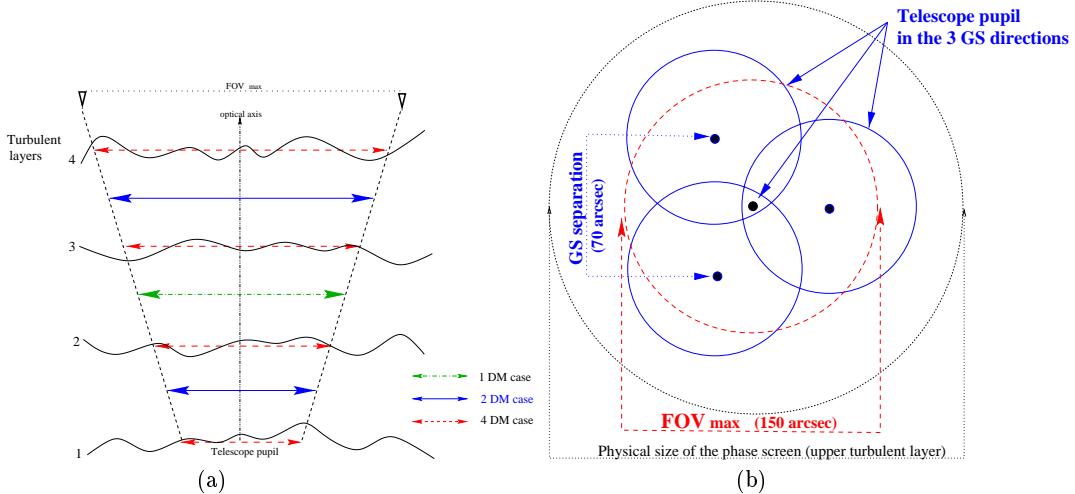


Fig. 3. (a) Turbulence (4 layers) and DM (1, 2 and 4) repartition for the four systems presented in Section 4B. (b) Geometrical repartition of the GS pupil projection and FOV on the highest layer ($h = 7.5$ km). The physical size of the DM is equal to the physical size of layers.

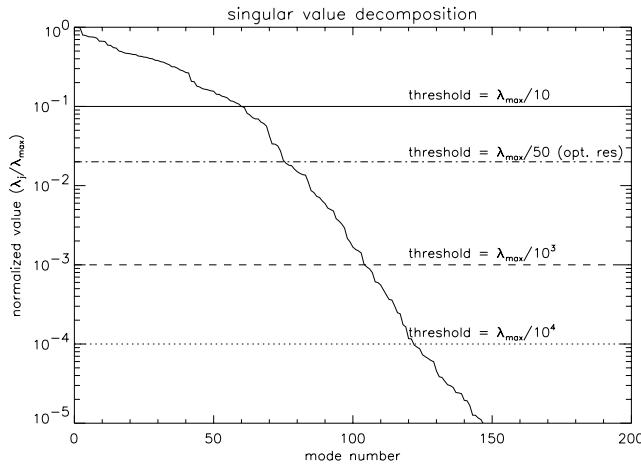


Fig. 4. Singular value of the systems versus mode number. The different considered thresholds are plotted.

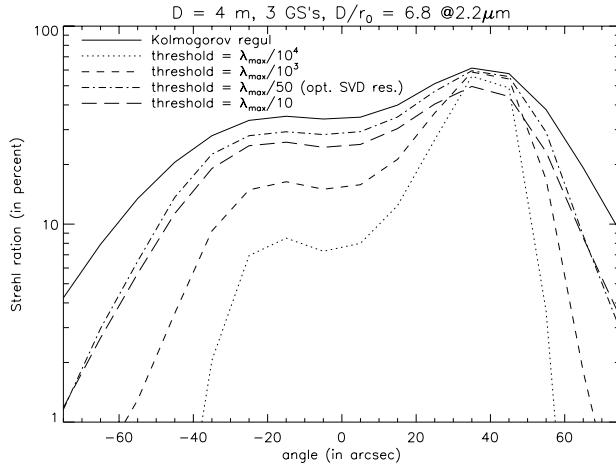


Fig. 5. Comparison between the Kolmogorov regularization [solid line] and a SVD using different thresholds. The Strehl Ratio versus the FOV position is plotted.

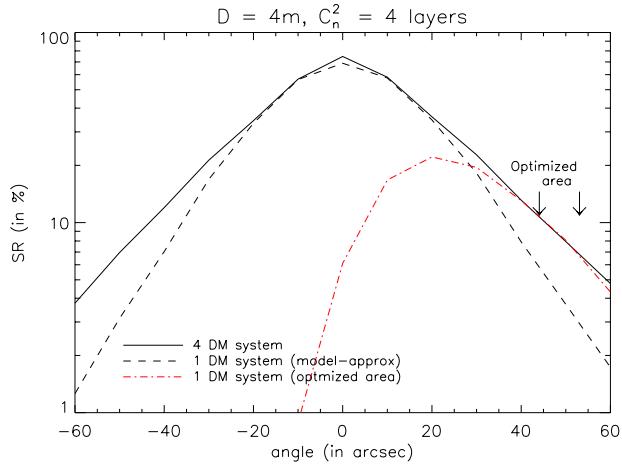


Fig. 6. Comparison of the optimal phase estimation and the model-approximation approaches in the case of a one GS (on the optical axis) and one DM (conjugated at 3.75 km) system. In each case a X-cut of the FOV is presented. These simulation are made for a 4 layer C_n^2 profile and a 4-m telescope. We plot the tomographic reconstruction (4 DM's located on each turbulent layer) for comparison.

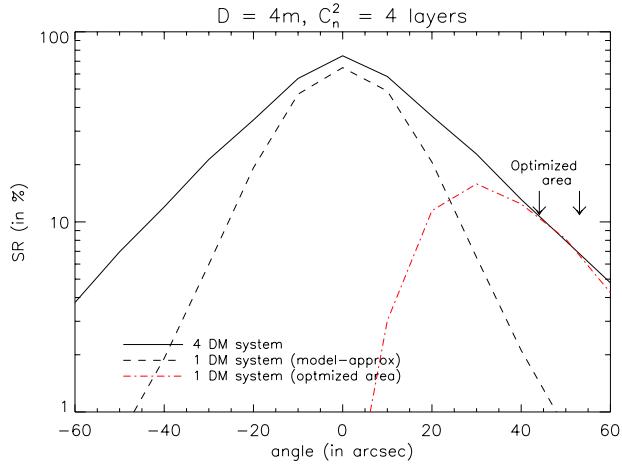


Fig. 7. Comparison of the optimal phase estimation and the model-approximation approaches in the case of a one GS (on the optical axis) and one DM (conjugated at 6.5 km) system. Note that the DM is mis-placed in regards of the C_n^2 profile. In each case a X-cut of the FOV is presented. These simulation are made for a 4 layer C_n^2 profile and a 4-m telescope. We plot the tomographic reconstruction (4 DM's located on each turbulent layer) for comparison.

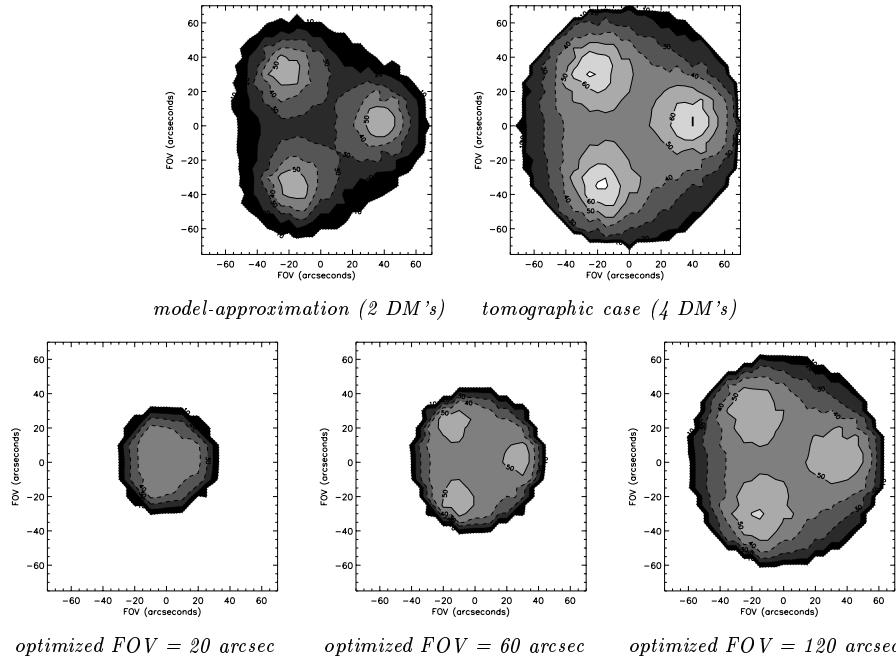


Fig. 8. Upper figures: comparison of iso-SR maps between the model-approximation approach (2 DM's) and the tomographic case (4 DM's). Lower figures: iso-Strehl maps computed using the optimal approach in the case of a 2 DM's and 3 GS's system (case c). 3 optimized FOV's are considered : 20, 60 and 120 arcseconds. Note that, in all maps only $SR \geq 10\%$ are plotted.

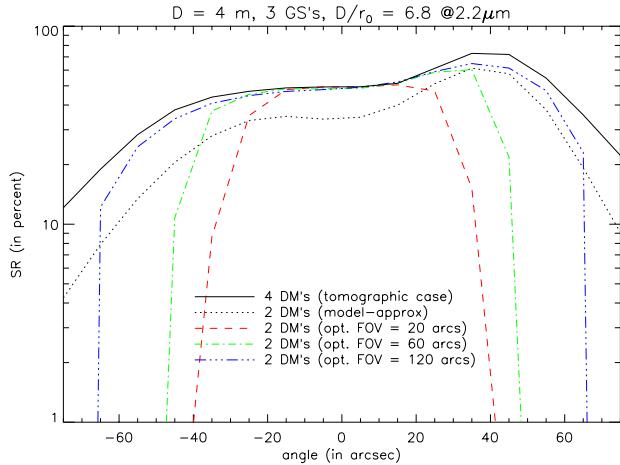


Fig. 9. Comparison of the optimal and the model-approximation approach for two DM's and a 4 layer atmospheric profile. The FOV of interest are for the optimal approach 20 [-], 60 [..] and 120 [-...-] arcsec. The model-approximation approach (in which the results are independent of a given FOV) is plotted in dotted line. The tomographic phase estimation (4 DM's in the 4 turbulent layers) is plotted [solid line] for comparison. All these curves are in fact a X cut (at Y=0) of each corresponding iso-Strehl map presented above.

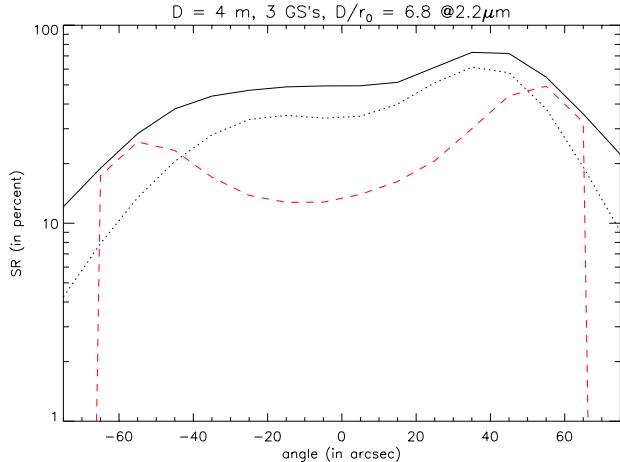


Fig. 10. Comparison of the optimal [dashed line] and the model-approximation approach [dotted line] for two DM's and a 4 layer atmospheric profile. The FOV of interest is for the optimal approach two area of 5 arcsec diameters located at -60 and 60 arcsec. The tomographic phase estimation (4 DM's in the 4 turbulent layers) is plotted [solid line] for comparison.

1. J. W. Hardy, J. E. Lefebvre, and C. L. Koliopoulos, "Real time atmospheric compensation," *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 360–369 (1977).
2. G. Rousset, J.-C. Fontanella, P. Kern, P. Gigan, F. Rigaut, P. Léna, C. Boyer, P. Jagourel, J.-P. Gaffard, and F. Merkle, "First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics," *Astron. Astrophys.* **230**, 29–32 (1990).
3. *Adaptive Optics in Astronomy*, F. Roddier, ed., (Cambridge University Press, 1999).
4. D. L. Fried, "Anisoplanatism in adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 52–61 (1982).
5. F. Chassat, "Calcul du domaine d'isoplanétisme d'un système d'optique adaptative fonctionnant à travers la turbulence atmosphérique," *J. of Optics (Paris)* **20**, 13–23 (1989).
6. T. Fusco, J.-M. Conan, L. Mugnier, V. Michau, and G. Rousset, "Characterisation of adaptive optics point spread function for anisoplanatic imaging. Application to stellar field deconvolution," *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **142**, 149–156 (2000).
7. R. H. Dicke, "Phase-contrast detection of telescope seeing and their correction," *Astron. J.* **198**, 605–615 (1975).
8. J. M. Beckers, "Increasing the size of the isoplanatic patch with Multiconjugate Adaptive Optics," in *Very Large Telescopes and their Instrumentation*, ESO Conference and Workshop Proceedings pp. 693–703 (Garching Germany, 1988).
9. R. Ragazzoni, "No Laser Guide Stars for adaptive optics in giant telescopes?," *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **136**, 205–209 (1999).
10. T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. Mugnier, and G. Rousset, "Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics," *Opt. Lett.* **24** (1999).
11. T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. M. Mugnier, and G. Rousset, "Phase estimation for large field of view: application to multiconjugate adaptive optics," in *Propagation through the Atmosphere III*, 3763 (Denver, CA (USA), 1999).
12. T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, G. Rousset, and L. Mugnier, "Isoplanatic angle and optimal guide star separation for multiconjugate adaptive optics," in , (Munich, Germany, 2000).
13. A. Tokovinin, M. Le Louarn, and M. Sarazin, "Isoplanatism in multi-conjugate adaptive optics system," *J. Opt. Soc. Am. A* (submitted).
14. M. Le Louarn, N. Hubin, M. Sarazin, and A. Tokovinin, "New challenges for Adaptive Optics: Extremely Large Telescopes," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* (submitted).
15. B. L. Ellerbroek, "First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation

- in extended-field-of-view astronomical telescopes,” J. Opt. Soc. Am. A **11**, 783–805 (1994).
16. M. Tallon, R. Foy, and J. Vernin, “3-d wavefront sensing for multiconjugate adaptive optics,” in *Progress in Telescope and instrumentation technologies*, ESO Conference and Workshop Proceedings pp. 517–521 (Garching Germany, 1992).
 17. D. C. Johnston and B. M. Welsh, “Analysis of multiconjugate adaptive optics,” J. Opt. Soc. Am. A **11**, 394–408 (1994).
 18. R. Flicker, F. Rigaut, and B. Ellerbroek, “Comparison of multiconjugate adaptive optics configurations and control algorithms for the Gemini-South 8-m telescope,” in , (Munich, Germany, 2000).
 19. M. Tallon and R. Foy, “Adaptive telescope with laser probe: isoplanatism and cone effect,” Astron. Astrophys. **235**, 549–557 (1990).
 20. R. Ragazzoni, E. Marchetti, and F. Rigaut, “Modal tomography for adaptive optics,” Astron. Astrophys. **342**, L53–L56 (1999).
 21. F. Roddier, “The effects of atmospherical turbulence in optical astronomy,” *Progress in Optics*, E. Wolf, ed., (North Holland, Amsterdam, 1981), Vol. XIX, pp. 281–376.
 22. G. Rousset, “Wavefront sensing,” in *Adaptive Optics for Astronomy*, pp. 115–137 (Cargèse, France, 1993).
 23. H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1968).
 24. E. P. Wallner, “Optimal wave-front correction using slope measurements,” J. Opt. Soc. Am. A **73**, 1771–1776 (1983).
 25. A. Fuchs, M. Tallon, and J. Vernin, “Focusing on a turbulent layer: Principle of the “Generalized SCIDAR”,” *pasp* 110 (1998).
 26. R. J. Noll, “Zernike polynomials and atmospheric turbulence,” J. Opt. Soc. Am. **66**, 207–211 (1976).
 27. B. McGlamery, “Computer simulation studies of compensation of turbulence degraded images,” in *Image processing*, **74**, 225–233 (1976).
 28. J.-M. Conan, L. M. Mugnier, T. Fusco, V. Michau, and G. Rousset, “Myopic Deconvolution of Adaptive Optics Images using Object and Point Spread Function Power Spectra,” Appl. Opt. **37**, 4614–4622 (1998).
 29. L. M. Mugnier, C. Robert, J.-M. Conan, V. Michau, and S. Salem, “Regularized multiframe myopic deconvolution from wavefront sensing,” in *Propagation through the Atmosphere III*, 3763 (Denver, CA (USA), 1999).
 30. G. Herriot, S. Morris, S. Roberts, M. Fletcher, L. Saddlemyer, J.-P. Singh, G. and Veran, and E. Richardson, “Innovations in the Gemini Adaptive Optics System Design,” in *Adaptive Optical System Technologies*, D. Bonaccini and R. K. Tyson, eds., pp. 488–499 (Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Kona, Hawaii, 1998).
 31. Wetter, “Derivative operation on matrices,” in *IEEE Trans. Autom. Control*, **15**, 241–244 (1970).

1.5 conclusion

J'ai présenté dans ce chapitre une étude portant sur la reconstruction de front d'onde à grand champ appliquée à la commande spatiale des miroirs déformables d'un système d'optique adaptative multiconjuguée.

Dans un premier temps, une reconstruction tomographique du volume turbulent est proposée (reconstruction de chaque couche turbulente). Un estimateur utilisant une approche de type Maximum *A Posteriori* (MAP) a été obtenu. L'intérêt de cet estimateur est l'utilisation de connaissances *a priori* (connaissances statistiques) sur la phase dans le volume de turbulence. Ces connaissances permettent de régulariser le problème inverse et d'obtenir de bien meilleurs résultats qu'une inversion de type moindres carrés classique. Cette approche tomographique est ensuite étendue, grâce à la notion de "couches équivalentes" à des cas réalistes où le nombre de MD est bien inférieur au nombre de couches turbulentes. Cette extension permet d'étudier l'efficacité de la correction en fonction du nombre de miroirs déformables ainsi qu'en fonction du nombre de directions d'analyse. Le résultat majeur de ces études est que pour des télescopes de la classe des 10 mètres, avec 2 miroirs déformables on obtient une correction uniforme dans le champ (quelques dizaines de fois supérieures au domaine isoplanétaire classique) au prix d'une légère perte en qualité de correction, et qu'avec 3 miroirs la correction est non seulement uniforme mais quasiment optimale. De plus, l'utilisation de l'approche MAP et donc l'introduction d'*a priori* sur la phase permet de réduire le nombre d'étoiles guides nécessaires à une bonne inversion du problème. Ainsi, 3 étoiles réparties dans un champ de 200 secondes d'arc permettent une correction quasiment uniforme pour un télescope de 8 mètres et un profil de type Cerro Paranal.

Dans un deuxième temps, une approche plus optimale du problème de la commande spatiale des MD pour un système d'OAMC est proposée. Cette approche est basée, non plus sur la correction du volume de turbulence, mais sur un critère plus en rapport avec la finalité de l'optique adaptative qui est la minimisation de la variance résiduelle sur la pupille du télescope, et ce, pour un ensemble de directions d'intérêts dans le champ. Je montre les liens existant entre l'approche tomographique et cette approche optimale. Cette dernière permet un gain notable en qualité de correction dans les cas où le nombre de miroirs déformables est faible et pour des champs de vues raisonnables lorsque le profil de C_n^2 est connu. L'intérêt majeur de cette approche optimale est de pouvoir spécifier les zones du champ pour lesquelles on désire que la variance résiduelle soit minimale (c'est-à-dire que la correction soit optimisée). On peut ainsi effectuer la mesure de front d'onde sur un très grand champ pour augmenter le nombre d'étoiles d'analyse mais uniquement optimiser la correction pour certaines portions de ce champ (zones comportant les objets d'intérêts). Alors, avec deux, voire un seul miroir (si les objets d'intérêts sont peu étendus), on peut atteindre, sur ces portions du champ, une qualité de correction quasiment identique à celle d'un système ayant autant de miroirs que de couches turbulentes.

Bien évidemment, pour connaître précisément le profil de turbulence l'utilisation d'un SCIDAR couplé avec le système d'OAMC semble nécessaire. Ce genre de dispositif nécessite l'emploi d'un télescope d'au moins un mètre de diamètre et d'étoiles doubles suffisamment séparées et brillantes. Ainsi, la connaissance en "quasi temps réel" du profil de turbulence n'est pas assurée sur tous les sites. Si seule une connaissance très partielle du profil de turbulence est disponible, on pourra se contenter d'utiliser l'approche tomographique couplée avec la notion des couches équivalentes.

Chapitre 2

Erreurs de reconstruction en OAMC : problème des modes mal mesurés

2.1 Introduction

Au chapitre précédent j'ai présenté deux types d'approches permettant de reconstruire la phase résultante pour un grand champ de vue :

- une approche déterministe que je qualifierais de "classique" reposant sur une estimation au sens des moindres carrés (MC) et une décomposition en valeurs singulières tronquées (TSVD) pour éviter l'amplification du bruit;
- une approche probabiliste dans laquelle les connaissances *a priori* tant sur le bruit que sur la phase sont utilisées pour régulariser le problème. Deux estimateurs suivant cette approche probabiliste ont été obtenus. Il s'agit de l'estimateur tomographique MAP (voir paragraphe 1.3), et de l'estimateur MMSE $_{\alpha}$ minimisant la variance résiduelle sur la pupille pour un champ donné (voir paragraphe 1.4).

Par définition, l'approche probabiliste est optimale puisque minimisant en moyenne la variance résiduelle sur les grandeurs d'intérêts (le volume de turbulence pour la tomographie, la phase résultante sur la pupille du télescope dans un champ donné pour l'estimateur MMSE $_{\alpha}$). Hélas, la mise en œuvre de tels reconstructeurs s'avère délicate et l'on se heurte à de nombreux problèmes tel la précision de modélisation du système, la connaissance du profil de C_n^2 mais aussi la gestion des problèmes liés à la boucle fermée. Il est alors essentiel de quantifier le gain apporté par une approche probabiliste dans le cas de la reconstruction de la phase sur un grand champ et tout particulièrement d'étudier et de bien comprendre les effets de la régularisation dans le processus de reconstruction et son influence sur la qualité de correction. Pour simplifier l'étude, je vais supposer dans ce paragraphe que le nombre de miroirs est égal au nombre de couches. Dans ce cas, comme on l'a vu au paragraphe 1.3, les deux approches sont équivalentes.

Aux paragraphes 2.2 et 2.3 une présentation des différents problèmes liés à la mesure est proposée. L'accent est mis sur les modes mal mesurés par un système d'OAMC et sur leur importance dans l'erreur de reconstruction. Au paragraphe 2.4, des formules analytiques de l'erreur de reconstruction dans le cas de l'estimateur MC et de l'estimateur optimal (obtenu au paragraphe 1.3.1) sont proposées. Ces dernières vont permettre une analyse modale de la reconstruction. On pourra ainsi étudier finement et quantifier les erreurs introduites par les problèmes de mesures en OAMC. Une comparaison entre l'estimateur optimal et l'estimateur MC est ensuite proposée. Cette comparaison se fait en terme de qualité de reconstruction (critère global portant sur la reconstruction du volume turbulent) et

de qualité de correction (variance résiduelle de la phase résultante sur la pupille du télescope pour différentes directions). Les formules analytiques obtenues dans ce chapitre sont utilisées au paragraphe 2.5 pour étudier l'influence du nombre et de la distance entre étoiles guides tant sur la qualité globale de reconstruction que sur la qualité de correction dans le champ. Enfin, au paragraphe 2.6 un résumé des différents apports d'une régularisation basée sur les connaissances *a priori* de la statistique de la phase turbulente est présenté.

2.2 Problème des modes mal mesurés par le système

Intéressons nous tout d'abord au problème de la mesure en OAMC. Comme on l'a vu précédemment la mesure se fait dans la pupille du télescope pour différentes directions. On rappelle que les mesures sont données par l'équation (voir paragraphe 1.2) :

$$\Phi^m = \mathbf{M}_{tot} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B} \quad (2.1)$$

où Φ^m contient l'ensemble des mesures de la phase résultante dans les différentes directions d'analyse et \mathbf{M}_{tot} la matrice d'interaction du système. La matrice $\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot}$ caractérise alors la mesure (dans le volume de turbulence) du système d'OAMC. Cette matrice se diagonalise dans la base des modes propres du système :

$$\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot} = \mathbf{U} \mathbf{L} \mathbf{U}^T \quad (2.2)$$

les colonnes de \mathbf{U} représentent les modes propres de la phase dans le volume de turbulence et la matrice diagonale \mathbf{L} contient les valeurs propres associées à chacun de ces modes. Ces valeurs propres donnent la sensibilité du système aux modes propres. Les valeurs propres très faibles (resp. nulles) correspondent à des modes mal (resp. pas) mesurés. La particularité de ces modes mal mesurés, comme on le verra par la suite, et de "contenir" une part non négligeable de la variance turbulente ce qui rend le processus de reconstruction délicat.

2.3 Quels sont les modes mal ou pas mesurés ?

L'origine de ces modes mal ou pas mesurés est double comme le montre la figure 2.1. Ce schéma de principe fait ressortir les deux problèmes de mesure rencontrés en OAMC. Il y a bien sûr les zones du volume de turbulence qui ne sont pas "vues" par les analyseurs (due au faible nombre d'étoiles guides). L'influence de ces zones non vues a déjà été estimée par une approche analytique simple (basée sur des calcul de surface) au paragraphe 1.3.5. En plus de ces zones non vues certains modes propres pourtant vus par le système, ne sont pas mesurés par ce dernier. Ces modes sont ceux dont la somme des composantes des différentes couches turbulentes donnent une phase résultante égale à une constante dans la pupille du télescope. Ceci est illustré sur le schéma 2.1. La somme des composantes sur les deux couches du mode propre représenté donne une phase constante sur la pupille pour les deux directions d'analyse. Le système de mesure est donc insensible à ce mode.

Pour mettre en évidence les problèmes liés aux modes mal mesurés par un système d'OAMC, un exemple simple est considéré. Il s'agit d'un profil turbulent à deux couches (situées à 0 et 10 km et de force égale). Le système est composé de deux miroirs déformables conjugués dans chacune des couches turbulentes. Le diamètre du télescope est de 4 mètres. Les conditions de turbulence sont résumées dans le tableau 2.1. L'analyse se fait dans 2 directions. La séparation entre les 2 étoiles guides est de 80 secondes d'arc. Ces dernières se situent de part et d'autre du centre du champ. Le rapport signal à bruit de chaque analyseur est de 10 (soit une magnitude par étoile guide d'environ 13).

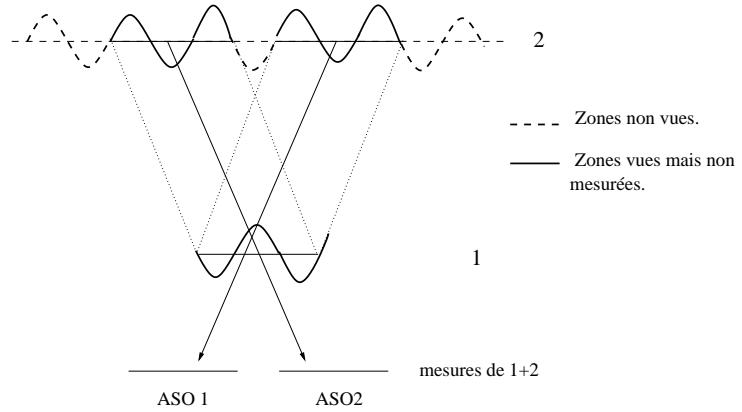


FIG. 2.1 – Exemple de mode non mesuré par le système : [trait plein] portion du mode vu mais non mesuré, [tiret] portion du mode non vu par les analyseurs.

Paramètres atmosphériques :	C_n^2	$r_0 @ 0.5\mu m$	$r_0 @ 2.2\mu m$	$\theta_0 @ 0.5\mu m$	$\theta_0 @ 2.2\mu m$
	2 couches	0.1 m	0.59 m	1 arcsec	5.7 arcsec

TAB. 2.1 – Résumé des paramètres atmosphériques utilisés pour les simulations numériques présentées dans ce chapitre. D/r_0 à la longueur d'onde d'imagerie est égal à 7. La première couche turbulente est sur la pupille, la seconde est à 10 km. La turbulence est équi-répartie sur les 2 couches. Le paramètre θ_0 est l'angle isoplanétique défini au sens de Fried.

Le premier miroir corrige 65 polynômes de Zernike, le deuxième 235 polynômes. Le système global contient donc 300 modes de correction. De plus, dans la suite du chapitre le nombre de modes utilisé pour décrire la turbulence dans chaque couche turbulente sera supposé identique à celui utilisé pour la corriger. Ainsi les problèmes liés à la sous modélisation de la turbulence par le système correcteur ne seront pas considérés ici. Seules les erreurs liées à la mesure et à la reconstruction seront prises en compte.

On trace, en figure 2.2 la sensibilité (valeurs propres) des modes propres de correction du système. Ces valeurs propres sont rangées par valeurs décroissantes. On remarque qu'un certain nombre de ces valeurs propres sont très faibles. Le système sera donc très peu sensible aux modes propres qui leurs sont associés. Un exemple de mode non mesuré est présenté en figure 2.3. Je représente sur cette figure les cartes de phase dans les deux miroirs du système pour le mode propre numéro 284. Comme on le voit sur la figure 2.3, les deux directions d'analyse donnent un piston et toute une partie du mode de la haute couche n'est pas vue par le système. Il est donc impossible de mesurer ce mode. Cette très faible sensibilité vis-à-vis de certains modes propres du système va entraîner des problèmes de reconstruction.

Ces problèmes vont être d'autant plus limitant que la variance turbulente associée à ces modes non mesurés va être importante. En effet, ces modes étant difficiles à reconstruire (car mal voire pas mesurés), la présence d'énergie turbulente (basses fréquences spatiales) sur ces modes va entraîner une erreur de reconstruction élevée.

Il est donc essentiel de connaître la répartition de la variance turbulente sur les modes propres du système. Cette dernière est présentée en figure 2.4 en ayant classé les modes dans le même ordre que dans la figure 2.2, c'est-à-dire par valeurs propres décroissantes. Elle est obtenue en exprimant la matrice de covariance du volume de turbulence (définie en équation 1.18) dans la base des modes

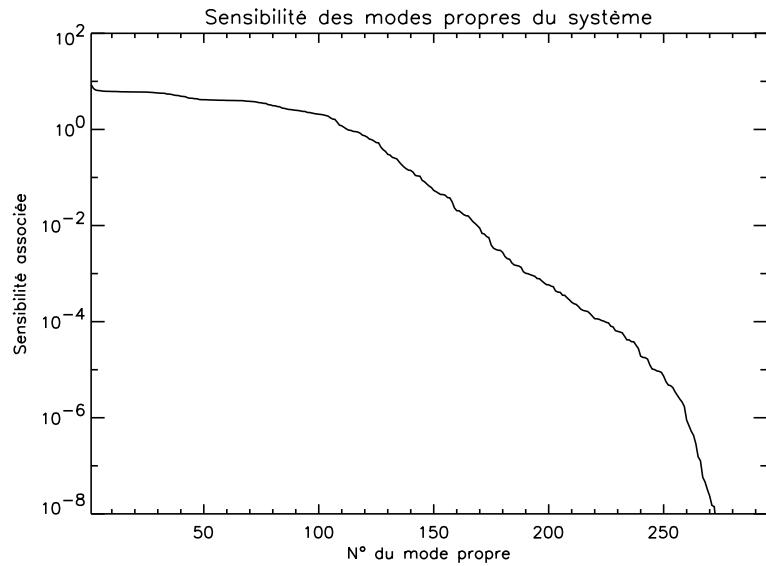


FIG. 2.2 – Évolution de la sensibilité des valeurs propres du système (cas 2 étoiles guides) .

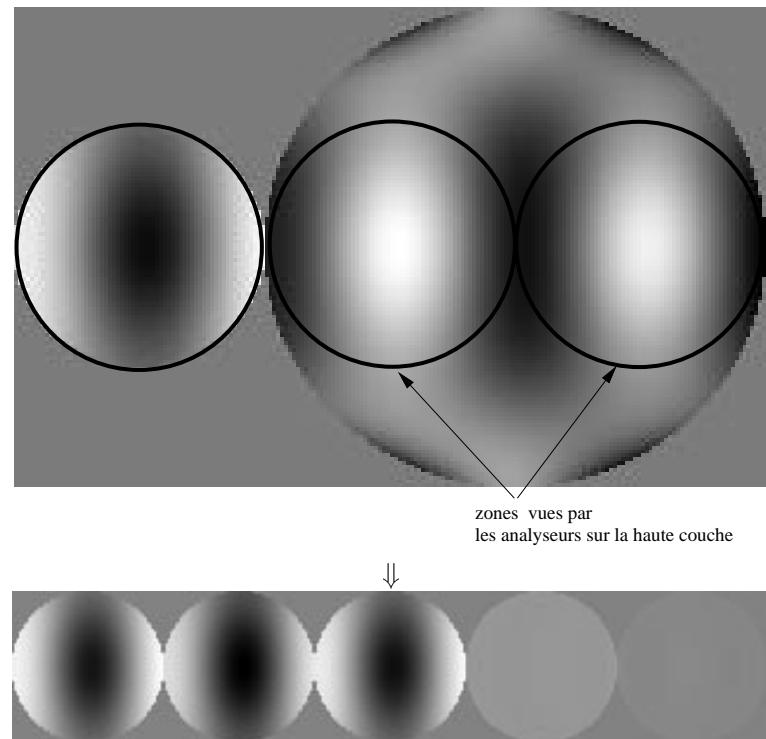


FIG. 2.3 – En haut: exemple de mode propre ayant une valeur propre quasi-nulle. On trace les composantes de ce mode sur la basse couche (écran de phase de gauche) et sur la haute couche (écran de phase de droite). En bas: on représente, de gauche à droite la phase dans la couche du bas, les inverses des portions de phases analysées dans la couche du haut et les mesures obtenues sur la pupille du télescope dans les deux directions. On remarque que les phases résultantes dans les 2 directions sont des constantes (piston) et donc que la mesure est nulle.

propres \mathbf{U} :

$$\mathbf{C}_{kol,m p} = \mathbf{U}^T \mathbf{C}_{kol} \mathbf{U} \quad (2.3)$$

On s'aperçoit alors qu'une partie non négligeable de la turbulence est contenue dans les modes que

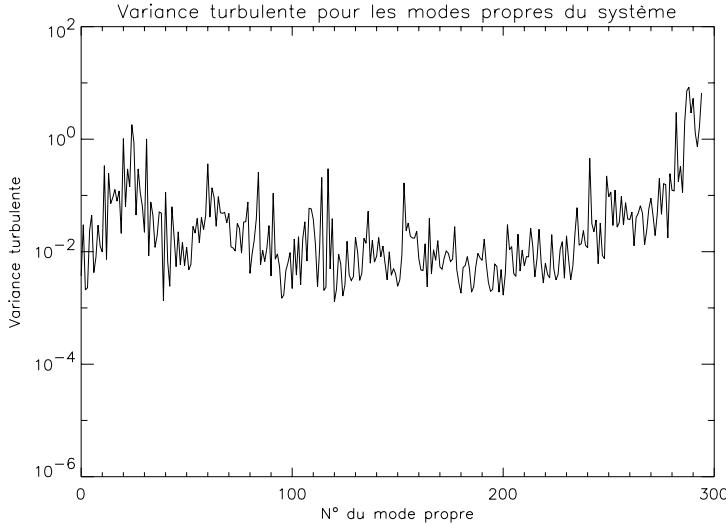


FIG. 2.4 – Distribution de la variance turbulente sur les modes propres du système. Les conditions de turbulence sont celles résumées dans la table 2.1. Les variances sont données en rad^2 .

le système est incapable de mesurer. Cette “turbulence non mesurée” risque donc de jouer un rôle prépondérant dans l’erreur finale de reconstruction de la phase pour un grand champ.

2.4 Erreurs liées aux modes non vus

Il s’agit à présent de quantifier l’erreur introduite par ces modes mal mesurés dans la reconstruction de la phase et d’étudier comment ce problème de mesure est géré par les deux méthodes de reconstruction proposées (MC et MAP). Pour étudier et comparer ces deux estimateurs on va définir deux critères de qualité.

- une qualité de reconstruction (définie en équation 2.4), c’est-à-dire la capacité des reconstructeurs à corriger le volume de turbulence dans son ensemble (reconstruction au mieux de chaque couche turbulente)
- une qualité de correction (définie au paragraphe 2.4.3), c’est-à-dire leur capacité à corriger au mieux la phase résultante sur la pupille du télescope pour un ensemble de directions dans le champ.

Le premier critère de qualité va nous permettre, aux paragraphes 2.4.1 et 2.4.2 de bien comprendre comment les deux reconstructeurs gèrent les problèmes liés aux modes non vus. On pourra alors quantifier les erreurs introduites par chacun des modes du système et comprendre pourquoi le reconstructeur MAP donne de bien meilleurs résultats que le reconstructeur MC

le deuxième critère permettra, au paragraphe 2.4.3, de quantifier et de comparer les performances des deux reconstructeurs en terme d’imagerie (c’est-à-dire de variance résiduelle sur la pupille du télescope pour les directions d’intérêt).

Concentrons nous, dans un premier temps, sur la qualité de reconstruction. Cette dernière va être caractérisée par une variance résiduelle de phase globale dans le volume, ce qui correspond à la somme des variances résiduelles sur chaque couche (pour chaque couche la variance résiduelle est calculée sur le support maximal défini par le champ de vue total) soit :

$$\sigma_{vol}^2 = \left\langle \|\boldsymbol{\varphi} - \hat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2 \right\rangle = \left\langle \text{trace} \left\{ (\boldsymbol{\varphi} - \hat{\boldsymbol{\varphi}})(\boldsymbol{\varphi} - \hat{\boldsymbol{\varphi}})^T \right\} \right\rangle = \text{trace} \left\{ \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}-\hat{\boldsymbol{\varphi}}} \right\} \quad (2.4)$$

où $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}-\hat{\boldsymbol{\varphi}}}$ est la matrice de covariance de l'erreur résiduelle de la phase dans le volume de turbulence.

En supposant que l'on se restreint à la classe des estimateurs de reconstruction \mathbf{R} linéaires, l'équation 2.4 se réécrit :

$$\sigma_{vol}^2 = \left\langle \text{trace} \left\{ (\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{R}\Phi^m)(\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{R}\Phi^m)^T \right\} \right\rangle \quad (2.5)$$

2.4.1 Cas des moindres carrés tronqués

Dans le cadre d'un estimation au sens des moindres carrés, $\mathbf{R} = (\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot})^\dagger \mathbf{M}_{tot}^T$ (voir équation 1.25), ainsi l'équation 2.6 devient

$$\begin{aligned} \sigma_{vol,mc}^2 &= \text{trace} \left\{ (\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot})^\dagger \mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{C}_n \left((\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot})^\dagger \mathbf{M}_{tot}^T \right)^T \right\} \\ &\quad + \text{trace} \left\{ \left((\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot})^\dagger \mathbf{M}_{tot}^T - \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_{kol} \left((\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{M}_{tot})^\dagger \mathbf{M}_{tot}^T - \mathbf{I} \right)^T \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

On remarque que cette expression est en tout point similaire à celle proposée en équation 3.21 de la première partie. On voit, encore une fois, apparaître le terme de propagation du bruit sur les modes corrigés (premier terme de l'équation 2.6 contenant la matrice \mathbf{C}_n) et le terme dû à la mise à zéro par la TSVD¹ des modes propres du système ayant des valeurs propres trop faibles (deuxième terme de l'équation 2.6 contenant la matrice \mathbf{C}_{kol}). Pour ce terme, l'erreur est donnée par l'énergie turbulente contenue dans chacun de ces modes.

La répartition de l'erreur sur les modes propres du système est présentée en figure 2.5. Deux exemples de troncature sont considérés :

- un seuil de troncature “optimal”, c'est-à-dire celui donnant l'erreur globale la plus faible;
- un seuil de troncature trop faible entraînant une propagation de bruit importante (supérieure à la variance turbulente) par les valeurs propres trop faibles.

Le comportement prévu par l'équation 2.6 est parfaitement retrouvé. Jusqu'à la troncature, la variance d'erreur sur un mode du système est donnée par la propagation du bruit, puis dès la troncature, l'erreur devient strictement égale à la variance turbulente présente sur les modes du système dont les coefficients sont mis à zéro par la TSVD. On voit, en particulier, l'importance du choix de la troncature. Si on tronque trop tôt, une grande partie de l'énergie turbulente ne sera pas corrigée et donc l'erreur de reconstruction sera importante. Si la troncature est effectuée pour un numéro de mode trop élevé, le bruit sera amplifié par les faibles valeurs propres du système et l'erreur de reconstruction va être amplifiée au point de devenir bien supérieure à la variance turbulente (on ne reconstruit plus, on dégrade). Il existe un seuil de troncature optimal qui va consister en un compromis entre le seuil de troncature et l'amplification du bruit.

L'évolution de l'erreur globale ($\sigma_{vol,mc}^2$) en fonction du seuil de troncature est présentée en figure 2.6. Le minimum de ces courbes nous donne le seuil de troncature optimum pour la méthode MC. Ce seuil va dépendre à la fois du système considéré (géométrie d'analyse, rapport signal à bruit sur

1. rappel : TSVD = décomposition en valeurs singulières tronquée.

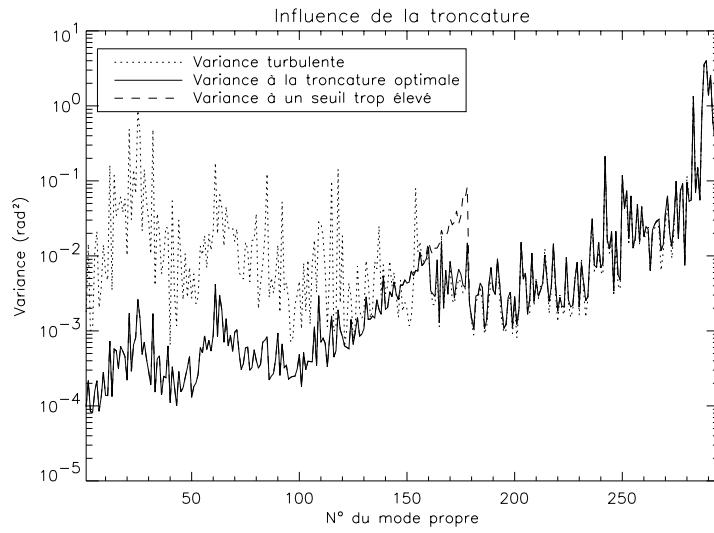


FIG. 2.5 – Répartition de l’erreur de reconstruction sur les modes du système pour une approche moindres carrés. Deux cas sont considérés : [trait plein] seuil de troncature “optimal” (162 modes utiles dans la reconstruction), [tirets] seuil de troncature trop élevé (180 modes utiles). La répartition de l’énergie turbulente sur chaque mode est tracée [pointillées] pour comparaison.

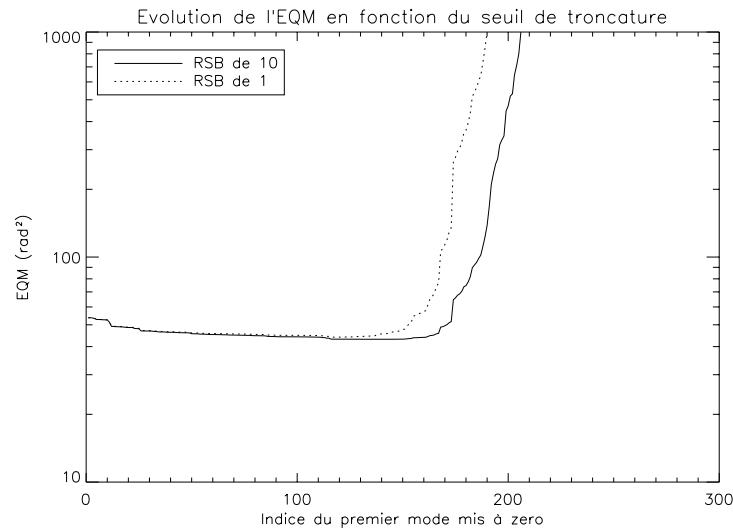


FIG. 2.6 – Évolution de l’erreur globale en fonction du seuil de troncature de la TSVD. Deux cas de rapport signal a bruit sont considérés : [trait plein] RSB = 10, [pointillés] RSB = 1.

les analyseurs, nombre de MD, nombre de modes du système ...) et du profil de turbulence (force et répartition de la turbulence dans les différentes couches).

Dans tous les cas, il est clair que l'utilisation d'une approche de reconstruction au sens des moindres carrés ne va pas résoudre les problèmes liés à la mauvaise mesure de certains modes propres du système. La troncature par TSVD va entraîner une erreur importante liée à l'énergie turbulente non prise en compte lors de la troncature de la SVD. La seule façon de résoudre le problème dans le cas de l'approche MC est d'augmenter le nombre de directions d'analyse pour augmenter la sensibilité des modes propres du système (plus on a de directions plus on a de diversité de mesures, moins on a de problèmes liés aux modes mal mesurés). Ceci est décrit sur la figure 2.7 où l'on trace la sensibilité des modes propres pour différentes géométries d'analyse. L'augmentation du nombre de directions d'analyse a deux effets :

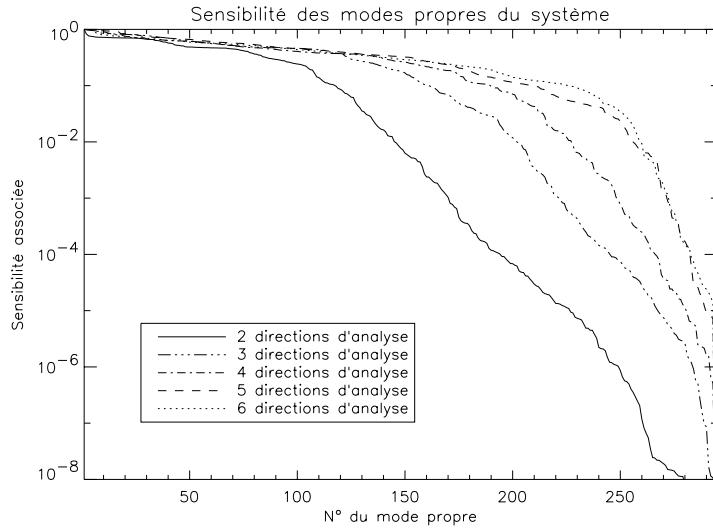


FIG. 2.7 – Évolution de la sensibilité des modes en fonction de la géométrie d'analyse.

- elle diminue la quantité de zones non vues dans le volume de turbulence;
- elle augmente la redondance des mesures dans les zones vues, ce qui diminue sensiblement les problèmes liés aux modes mal mesurés dans ces zones.

La nécessité d'un nombre de directions d'analyse important va d'être un handicap pour les systèmes d'OAMC. On va voir au paragraphe suivant que l'introduction d'*a priori* sur le volume de turbulence permet de résoudre en partie le problème des modes mal mesurés et de relâcher grandement les contraintes sur la position et le nombre d'étoiles guides.

2.4.2 Cas de l'approche optimale (MAP)

Dans le cas d'un estimateur pour la reconstruction de front d'onde issu d'une approche MAP, $\mathbf{R} = ((\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{M}_{tot}) + \mathbf{C}_{kol}^{-1})^{-1} \mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{C}_n^{-1}$ (voir équation 1.20), et le terme d'erreur devient :

$$\sigma_{vol, map}^2 = \text{trace} \left\{ \mathbf{C}_{kol} \left(\mathbf{I} - ((\mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{M}_{tot}) + \mathbf{C}_{kol}^{-1})^{-1} \mathbf{M}_{tot}^T \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{M}_{tot} \right) \right\}$$

La répartition de l'erreur sur les modes du système est donnée sur la figure 2.10. La variance de l'erreur reconstruite est, pour chacun des modes du système, toujours inférieure à la variance turbulente. En particulier, même les modes non mesurés sont reconstruits. Ceci peut paraître paradoxal mais se comprend facilement en étudiant attentivement les *a priori* (matrice de covariance de la phase)

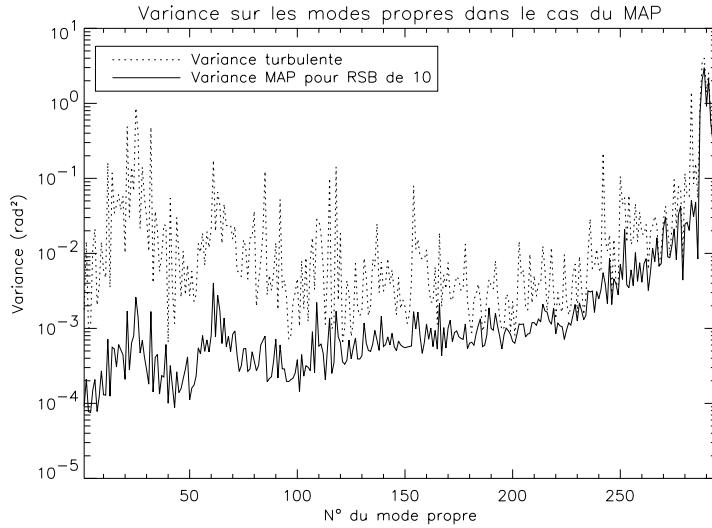


FIG. 2.8 – Répartition de l’erreur de reconstruction sur les modes du système pour une approche MAP (trait plein). La répartition de l’énergie turbulente sur chaque mode est tracée [pointillées] pour comparaison.

introduits dans l’approche MAP. Pour cela, il faut exprimer la matrice de covariance de la phase dans les deux couches turbulentes (méta-matrice \mathbf{C}_{kol} définie en équation 1.18) sur la base des modes propres du système. Cette matrice est présentée en figure 2.9. On remarque immédiatement que cette matrice est loin d’être diagonale et que de nombreuses corrélations existent entre les différents modes propres du système. La colonne correspondant aux corrélations avec le mode numéro 284 est tracée en figure 2.3 . On s’aperçoit que ce mode est très corrélé avec de nombreux autres et en particulier des modes à fortes valeurs propres, donc bien mesurés par le système (corrération de l’ordre de 50 à 60 % pour certains).

L’introduction de la régularisation par la matrice de covariance de la phase dans l’approche MAP permet donc, à partir de ces corrélations, d’extrapoler la valeur d’un mode peu ou pas mesuré par le système à partir des modes qui lui sont corrélés. Ainsi, pour le mode numéro 284, on passe d’une variance turbulente de 0.16 rad^2 à une variance après reconstruction de 0.05 rad^2 . On voit apparaître ici tout l’intérêt de l’introduction d’*a priori* sur le volume turbulent en guise de régularisation. Non seulement cela règle le problème du choix du seuil de troncature de la TSVD présent dans l’approche MC, mais surtout, l’existence de corrélations importantes de la phase exprimée dans la base des modes propres du système permet d’extrapoler une grande partie des modes mal ou pas mesurés. On introduit ainsi un gain notable en terme de qualité de reconstruction pour un système donné.

2.4.3 Comparaison des deux estimateurs

Comme on vient de le voir, les corrélations entre modes turbulents exprimés dans la base propre du système permettent de résoudre en grande partie le problème des modes mal mesurés en OAMC en extrapolant ces derniers à partir des modes effectivement mesurés. Il s’agit à présent de quantifier ce gain vis-à-vis de l’approche MC. Cette quantification peut se faire

- soit de manière globale, en terme de qualité de reconstruction vis-à-vis du volume (en l’occurrence des deux couches) de turbulence;
- soit sur la pupille, en terme de qualité de correction pour une direction d’observation donnée.

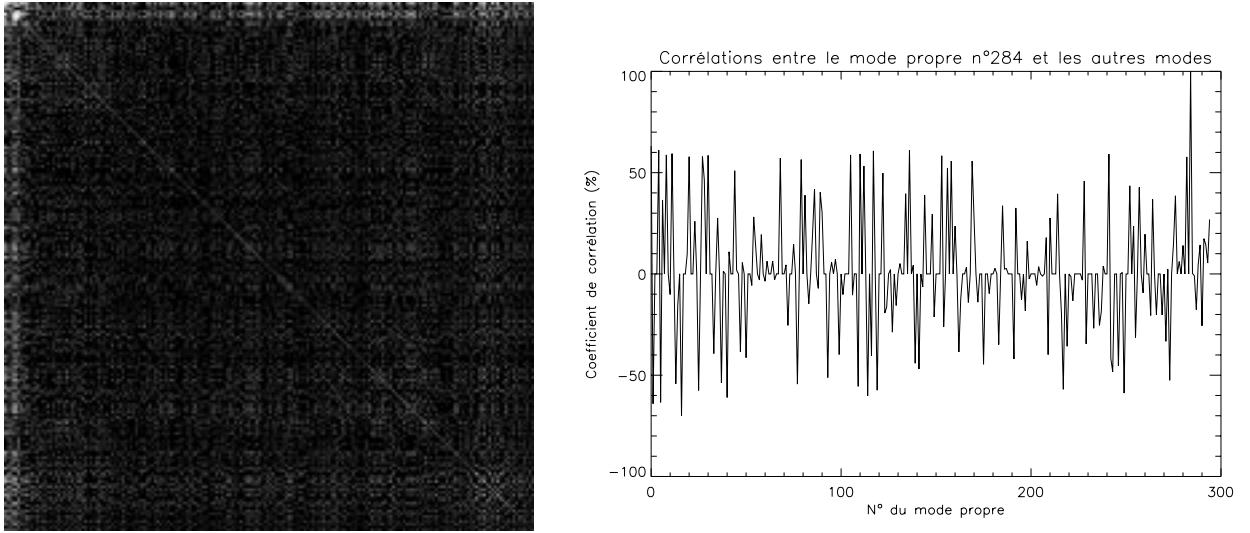


FIG. 2.9 – *A Gauche : Matrice de covariance de la phase turbulente exprimée dans la base des modes propres du système. La diagonale correspond à la variance de la phase turbulente sur chacun des modes (voir figure 2.4). A droite : corrélation du mode numéro 284 avec les autres modes. On remarque l’importance des corrélations entre modes (le pic de corrélation à 100% correspond à la variance du mode 284 et se trouve sur la diagonale de la matrice de gauche).*

Gain en qualité de reconstruction

On trace en figure 2.10 la répartition de l’erreur de reconstruction du volume de turbulence (ici nos deux couches) sur chacun des modes propres du système dans le cas de l’approche MC et dans le cas de l’approche MAP. On remarque que pour les modes ayant un bon rapport signal à bruit l’erreur de reconstruction est sensiblement identique pour les deux approches, le terme dominant dans l’estimateur MAP étant alors un terme moindres carrés sur les données (voir équation 1.13). Rapidement, l’erreur de reconstruction obtenue par le MAP devient inférieure à celle des MC. Au niveau du premier mode tronqué, la variance d’erreur du MC devient égale à la variance turbulente, alors que le MAP, grâce aux corrélations entre modes continue à estimer en grande partie la phase turbulente présente dans ces modes.

Intéressons nous à présent à l’erreur globale de reconstruction. Cette dernière est simplement donnée par la somme des variances de chacun des modes. Cette erreur, que l’on va exprimer en rad^2 est une variance résiduelle calculée pour l’ensemble du volume turbulent². Ainsi, on a une variance turbulente égale à 55 rad^2 . L’erreur de reconstruction par MC est de 43.1 rad^2 et l’erreur de reconstruction par MAP de 26.2 rad^2 , soit près d’un facteur 2 en terme de gain! Bien sûr ces erreurs semblent énormes en terme de variance, mais n’oublions pas qu’elles sont calculées en volume et ne sont pas représentatives en terme d’imagerie. Dans ce cadre là, le critère de qualité pertinent doit être défini vis-à-vis de la variance résiduelle de la phase résultante sur la pupille du télescope pour une direction donnée. Un tel critère de qualité pourra alors nous permettre d’étudier et de comparer l’évolution de la qualité de correction dans le champ pour les deux types de reconstructeurs.

2. Le volume turbulent est défini pour un télescope de 4 mètre et un champ de 80×80 arcsec. Il est composé de 2 couches turbulentes (0 et 10 km d’altitude). Le diamètre projeté sur la haute couche est alors de 8 mètres.

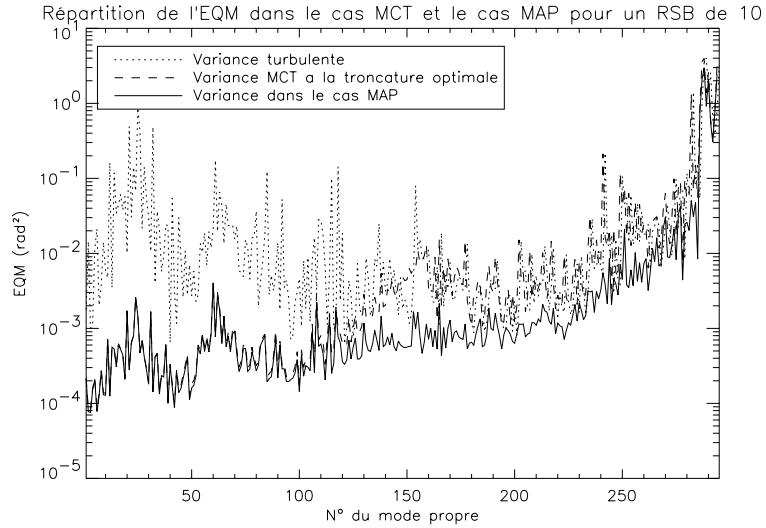


FIG. 2.10 – Comparaison entre MAP et Moindres carrés. Répartition de l'erreur de reconstruction sur les modes du système pour une approche MAP [trait plein] et moindres carrés [tirets]. La répartition de l'énergie turbulente sur chaque mode est tracée [pointillées] pour comparaison.

Gain en qualité de correction

Il s'agit ici d'étudier la variance résiduelle sur la pupille du télescope pour une direction α . Cette variance s'exprime en fonction de l'erreur de reconstruction dans le volume (définie en équation 2.4) de la façon suivante :

$$\sigma_{\alpha}^2 = \text{trace} \{ \mathbf{M}_{\alpha} \mathbf{C}_{\varphi-\varphi} \mathbf{M}_{\alpha}^T \} \quad (2.7)$$

On trace en figure 2.11 l'évolution de cette variance résiduelle dans le champ en fonction de deux directions :

- une direction suivant l'axe des deux étoiles guides³;
- une direction perpendiculaire à la précédente.

Je rappelle que les conditions de turbulence sont celles présentées dans la table 2.1, le diamètre du télescope est de 4 mètres, et le rapport signal à bruit sur chaque analyseur de 10. La variance résiduelle est minimum, pour les deux reconstructeurs, dans les directions d'analyse (voir courbe de gauche de la figure 2.11). De plus, la différence est faible, dans ces deux directions, entre l'approche MC et l'approche MAP. En effet, dans les directions de mesures, les modes non mesurés n'influent pas sur la qualité de correction (la contribution de ces modes correspond à un piston). La différence entre le MAP et le MC, vient seulement du débruitage qui est géré au mieux par le MAP. Par contre dès que l'on s'écarte des directions d'analyse, une différence sensible apparaît entre la qualité de correction obtenue dans le cas MAP et celle obtenue par les moindres carrés. Par exemple, on passe, au centre du champ, c'est-à-dire à égale distance (40 secondes d'arc) des 2 étoiles guides, de 0.9 rad^2 pour le MAP à 12 rad^2 pour les MC (pour comparaison la variance turbulente est de 26.3 rad^2). Dans le cas d'une direction perpendiculaire aux deux étoiles guides et passant par le centre du champ, la correction devient inopérante pour les moindres carrés (20 rad^2), tout en restant significative, bien que sérieusement dégradée (on passe de 0.26 rad^2 dans une direction d'analyse à 3 rad^2 pour la direction la plus éloignée des étoiles d'analyse), dans le cas du MAP.

3. Les 2 étoiles guides se trouvent en bordure de champ à ± 40 secondes d'arcs du centre du champ.

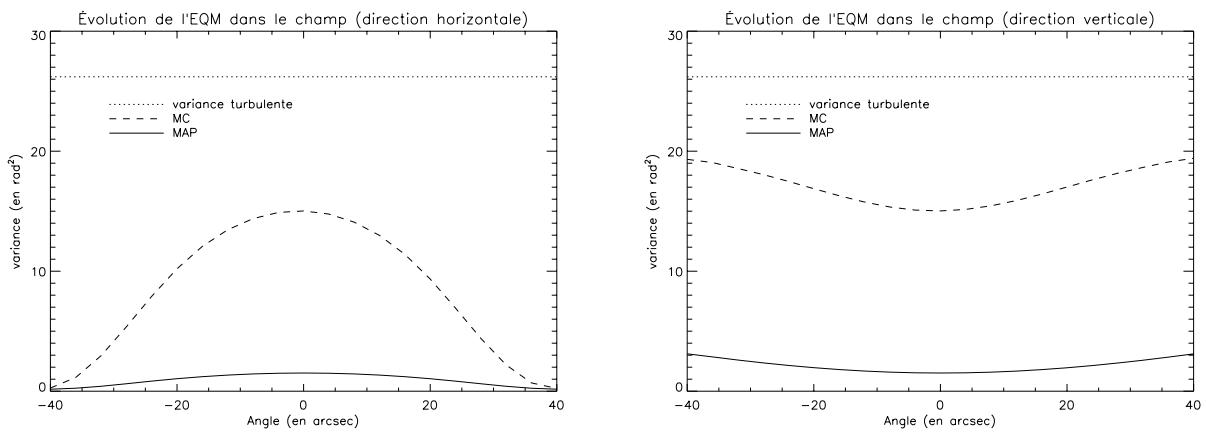


FIG. 2.11 – Comparaison entre le reconstructeur MAP [trait plein] et MC [tirets] pour 2 directions d’analyse. Une coupe en X (selon l’axe formé par les deux étoiles) et une coupe en Y (axe perpendiculaire au deux étoiles) sont considérées.

2.5 Utilisation des formules analytiques pour la définition de systèmes

Les formules analytiques établies au chapitre précédent permettent d'estimer la qualité de la reconstruction mais aussi de la correction en fonction du nombre et la séparation entre étoiles guides. On peut ainsi très simplement étudier les performances d'un système selon la méthode de reconstruction et les positions des étoiles guides utilisées. Inversement, les formules permettent, pour des performances spécifiées (uniformité de la correction dans le champ, rapport de Strehl maximum ...), de définir une configuration d'analyse. Je vais dans les trois paragraphes suivants, présenter quelques exemples d'applications des formules analytiques pour l'étude de configurations d'analyse pour un système d'OAMC. Je vais tenter de faire ressortir les deux points qu'il semble important de considérer lors de la définition d'un système : le nombre d'étoiles d'analyse et leur séparation angulaire.

2.5.1 Influence du nombre d'étoiles guides

Intéressons-nous, dans un premier temps, à l'influence du nombre d'étoiles d'analyse sur la qualité de correction. Cette étude reprend celle menée au chapitre précédent (dans la lettre présentée au paragraphe 1.3.3). Les études proposées dans la lettre étaient basées sur des simulations permettant de prendre en compte des effets fins tels que l'erreur de sous modélisation par exemple. Les formules analytiques présentées ici donne une estimation moins précise mais néanmoins suffisante pour permettre une première estimation de performances pour des systèmes d'OAMC.

Un exemple de résultat est présenté en figure 2.12. Le système et les conditions de turbulence sont toujours celles définies au début du chapitre et résumées dans la table 2.1. Seul le nombre d'étoiles guides varie ici. On considère quatre géométries différentes : 2, 3 4 et 5 étoiles guides. Le cas de deux étoiles a déjà été étudié au paragraphe 2.4.3, il n'est rappelé que pour comparaison. Pour les trois autres géométries, les étoiles guides sont situées au sommet d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de 80 secondes d'arc de diamètre (voir figure 2.12). Pour chacune des configurations on s'intéresse dans le cas MAP et dans le cas MC, à la qualité de reconstruction et à la qualité de correction.

L'évolution de la qualité de reconstruction (capacité à reconstruire le volume turbulent dans son ensemble) est résumée dans le tableau 2.2.

Configuration d'analyse	Cas MC - variance en rad^2 (troncature optimale)	cas MAP - variance en rad^2
2 étoiles	43.1 (162)	26.2
3 étoiles	36.9 (205)	24.1
4 étoiles	34.1 (239)	23.3
5 étoiles	32.7 (265)	22.5

TAB. 2.2 – *Évolution de l'erreur de reconstruction en fonction de la configuration d'analyse. Pour mémoire la variance turbulente dans le volume est de 55 rad². Les valeurs entre parenthèses représentent le nombre de modes non tronqué en MC pour chaque configuration (le nombre total de modes est de 295).*

L'évolution de la qualité de correction (capacité à reconstruire la phase sur la pupille dans différentes directions) est présentée en figure 2.12. Encore une fois, le gain sensible à utiliser l'approche MAP est démontré. Dans toutes les configurations d'analyse le gain MAP est important en terme de qualité de reconstruction et qualité de correction par rapport au MC. Si pour trois directions d'analyse la variance résiduelle de la phase résultante est inférieure à 1 rad² dans tout le champ dans le cas du MAP(voir figure 2.12) , il faut utiliser 5 directions pour obtenir une telle performance dans le cas du MC. Le nombre de directions d'analyse nécessaires à l'obtention d'une correction donnée sera plus important dans le cas de l'approche MC que dans le cas du MAP.

Il est intéressant de remarquer que si on continue à augmenter le nombre d'étoiles d'analyse dans le champ (6, 7, 8, 9, 10 et 20), la qualité de reconstruction, même dans le cas du MAP, ne va plus sensiblement évoluer (voir figure 2.13) et va saturer vers 21.5 rad². Dans le même temps, la qualité de correction, elle, continue à baisser. Pour 5 étoiles guides la qualité de correction moyenne dans le champ (moyenne sur toutes les directions du champ) est de 0.15 rad². Pour 10 étoiles guides, elle est de 0.05 rad² et pour 20 étoiles 0.02 rad². Ce gain en qualité de correction s'explique à la fois par la couverture de plus en plus complète du champ mais aussi par l'augmentation du nombre de mesures et donc du rapport signal bruit global du système (le RSB par analyseur reste lui égal à 10). Ainsi, malgré une erreur de reconstruction toujours importante et qui tend à saturer, la qualité de correction devient elle quasiment parfaite!

La saturation de l'erreur de reconstruction s'explique par la présence de modes non vus qui ne sont très mal reconstruits même par le MAP car peu corrélés avec d'autres (voir figure 2.9 où les 2 dernières lignes et colonnes de la matrice ne contiennent quasiment que des zéros). Ces modes sont des modes tip-tilt qui se compensent parfaitement entre les 2 couches turbulentes (voir figure 2.14).

Or si ces modes entraînent une limite à la reconstruction tomographique (21.5 rad² environ dans notre cas) ils ne sont pas importants en ce qui concerne la qualité de correction. En effet **quelle que soit la direction considérée** ces modes ne vont introduire qu'un piston sur la phase résultante. Ainsi malgré le biais introduit dans la reconstruction du volume de turbulence à cause des modes tip-tilt qui se compensent entre les différentes couches turbulentes, la qualité de correction, elle, peut être quasiment parfaite. La correction est indifférente à ces modes non mesurés et non reconstruits !

2.5.2 Influence de la séparation entre étoiles

Cette étude a déjà été menée, au chapitre précédent du point de vue purement géométrique en calculant des variances résiduelles sur les zones non vues par les analyseurs. L'utilisation des formules analytiques de l'erreur après reconstruction (voir équations (2.6 et 2.4.2) permet, ici, d'affiner

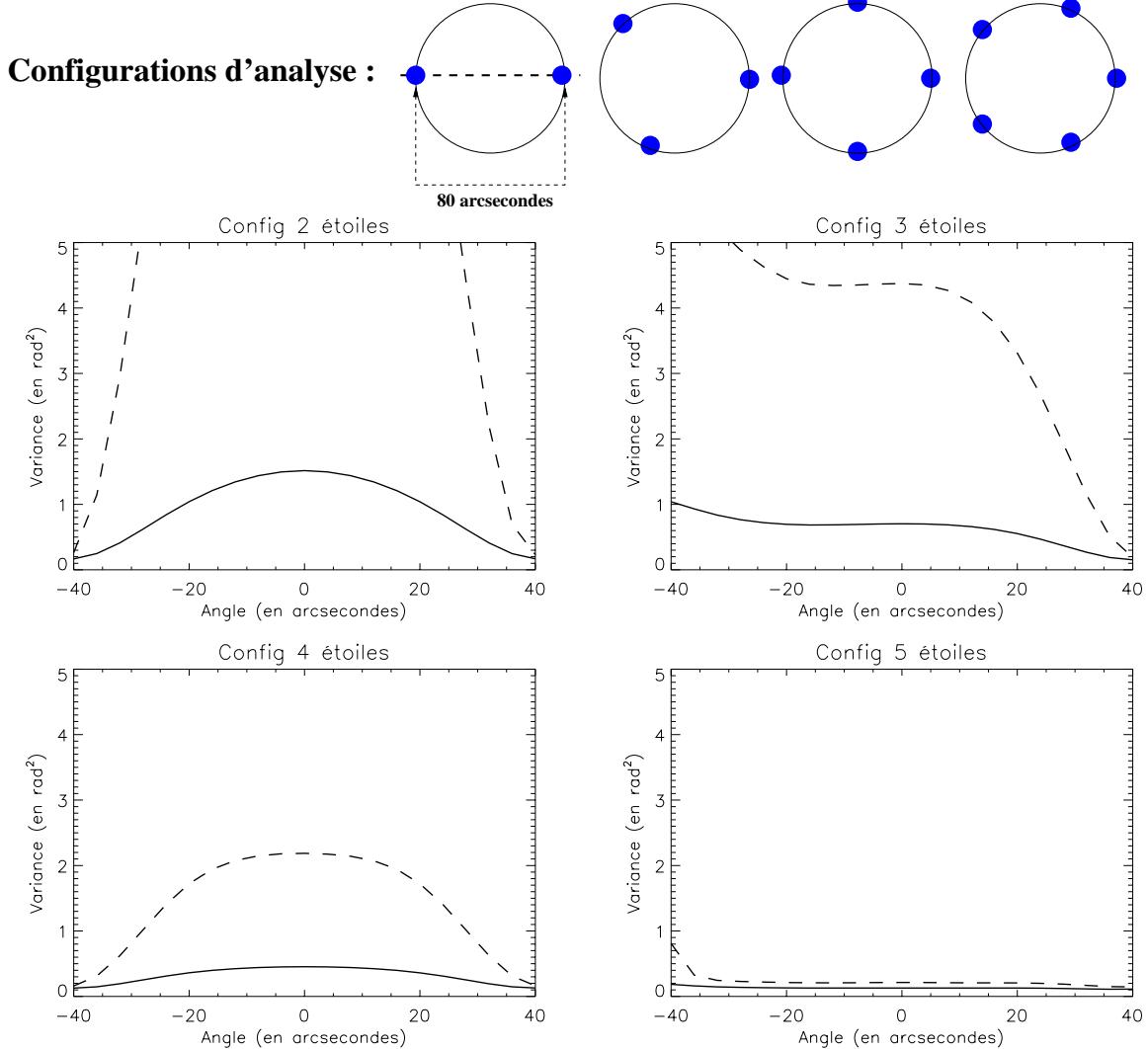


FIG. 2.12 – Figure du haut: différentes configurations pour les étoiles guides (2, 3 4 et 5 étoiles sont considérées). Figures du bas: Comparaison du reconstruteur MAP [trait plein] et MC [tirets] pour les différentes configurations d'analyse. Une coupe en X du champ est considérée (coupe selon une ligne dans le champ représentée par la ligne interrompue dans la figure du haut)

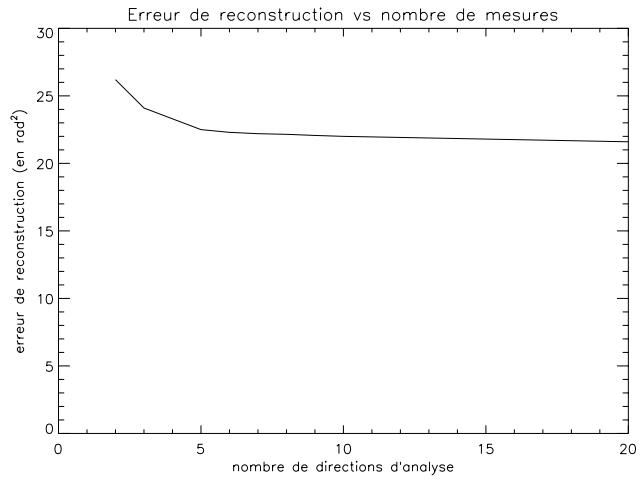


FIG. 2.13 – Évolution de la qualité de reconstruction en fonction du nombre de directions d'analyse. Le RSB par analyseur est de 10.

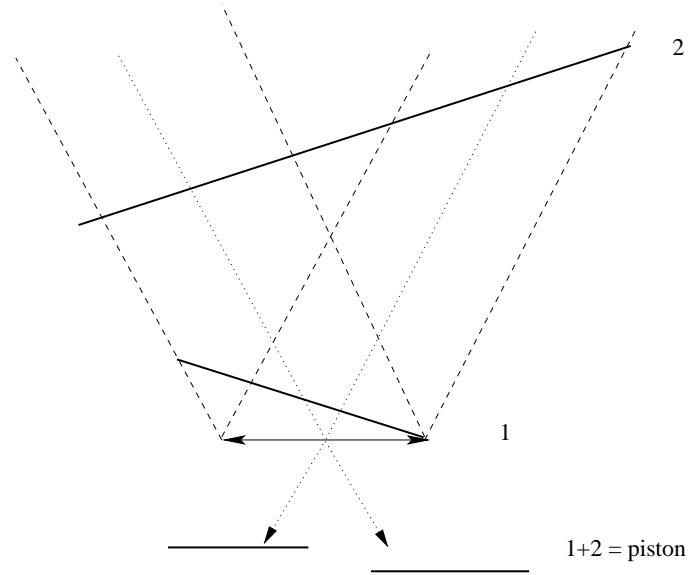


FIG. 2.14 – Illustration des modes tip-tilt non vus. Ces modes sont non vus quelle que soit la direction dans le champ.

les résultats obtenus précédemment. En effet, on est maintenant capable de prendre en compte les caractéristiques du système (rapport signal à bruit sur les analyseurs, nombre de modes corrigés fini, méthode de reconstruction qui permet ou non d'utiliser les corrélations de la phase turbulente ...).

Encore une fois on s'intéresse à la fois à la qualité de reconstruction et à la qualité de correction. Le système considéré comprend trois directions d'analyse (situées au sommet d'un triangle équilatéral) séparées d'une distance variable (voir figure 2.15). Le champ total d'intérêt est fixé, ici, à 150 secondes d'arc.

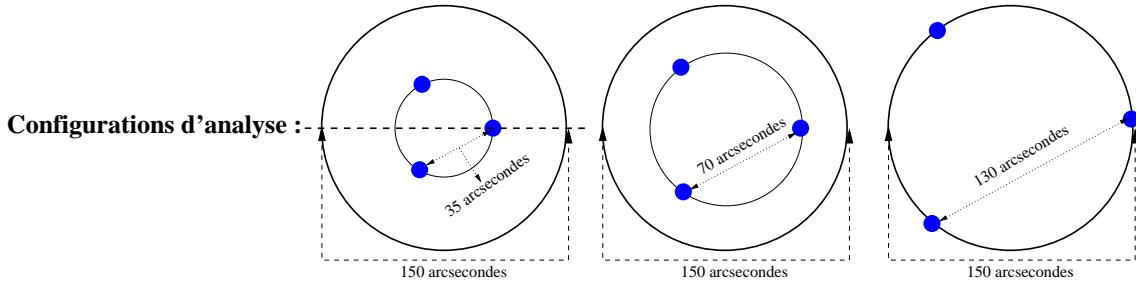


FIG. 2.15 – Réparation des étoiles guides dans le champ. Plusieurs séparations entre étoiles sont considérées.

Le tableau 2.3 relate l'évolution de la qualité de reconstruction en fonction de la distance entre étoiles guides. On s'aperçoit en particulier, que l'on passe par un minimum (tant en MAP qu'en

Séparation entre étoiles (arcsec)	35	70	104	130
MC (variance en rad^2)	44.8	43.2	46.6	47.0
MAP (variance en rad^2)	30.5	29.5	28.9	29.1

TAB. 2.3 – Évolution de l'erreur totale de reconstruction pour les reconstruteurs MAP et MC dans les différents cas de séparations. Le champ total est de 150 secondes d'arc

MC) qui permet ainsi de définir une séparation optimale en terme d'erreur de reconstruction globale. Comme prévu, le MC privilégie les petites séparations entre étoiles (optimum à 70 secondes d'arc de séparations plutôt que 104 pour le MAP).

Mais comme on l'a déjà souligné, la grandeur d'intérêt reste la qualité de correction dans le champ. On s'intéresse une fois de plus à la variance résiduelle dans la pupille pour une coupe selon X du champ de vue (voir figure 2.16). On remarque dans un premier temps que pour des séparations faibles (34 secondes d'arc), le recouvrement des zones mesurées dans la haute couche permet d'obtenir une variance résiduelle faible et uniforme sur un domaine d'environ 40 × 40 secondes d'arcs. Par contre, l'augmentation des zones non vues entraîne un variance résiduelle plus importante en bord de champ. Cette augmentation reste raisonnable dans le cas du MAP (la variance est inférieure à 2 rad^2 sur 2 × 2 minutes d'arc) grâce à l'utilisation de la matrice de covariance \mathbf{C}_{kol} qui permet une bonne extrapolation. Ce n'est pas le cas pour les MC où la variance croît de manière rédhibitoire dès que l'on s'éloigne des zones mesurées.

Quand on augmente la séparation entre étoiles on gagne globalement en correction dans le champ pour le MAP. La régularisation permet d'assurer une bonne correction pour un champ supérieur à 3 × 3 minutes d'arc pour 70 arcsec de séparation entre étoile (au prix d'une légère perte en qualité de correction au centre du champ). Un augmentation de la distance entre étoiles va dégrader de plus en plus la qualité de correction dans certaines directions du champ (notamment au centre) tout en améliorant celles en bord de champ. Ainsi le choix de la distance optimale entre étoiles guides sera

fortement lié au degré de correction désiré dans le champ et l'étendue de ce dernier. Si on définit un critère de correction minimale à 1 rad^2 par exemple, on obtient une séparation optimale pour 70 secondes d'arc et un champ bien corrigé de 120 arcsecondes.

Dans le même temps, les résultats obtenus avec les MC sont très peu satisfaisants. Dès que la séparation dépasse les 35 arcsec on se retrouve quasiment dans le cas d'OA classiques fonctionnant sur chacune des étoiles d'analyse.

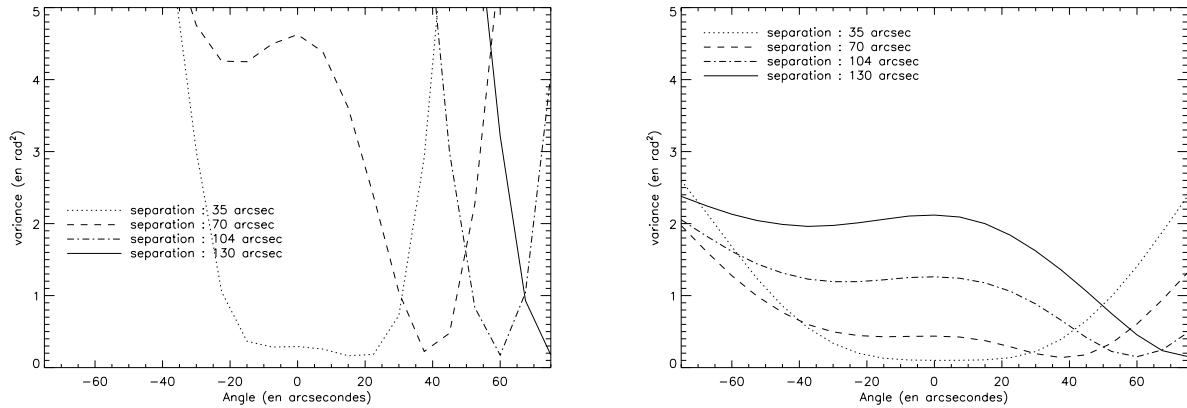


FIG. 2.16 – Évolution de la qualité de correction dans le champ pour les reconstruteurs MC et MAP dans le cas de trois étoiles pour différentes valeurs de séparations. Figure de gauche : cas MC. Figure de droite : cas MAP

2.6 Résumé des avantages d'une approche probabiliste

L'intérêt de l'utilisation d'une approche optimale basée sur l'introduction d'*a priori* sur la phase turbulente pour régulariser le problème peut se décomposer en trois points :

- L'ajout d'un terme de régularisation permet de s'affranchir des problèmes liés au choix du seuil de troncature dans le cadre d'une approche MC. Le contrôle de l'amplification du bruit se fait donc automatiquement et de façon optimale par l'utilisation de connaissances *a priori* sur le bruit et le volume de turbulence.
- La connaissance du profil de turbulence et en particulier du poids relatif de chacune des couches ($r_{0,j}$) permet d'aider le reconstructeur à affecter à chaque couche la phase reconstruite la plus probable.
- L'utilisation des corrélations de la phase turbulente décomposée sur les modes propres du système permettent de gérer au mieux (comme on vient de le voir dans ce chapitre) le problème des modes mal ou pas mesurés par le système OAMC.

Pour toutes ces raisons, l'utilisation d'une approche optimale de la reconstruction paraît nécessaire dans le cadre de l'OAMC. Bien sûr, une approche MC est toujours envisageable, mais au prix d'une augmentation de la complexité du système (nombre de miroirs, nombre de directions d'analyse).

2.7 Conclusion

J'ai présenté dans ce chapitre une étude analytique de l'erreur de reconstruction de la phase pour un système d'OAMC. Deux types de reconstructeur ont été considérés; un reconstructeur "classique"

basé sur une approche de type moindres carrés (MC) et un reconstructeur optimal (MAP) utilisant les connaissances *a priori* tant sur le bruit que sur le volume de turbulence. Le développement de formules analytiques m'a permis de quantifier le gain qu'apporte l'utilisation d'un reconstructeur optimal. L'étude de la mesure en OAMC et des problèmes qu'elle peut entraîner a permis de caractériser les modes propres mal (ou pas) mesurés par le système. Les effets de ces modes sur l'erreur de reconstruction et sur l'erreur de correction ont été quantifiés. Certains de ces modes peuvent être extrapolés (dans le cas du MAP) par l'intermédiaire de leur corrélations avec des modes bien mesurés. Ceci se fait grâce à la régularisation par la matrice de covariance de la phase dans le volume (dans le cas du MAP).

Ainsi, pour une configuration de système donné (nombre de miroirs, nombre de modes corrigés, nombre positions et magnitudes des directions d'analyse ...) l'utilisation d'un reconstructeur de type MAP va permettre un gain significatif en terme de qualité de correction dans le champ vis-à-vis d'une approche de type MC (même en optimisant le seuil de troncature). Dit autrement, pour atteindre des performances données, un système utilisant un reconstructeur de type MAP nécessitera un nombre et une séparation entre étoiles guides bien moindre qu'un système utilisant un reconstructeur MC. Du point de vue de la couverture du ciel, l'utilisation du MAP devrait étendre sensiblement les zones du ciel accessibles aux futurs système d'OAMC.

Les études menées dans ce chapitre montrent l'importance du choix d'une méthode de reconstruction optimisée lors de l'étude et de la conception d'un système d'OAMC. Ce choix sera un élément essentiel pour le dimensionnement mais aussi pour l'estimation des performances attendues. L'approche proposée dans ce chapitre, permet facilement de prédéfinir un système (en terme de nombre et position des directions d'analyse) en fonction des performances désirées et de l'approche de reconstruction considérée. Les développements présentés ici devraient, en outre, permettre la définition du nombre de modes optimal à considérer pour chaque MD.

De plus l'expression analytique des résultats permet de chiffrer rapidement et facilement les performances attendues pour un système donné. Il faut enfin noter que les études proposées dans ce chapitre ainsi que des compléments et une extension de ces dernières en utilisant un formalisme fondé sur une approche Fourier seront présentées sous la forme d'un article de conférence [Fusco-p-00d] à Barcelone en septembre 2000.

Pour finir, si l'utilisation d'une méthode de reconstruction régularisée utilisant les connaissances *a priori* sur le volume de turbulence semble le choix à considérer pour les futurs systèmes d'OAMC, il faudra pour rendre cette approche vraiment applicable la généraliser au cas d'un système fonctionnant en boucle fermée.

Conclusion

Bilan

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire avait pour but l'étude de solutions à apporter aux deux limitations majeures de l'optique adaptative que sont la correction partielle et l'anisoplanétisme. Pour ce faire mon travail a consisté en trois étapes essentielles dont rendent compte les trois parties du mémoire.

La première partie a été consacrée à l'analyse et l'étude statistique des différents phénomènes responsables de la dégradation des images corrigées par une optique adaptative. Les effets de répartition verticale de la turbulence sur les décorrélations angulaires des fronts d'ondes, responsables du phénomène d'anisoplanétisme, ont été étudiés. L'utilisation d'une décomposition modale de la phase et l'étude des courbes de corrélations des modes turbulents conduisent à la définition du concept de couches équivalentes qui traduit la très faible dépendance de la corrélation angulaire de la phase vis-à-vis du profil de turbulence.

Un des points clés de l'optique adaptative est la reconstruction de front d'onde et la commande spatiale du système. Une approche rigoureuse de la problématique de la reconstruction de front d'onde en OA a été proposée. L'utilisation d'un formalisme fondé sur la théorie du traitement du signal a permis de mettre en perspective les approches couramment utilisées et des approches plus optimales (bien que plus délicates à mettre en œuvre) de la reconstruction.

Le phénomène de correction partielle est dû à la persistance, après correction par le système d'OA d'une perturbation résiduelle qui vient dégrader l'image. Cette dégradation résiduelle limite la qualité de correction et donc la qualité des images obtenues derrière l'OA. Une étude statistique de la correction partielle a été effectuée à partir de formules analytiques rendant compte des fluctuations du rapport de Strehl d'images courte pose en fonction du degré de correction (nombre de modes corrigés, force de la turbulence). Cette étude a été étendue au cas d'une observation dans une direction différente de l'axe optique (définie comme la direction de l'analyse du front d'onde). Enfin, le cas des corrélations angulaires des images courte pose corrigées par OA a été étudié. Ces études ont permis la définition de domaines isoplanétiques dans le cas de l'imagerie courte pose après correction par optique adaptative.

La deuxième partie du mémoire a porté sur l'étude de techniques de traitement *a posteriori* à mettre en oeuvre derrière l'optique adaptative afin de s'affranchir des effets liés à la correction partielle et au phénomène d'anisoplanétisme. Dans un premier temps les images sont supposées être limitées au domaine isoplanétique. Dans le cadre d'une approche bayésienne des problèmes inverses, une méthodologie de la déconvolution d'images corrigées par OA a été développée. L'idée est d'utiliser toutes les connaissances *a priori* disponibles tant sur le bruit entachant les observations que sur l'objet observé lui-même, pour définir un critère global d'erreur qu'il s'agit de minimiser. Cette minimisation permet d'obtenir l'estimation la plus probable de l'objet d'intérêt observé compte tenue de l'image obtenue par l'OA. Les différentes statistiques des bruits présents sur l'image (bruit de photons, bruit de détec-

teur et bruit de fond de ciel) permettent de définir le meilleur terme d'attache aux données possible. Les connaissances *a priori* sur l'objet (objet lisse, à bords francs, champ d'étoiles ...) introduisent une régularisation du problème qui évite l'amplification du bruit mais aussi l'apparition d'artefacts tel que les effets de Gibbs habituellement observés dans les approches plus "classiques" de la déconvolution.

Une extension de l'approche bayesienne a été proposée pour gérer le cas d'une déconvolution où la Fonction d'Étalement de Point (FEP) est mal connue (ce qui est le cas le plus souvent rencontré en OA) : il s'agit de la déconvolution dite "myope". Dans cette approche on recherche conjointement l'objet et la FEP la plus probable connaissant l'image. Comme pour l'objet, la FEP est régularisée en utilisant les connaissances *a priori* disponibles sur sa variabilité durant les observations.

La prise en compte de tous ces points permet d'obtenir une estimation de l'objet bien plus précise (tant au niveau de la résolution angulaire qu'au niveau photométrique) que celles fournies par les méthodes de déconvolution classiquement utilisées en astronomie (Richardson-Lucy par exemple).

Tous ces développements théoriques, validés sur simulations ont ensuite été appliqués à des données réelles par l'intermédiaire d'un code de déconvolution appelé MISTRAL (Myopic Iterative STep-preserving Restoration Algorithm) mis au point conjointement par J.-M. Conan, L. Mugnier et moi-même. Grâce à de nombreuses collaborations, les résultats démonstratifs ont pu être obtenus sur des objets astronomiques. Ils font actuellement l'objet de nombreuses publications.

Pour des images à grand champ, l'évolution de la correction et donc de la FEP rend inapplicable les méthodes de déconvolution en l'état. Pour résoudre ce problème j'ai proposé une expression analytique de l'évolution de la FEP dans le champ. Cette expression ne dépend que du profil de turbulence et du degré de correction de l'OA. Elle a été validée sur simulations numériques et sur des données réelles obtenues sur télescope. L'introduction de cette connaissance dans un algorithme de traitement *a posteriori* de champs d'étoiles permet la restitution des paramètres de chaque étoile (position et magnitude) avec une très grande précision (supérieure à la limite de diffraction pour les positions et largement inférieure au pourcent pour les magnitudes) sur un champ de vue bien plus grand que le domaine isoplanétique.

La dernière partie du mémoire porte sur l'étude du concept de l'optique adaptative multiconjuguée (OAMC). L'idée de l'OAMC est d'utiliser plusieurs miroirs déformables conjugués à différentes altitudes pour s'affranchir des effets d'anisoplanétisme liés à la propagation du front d'onde dans le volume de turbulence. La commande de ces miroirs déformables s'effectue grâce à des mesures de front d'onde obtenues dans différentes directions réparties dans le champ d'intérêt. Cette commande spatiale des miroirs déformables est un des éléments clés des futurs systèmes d'OAMC. Pour obtenir une reconstruction efficace de la phase dans le champ deux types d'approches sont envisagées.

- La première, dite **approche tomographique**, a pour but de reconstruire la phase dans le volume de turbulence. Idéalement, avec ce type d'approche chaque couche turbulente doit être reconstruite. En pratique le nombre de couches turbulentes sera très supérieur au nombre de miroirs déformables. J'ai utilisé la notion de couches équivalentes pour modifier le problème direct et me ramener à un problème simplifié qu'il devient possible de traiter. La turbulence est alors supposée répartie sur les miroirs déformables. Pour résoudre ce problème, une approche de type maximum *a posteriori* (MAP) a été considérée. L'estimateur ainsi déduit assure que l'on obtiendra en moyenne une variance résiduelle minimale dans chaque couche équivalente (c'est-à-dire sur chaque miroir). L'intérêt majeur d'une telle approche est l'introduction de connaissances *a priori* sur le volume de turbulence (matrice de covariance de la phase dans chaque couche turbulente). Ces connaissances permettent de régulariser le problème en évitant ainsi l'amplification du bruit sans avoir recours à des techniques ad hoc de décomposition en valeurs singulières

tronqués. Mais ce n'est pas tout, la matrice de covariance de la phase dans chaque couche donne une information sur les corrélations spatiales du front d'onde. Elle permet ainsi d'extrapoler des zones du volume de turbulence non mesurées.

Le résultat majeur obtenu est que pour des télescopes de l'ordre de dix mètres de diamètre (ou moins) un faible nombre de miroirs déformables permet d'obtenir une très bonne reconstruction et donc une très bonne correction de la phase dans un grand champ. Ainsi deux miroirs offrent une correction quasi uniforme au prix d'une légère perte en rapport de Strehl alors que trois miroirs permettent d'obtenir une correction quasi-optimale dans un très grand champ de vue (plusieurs dizaines de fois supérieur au domaine isoplanétique classique). Ces résultats sont valables quel que soit le profil de turbulence considéré. Le champ de vue est alors typiquement de plusieurs minutes d'arc pour un télescope de 8 mètres fonctionnant à $2.2 \mu\text{m}$.

Un autre résultat important est le faible nombre de directions d'analyse nécessaires à une bonne reconstruction. En effet, l'utilisation de l'approche MAP et en particulier d'une régularisation utilisant la matrice de covariance de la phase permet une extrapolation de la phase dans des zones de turbulence non (ou mal) mesurées par les analyseurs. Un pavage serré du champ n'est pas nécessaire et seul un faible nombre de directions d'analyse suffit à obtenir une correction quasi uniforme dans un grand champ.

- Une deuxième approche plus optimale consiste à **minimiser la variance résiduelle dans la pupille du télescope pour une ensemble de directions d'intérêt dans le champ**. On peut grâce à cette approche spécifier les zones du champ pour lesquelles on désire que la correction soit optimisée. L'idée est de reconstruire globalement le volume de turbulence (cela suppose une connaissance précise du profil) puis de "projeter" le résultat sur le faible nombre de miroirs déformables à notre disposition. Cette "projection" va consister à répartir au mieux la phase de correction sur les différents miroirs pour minimiser la variance résiduelle dans les zones d'intérêt du champ.

On peut ainsi considérer un très grand champ pour augmenter le nombre d'étoiles guides pour l'analyse de front d'onde tout en optimisant la correction dans une zone du champ réduite où se trouve le (ou les) objet(s) d'intérêt. De plus, on peut avec deux, voire un seul miroir (si l'étendue angulaire de(s) l'objet(s) est raisonnable) obtenir une qualité de correction quasiment équivalente à celle d'un système ayant autant de miroirs que de couches turbulentes.

Cette approche optimale de la reconstruction de front d'onde permet d'augmenter la qualité de correction d'un système d'OAMC. Elle permet en outre de réduire encore les contraintes du système en terme de nombre de miroirs déformables et de directions d'analyse.

Perspectives

De nombreux résultats, présentés dans la thèse, loin de clore le sujet ouvrent plutôt de nouvelles perspectives et doivent entraîner de nouveaux travaux.

En ce qui concerne la première partie du mémoire, il s'agit de valider les formules analytiques proposées pour la statistique des images courte pose corrigées par OA sur des données provenant de véritables systèmes. Il s'agira alors d'introduire la correction partielle des premiers polynômes de Zernike (due à l'erreur de reconstruction) dans les formules analytiques. Les formules pourront ensuite être appliquées dans le cas de l'utilisation de l'OA en interférométrie (couplage dans une fibre optique) ou en spectroscopie (couplage dans une fente).

Suites aux premiers résultats fournis par MISTRAL de nombreuses données astronomiques sont actuellement en cours de traitement (Titan, Io, Vesta, Kleopatra pour ne citer que les principaux).

MISTRAL reste bien sur perfectible et de nouvelles améliorations sont en cours pour augmenter les performances de l'algorithme mais aussi pour rendre son utilisation plus facile et plus automatique. On peut ainsi songer à inclure dans MISTRAL l'algorithme de déconvolution de champ stellaires ainsi que l'utilisation des Fonctions de Transfert Anisoplanétiques pour lui permettre de traiter des images à grand champ.

Dans les années futures, la mise en service de l'optique adaptative du VLT (NAOS) ouvre tout un éventail de possibilités d'application pour un algorithme comme MISTRAL. Le traitement des données fournies par NAOS tant dans le domaine isoplanétique que sur un champ plus important devrait permettre d'améliorer significativement la qualité des images observées et d'augmenter le champ utile de l'instrument. Le couplage de NAOS et d'un logiciel comme MISTRAL devrait donner lieu à des résultats astrophysiques jamais atteints à ce jour.

A plus long terme, il semble que la multiconjugaison soit la solution à envisager pour les futurs systèmes d'optique adaptative à grand champ.

Dans le domaine de l'astronomie, l'augmentation des zones du ciel accessibles par l'OA ainsi que l'observation d'objets très étendus comme le soleil passent par l'utilisation de l'OAMC. Déjà, des projets sont à l'étude : l'optique adaptative multiconjuguée de Gemini sud mais un démonstrateur sur le VLT. Les travaux menés dans cette thèse devrait servir à la définition et au dimensionnement des futurs systèmes d'OAMC. Tous les résultats obtenus en ce qui concerne la reconstruction de front d'onde à grand champ pour l'OAMC sont très encourageants, en particulier en ce qui concerne la complexité des systèmes vis-à-vis des performances désirées. Toutefois ces travaux restent préliminaires et de nombreux problèmes sont encore à prendre en compte et à régler. Le principal étant la gestion de tous les aspects temporels qui n'ont pas été évoqués dans le mémoire. En particulier le comportement du système en boucle fermée doit être étudié avec attention.

Un peu en marge de l'OAMC, les travaux sur l'estimation optimale de front d'onde pourrait également servir dans le cadre de l'optique adaptative à grand champ du projet de spectrographe FALCON⁴.

La nécessité d'un grand champ corrigé se fait aussi cruellement sentir lors de l'observation sol-sol ou sol-air en condition de fortes turbulence. Dans de telles conditions, l'utilisation d'une OAMC devrait permettre, en plus d'une augmentation du champ par la correction des effets d'anisoplanétisme, de s'affranchir du moins en partie, d'un autre phénomène limitant qu'est la scintillation.

A très long terme, l'optique adaptative des futurs très grands télescope (100 mètres) sera, selon toute probabilité, une optique adaptative multiconjuguée. En effet, l'accès à un très grand champ corrigé sur de tels télescopes offre des capacités observationnelles exceptionnelles. Les premiers travaux sur le sujet viennent de débuter dans le cadre d'un réseau Européen d'échange initié par l'ESO. Les formules analytiques proposées dans le deuxième chapitre et l'étude des problèmes liés à la mesure en OAMC seront des contributions importantes à l'étude de ces futurs systèmes. Ces très grands télescopes devraient voir le jour dans quelques dizaines d'années du fait des nombreux développements technologiques encore requis.

Pour finir, on peut espérer à terme, un couplage entre une optique adaptative multiconjuguée fournissant des images partiellement corrigées dans un très grand champ de vue et les techniques de traitement *a posteriori* gérant l'évolution résiduelle de la FEP dans le champ. Ce couplage devrait

4. FALCON : Fiber-spectrograph with Adaptive-optics on Large-fields to Correct at Optical Near-infrared

permettre d'obtenir des images complètement corrigées des effets de la turbulence pour de très grands champs de vue.

*Il est difficile de dire ce qui est impossible,
car le rêve d'hier est l'espoir d'aujourd'hui et la réalité de demain.*

- Robert Goddard -

Annexe A

Calcul de la Fonction de Transfert Anisoplanétaire

Définissons la fonction de structure *anisoplanétaire* $D_{ani}(\mathbf{r}, \rho)$ comme suit :

$$D_{ani}(\mathbf{r}, \rho) = \left\langle [\Phi_{res,\alpha}(\mathbf{r}) - \Phi_{res,\alpha}(\mathbf{r} + \rho)]^2 - [\Phi_{res,0}(\mathbf{r}) - \Phi_{res,0}(\mathbf{r} + \rho)]^2 \right\rangle \quad (\text{A.1})$$

En faisant l'hypothèse de stationnarité [Conan-t-94], [Veran-t-97] on peut définir une fonction de structure indépendante de \mathbf{r} .

$$D_{ani}(\rho) = \frac{\int \left\langle [\Phi_{res,\alpha}(\mathbf{r}) - \Phi_{res,\alpha}(\mathbf{r} + \rho)]^2 - [\Phi_{res,0}(\mathbf{r}) - \Phi_{res,0}(\mathbf{r} + \rho)]^2 \right\rangle P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \rho)d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \rho)d\mathbf{r}} \quad (\text{A.2})$$

ou $P(\mathbf{r})$ est la fonction pupille. Il faut avoir conscience que cette hypothèse introduit une erreur qu'il faudra quantifier. Toutefois, dans [Conan-t-94] et [?] des calculs ont été effectués et ont démontré la bonne validité de cette hypothèse.

Soit, en décomposant le carré dans l'équation A.2:

$$D_{ani}(\rho) = \frac{\int [\langle \Phi_{res,\alpha}(\mathbf{r})^2 \rangle + \langle \Phi_{res,\alpha}(\mathbf{r} + \rho)^2 \rangle - \langle \Phi_{res,0}(\mathbf{r})^2 \rangle - \langle \Phi_{res,0}(\mathbf{r} + \rho)^2 \rangle] P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \rho)d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \rho)d\mathbf{r}} \quad (\text{I})$$

$$- \frac{\int 2 [\langle \Phi_{res,\alpha}(\mathbf{r})\Phi_{res,\alpha}(\mathbf{r} + \rho) \rangle - \langle \Phi_{res,0}(\mathbf{r})\Phi_{res,0}(\mathbf{r} + \rho) \rangle] P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \rho)d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \rho)d\mathbf{r}} \quad (\text{II})$$

(A.3)

On décompose la phase sur la base des polynômes de Zernike et on suppose une correction parfaite de J premiers polynômes sur axe :

$$\begin{aligned} \Phi_{res,0}(\mathbf{r}) &= \sum_{i=J+1}^{\infty} a_i Z_i(\mathbf{r}) \\ \Phi_{res,\alpha}(\mathbf{r}) &= \sum_{i=2}^J a_i(\alpha) Z_i(\mathbf{r}) + \sum_{i=J+1}^{\infty} a_i(\alpha) Z_i(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

soit

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{res},0}(\mathbf{r})^2 &= \sum_{i=J+1}^{\infty} \sum_{j=J+1}^{\infty} a_i a_j Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) \\ \Phi_{\text{res},\alpha}(\mathbf{r})^2 &= \sum_{i=2}^J \sum_{j=2}^J a_i(\alpha) a_j(\alpha) Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) + \sum_{i=J+1}^{\infty} \sum_{j=J+1}^{\infty} a_i(\alpha) a_j(\alpha) Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) \\ &\quad + 2 \sum_{i=2}^J \sum_{j=J+1}^{\infty} a_i(\alpha) a_j(\alpha) Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{A.5}$$

idem pour $\mathbf{r} + \rho$ notons que pour $i \geq J+1$ les statistiques de a_i et $a_i(\alpha)$ sont identiques. Par contre pour $i < J+1$, $a_i(\alpha) = a_i(\text{direction 1}) - a_i(\text{sur axe})$

Dans ces condition (I) de l'équation A.2 devient :

$$\begin{aligned}(I) &= \sum_{i=2}^J \sum_{j=2}^J \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle [Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) + Z_i(\mathbf{r} + \rho) Z_j(\mathbf{r} + \rho)] \\ &\quad + 2 \sum_{i=2}^J \sum_{i=J+1}^{\infty} \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle [Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) + Z_i(\mathbf{r} + \rho) Z_j(\mathbf{r} + \rho)]\end{aligned}$$

de même, on calcule $\Phi_{\text{res},0}(\mathbf{r})\Phi_{\text{res},0}(\mathbf{r} + \rho)$ et $\Phi_{\text{res},\alpha}(\mathbf{r})\Phi_{\text{res},\alpha}(\mathbf{r} + \rho)$ et (II) devient :

$$\begin{aligned}(II) &= 2 \left\{ \sum_{i=2}^J \sum_{j=2}^J \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r} + \rho) \right. \\ &\quad + \sum_{i=2}^J \sum_{j=J+1}^{\infty} \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r} + \rho) \\ &\quad \left. + \sum_{i=J+1}^{\infty} \sum_{j=2}^J \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r} + \rho) \right\}\end{aligned}\tag{A.6}$$

Soit en sommant (I) et (II)

$$\begin{aligned}D_{\text{ani}}(\rho) &= \frac{\int \sum_{i=2}^J \sum_{j=2}^J \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle [Z_i(\mathbf{r}) + Z_i(\mathbf{r} + \rho)] [Z_j(\mathbf{r}) + Z_j(\mathbf{r} + \rho)] P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}} \quad \text{A} \\ &\quad + 2 \frac{\int \sum_{i=2}^J \sum_{i=J+1}^{\infty} \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle [Z_i(\mathbf{r}) + Z_i(\mathbf{r} + \rho)] [Z_j(\mathbf{r}) + Z_j(\mathbf{r} + \rho)] P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}} \quad \text{B} \\ &\quad - 2 \frac{\int \sum_{i=2}^J \sum_{j=2}^J \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle [Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r} + \rho)] P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}} \quad \text{C} \\ &\quad - 2 \frac{\int \sum_{i=2}^J \sum_{j=J+1}^{\infty} \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle [Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r} + \rho)] P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}} \quad \text{D} \\ &\quad - 2 \frac{\int \sum_{i=J+1}^{\infty} \sum_{j=2}^J \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle [Z_i(\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r} + \rho)] P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}} \quad \text{E}\end{aligned}\tag{A.7}$$

En combinant les différentes parties de l'équation précédente, il vient :

$$A+C = \frac{\int \sum_{i=2}^J \sum_{j=2}^J \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle [Z_i(\mathbf{r}) - Z_i(\mathbf{r} + \rho)] [Z_j(\mathbf{r}) - Z_j(\mathbf{r} + \rho)] P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}} \quad (\text{A.8})$$

et

$$B+D+E = \frac{\int \sum_{i=2}^J \sum_{j=J+1}^{\infty} 2 \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle [Z_i(\mathbf{r}) - Z_i(\mathbf{r} + \rho)] [Z_j(\mathbf{r}) - Z_j(\mathbf{r} + \rho)] P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}} \quad (\text{A.9})$$

Calculons à présent $\langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle$. Deux cas apparaissent :

– le cas où i et j sont inférieurs à J . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle &= \langle [a_i(\text{direction 1}) - a_i(\text{sur axe})] [a_j(\text{direction 1}) - a_j(\text{sur axe})] \rangle \\ &= 2 \langle [a_i a_j] (\alpha = 0) \rangle - 2 \langle [a_i a_j] (\alpha = \alpha_{1-2}) \rangle \\ &= 2\sigma_{a_i a_j}(0) - 2\sigma_{a_i a_j}(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ou $\sigma_{a_i a_j}(0)$ représente les corrélations des coefficients des polynômes de Zernike selon la même direction de visée (variances et covariances données par Noll [Noll-a-76]) et $\sigma_{a_i a_j}(\alpha)$ les corrélations des coefficients polynômes de Zernike pour 2 directions séparées d'un angle α

– le cas où i est inférieur à J et j supérieur à $J+1$.

$$\begin{aligned} \langle a_i(\alpha) a_j(\alpha) \rangle &= \langle [a_i(\text{direction 1}) - a_i(\text{sur axe})] [a_j(\text{direction 1})] \rangle \\ &= \langle [a_i a_j] (\alpha = 0) \rangle - \langle [a_i a_j] (\alpha = \alpha_{1-2}) \rangle \\ &= \sigma_{a_i a_j}(0) - \sigma_{a_i a_j}(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

De plus, en définissant, comme dans la thèse de J.-P. Véran, les polynômes U_{ij} tels que

$$U_{ij}(\rho) = \frac{\int [Z_i(\mathbf{r}) - Z_i(\mathbf{r} + \rho)] [Z_j(\mathbf{r}) - Z_j(\mathbf{r} + \rho)] P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}}{\int P(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} + \rho) d\mathbf{r}} \quad (\text{A.12})$$

il vient :

$$D_{ani}(\rho, \alpha) = \sum_{i=2}^J \sum_{j=2}^{\infty} 2 [\sigma_{a_i a_j}(0) - \sigma_{a_i a_j}(\alpha)] U_{ij}(\rho) \quad (\text{A.13})$$

A partir de cette "fonction de structure anisoplanétique" il est possible de définir une "fonction de transfert anisoplanétique" (FTA), permettant de corriger l'estimation de la FTO (faite sur axe) du décalage angulaire. Cette fonction se définit comme suit :

$$FTO_{aniso}(\rho, \alpha) = \exp -\frac{1}{2} D_{ani}(\rho, \alpha) \quad (\text{A.14})$$

Il est alors possible d'exprimer la FTO associée à une direction α (c'est à dire la TF de la PSF associée à l'étoile non-résolue décalée de α dans le champ) par

$$FTO_{\text{hors axe}}(\rho, \alpha) = FTO_{\text{sur axe}}(\rho, 0) \cdot FTA(\rho, \alpha) \quad (\text{A.15})$$

Pour calculer cette FTA, l'équation A.13 montre qu'il est nécessaire d'avoir à la fois les fonction U_{ij} , que l'on peut calculer une fois pour toutes pour une configuration pupillaire donnée, mais aussi les valeurs des décorrélations angulaires des coefficients des polynômes de Zernike.

Annexe B

Calcul de Surfaces d'intersection de 3 disques

Le but est, ici de calculer la surface de l'intersection de 3 disques. Le problème est contreint de la façon suivante :

- tous les diques ont le même diamètre D ,
- la distance entre chaque disque est connue (voir figure B.1): $C_2C_1 = C_1C_3 = C_2C_3 = d_{wfs}$ et $C_2C_4 = \sqrt{d_{wfs}^2/3 + a^2 - ad_{wfs}/\sqrt{3}}$ avec $a = OC_4$

Bien évidemment, en fonction de ces distances et du diamètre D plusieurs cas peuvent se présenter. La figure B.1 représente seulement un de ces cas, mais est utilisée pour définir toutes les notations utiles dans les calculs qui vont suivre.

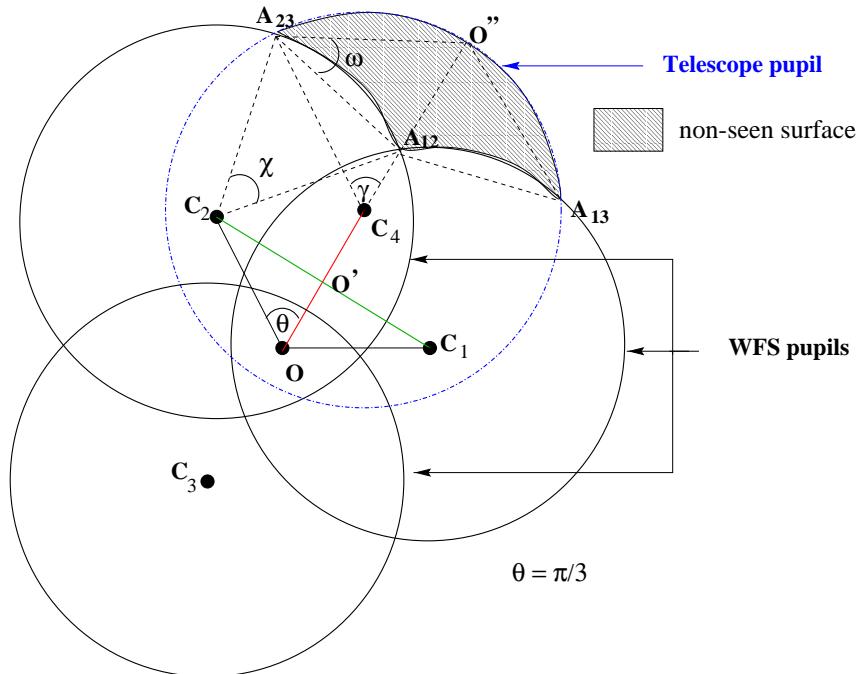


FIG. B.1 –

6 cas peuvent se présenter:

- $d_{wfs} \leq D$

$$\circ \quad (a - \frac{D}{2}) \leq \frac{1}{2}D \left(\sqrt{1 - (d_{wfs}/D)^2} + d_{wfs}/(\sqrt{3}D) \right)$$

$$S_j(\alpha) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\circ \quad (a - \frac{D}{2}) \leq \frac{1}{2} \{ d_{wfs}/\sqrt{3} + D * \sin(\beta) \} \text{ avec } \beta = \arccos(d_{wfs}/D)$$

$$S_j(\alpha) = D^2 \left\{ \frac{1}{4} [(\gamma - \chi) - (\sin \gamma - \sin \chi)] + \sin \frac{\chi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \omega \right\} \quad (\text{B.2})$$

avec les valeurs de γ , χ et ω définies comme suit :

- si $a \geq d_{wfs}/(2\sqrt{3})$ (cas de la figure B.1)

$$\gamma = \pi - \arccos \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) - \arcsin \left(\frac{d_{wfs}}{2 C_2 C_4} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\chi = \arccos \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) - \arccos \left(\frac{d_{wfs}}{D} \right) + \arccos \left(\frac{d_{wfs}}{2 C_2 C_4} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\omega = \frac{\pi + \gamma - \chi}{2} - \arccos \left(\frac{d_{wfs}}{D} \right) \quad (\text{B.5})$$

- si $a \leq d_{wfs}/(2\sqrt{3})$

$$\gamma = \arcsin \left(\frac{d_{wfs}}{2 C_2 C_4} \right) - \arccos \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$\chi = \arccos \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) - \arccos \left(\frac{d_{wfs}}{D} \right) - \arccos \left(\frac{d_{wfs}}{2 C_2 C_4} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\omega = \frac{\pi + \gamma - \chi}{2} - \arccos \left(\frac{d_{wfs}}{D} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\circ \quad (a - \frac{D}{2}) \geq \frac{1}{2} \{ d_{wfs}/\sqrt{3} + D * \sin(\beta) \}$$

$$S_j(\alpha) = D^2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(\arccos \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) - \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right)^2} \right) \right\} \quad (\text{B.9})$$

- $d_{wfs} > D$ (cas d'analyseurs disjoints)

$$- \text{ si } C_3 C_4 \leq D \text{ et } C_3 C_4 = d_{wfs}/\sqrt{3} + a$$

$$S_j(\alpha) = D^2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(\arccos \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) - \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right)^2} \right) \right\} \quad (\text{B.10})$$

$$- \frac{1}{2} \left(\arccos \left(\frac{C_3 C_4}{D} \right) - \left(\frac{C_3 C_4}{D} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{C_3 C_4}{D} \right)^2} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$- \text{ si } C_3 C_4 \geq D$$

$$S_j(\alpha) = D^2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(\arccos \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) - \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{C_2 C_4}{D} \right)^2} \right) \right\} \quad (\text{B.12})$$

Dans tous les autres cas, $S_j(\alpha)$ est égal à $\frac{\pi}{4}D^2$.

Annexe C

Phase estimation for large field of view: application to multiconjugate adaptive optics

Phase estimation for large field of view : application to multiconjugate adaptive optics

T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. M. Mugnier, G. Rousset

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA)
Optics Department, BP 72, F-92322 Châtillon cedex, France

ABSTRACT

We propose a "Maximum *A Posteriori*-based" estimation of the turbulent phase in a large field of view (FOV) to overcome the anisoplanatism limitation in adaptive optics. We show that, whatever the true atmospheric profile, a small number of equivalent layers (2 or 3) is required to obtain an accurate restitution of the phase in the whole FOV. The implications on multiconjugate adaptive optics are discussed in terms of number and conjugated heights of the deformable mirrors. The number of guide stars for the wavefront measurements in the field is also discussed: 3 (or even 2) guide stars are sufficient to obtain good performance.

Keywords: adaptive optics, atmospheric turbulence, wavefront sensing, anisoplanatism, telescopes

1. INTRODUCTION

Anisoplanatism is one of the most severe limitations of the phase correction by adaptive optics after propagation through the turbulent atmosphere. It leads to a space-variant PSF, which is difficult to take into account in a classical deconvolution scheme.^{1–4} In order to obtain high resolution images in a large field of view (FOV), new approaches for a good estimation of the phase in the whole field are required. Tallon & Foy⁵ and Ragazzoni⁶ suggest a tomographic approach which consists in a reconstruction of the whole turbulence volume using several natural or laser guide stars (GS) for wavefront sensing. Based on the same idea, a multiconjugated adaptive optics (MCAO) system has been studied by Ellerbroek⁷ and Johnston & Welsh,⁸ using several conjugated mirrors to compensate for the turbulence at different heights. For practical reasons, it is impossible to consider a large number of mirrors, which leads to the critical question: "Can we model the phase variation in the field using an atmospheric model based on a very small number of thin layers?". This is the key issue addressed in this paper.

A MAP-based method to estimate the phase in a large FOV is proposed in section 2. It uses a crude model of the turbulence profile sampled into a small number of turbulent layers. Using a modal decomposition of the phase onto the Zernike polynomials basis, a simple analytical solution is proposed. This method is then validated on simulation. The implications in a MCAO system are then discussed. The influence of the number and the conjugated height of mirrors, as well as the number of guide stars, is studied.

2. PHASE ESTIMATION APPROACH

Let us consider a true C_n^2 profile sampled by N_{true} thin layers. In practice, the C_n^2 profile can be measured by a SCIDAR before the observations.⁹ In the near field approximation, the phase $\Phi_\alpha(\mathbf{r})$ on the telescope pupil in the angular direction α is given by :

$$\Phi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{true}} \varphi_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \quad (1)$$

where φ_j and h_j are respectively the phase screen and the height of the j^{th} layer. \mathbf{r} is the position vector in the telescope pupil. Considering that the FOV of interest of radius is α_{max} , the support of φ_j is a disk of diameter $D_j = D + 2h_j\alpha_{max}$ in a given layer j , where D is the telescope diameter. Let ρ be the position vector in this disk.

Correspondance: Email: authorname@onera.fr; URL: <http://www.onera.fr/>; Telephone: 33 1 46 73 47 37; Fax: 33 1 46 73 41 71

where $Z_{k,j}(\rho)$ is defined on a meta-pupil with a diameter D_j . Putting equation 6 in equation 1 leads to :

$$\Phi_{\alpha_i}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{el}} \sum_{k=2}^N a_{k,j} Z_{k,j}(\mathbf{r} + h_j \alpha_i) \quad (7)$$

For a given GS direction α_i , only a part of the meta-pupil associated to the layer j , defined by the position vector in the telescope pupil \mathbf{r} and centered on $h_j \alpha_i$, is viewed (see figure 3).

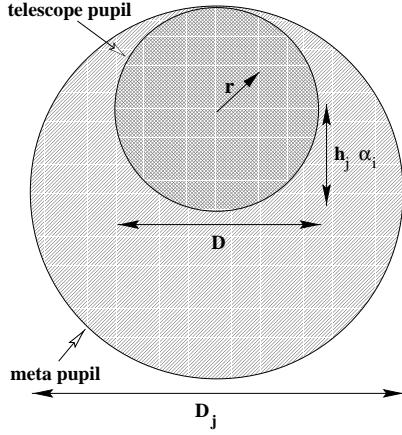


Figure 1. Analyzed part of the meta-pupil associated to the altitude h_j . The variable vector \mathbf{r} is defined on the telescope pupil (diameter D). The zone of interest is centered on $h_j \alpha_i$

Then, $Z_{k,j}(\mathbf{r} + h_j \alpha_i)$ represents the part of k^{th} Zernike defined on the meta-pupil associated to the j^{th} layer. This truncated polynomial can be decomposed on the Zernike basis defined by the telescope pupil ($\{Z_{l,0}(\mathbf{r})\}_l$). Raggazoni⁶ has shown that the number of modes required for such a decomposition is given by the number k of the meta-pupil Zernike ($Z_{k,j}$) :

$$Z_{k,j}(\mathbf{r} + h_j \alpha_i) = \sum_{l=2}^k \Gamma_{l,k,j}(h_j \alpha_i) Z_{l,0}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

Using equations 5, 6 and 8, the criterion defined in equation 4 can be re-written in a matrical form :

$$J \left(\{\mathbf{A}_j\}_j \right) = \sum_{i=1}^{N_{GS}} \left(\left[\mathbf{Z}_0 \mathbf{A}_{gs,i} - \sum_{j=1}^{N_{el}} \mathbf{Z}_0 \mathbf{M}_{\alpha_i,j} \mathbf{A}_j \right]^T \mathbf{C}_{n,i}^{-1} \left[\mathbf{Z}_0 \mathbf{A}_{gs,i} - \sum_{j=1}^{N_{el}} \mathbf{Z}_0 \mathbf{M}_{\alpha_i,j} \mathbf{A}_j \right] \right) \\ + \sum_{j=1}^{N_{el}} [\mathbf{Z}_0 \mathbf{A}_j]^T \mathbf{C}_{kol,j}^{-1} [\mathbf{Z}_0 \mathbf{A}_j] \quad (9)$$

where \mathbf{A}_j is a vector of Zernike coefficients associated to the h_j layer, and $\mathbf{A}_{gs,i}$ the vector of the measured coefficients in the GS direction α_i . \mathbf{Z}_0 is a matrix composed of $Z_{l,0}$ vectors, constituted by pixel maps of the Zernike polynomials, ordered lexicographically. $\mathbf{M}_{\alpha_i,j}$ is a matrix of Zernike coefficients defined by equation 8:

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} a_{2,j} \\ a_{3,j} \\ \vdots \\ a_{N,j} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{gs,i} = \begin{pmatrix} a_{gs,2,i} \\ a_{gs,3,i} \\ \vdots \\ a_{gs,N,i} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z}_0 = \left(Z_{2,0}, Z_{3,0}, \dots, Z_{N,0} \right) \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{\alpha_i,j} = \begin{pmatrix} \Gamma_{2,2,j}(h_j \boldsymbol{\alpha}_i) & \Gamma_{3,2,j}(h_j \boldsymbol{\alpha}_i) & \dots & \Gamma_{N,2,j}(h_j \boldsymbol{\alpha}_i) \\ 0 & \Gamma_{3,3,j}(h_j \boldsymbol{\alpha}_i) & \dots & \vdots \\ 0 & \text{---} & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \text{---} & & \Gamma_{N,N,j}(h_j \boldsymbol{\alpha}_i) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Note that $\mathbf{C}_{n_A,i}^{-1} = \mathbf{Z}_0^T \mathbf{C}_{n,i}^{-1} \mathbf{Z}_0$ corresponds to the noise covariance matrix on the Zernike coefficients associated to $\Phi_{\alpha_i}^m(\mathbf{r})$ and $\mathbf{Z}_0^T \mathbf{C}_{kol,j}^{-1} \mathbf{Z}_0$ the turbulent covariance matrix defined by Noll¹⁰ $\mathbf{C}_{Noll,j}^{-1}$:

$$\mathbf{C}_{Noll,j} = \left(\frac{D_j}{r_{0,j}} \right)^{\frac{5}{3}} \mathbf{C}_{NOLL} \quad (12)$$

with $\frac{D_j}{r_{0,j}}$ the strength of the j^{th} EL and \mathbf{C}_{NOLL} the Noll covariance matrix defined for a $\frac{D}{r_0} = 1$.

Then, defining meta-matrices \mathbf{A} , \mathbf{M}_{α_i} and \mathbf{C}_{Noll}^{-1} as :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{N_{el}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{\alpha_i} = (\mathbf{M}_{\alpha_i,1}, \mathbf{M}_{\alpha_i,2}, \dots, \mathbf{M}_{\alpha_i,N_{el}}) \quad (13)$$

$$\mathbf{C}_{Noll}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{Noll,1}^{-1} & 0 & \text{---} \\ 0 & \mathbf{C}_{Noll,2}^{-1} & 0 & \text{---} \\ 0 & \text{---} & \ddots & 0 \\ 0 & \text{---} & & \mathbf{C}_{Noll,N_{el}}^{-1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

it comes :

$$J(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{N_{GS}} \left([\mathbf{A}_{gs,i} - \mathbf{M}_{\alpha_i} \mathbf{A}]^T \mathbf{C}_{n_A,i}^{-1} [\mathbf{A}_{gs,i} - \mathbf{M}_{\alpha_i} \mathbf{A}] \right) + \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{Noll}^{-1} \mathbf{A} \quad (15)$$

which must be minimized with respect to \mathbf{A} .

The analytical solution is :

$$\mathbf{A} = \left(\sum_{i=1}^{N_{GS}} (\mathbf{M}_{\alpha_i}^T \mathbf{C}_{n_A,i}^{-1} \mathbf{M}_{\alpha_i}) + \mathbf{C}_{Noll}^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N_{GS}} \mathbf{M}_{\alpha_i}^T \mathbf{C}_{n_A,i}^{-1} \mathbf{A}_{gs,i} \right) \quad (16)$$

Because the matrices \mathbf{M}_{α_i} can be computed for a given system configuration (EL's and GS's positions), equation 15 is easily and rapidly computable. The vector \mathbf{A} gives the estimated Zernike coefficients for each EL, and then the estimated phase on each meta-pupil.

4. INFLUENCE OF THE EQUIVALENT LAYER NUMBER

In order to study the influence of the number of EL's to be considered, i.e the influence of the sampling step, a simulation has been performed with different atmospheric profiles. We present here the results obtained with a profile inspired from measurements made at Mauna Kea (Hawaii) by Racine and Ellerbroek¹¹ (see Figure 2). The true profile is constituted here of $N_{true} = 16$ layers. Other profiles, including a constant C_n^2 between 0 and 15km have also been studied to test the robustness of the method. The results are very similar to the ones presented here.

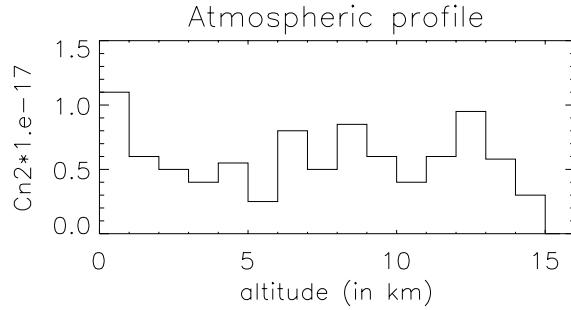


Figure 2. C_n^2 true profile used in the simulation, $C_n^2 = 0$ above 15 km. 0km = telescope altitude.

The phase screens on each layer are simulated by N. Roddier's method¹² using the first 300 Zernike polynomials (radial order up to 23). The size of these phase screens corresponds to a 56 arcsec FOV ($\alpha_{max} = 28$ arcsec) and a telescope diameter of 4m. The overall D/r_0 is 6 (typical result in K-band for a 0.92 arcsec seeing). The phase measurements are made at five field positions $\{\alpha_i\}$ located at the five vertices of a regular pentagon inscribed in a circle of radius α_{max} . This rather favorable GS configuration,⁵ allows us to first study the phase error due to the sole under sampling of the turbulence profile. The measurements are the true phases plus a noise. The noise level for each measurements corresponds to a 7×7 sub-aperture Shack-Hartmann sensor with a Signal to Noise Ratio (SNR) equal to 1.8 (ratio between the turbulent variance of the angle of arrival in a sub-aperture to the noise variance). The noise variance on the Zernike coefficients evolves¹³ as $(\text{radial order})^{-2}$ and, for the considered SNR, it becomes greater than the Kolmogorov turbulent variance¹⁴ (which evolves as $(\text{radial order})^{-11/3}$) after the 21th Zernike polynomial. For the restoration in each layer, we denote by $\hat{\varphi}_j$ the estimated phase, which is expanded on the first 300 Zernike. The use of Zernike coefficients allows us to incorporate the Kolmogorov statistics,¹⁰ on each EL, as seen in section 3.

The MAP-based restoration is applied for different numbers of EL. The performance of the method is evaluated in terms of Strehl Ratio: $SR = \exp(-\sigma_{err}^2(\alpha))$, where $\sigma_{err}^2(\alpha)$ is computed by

$$\sigma_{err}^2(\alpha) = \left\langle \frac{1}{S} \int_S \left(\Phi(\mathbf{r}, \alpha) - \sum_{j=1}^{N_{el}} \hat{\varphi}_j(\mathbf{r} + h_j \alpha) \right)^2 d\mathbf{r} \right\rangle \quad (17)$$

with S the pupil surface. In Figure 3, we present the SR variation as a function of α . Considering the particular GS geometry, we have chosen a cut of the field including the worst and the best SR in the field. This figure shows the good restitution of the phase in the whole FOV using 5 GS's and our approach. The curves for 3, 4 and 5 EL's are indistinguishable. The SR is high and close to be constant. For comparison, we show a conventional MAP estimation with a single on-axis GS ($\alpha = 0$) and 1 EL on the telescope pupil: phase optimized for on-axis observation and applied in the whole FOV. But, in this conventional estimation, the SR decreases rapidly as a function of angle beyond a few arcsec because of the anisoplanatism effects. Note that, in this conventional case, we have chosen a SNR equal to four on the Shack Hartmann sensor to insure the same maximum SR as the optimal EL case.

Similarly, figure 4 represents the evolution of the residual Point Spread Function (PSF) in the FOV for a phase estimation using 5 GS's and 1, 2 and 3 equivalents layers. The conventional estimation is shown for comparison.

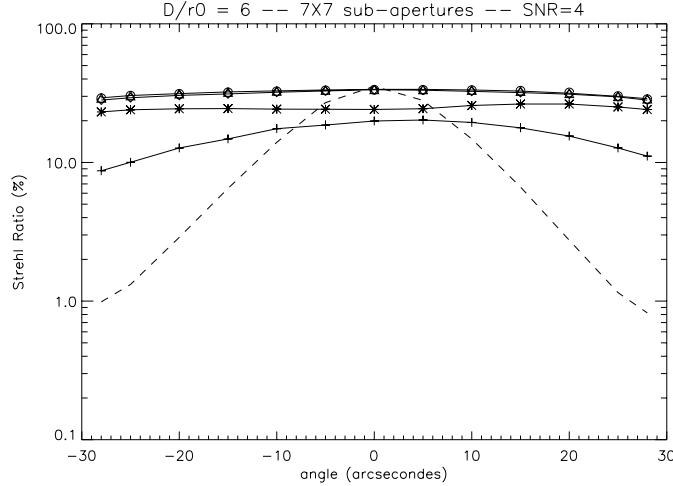


Figure 3. Influence of the number of EL's on $SR(\alpha)$ (in percent). [dashed line] conventional on-axis single GS and 1 EL on the telescope pupil. With 5 GS's : [+] 1 EL at 6.5 km, [*] 2 EL's (0 and 8.5 km), [◊] 3 EL's (0, 5.4 and 11.7 km), [△] 4 EL's (0, 4.2, 8.4 and 12.5 km), [○] 5 EL's (0, 3, 6.8, 10.7 and 13.7 km).

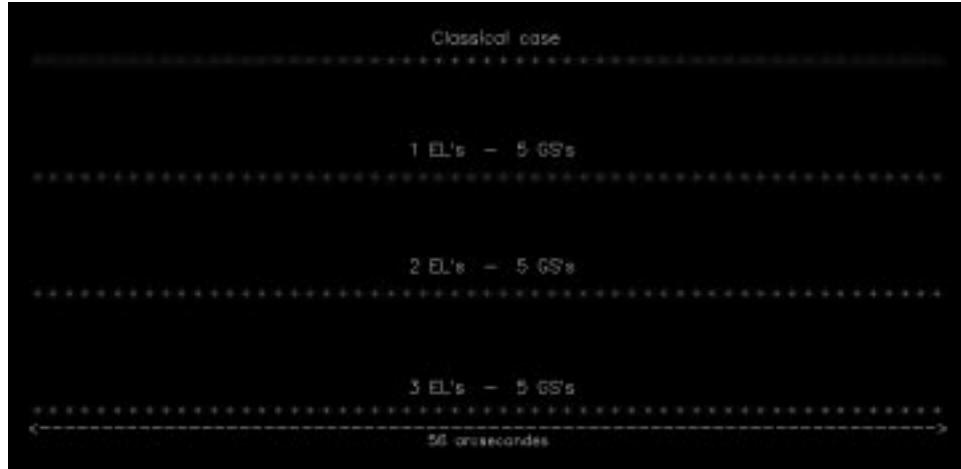


Figure 4. Comparison of the PSF angular degradation in the case of : a conventional on-axis single GS and 1 EL on the telescope pupil, a 5 GS's with 1 EL, 2 EL's and 3 EL's. One PSF each arcsecond

The important point is that an increase of the number of EL's (N_{el}) does not significantly improve the phase restitution as soon as $N_{el} \geq 3$, even if, when $N_{el} \rightarrow N_{true}$, this approach tends to the true MAP and leads to the tomographic scheme.^{5,6} The key-point to be emphasized is that only a few EL's (2 or 3), i.e a loose sampling of the turbulence profile, is necessary to model precisely the phase in a large FOV. Of course, this results depend on the ratio FOV over pupil diameter. When this ratio decreases, the gain brought by the use of 3 EL's is reduced compared to 2 EL's.

Such a result is particularly important in the case of MCAO systems.^{7,8,11} We have demonstrated that even with rather uniform C_n^2 profiles, it is not necessary to estimate (and thus to correct) the phase in each turbulent layer of the profile but only in a very small number of EL's. The number of required conjugate mirrors in a MCAO system

is therefore very limited, 2 mirrors already allow a very good correction and 3 provide a quasi-optimal correction. Note that, 1 mirror conjugated at 6.5 km^{11} and 5 GS's already leads to a substantial gain in the whole FOV even if the SR on axis is lower than in the conventional case.

5. INFLUENCE OF THE GUIDE STAR NUMBER

Another scaling parameter to study, for the design of a large FOV high resolution system, is the number of GS's that are necessary to obtain a good estimation of the phase for a given FOV. We apply our approach with 3 EL's and a variable number of GS's. One on axis, two (at ± 28 arcsec) and from three to eight at the vertices of regular polygons inscribed in the FOV (radius 28 arcsec). For each configuration, we estimate the maximum and the minimum SR in the whole field. Of course, an increase of the number of GS's, i.e the number of measurements, leads to a more accurate estimation of the phase. In order to focus on the influence of the field sampling by GS's, the SNR for each GS configuration is therefore chosen to obtain the same maximum SR (see table 5).

number of GS('s)	1	2	3	4	5	6	8
SNR	4	3.2	2.6	2.2	1.8	1.4	1

Table 1. Shack-Hartmann sensor SNR for each GS configuration.

The results are presented in figure 5.

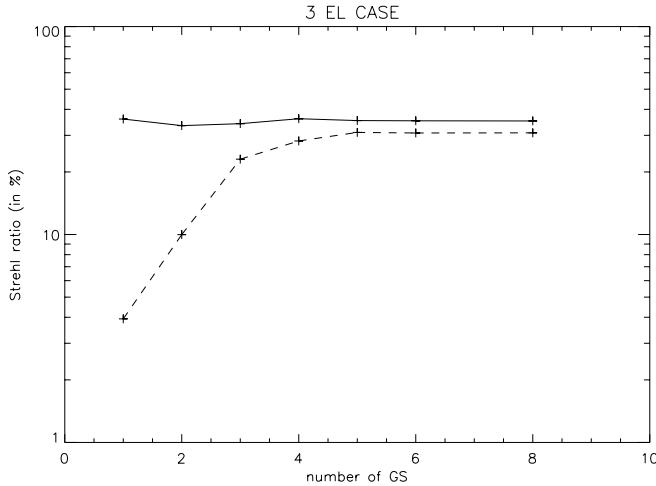


Figure 5. SR (in percent) versus the number of GS's : the max[solid line], min[dashed line] values in the FOV. 3 EL's considered here.

As soon as the number of GS's is greater than 2, the phase estimation quality is close to be uniform in the whole field and an increase of this number does not significantly improve the performance, in term of the correction homogeneity. Tallon & Foy⁵ proposed 4 guide stars, but the present study shows that 3 (or even 2 for an elongated FOV) may be enough depending on the SR requirements in the field. Note that an array of laser guide stars may be used for the wavefront measurements, if no natural guide star is available.⁵⁻⁸

6. ROBUSTNESS OF THE EQUIVALENT LAYER APPROACH

For practical reasons, the conjugated heights of deformable mirrors in a MCAO systems will probably be fixed, at least, for a whole observing night. Then, even if this height choice is made carefully, an evolution of the turbulence

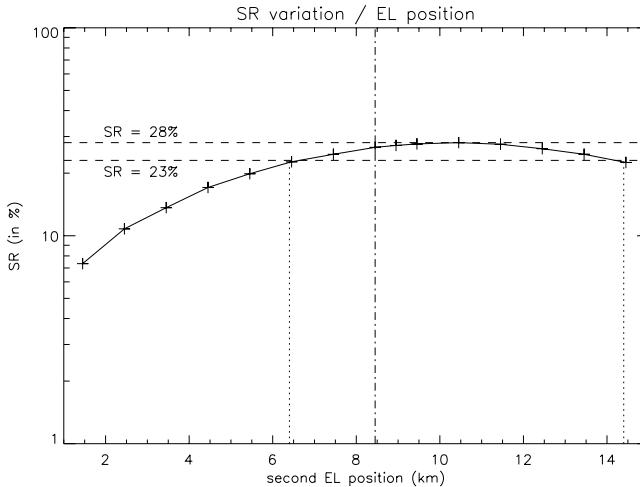


Figure 6. mean SR (in percent) versus position of the second EL. In [dotted-dashed line] : EL position as defined in section 2, [dotted lines] height min and max given a SR decrease smaller than 5%

profile may induce errors between EL's positions (as defined in section 2) and the current profile. We show in figure 6 that the EL's position is not a critical parameter in the definition of a MCAO system. Indeed, in the case of a 2 EL's and 5 GS's, the height domain where the variations of the mean SR in the field are smaller than 5% is about 8 km. Of course, this domain depends on the C_n^2 profile, but this result is very encouraging.

Figure 6 also shows, that our estimation of the EL's position (8.4 km) is near but not optimal in term of SR maximization. A more sophisticated criterion to estimate the conjugated height of each EL is currently studied.

The main result of this section is the low dependency of the phase estimation quality with respect to EL's positions. This result makes us optimistic about the performance of a MCAO system even in the case of strong turbulence profile variations.

7. CONCLUSION

This study allows us to define the characteristics and the expected performance of large FOV high resolution imaging systems. We have shown that, whatever the true C_n^2 profile, 3 equivalent layers provide a quasi-optimal restitution of the phase in the whole FOV, and that even only 2 layers are enough to obtain a good and near to uniform restitution quality. Therefore, a full tomography of the atmosphere is not necessary. In addition, only 3 (or even 2) guide stars are required for such an imaging system. Because of the weak dependency of the angular decorrelation of the phase with the atmospheric profile, the positions of the equivalent layers are not critical, i.e a low precision is required on the C_n^2 profile measurement. A change of a few km in the equivalent layer positions, only leads to a SR variation of a few percent. The presented MAP-based approach can be applied for image post-processing (deconvolution from wavefront sensing,^{15,16} phase diversity¹⁷), and the results can be generalized to multiconjugate adaptive optics systems. We are currently studying the optimal number of actuators for each conjugated deformable mirror and a prior for the closed loop phase statistics.

REFERENCES

1. J.-M. Conan, L. M. Mugnier, T. Fusco, V. Michau, and G. Rousset, "Myopic deconvolution of adaptive optics images using object and point spread function power spectra," *Appl. Opt.* **37**, pp. 4614–4622, July 1998.
2. J. M. Conan, T. Fusco, L. Mugnier, E. Kersalé, and V. Michau, "Deconvolution of adaptive optics images with imprecise knowledge of the point spread fonction: results on astronomical objects.", in *Astronomy with adaptive optics: present results and future programs*, ESO/OSA, (Sonthofen), Sept. 1998.

SPIE's 44th Annual Meeting, "Propagation and Imaging through the Atmosphere III" Conference,
Denver, 18–23 July 1999.

3. T. Fusco, J.-P. Véran, J.-M. Conan, and L. Mugnier, "Myopic deconvolution method for adaptive optics images of stellar fields," *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **134**, pp. 1–10, Jan. 1999.
4. T. Fusco, J.-M. Conan, L. M. Mugnier, V. Michau, and J.-P. Véran, "Caractérisation et traitement d'images astronomiques à réponse impulsionale variable dans le champ," in *17ième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images*, GRETSI, Sept. 1999.
5. M. Tallon and R. Foy, "Adaptive telescope with laser probe: isoplanatism and cone effect," *Astron. Astrophys.* **235**, pp. 549–557, 1990.
6. R. Ragazzoni, E. Marchetti, and F. Rigaut, "Modal tomography for adaptive optics," *Astron. Astrophys.* **342**, pp. L53–L56, Feb. 1999.
7. B. L. Ellerbroek, "First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, pp. pp 783–805, Feb. 1994.
8. D. C. Johnston and B. M. Welsh, "Analysis of multiconjugate adaptive optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, pp. pp 394–408, Jan. 1994.
9. A. Fuchs, M. Tallon, and J. Vernin, "Focusing on a turbulent layer: Principle of the "generalized scidar"," *pasp* **110**(86), 1998.
10. R. J. Noll, "Zernike polynomials and atmospheric turbulence," *J. Opt. Soc. Am.* **66**(3), pp. 207–211, 1976.
11. R. Racine and B. L. Ellerbroek, "Profiles of night-time turbulence above mauna kea and isoplanatism extension in adaptive optics," in *Adaptive Optical Systems and Applications*, R. K. Tyson and R. Q. Fugate, eds., vol. 2534, pp. pp 248–257, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., (San Diego, California), July 1995.
12. N. Roddier, "Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials," *Opt. Eng.* **29**(10), pp. 1174–1180, 1990.
13. F. Rigaut and E. Gendron, "Laser guide star in adaptative optics: the tilt determination problem," *Astron. Astrophys.* **261**, pp. 677–684, 1992.
14. G. Rousset, "Wavefront sensing," in *Adaptive Optics for Astronomy*, pp. 115–137, ASI, (Cargèse, France), 1993.
15. J. Primot, G. Rousset, and J.-C. Fontanella, "Deconvolution from wavefront sensing: a new technique for compensating turbulence-degraded images," *J. Opt. Soc. Am. A* **7**(9), pp. 1598–1608, 1990.
16. L. M. Mugnier, C. Robert, J.-M. Conan, V. Michau, and S. Salem, "Regularized multiframe myopic deconvolution from wavefront sensing," in *Propagation through the Atmosphere III*, vol. 3763, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., (Denver, CA (USA)), July 1999.
17. R. G. Paxman, B. J. Thelen, and J. H. Seldin, "Phase-diversity correction of turbulence-induced space-variant blur," *Opt. Lett.* **19**, pp. pp 1231–1233, Aug. 1994.

Annexe D

Liste des publications

D.1 Revues à comités de lectures

T. **Fusco**, J.-P. Véran, J.-M. Conan et L. Mugnier, *Myopic deconvolution method for adaptive optics images of stellar fields*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 134 (janvier 1999), pp. 1–10.

T. **Fusco**, J.-M. Conan, V. Michau, L. Mugnier et G. Rousset, *Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics*, Opt. Lett., 24 (21) (novembre 1999).

T. **Fusco**, J.-M. Conan, L. Mugnier, V. Michau et G. Rousset, *Characterisation of adaptive optics point spread function for anisoplanatic imaging. Application to stellar field deconvolution.*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 142 (févrierII 2000), pp. 149–156.

T. **Fusco** et J.-M. Conan, *Statistical behavior of Adaptive Optics corected short exposure*, Appl. Opt., (soumis).

T. **Fusco**, J.-M. Conan, L. M. Mugnier, V. Michau et G. Rousset, *Optimal wavefront reconstruction strategies for Multiconjugate Adaptive Optics*, J. Opt. Soc. Am. A (soumis).

J.-M. Conan, L. M. Mugnier, T. **Fusco**, V. Michau et G. Rousset, *Myopic Deconvolution of Adaptive Optics Images using Object and Point Spread Function Power Spectra*, Appl. Opt., 37 (21) (juillet 1998), pp. 4614–4622.

J.-M. Conan, T. **Fusco**, L. M. Mugnier et F. Marchis, *MISTRAL: Myopic Deconvolution Method Applied to ADONIS and Simulated VLT-NAOS Images.*, ESO Messenger, 99 (mars 2000), pp. 38–45.

F. Marchis, R. Prangé et T. **Fusco** , *A survey of Io's volcanism by adaptive optics observation in the 3.8 micron thermal band* Geo. Res. Lett. (soumis)

F. Marchis, T. **Fusco**, J.-M. Conan, L. M. Mugnier et R. Prangé , *MISTRAL: A new myopic deconvolution method for planetary object observations. Simulation on Io AO observation* Icarus. (en préparation)

A. Coustenis, E. Gendron, O. Lai, J.-P. Véran, M. Combes et T. **Fusco**, *Images of Titan at 1.3 and 1.6 micron with adaptive optics at the CFHT* (en préparation).

D. Hestroffer, F. Marchis, A. Cellino, J. Berthier, T. **Fusco**, M. Di Martino, P. Tanga et V. Zappalà, *First direct-imaging of a main-belt binary asteroid: (216) Kleopatra*, Astron. & Astroph. (en préparation).

L. M. Mugnier, J.-M. Conan, T. **Fusco** *Edge-preserving myopic deconvolution for adaptive optics images*, J. Opt. Soc. Am. A (en préparation).

D.2 Conférences

T. **Fusco**, J.-M. Conan, L. Mugnier, G. Rousset et V. Michau , *Performance and limitation of phase estimation algorithms for Multiconjugate Adaptive Optics*, Barcelone, Europto conference (octobre 2000).

T. **Fusco**, J.-M. Conan, L. Mugnier , V. Michau, et G. Rousset, *Anisoplanatic deconvolution for adaptive optics corrected images*, San Diego, SPIE (Juillet 2000). (Papier invité)

T. **Fusco**, J.-M. a. Conan, L. Mugnier , V. Michau, et G. Rousset, *Expected performance and limitation of Multiconjugate Adaptive Optics.*, San Diego, SPIE (Juillet 2000).

T. **Fusco**, J.-M. Conan, V. Michau, L. Mugnier et G. Rousset, *Isoplanatic angle and optimal guide star separation for multiconjugate adaptive optics*, Munich, Germany, SPIE/ESO (mars 2000).

T. **Fusco**, J.-M. Conan, V. Michau, L. M. Mugnier et G. Rousset, *Phase estimation for large field of view: application to multiconjugate adaptive optics*, Dans *Propagation through the Atmosphere III*, vol. 3763, Denver, CA (USA), Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. (juillet 1999).

T. **Fusco**, J.-M. Conan, L. M. Mugnier, V. Michau et J.-P. Véran, *Caractérisation et traitement d'images astronomiques à réponse impulsionnelle variable dans le champ*, Dans *17ième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images*. GRETSI (1999).

J.-M. Conan, T. **Fusco**, L. Mugnier , C. Roddier et F. Roddier, *Deconvolution of adaptive optics images: from theory to practice*, Munich, Germany, SPIE/ESO (mars 2000).

J. M. Conan, T. **Fusco**, L. Mugnier, E. Kersalé et V. Michau, *Deconvolution of adaptive optics images with imprecise knowledge of the point spread fonction: results on astronomical objects.*, Dans *Astronomy with adaptive optics: present results and future programs*, Sonthofen, ESO/OSA (septembre 1998).

M. Séchaud, F. Mahé, T. **Fusco**, V. Michau et J.-M. Conan, *High resolution imaging through atmospheric turbulence: link between anisoplanatism and intensity fluctuations*, Dans *Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems V*, pp. 243–249, Florence, Italy, ESO/SPIE (septembre 1999). (papier invité)

L. M. Mugnier, J.-M. Conan, T. **Fusco** et V. Michau, *Joint Maximum a Posteriori Estimation of Object and PSF for Turbulence Degraded Images*, Dans *Bayesian Inference for Inverse problems*, vol.

3459, pp. 50–61, San Diego, CA (USA), Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. (juillet 1998).

J.-M. Conan, L. M. Mugnier, T. **Fusco**, V. Michau et G. Rousset *Deconvolution of adaptive optics images using the object autocorrelation and positivity*, Dans *Optical Science, Engineering and Instrumentation*, vol. 3126, pp. 56–67, San Diego, CA (USA), Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. (juillet 1997).

A. Coustenis, E. Gendron, O. Lai, M. Combes, J.-P. Véran, E. Lellouch, P. Rannou, M. Cabane, C. McKay, J.-P. Maillard et T. **Fusco**, *Titan's surface from spectra and images*, Nice, France, European Geophysical Society (2000). Papier invité.

A. Coustenis, B. Schmitt, E. Gendron, O. Lai, M. Combes, J.-P. Véran, E. Lellouch, P. Rannou, J.-P. Maillard, C. McKay, M. Cabane, T. **Fusco**, L. Vapillon, E. Raynaud et J. Woillez, *Titan's surface from ground-based observations*, Warsaw, Poland, Committee on Space Research (2000).

A. Coustenis, B. Gendron, O. Lai, M. Combes, J.-P. Véran, J. Woillez, T. **Fusco** et L. Mugnier *Titan's surface from adaptive optics at the CFHT*, IAU General Assembly. Manchester, UK (Aout 2000). Papier invité

T. **Fusco**, *Imagerie à haute résolution en dehors du domaine isoplanétique*, Grenoble, France, Forum du Programme National Haute Résolution Angulaire en Astronomie (mai 1999).

F. Marchis, J. Berthier, P. Descamps, T. **Fusco**, R. Prangé et T. Sekiguchi, *Ground-based high resolution observations of the Uranian system in the near IR.*, Dans *31st Annual Meeting of the DPS*, Padova, Italy (octobre 1999).

R. Prangé, F. Marchis et T. **Fusco**, *Mapping and monitoring of Io's hot spots by use of the ESO Adaptive Optics system.*, Dans *31st Annual Meeting of the DPS*, Padova, Italy (octobre 1999).

F. Marchis, R. Prangé et T. **Fusco**, *Monitoring of Io's volcanic activity at 3.8 microns with the ESO ADONIS AO system during the HST-Galileo Io campaign of fall 1999*, Dans *Workshop "HST-Galileo Io Workshop"* (27-28 February 2000).

F. Marchis, R. Prangé et T. **Fusco**, *Actual and future monitoring of Io's hot spots by used of Adaptive Optics systems*, Dans *32nd annual meeting of the DSP of the AAS*, Pasadena, USA (octobre 2000).

Bibliographie

- [Allen-a-73] C. W. ALLEN, *Astrophysical quantities*, The Athlones Press, London, p. 243, 1973.
- [Andrews-a-99] L. C. ANDREWS, R. L. PHILLIPS, C. Y. HOPEN, ET M. A. AL-HABASH, *Theory of optical scintillation*, J. Opt. Soc. Am., 16(6):1417–1429, 1999.
- [Arsenault-p-94] R. ARSENAULT, D. SALMON, J. KERR, ET F. RIGAUT, *PUEO: The Canada-France-Hawaii Telescope adaptive optics bonnette I: system description*, in Ealey et Merkle [Kona-94b], pp. 833–842.
- [Avila-a-97] R. AVILA, A. ZIAD, J. BORGNO, F. MARTIN, ET A. AGABI, *Theoretical spatio-temporal analysis of angle of arrival induced by atmospheric turbulence as observed with the grating scale monitor experiment*, J. Opt. Soc. Am. A, 14(11):3070–3082, 1997.
- [Ayers-a-88] G. R. AYERS ET J. C. DAINTY, *Iterative blind deconvolution and its applications*, Opt. Lett., 13:547–549, 1988.
- [Azouit-a-80] M. AZOUIT ET J. VERNIN, *Remote investigation of tropospheric turbulence by two-dimensional analysis of stellar scintillation*, journal of atmospheric sciences, 37:1550–1557, 1980.
- [Babcock-a-53] H. W. BABCOCK, *The possibility of compensating astronomical seeing*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 65:229, 1953.
- [Baharav-a-95] Y. BAHARAV ET I. SHAMIR, *Increase in the compensated field of view with double-conjugate adaptive-optics system*, no. 12, Avr. 1995, pp. 2102–2110.
- [Bahcall-a-81] J. N. BAHCALL ET R. M. SONEIRA, *The distribution of stars to $v = 16$ th magnitude near the north galactic pole: normalization, clustering properties and counts in various bands.*, Astrophys. J., pp. 122–135, 1981.
- [Beckers-p-88] J. M. BECKERS, *Increasing the size of the isoplanatic patch with multiconjugate adaptive optics*, in Very Large Telescopes and their Instrumentation, ESO Conference and Workshop Proceedings, Garching Germany, Mars 1988, ESO, pp. 693–703.
- [Beckers-p-89] J. BECKERS, *Detailed compensation of atmospheric seeing using multiconjugate adaptive optics*, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 1989, pp. 215–217.
- [Beuzit-p-94] J.-L. BEUZIT, N. HUBIN, E. GENDRON, L. DEMAILLY, P. GIGAN, F. LACOMBE, F. CHAZALET, D. RABUAD, ET G. ROUSSET, *ADONIS: a user-friendly adaptive optics system for the ESO 3.6 meter telescope*, in Ealey et Merkle [Kona-94b], pp. 955–961.
- [Bezdid'ko-a-74] S. N. BEZDID'KO, *The use of zernike polynomials in optics.*, Sov. J. Opt. Technol., 41(9):p425, 1974.
- [Biraud-a-69] Y. BIRAUD, *A new approach for increasing the resolving power by data processing*, Astron. Astrophys., 1:124–127, 1969.

- [Blanc-p-00] A. BLANC, J. IDIER, ET L. M. MUGNIER, *Estimation of optical telescope aberrations by phase diversity*, Munich, Germany, Mars 2000, SPIE/ESO.
- [Borgnino-a-92] J. BORGNINO, F. MARTIN, ET A. ZIAD, *Effect of a finite spatial-coherence outer scale on the covariances of angle-of-arrival fluctuations*, Opt. Commun., 91, 1992.
- [Bougeault-a-95] P. BOUGEAULT, C. DE HUI, B. FLEURY, ET J. LAURENT, *Investigation of seeing by means of an atmospheric mesoscale numerical simulation*, Appl. Opt., 34(18):3481–3488, 1995.
- [Boyer-p-90] C. BOYER, V. MICHAU, ET G. ROUSSET, *Adaptive optics: interaction matrix measurements and real time control algorithms for the Come-On project*, in Amplitude and intensity spatial interferometry, vol. 1237, Tucson, United States of America, 1990, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Brette-p-96] S. BRETE ET J. IDIER, *Optimized single site update algorithms for image de-blurring*, in Proceedings of the International Conference on Image Processing, Lausanne, Switzerland, 1996, IEEE, pp. 65–68.
- [Chassat-a-89] F. CHASSAT, *Calcul du domaine d'isoplanétisme d'un système d'optique adaptative fonctionnant à travers la turbulence atmosphérique*, J. of Optics (Paris), 20(1):13–23, 1989.
- [Chassat-t-92] ———, *Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique. Etude modale de l'anisoplanétisme et application à l'optique adaptative*, Thèse de doctorat, Université Paris Sud, Juin 1992.
- [Chun-a-98] M. CHUN, *The useful field of view of an adaptive optics system*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 110:pp. 317–329, 1998.
- [Close-p-98] L. M. CLOSE, F. RODDIER, C. RODDIER, J. E. GRAVES, M. NORTHCOTT, ET D. POTTER, *Scientific results from the university of hawaii: Astronomical problems well suited to ao techniques*, in Bonaccini et Tyson [Kona-98], pp. 406–415.
- [Conan-p-92a] J. M. CONAN, P. Y. MADEC, ET G. ROUSSET, *Evaluation of image quality obtained with adaptive optics partial correction*, in Progress in Telescope and Instrumentation Technologies, Garching, Germany, 1992, ESO.
- [Conan-p-92b] ———, *Temporal power spectra of turbulent wavefronts*, in Real Time and Post Facto Solar Image Correction, Sunspot, New Mexico, United States of America, 1992, NSO.
- [Conan-p-93] ———, *Image formation in adaptive optics partial correction*, in Active and Adaptive Optics, Garching, Germany, 1993, ICO.
- [Conan-t-94] J.-M. CONAN, *Étude de la correction partielle en optique adaptative*, Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, Oct. 1994.
- [Conan-p-95] J. M. CONAN ET G. ROUSSET, *Visibility signal to noise ratio in adaptive optics two-telescope interferometry*, in Adaptive Optics, Garching, Germany, 1995, OSA/ESO.
- [Conan-a-95] J.-M. CONAN, G. ROUSSET, ET P.-Y. MADEC, *Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence*, J. Opt. Soc. Am. A, 12(12):1559–1570, Juil. 1995.
- [Conan-p-97] J.-M. CONAN, L. MUGNIER, T. FUSCO, V. MICHAU, ET G. ROUSSET, *Deconvolution of adaptive optics images using the object autocorrelation and positivity*, in Optical Science, Engineering and Instrumentation, vol. 3126, San Diego, CA (USA), Juil. 1997, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 56–67.

- [Conan-p-98] J.-M. CONAN, T. FUSCO, L. MUGNIER, E. KERSALÉ, ET V. MICHAU, *Deconvolution of adaptive optics images with imprecise knowledge of the point spread fonction: results on astronomical objects.*, in Astronomy with adaptive optics: present results and future programs, Sonthofen, Sept. 1998, ESO/OSA.
- [Conan-a-98] J.-M. CONAN, L. M. MUGNIER, T. FUSCO, V. MICHAU, ET G. ROUSSET, *Myopic deconvolution of adaptive optics images using object and point spread function power spectra*, Appl. Opt., 37(21):4614–4622, Juil. 1998.
- [Conan-n-99] J.-M. CONAN ET L. MUGNIER, *Lien entre les estimateurs Maximum a posteriori et Maximum de vraisemblance à fort rapport signal à bruit*. Note interne.
- [Conan-n-00] J.-M. CONAN, *Lien entre le rapport de strehl et l'Énergie cohérente*. Note interne.
- [Conan-a-00] J.-M. CONAN, T. FUSCO, L. M. MUGNIER, ET F. MARCHIS, *MISTRAL: Myopic deconvolution method applied to ADONIS and simulated VLT-NAOS images*, ESO Messenger, 99:38–45, Mars 2000.
- [Conan-p-00] J.-M. CONAN, T. FUSCO, L. MUGNIER, F. MARCHIS, C. RODDIER, ET F. RODDIER, *Deconvolution of adaptive optics images: from theory to practice*, Munich, Germany, Mars 2000, SPIE/ESO.
- [Consortini-a-73] A. CONSORTINI, L. RONCHI, ET E. MORODER, *Role of the outer scale of turbulence in atmospheric degradation of optical images*, J. Opt. Soc. Am., 63(10):1246–1248, Oct. 1973.
- [Corrsin-a-51] S. CORRSIN, *On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence*, Jap., 22(4):469–473, 1951.
- [Coulman-a-95] C. COULMAN, J. VERNIN, ET A. FUCHS, *Optical seeing-mechanism of formation of thin turbulent laminae in the atmosphere*, Appl. Opt., 34:5461–5474, 1995.
- [Coustenis-a-00] A. COUSTENIS, E. GENDRON, O. LAI, J.-P. VÉRAN, M. COMBES, ET T. FUSCO, *Images of Titan at 1.3 and 1.6 micron with adaptive optics at the CFHT*, soumis.
- [Coustenis-p-00a] A. COUSTENIS, E. GENDRON, O. LAI, M. COMBES, J.-P. VÉRAN, E. LELLOUCH, P. RANNOU, M. CABANE, C. MCKAY, J.-P. MAILLARD, ET T. FUSCO, *Titan's surface from spectra and images*, Nice, France, 2000, European Geophysical Society.
- [Coustenis-p-00b] A. COUSTENIS, B. SCHMITT, E. GENDRON, O. LAI, M. COMBES, J.-P. VÉRAN, E. LELLOUCH, P. RANNOU, J.-P. MAILLARD, C. MCKAY, M. CABANE, T. FUSCO, L. VAPILLON, E. RAYNAUD, ET J. WOILLEZ, *Titan's surface from ground-based observations*, Warsaw, Poland, 2000, Committee on Space Research.
- [Cuxart-a-00] J. CUXART, P. BOUGEAULT, ET J.-L. REDELSPERGER, *A turbulence scheme allowing for mesoscale and large-eddy simulations*, Q. J. R. Meteorol. Soc., 126(562):1–30, 2000.
- [Dainty-l-75] J. C. DAINTY, *Laser Speckle and Related Phenomena*, Springer-Verlag, 1975, ch. Stellar Speckle Interferometry, pp. 255–280.
- [Demerle-p-93] M. DEMERLÉ, P. Y. MADEC, ET G. ROUSSET, *Servo-loop analysis for adaptive optics*, in Adaptive Optics for Astronomy, Cargèse, France, 1993, NATO.
- [Demoment-a-89] G. DEMOMENT, *Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation structures and problems*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 37(12):2024–2036, Dec. 1989.
- [Desenne-a-98] C. DESSENNE, P. Y. MADEC, ET G. ROUSSET, *Optimization of a predictive controller for closed-loop adaptive optics*, Appl. Opt., 37(21):4623–4633, Juil. 1998.

- [Dessenne-t-98] C. DESSENNE, *Commande modale et prédictive en Optique Adaptative*, Thèse de doctorat, Université de Paris VII, Dec. 1998.
- [Dicke-a-75] R. H. DICKE, *Phase-contrast detection of telescope seeing and their correction*, Astron. J., 198(4):605–615, 1975.
- [Dierickx-p-00] P. DIERICKX ET R. GILMOZZI, *Progress of the OWL 100-m telescope conceptual design*, Munich, Germany, Mars 2000, SPIE/ESO.
- [Drummond-a-97] J. D. DRUMMOND, R. Q. FUGATE, ET J. C. CHRISTOU, *Full adaptive optics images of asteroids Ceres and Vesta rotational poles and triaxial ellipsoid dimensions*, Icarus, 1997.
- [Dumas-a-96a] C. DUMAS ET O. R. HAINAUT, *First ground-based mapping of the asteroid vesta*, The Messenger, (84):13–16, Juin 1996.
- [Dumas-a-96b] C. DUMAS, *Nouveaux résultats d'optique adaptative : Imagerie de l'astéroïde vesta*, Journal des Astronomes Francais, (52):20–26, 1996.
- [Dumas-p-96] C. DUMAS ET O. R. HAINAUT, *Mapping vesta in the visible and near-infrared: the 1994 and 1996 oppositions as viewed from the ground*, in Workshop on Evolution of Igneous Asteroids: Focus on Vesta and the HED Meteorites, D. W. Mittlefehldt et J. J. Papike, eds., vol. Lunar and Planetary Institute Tech. Rpt. 96-02(1), Houston (USA), 1996, Lunar and Planetary Institute, Lunar and Planetary Institute, pp. 7–8.
- [Eaton-a-85] F. EATON, W. A. PETERSON, J. R. HINES, ET G. FERNANDEZ, *Isoplanatic angle direct measurements and associated atmospheric conditions*, Appl. Opt., 1985.
- [Ellerbroek-a-94] B. L. ELLERBROEK, *First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes*, J. Opt. Soc. Am. A, 11(2):783–805, Fev. 1994.
- [Ellerbroek-a-94b] B. L. ELLERBROEK, C. VAN LOAN, N. P. PITSIANIS, ET R. J. PLEMMONS, *Optimizing closed-loop adaptive-optics performance with the use of multiple control bandwidths*, J. Opt. Soc. Am. A, 11(11):2871–2886, Nov. 1994.
- [Ellerbroek-p-00] B. L. ELLERBROEK ET F. J. RIGAUT, *Scaling multi-conjugate adaptive optics performance estimates to extremely large telescopes*, in Adaptive Optical Systems Technology, Munich, Germany, Mars 2000, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Esposito-p-00] S. ESPOSITO, O. FEENEY, ET A. RICCARDI, *Laboratory test of pyramid wavefront sensor*, Munich, Germany, Mars 2000, SPIE/ESO.
- [Fante-a-75] R. L. FANTE, *Electromagnetic beam propagation in turbulent media*, vol. 63, Dec. 1975, pp. 1669–1690.
- [Flicker-p-00] R. FLICKER, F. RIGAUT, ET B. ELLERBROEK, *Comparison of multiconjugate adaptive optics configurations and control algorithms for the gemini-south 8-m telescope*, Munich, Germany, Mars 2000, SPIE/ESO.
- [Fontanella-a-85] J.-C. FONTANELLA, *Analyse de surface d'onde, déconvolution et optique active*, J. of Optics (Paris), 16(6):257–268, 1985.
- [Foy-a-85] R. FOY ET A. LABEYRIE, *Feasibility of adaptive optics telescope with laser probe*, Astron. Astrophys., 152:129–131, 1985.
- [Foy-a-95] R. FOY, A. MIGNUS, F. BIRABEN, G. GRYNBERG, ET ..., *The polychromatic artificial sodium star: A new concept for correcting the atmospheric tilt*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 111:569, 1995.

- [Freudling-a-95] W. FREUDLING, *An image restoration technique for the removal of cosmic-ray hits from dithered images*, Pub. Astron. Soc. Pacific, 107:85–89, Jan. 1995.
- [Fried-a-66] D. FRIED, *Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures*, J. Opt. Soc. Am., 56:1372–1379, 1966.
- [Fried-p-76] D. L. FRIED, *Varieties of isoplanatism*, in Imaging through the Atmosphere, vol. 75, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 1976, pp. 20–29.
- [Fried-a-82] D. L. FRIED, *Anisoplanatism in adaptive optics*, J. Opt. Soc. Am., 72(1):pp 52–61, Jan. 1982.
- [Fusco-n-96] T. FUSCO, *Comparaison de différentes techniques de traitement a posteriori sur des images corrigées par optique adaptative*. Rapport de DEA.
- [Fusco-a-99a] T. FUSCO, J.-P. VÉRAN, J.-M. CONAN, ET L. MUGNIER, *Myopic deconvolution method for adaptive optics images of stellar fields*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 134:1–10, Jan. 1999.
- [Fusco-a-99b] T. FUSCO, J.-M. CONAN, V. MICHAU, L. MUGNIER, ET G. ROUSSET, *Efficient phase estimation for large field of view adaptive optics*, Opt. Lett., 24(21), Nov. 1999.
- [Fusco-p-99a] T. FUSCO, J.-M. CONAN, V. MICHAU, L. MUGNIER, ET G. ROUSSET, *Phase estimation for large field of view: application to multiconjugate adaptive optics*, in Propagation through the Atmosphere III, vol. 3763, Denver, CA (USA), Juil. 1999, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 125–133.
- [Fusco-p-99b] T. FUSCO, J.-M. CONAN, L. MUGNIER, V. MICHAU, ET J.-P. VÉRAN, *Caractérisation et traitement d'images astronomiques à réponse impulsionnelle variable dans le champ*, in 17ième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images, GRETSI, 1999.
- [Fusco-a-00a] T. FUSCO, J.-M. CONAN, L. MUGNIER, V. MICHAU, ET G. ROUSSET, *Characterisation of adaptive optics point spread function for anisoplanatic imaging. application to stellar field deconvolution.*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 142:149–156, 2000.
- [Fusco-a-00b] T. FUSCO ET J.-M. CONAN, *Statistical behavior of adaptive optics corrected short exposure images*, Appl. Opt., soumis.
- [Fusco-a-00c] T. FUSCO, J.-M. CONAN, L. MUGNIER, V. MICHAU, ET G. ROUSSET, *Optimal wavefront reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics*, J. Opt. Soc. Am. A, soumis.
- [Fusco-p-00a] T. FUSCO, J.-M. CONAN, V. MICHAU, G. ROUSSET, ET L. MUGNIER, *Isoplanatic angle and optimal guide star separation for multiconjugate adaptive optics*, Munich, Germany, Mars 2000, SPIE/ESO.
- [Fusco-p-00b] T. FUSCO, J.-M. CONAN, V. MICHAU, L. MUGNIER, ET G. ROUSSET, *Expected performance and limitation of multiconjugate adaptive optics*, San Diego, USA, Août 2000, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Fusco-p-00c] T. FUSCO, J.-M. CONAN, V. MUGNIER, L. MICHAU, ET G. ROUSSET, *Post-processing for anisoplanatic adaptive optics corrected images*, San Diego, USA, Août 2000, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Fusco-p-00d] T. FUSCO, J.-M. CONAN, G. ROUSSET, ET V. MICHAU, *Performance and limitation of phase estimation algorithms for multiconjugate adaptive optics.*, Barcelone, Espagne, Sept. 2000, ESO/SPIE.

- [GPI-97] GROUPE PROBLÈMES INVERSES, *Gpav: une grande œuvre collective*, internal report, Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS/Supélec/Université Paris-Sud, 1997.
- [Geman-a-84] S. GEMAN ET D. GEMAN, *Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., PAMI-6(6):721–741, Nov. 1984.
- [Gendron-t-95] E. GENDRON, *Optimisation de la commande modale en optique adaptative : applications à l'astronomie*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, Mars 1995.
- [Gilmozzi-p-00] R. GILMOZZI, *Science with 100 m telescopes*, Munich, Germany, Mars 2000, SPIE/ESO.
- [Gilmozzi-p-98] R. GILMOZZI, B. DELABRE, P. DIERICKX, N. HUBIN, F. KOCH, ET G. MONNET, *The future filled aperture telescopes: is a 100m feasible*, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Mars 1988, pp. 778–791.
- [Glindemann-p-96] A. GLINDEMANN ET T. BERKEFELD, *A new method for separating atmospheric layers using a shack-hartmann curvature sensor*, in Adaptive Optics, OSA technical digest series, 1996.
- [Golub-l-85] G. H. GOLUB ET C. F. VANLOAN, *Matrix computations*, Baltimore, The John's Hopkins University Press, 1985.
- [Gonsalves-a-82] R. A. GONSALVES, *Phase retrieval and diversity in adaptive optics*, Optical Engineering, 21(5):829–832, 1982.
- [Goodman-l-75] J. GOODMAN, *Laser Speckle and Related Phenomena*, Springer-Verlag, 1975, ch. Statistical Properties of Laser Speckle Patterns, pp. 255–280.
- [Goodman-l-85] J. W. GOODMAN, *Statistical Optics*, Wiley-Interscience, 1985.
- [Greenwood-a-77] D. P. GREENWOOD, *Bandwidth specification for adaptive optics systems*, J. Opt. Soc. Am., 67(3), 1977.
- [Gunsay-p-95] M. GUNSAY ET D. JEFFS, *Point-source localization in blurred images by a frequency-domain eigenvector-based method*, in IEEE Trans. Image Proc., vol. 4, IEEE, 1995, pp. 1602–1612.
- [Harder-t-99] S. HARDER, *Reconstruction de la réponse impulsionale du système d'optique adaptative ADONIS à partir des mesures de son analyseur de surface d'onde et Étude photométrique de la variabilité des étoiles YY Orionis*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, Mai 1999.
- [Harder-a-00] S. HARDER ET A. CHELLI, *Estimating the point spread function of the adaptive optics system adonis using the wavefront sensor measurements*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 142:119–135, 2000.
- [Harding-a-99] C. M. HARDING, R. A. JOHNSTON, ET R. G. LANE, *Fast simulation of a kolmogorov phase screen*, Appl. Opt., 38(11):2161–2170, 1999.
- [Hardy-a-77] J. W. HARDY, J. E. LEFEVBRE, ET C. L. KOLIOPoulos, *Real time atmospheric compensation*, J. Opt. Soc. Am., 67(3):360–369, 1977.
- [Herriot-p-98] G. HERRIOT, S. MORRIS, S. ROBERTS, M. FLETCHER, L. SADDLEMYER, J.-P. SINGH, G. AND VÉRAN, ET E. RICHARDSON, *Innovations in the gemini adaptive optics system design*, in Adaptive Optical System Technologies, D. Bonaccini et R. K. Tyson, eds., Kona, Hawaii, Mars 1998, SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 488–499.
- [Hestroffer-a-00] D. HESTROFFER, F. MARCHIS, A. CELLINO, J. BERTHIER, T. FUSCO, M. DI MARTINO, P. TANGA, ET V. ZAPPALÀ, *First direct-imaging of a main-belt binary asteroid: (216) Kleopatra*, Astron. Astrophys., En préparation.

- [Holmes-a-92] T. J. HOLMES, *Blind deconvolution of speckle images quantum-limited incoherent imagery: maximum-likelihood approach*, J. Opt. Soc. Am. A, 9(7):1052–1061, 1992.
- [Hook-p-94] R. HOOK ET L. LUCY, *Image restoration of high photometric quality. ii. examples*, in The Restoration of HST Image and Spectra II, R. Hanish et R. White, eds., 1994, pp. 86–92.
- [Hufnagel-p-74] R. E. HUFNAGEL, *Variation of atmospheric turbulence*, in Digest of technical Papers, Topical meeting on Optical Propagation through Turbulence, Boulder, Co, 1974.
- [Hunt-a-73] B. R. HUNT, *The application of constrained least squares estimation to image restoration by digital computer*, IEEE Trans. Comp., C-22(9):805–812, 1973.
- [Hunt-a-77] ———, *Bayesian methods in nonlinear digital image restoration*, IEEE Trans. Comp., C-26:219–229, 1977.
- [Ishimaru-l-78] A. ISHIMARU, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic, New York, 1978.
- [Jefferies-a-93] S. M. JEFFERIES ET J. C. CHRISTOU, *Restoration of astronomical images by iterative blind deconvolution*, Astrophys. J., 415:862–874, 1993.
- [Johnston-a-94] D. C. JOHNSTON ET B. M. WELSH, *Analysis of multiconjugate adaptive optics*, J. Opt. Soc. Am. A, 11(1):pp 394–408, Jan. 1994.
- [Katsaggelos-l-91a] A. K. KATSAGGELOS, ed., *Digital Image Restoration*, Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Kattnig-p-97] A. P. KATTNIG ET J. PRIMOT, *Model of the second-order statistic of the radiance field of natural scenes, adapted to system conceiving*, in Aeorsense'97 - Visual information processing VI, vol. 3074, Washington, 1997, SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Kern-p-89] P. KERN, P. LÉNA, P. GIGAN, J. C. FONTANELLA, G. ROUSSET, ET F. MERKLE, *Come-On : an adaptive optics prototype dedicated to infrared astronomy*, in Active telescope systems, vol. 1114, Orlando, United States of America, 1989, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 54–65.
- [Kluckers-a-98] V. A. KLUCKERS, N. J. WOODER, T. W. NICHOLLS, M. J. ADCOCK, I. MUNRO, ET J. DAINTY, *Profiling of atmospheric turbulence strength and velocity using a generalised SCIDAR*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 130(1), 1998.
- [Knox-a-74] K. T. KNOX ET B. J. THOMPSON, *Recovery of images from atmospherically degraded short exposure photographs*, Astrophys. J. Lett., 193:L45–L48, 1974.
- [Kolmogorov-a-41] A. N. KOLMOGOROV, *Local structure of turbulence in incompressible fluids with very high reynolds number*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 30(4):301–305, 1941.
- [Kona-94b] M. A. EALEY ET F. MERKLE, eds., *Adaptive Optics in Astronomy*, vol. 2201, Washington, 1994, SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Kona-98] D. BONACCINI ET R. K. TYSON, eds., *Adaptive Optical System Technologies*, Kona, Hawaii, Mars 1998, SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Labeyrie-a-70] A. LABEYRIE, *Attainment of diffraction-limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns*, Astron. Astrophys., 6:85–87, 1970.
- [Lai-t-96] O. LAI, *L'optique adaptative du Télescope Canada-France-Hawaii et son utilisation pour l'étude des coeurs de galaxies à flambée d'étoiles*, Thèse de doctorat, Université de PARIS VII, Observatoire de Meudon, Dec. 1996.
- [Lane-a-92] R. G. LANE, *Blind deconvolution of speckle images*, J. Opt. Soc. Am. A, 9(9):1508–1514, 1992.

- [Lane-p-92] G. LANE, A. GLINDEMANN, ET J. DAINTY, *Simulation of kolmogorov phase screen*, in Waves in random media, 1992, pp. 209–224.
- [Laurent-p-89] J. LAURENT, G. ROUSSET, G. FERTIN, J. F. CARLIN, A. KOHNLE, V. THIERMANN, ET M. DRUMEZ, *Comparison between different techniques of turbulence measurements for horizontal path*, in Propagation Engineering, vol. 1115, Orlando, United States of America, 1989, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 116–123.
- [Lelouarn-t-00] M. LE LOUARN, *Étoiles laser pour les grands télescopes : effet de cône et implications astrophysiques*, Thèse de doctorat, Université Lyon I - Claude Bernard, 2000.
- [Lucy-a-74] L. B. LUCY, *An iterative technique for rectification of observed distributions*, *Astrophys. J.*, 79(6):745–754, 1974.
- [Lucy-p-94] L. LUCY, *Image restorations of high photometric quality*, in The Restoration of HST Image and Spectra II, R. Hanish et R. White, eds., 1994, pp. 79–85.
- [Madec-p-92] P. Y. MADEC, J. M. CONAN, ET G. ROUSSET, *Temporal characterization of atmospheric wavefront for adaptive optics*, in Progress in Telescope and Instrumentation Technologies, Garching, Germany, 1992, ESO.
- [Madec-a-97] P. Y. MADEC, D. RABAUD, B. FLEURY, J.-M. CONAN, L. ROUSSET-ROUVIÈRE, F. MENDEZ, J. MONTRI, V. MICHAU, G. ROUSSET, ET M. SÉCHAUD, *Essais du banc d'optique adaptative ONERA à l'OHP*, La Lettre de l'OHP, (16):2–3, 1997.
- [Madec-l-99] P.-Y. MADEC, *Control techniques*, in Roddier [Roddier-l-99], ch. 6, pp. 131–154.
- [Magain-a-98] P. MAGAIN, F. COURBIN, ET S. SOHY, *Deconvolution with correct sampling*, *Astrophys. J.*, p. 472, Fev. 1998.
- [Mahé-t-00] F. MAHÉ, *Application d'un modèle atmosphérique à l'étude des fluctuations d'indice de réfraction dans la couche limite. Influence de la scintillation sur l'analyse de front d'onde.*, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice France, 2000.
- [Marais-p-91] T. MARAIS, V. MICHAU, G. FERTIN, J. PRIMOT, ET J. C. FONTANELLA, *Deconvolution from wavefront sensing on a 4 m telescope*, in High-Resolution Imaging by Interferometry, Garching, Germany, 1991, ESO.
- [Marchis-p-99] F. MARCHIS, J. BERTHIER, P. DESCAMPS, T. FUSCO, R. PRANGÉ, ET T. SEKIGUCHI, *Ground-based high resolution observations of the Uranian system in the near IR.*, in 31st Annual Meeting of the DPS, Padova, Italy, Oct. 1999.
- [Marchis-a-00a] F. MARCHIS, R. PRANGE, ET T. FUSCO, *A survey of Io's volcanism by adaptive optics observation in the 3.8 micron thermal band*, *Geo. Res. Lett.*, soumis.
- [Marchis-a-00b] F. MARCHIS, T. FUSCO, J.-M. CONAN, L. MUGNIER, ET R. PRANGE, *Mistral: A new myopic deconvolution method for planetary object observations. simulation on io ao observation*, *Icarus*, en préparation.
- [Marchis-p-00a] F. MARCHIS, R. PRANGÉ, ET T. FUSCO, *Monitoring of io's volcanic activity at 3.8 microns with the eso adonis ao system during hst-galileo io campaign of fall 1999*, in Workshop "HST-Galileo Io Workshop", Boulder, USA, Fev. 2000.
- _____, *Monitoring Io's volcanic activity with the ESO adaptive optics system*, in EGS conference, Nice, France, Avr. 2000.
- _____, *Actual and future monitoring of Io's hot spots by used of Adaptive Optics systems*, 32nd annual meeting of the DPS of the AAS, Pasadena, USA, oct. 2000.

- [Marchis-t-00] F. MARCHIS, *Imagerie à haute résolution angulaire des objets planétaires en Optique Adaptative. Application au volcanisme de Io.*, Thèse de doctorat, Université de Toulouse III - Paul Sabatier, Oct. 2000.
- [Martin-a-98] F. MARTIN, A. TOKOVININ, A. ZIAD, R. CONAN, J. BORGNO, R. AVILA, A. AGABI, ET M. SARAZIN, *First statistical data on the wavefront outer scale at la silla observatory*, Astron. Astrophys., 336:49–52, 1998.
- [Martin-a-00] F. MARTIN, R. CONAN, A. TOKOVININ, A. ZIAD, H. TRINQUET, R. BORGNO, A. AGABI, ET M. SARAZIN, *Optical parameters relevant for high angular resolution at paranal from gsm instrument and surface layer contribution*, Astron. Astrophys., to be published.
- [Masciadri-t-98] E. MASCIADRI, *Caractérisation et prévision à 3D de la turbulence optique par un modèle atmosphérique non-hydrostatique: application à la Haute Résolution Angulaire au sol*, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice France, Dec. 1998.
- [McGlamery-p-76] B. MCGLAMERY, *Computer simulation studies of compensation of turbulence degraded images*, in Image processing, vol. 74, SPIE, 1976, pp. 225–233.
- [Meynadier-a-99] L. MEYNADIER, V. MICHAU, M.-T. VELLUET, J.-M. CONAN, L. M. MUGNIER, ET G. ROUSSET, *Noise propagation in wave-front sensing with phase diversity*, Appl. Opt., 38(23):4967–4979, Août 1999.
- [Michau-p-92] V. MICHAU, G. ROUSSET, ET J.-C. FONTANELLA, *Wavefront sensing from extended sources*, in Real Time and Post Facto Solar Image Correction, Sunspot, New Mexico, United States of America, 1992, NSO, pp. 124–128.
- [Molodij-t-96] G. MOLODIJ, *Etude de l'anisoplanétisme pour l'optique adaptative*, astrophysique et techniques spatiales, Université Paris VII, Avr. 1996.
- [Molodij-a-97] G. MOLODIJ ET G. ROUSSET, *Angular correlation of Zernike polynomials for a laser guide star in adaptive optics*, J. Opt. Soc. Am. A, 14(8):1949–1966, 1997.
- [Mugnier-p-97] L. M. MUGNIER, J.-M. CONAN, V. MICHAU, ET G. ROUSSET, *Imagerie à travers la turbulence par déconvolution myope multi-trame*, in Seizième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images, J.-M. Chassery et C. Jutten, eds., GRETSI, Sept. 1997, pp. 567–570.
- [Mugnier-p-98] L. M. MUGNIER, J.-M. CONAN, T. FUSCO, ET V. MICHAU, *Joint maximum a posteriori estimation of object and PSF for turbulence degraded images*, in Bayesian Inference for Inverse problems, vol. 3459, San Diego, CA (USA), Juil. 1998, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 50–61.
- [Mugnier-p-99] L. M. MUGNIER, C. ROBERT, J.-M. CONAN, V. MICHAU, ET S. SALEM, *Regularized multiframe myopic deconvolution from wavefront sensing*, in Propagation through the Atmosphere III, vol. 3763, Denver, CA (USA), Juil. 1999, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Mugnier-n-99] L. MUGNIER, *Approximation d'une statistique de poisson par une statistique gaussienne non homogène*. Note interne.
- [Mugnier-a-00a] L. M. MUGNIER, C. ROBERT, J.-M. CONAN, V. MICHAU, ET S. SALEM, *Myopic deconvolution from wavefront sensing*, J. Opt. Soc. Am. A, soumis.
- [Mugnier-a-00b] L. MUGNIER, J.-M. CONAN, ET T. FUSCO, *Edge-preserving myopic deconvolution for adaptive optics images*, en préparation.
- [Nakajima-a-88] T. NAKAJIMA, *Signal-to-noise ratio of the bispectral analysis of speckle interferometry*, J. Opt. Soc. Am. A, (9):1477–1491, 1988.

- [Nakamura-a-88] O. NAKAMURA, S. KAWATA, ET S. MINAMI, *Optical microscope tomography II. nonnegative constraint by a gradient-projection method*, J. Opt. Soc. Am. A, 5(4):554–561, Avr. 1988.
- [Narayan-a-86] R. NARAYAN ET R. NITYANANDA, *Maximum entropy image restoration in astronomy*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 24(2):127–170, 1986.
- [Noll-a-76] R. J. NOLL, *Zernike polynomials and atmospheric turbulence*, J. Opt. Soc. Am., 66(3):207–211, 1976.
- [Obukhov-a-49] A. M. OBUKHOV, *Structure of the temperature field in a turbulent current*, Izv. Aka. Nauk SSSR, Ser. Geograf. Geofiz., 13(1):58–69, 1949.
- [Paxman-a-94] R. G. PAXMAN, B. J. THELEN, ET J. H. SELDIN, *Phase-diversity correction of turbulence-induced space-variant blur*, Opt. Lett., 19(16):pp 1231–1233, Août 1994.
- [Paxman-a-96] R. G. PAXMAN, J. H. SELDIN, M. G. LÖFDAHL, G. B. SCHARMER, ET C. U. KELLER, *Evaluation of phase-diversity techniques for solar-image restoration*, Astrophysical Journal, pp. 1087–1099, Août 1996.
- [Phillips-a-62] D. L. PHILLIPS, *A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind*, J. Ass. Comput. Mach., 9(1):84–97, 1962.
- [Prangé-p-99] R. PRANGÉ, F. MARCHIS, ET T. FUSCO, *Mapping and monitoring of Io's hot spots by use of the ESO adaptive optics system.*, in 31st Annual Meeting of the DPS, Padova, Italy, Oct. 1999.
- [Press-l-88] W. PRESS, B. FLANNERY, S. TEUKOLSKY, ET W. VETTERLING, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University press, 1988.
- [Primot-a-90] J. PRIMOT, G. ROUSSET, ET J.-C. FONTANELLA, *Deconvolution from wavefront sensing: a new technique for compensating turbulence-degraded images*, J. Opt. Soc. Am. A, 7(9):1598–1608, 1990.
- [Rabaud-p-99] D. RABAUD, F. CHAZALLET, G. ROUSSET, C. AMRA, B. ARGAST, J. MONTRI, P.-Y. MADEC, R. ARSENAULT, N. HUBIN, J. CHARTON, ET G. DUMONT, *NAOS real-time computer for optimized closed loop and PSF estimation.*, in Astronomical Data Analysis Software and Systems IX, ASP Conference Series, Oct. 1999.
- [Racine-p-95] R. RACINE ET B. L. ELLERBROEK, *Profiles of night-time turbulence above mauna kea and isoplanatism extension in adaptive optics*, in Adaptive Optical Systems and Applications, R. K. Tyson et R. Q. Fugate, eds., vol. 2534, San Diego, California, Juil. 1995, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. pp 248–257.
- [Ragazzoni-a-95a] R. RAGAZZONI, S. ESPOSITO, ET E. MARCHETTI, *Auxiliary telescopes for the absolute tip-tilt determination of a laser guide star*, MNRAS, 276, 1995.
- [Ragazzoni-a-95b] R. RAGAZZONI, *Absolute tip-tilt determination with lasers beacons*, Astron. Astrophys., 305, 1995.
- [Ragazzoni-a-96] ———, *Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism*, J. Mod. Opt., 43(2), Fev. 1996.
- [Ragazzoni-a-99a] R. RAGAZZONI, E. MARCHETTI, ET F. RIGAUT, *Modal tomography for adaptive optics*, Astron. Astrophys., 342:53–56, Fev. 1999.
- [Ragazzoni-a-99b] R. RAGAZZONI, *No laser guide stars for adaptive optics in giant telescopes*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 136:205–209, Avr. 1999.
- [Ragazzoni-a-99c] R. RAGAZZONI ET J. FARINATO, *Sensitivity of a pyramidal wave front sensor in closed loop adaptive optics*, Astron. Astrophys., 350, 1999.

- [Ragazzoni-a-00] R. RAGAZZONI, E. MARCHETTI, ET G. VALENTE, *Adaptive-optics correction available for the whole sky*, Nature (London), 403:54–56, Jan. 2000.
- [Richardson-a-72] W. H. RICHARDSON, *Bayesian-based iterative method of image restoration*, J. Opt. Soc. Am., 62(1):55–59, 1972.
- [Rigaut-a-91] F. RIGAUT, G. ROUSSET, P. KERN, J.-C. FONTANELLA, J.-P. GAFFARD, F. MERKLE, ET P. LÉNA, *Adaptive optics on a 3.6-m telescope: results and performance*, Astron. Astrophys., 250:280–290, 1991.
- [Rigaut-a-92a] F. RIGAUT ET E. GENDRON, *Laser guide star in adaptative optics: the tilt determination problem*, Astron. Astrophys., 261:677–684, 1992.
- [Rigaut-p-92a] F. RIGAUT, P. LÉNA, P. Y. MADEC, G. ROUSSET, E. GENDRON, ET F. MERKLE, *Results of the Come-On experiment*, in Adaptive Optics for Large Telescopes, Maui, 1992, OSA.
- [Rigaut-p-94] F. J. RIGAUT, R. ARSENAULT, J. M. KERR, D. A. SALMON, M. J. NORTHCOTT, Y. DUTIL, ET C. BOYER, *Canada-france-hawaii telescope adaptive optics bonnette ii: simulations and control*, in Ealey et Merkle [Kona-94b], pp. 149–160.
- [Rimmele-p-98] T. R. RIMMELE ET R. R. RADICK, *Solar adaptive optics at the national solar observatory*, in Bonaccini et Tyson [Kona-98].
- [Robert-p-99] C. ROBERT, J.-M. CONAN, L. MUGNIER, V. MICHAU, ET G. ROUSSET, *A comparative study of modal wavefront reconstructions for the Shack-Hartmann*, in International Workshop on Wavefront Sensing and its Applications, Canterbury, England, Juil. 1999, University of Kent.
- [Roddier-l-81] F. RODDIER, *The effects of atmospherical turbulence in optical astronomy*, in Progress in Optics, E. Wolf, ed., vol. XIX, North Holland, Amsterdam, 1981, pp. 281–376.
- [Roddier-a-82a] F. RODDIER, J. M. GILLI, ET J. VERNIN, *On the isoplanatic patch size in stellar speckle interferometry*, J. of Optics (Paris), 13(2):63–70, 1982.
- [Roddier-a-82b] F. RODDIER, J. M. GILLI, ET G. LUND, *On the origin of speckle boiling and its effects in stellar speckle interferometry*, J. of Optics (Paris), 13(5):263–271, 1982.
- [Roddier-p-86] F. RODDIER ET C. RODDIER, *Noao infrared adaptive optics program ii: modeling atmospheric effects in adaptive optics systems for astronomical telescopes*, in Advanced Technology Optical Telescopes III, L. D. Barr, ed., vol. 628, Washington, 1986, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 298–304.
- [Roddier-a-88] F. RODDIER, *Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics*, Appl. Opt., 27:1223–1225, 1988.
- [Roddier-p-91] F. RODDIER, J. GRAVES, M. D., ET M. NORTHCOTT, *The university of hawaii adaptive optics system. i. general approach*, in SPIE meeting on Active and Adaptive optical system, M. Ealey, ed., San Diego, Juil. 1991, SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 248–253.
- [Roddier-a-93] C. RODDIER ET F. RODDIER, *Wave-front reconstruction from defocused images and testing of ground based optical telescope*, J. Opt. Soc. Am. A, 10(5):957–965, 1993.
- [Roddier-p-94] F. RODDIER, J. ANUSKIEWICZ, J. GRAVES, M. NORTHCOTT, ET C. RODDIER, *Adaptive optics at the university of hawaii i: current performance at the telescope.*, in Ealey et Merkle [Kona-94b], pp. 2–9.

- [Roddier-a-95] F. RODDIER, C. RODDIER, J. GRAVES, ET M. NORTHCOTT, *Adaptive optics imaging of proto-planetary nebulae: Frosty leo and the red rectangle*, Astron. J., 443:249, 1995.
- [Roddier-a-96] C. RODDIER, F. RODDIER, M. J. NORTHCOTT, J. E. GRAVES, ET K. JIM, *Adaptive optics imaging of gg tauri: Optical detection of the circumbinary ring*, Astrophys. J., 463:326–335, 1996.
- [Roddier-l-99] F. RODDIER, ed., *Adaptive Optics in Astronomy*, Cambridge University Press, 1999.
- [RoddierN-a-90] N. RODDIER, *Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials*, Opt. Eng., 29(10):1174–1180, 1990.
- [Roggemann-a-91] M. C. ROGGEDELLA, *Limited degree-of-freedom adaptive optics and image reconstruction*, Appl. Opt., 30(29):4227–4233, 1991.
- [Roggemann-a-92a] M. C. ROGGEDELLA ET C. L. MATSON, *Power spectrum and Fourier phase spectrum estimation by using fully and partially compensating adaptive optics and bispectrum postprocessing*, J. Opt. Soc. Am. A, 9(9):1525–1535, 1992.
- [Root-a-87] W. L. ROOT, *Ill-posedness and precision in object-field reconstruction problems*, J. Opt. Soc. Am. A, 4(1):171–179, Jan. 1987.
- [Rousset-a-87] G. ROUSSET, J.-C. FONTANELLA, J. PRIMOT, ET A. SÈVE, *Imagerie optique à travers la turbulence atmosphérique*, La Recherche Aérospatiale, (5):47–58, 1987.
- [Rousset-a-90] G. ROUSSET, J.-C. FONTANELLA, P. KERN, P. GIGAN, F. RIGAUT, P. LÉNA, P. BOYER, C. ND JAGOUREL, J.-P. GAFFARD, ET F. MERKLE, *First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics*, Astron. Astrophys., 230:29–32, 1990.
- [Rousset-p-91] G. ROUSSET, P. Y. MADEC, ET D. RABAUD, *Adaptive optics partial correction simulation for two telescope by interferometry II*, in High Resolution Imaging, no. 39, Garching, Germany, 1991, ESO, pp. 1095–1104.
- [Rousset-p-92a] G. ROUSSET, P. Y. MADEC, J. L. BEUZIT, J. G. CUBY, P. GIGAN, P. LÉNA, F. RIGAUT, C. BOYER, J. P. GAFFARD, J. C. RICHARD, M. VITTOT, E. GENDRON, N. HUBIN, ET F. MERKLE, *The Come-On-Plus project*, in Adaptive Optics for Large Telescopes, Maui, 1992, OSA.
- [Rousset-p-93a] G. ROUSSET, *Wavefront sensing*, in Adaptive Optics for Astronomy, Cargèse, France, 1993, ASI, pp. 115–137.
- [Rousset-p-93b] G. ROUSSET, J. L. BEUZIT, N. HUBIN, E. GENDRON, C. BOYER, P. Y. MADEC, P. GIGAN, J. C. RICHARD, M. VITTOT, J. P. GAFFARD, F. RIGAUT, ET P. LÉNA, *The Come-On-Plus adaptive optics system: results and performance*, in Active and Adaptive Optics, Garching, Germany, 1993, ICO.
- [Rousset-p-96] G. ROUSSET, G. MOLODIJ, ET S. LAURENT, *Modal wavefront correlations in laser guide star adaptive optics*, in Adaptive Optics, O. T. D. Series, ed., vol. 13, Maui, Hawaii, Juil. 96, OSA, pp. AMB34–1–AMB34–4.
- [Rousset-p-98] G. ROUSSET, F. LACOMBE, P. PUGET, N. HUBIN, E. GENDRON, J.-M. CONAN, P. KERN, P.-Y. MADEC, D. RABAUD, D. MOUILLET, A.-M. LAGRANGE, ET F. RIGAUT, *Design of the Nasmyth Adaptive Optics System (NAOS) of the VLT*, in Astronomical Telescopes & Instrumentation, D. Bonaccini et R. K. Tyson, eds., vol. 3353, Kona, Hawaii, Mars 1998, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Rousset-l-99a] G. ROUSSET, *Wave-front sensors*, in Roddier [Roddier-l-99], ch. 5, pp. 91–130.
- [Rousset-p-00] G. ROUSSET, F. LACOMBE, P. PUGET, E. GENDRON, P. ARSENAULT, R. KERN, D. RABAUD, P.-Y. MADEC, N. HUBIN, G. ZINS, E. STADLER,

- J. CHARTON, P. GIGAN, ET P. FAUTRIER, *Status of the VLT Nasmyth Adaptive Optics System (NAOS)*, in Astronomical Telescopes and Instrumentation, Munich, Mars 2000, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Saddlemeyer-p-98] L. SADDLEMYER, G. HERRIOT, J.-P. VÉRAN, ET J. FLETCHER, *Design aspects of the reconstructor for the gemini adaptive optics system (altair)*, in Adaptive Optical System Technologies, D. Bonaccini et R. K. Tyson, eds., Kona, Hawaii, Mars 1998, SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 150–159.
- [Sandler-l-99] D. G. SANDLER, *Overview of adaptive optics with laser beacons*, in Roddier [Roddier-l-99], ch. 11, pp. 255–330.
- [Sarazin-a-90] M. SARAZIN ET F. RODDIER, *The E.S.O differential image motion monitor*, Astron. Astrophys., 227:294–300, 1990.
- [Sarazin-t-92] M. SARAZIN, *Caractérisation des propriétés optiques de la turbulence atmosphérique: Application au choix du site du VLT de l'Observatoire Européen Austral (ESO)*, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille, Aix-Marseille France, Sept. 1992.
- [Sasiela-l-95] R. J. SASIELA, *Electromagnetic Wave propagation in Turbulence Evaluation and Application of Mellin Transforms*, Springer-Verlag, 1995.
- [Schultz-a-93] T. J. SCHULTZ, *Multiframe blind deconvolution of astronomical images*, J. Opt. Soc. Am. A, 10(5):1064–1073, 1993.
- [Schwartz-a-94] C. SCHWARTZ, G. BAUM, ET E. N. RIBAK, *Turbulence-degraded wave fronts as fractal surfaces*, J. Opt. Soc. Am. A, 11(1):444–451, 1994.
- [Sechaud-p-91] M. SÉCHAUD, G. ROUSSET, V. MICHAU, J. C. FONTANELLA, J. G. CUBY, F. RIGAUT, ET J. C. RICHARD, *Wavefront sensing in imaging through the atmosphere : a detector strategy*, in Active and Adaptive optical components, vol. 1543, San Diego, United States of America, 1991, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Sechaud-l-99] M. SÉCHAUD, *Wave-front compensation devices*, in Roddier [Roddier-l-99], ch. 4, pp. 57–90.
- [Sechaud-p-99] M. SÉCHAUD, F. MAHÉ, T. FUSCO, V. MICHAU, ET J.-M. CONAN, *High resolution imaging through atmospheric turbulence: link between anisoplanatism and intensity fluctuations*, in Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems V, Florence, Italy, Sept. 1999, ESO/SPIE, pp. 243–249.
- [Seldin-p-94] J. H. SELDIN ET P. R. G., *Phase-diverse speckle reconstruction of solar data*, in Image Reconstruction and Restoration, vol. 2302, San Diego, CA (USA), 1994, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Seldin-p-99] J. H. SELDING, P. R. G., C. D. A., C. U. KELLER, ET T. RIMMELE, *Deconvolution of narrow-band solar images using aberrations estimated from phase-diverse imagery*, in Digital Image Recovery and Synthesis, vol. 3815, Denver, CA (USA), Juil. 1999, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Shack-a-71] R. B. SHACK ET B. C. PLATT, *Production and use of a lenticular hartmann screen*, J. Opt. Soc. Am., 61:656, 1971.
- [Sheppard-a-98] D. G. SHEPPARD, B. R. HUNT, ET M. W. MARCELLIN, *Iterative multiframe superresolution algorithms for atmospheric-turbulence-degraded imagery*, J. Opt. Soc. Am. A, 15(4):978–992, 1998.
- [Stone-a-94] J. STONE, P. H. HU, S. P. MILLS, ET S. MA, *Anisoplanatic effects in finite-aperture optical systems*, J. Opt. Soc. Am. A, 1994.

- [Takami-p-98] H. TAKAMI, N. TAKATO, M. OTSUBO, T. KANZAWA, Y. KAMATA, K. NAKASHIMA, ET M. IYE, *Adaptive optics system for cassegrain focus of subaru 8.2-m telescope*, in Bonaccini et Tyson [Kona-98], pp. 500–507.
- [Tallon-a-90] M. TALLON ET R. FOY, *Adaptive telescope with laser probe: isoplanatism and cone effect*, Astron. Astrophys., 235:549–557, 1990.
- [Tallon-p-92] M. TALLON, R. FOY, ET J. VERNIN, *Wide field adaptive optics using an array of laser guide stars*, pp. 555–565, 1992.
- [Tatarski-l-61] V. TATARSKI, *Wave Propagation In a Turbulent Medium*, Dover Publications, Inc. New York, 1961.
- [Taylor-a-38] G. I. TAYLOR, *The spectrum of turbulence*, Proc. R. Soc. London. Ser. A, 64:476, 1938.
- [Thelen-p-99] B. J. THELEN, D. A. CARRARA, ET R. G. PAXMAN, *Fine-resolution imagery of extended objects observed through volume turbulence using phase-diverse speckle*, in Propagation through the Atmosphere III, vol. 3763, Denver, CA (USA), Juil. 1999, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., pp. 102–111.
- [Thiebaut-a-95] E. THIÉBAUT ET J.-M. CONAN, *Strict a priori constraints for maximum-likelihood blind deconvolution*, J. Opt. Soc. Am. A, 12(3):485–492, 1995.
- [Tikhonov-l-77] A. TIKHONOV ET V. ARSENIN, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, DC, 1977.
- [Titterington-a-85] D. M. TITTERINGTON, *General structure of regularization procedures in image reconstruction*, Astron. Astrophys., 144:381–387, 1985.
- [Tokovinin-a-00] A. TOKOVININ, M. LE LOUARN, ET M. SARAZIN, *Isoplanatism in multi-conjugate adaptive optics system*, J. Opt. Soc. Am. A, submitted.
- [Troxel-a-94] S. TROXEL, B. WELSH, ET M. ROGGEVANN, *Off-axis optical transfer function calculations in an adaptive-optics system by means of a diffraction calculation for weak index fluctuations*, J. Opt. Soc. Am. A, 11:2100–2111, 1994.
- [Tyler-a-94] G. A. TYLER, *Merging: a new method for tomography through random media*, J. Opt. Soc. Am. A, 11(1):409, 1994.
- [VanKampen-p-98] W. VAN KAMPEN ET R. G. PAXMAN, *Multi-Frame Blind Deconvolution of Infinite-Extent Object*, in Propagation and Imaging through the Atmosphere II, San Diego, CA (USA), Juil. 1998, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [VanTrees-l-68] H. L. VAN TREES, *Detection, Estimation, and Modulation Theory. Part I: Detection, Estimation, and Linear Modulation Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [Veran-a-97] J.-P. VÉRAN, F. RIGAUT, H. MAÎTRE, ET D. ROUAN, *Estimation of the adaptive optics long exposure point spread function using control loop data*, J. Opt. Soc. Am. A, 14(11):3057–3069, 1997.
- [Veran-t-97] J.-P. VÉRAN, *Estimation de la réponse impulsionale et restauration d'image en optique adaptative Application au système d'optique adaptative du Télescope Canada-France-Hawaii*, Thèse de doctorat, Université de PARIS XI, Nov. 1997.
- [Veran-p-98] J.-P. VÉRAN ET J.-L. BEUZIT, *High precision astrometry and photometry on binary stars acquired with pueo*, in Astronomy with adaptive optics: present results and future programs, Sonthofen, Sept. 1998, ESO/OSA.
- [Veran-a-00] J.-P. VÉRAN, *Control of the unilluminated deformable mirror actuators in an altitude-conjugated adaptive optics system*, J. Opt. Soc. Am. A, 17(7):1477–1491, 2000.

- [Vernin-a-94] J. VERNIN ET C. MUÑOZ-TUNÓN, *Optical seeing at la palma observatory. II. intensive site testing campaign at the nordic optical telescope*, Astron. Astrophys., 284:311–318, 1994.
- [Vernin-a-98] J. VERNIN, E. MASCIADRI, ET R. AVILA, *New approaches in atmospheric optics: Generalized scidar and seeing prediction*, New Astronomy Reviews, 42:405–408, 1998.
- [Voits-a-99] V. V. VOITSEKHOVICH ET S. BARA, *Effect of anisotropic imaging in off-axis adaptive astronomical systems*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 137:pp 385–389, Juin 1999.
- [Wallner-a-83] E. P. WALLNER, *Optimal wave-front correction using slope measurements*, J. Opt. Soc. Am. A, 73(12):pp 1771–1776, Dec. 1983.
- [Walters-a-97] D. L. WALTERS ET B. L. W., *Measurements of r_0 and θ_0 : two decades and 18 sites*, Appl. Opt., 1997.
- [Wang-a-78] J. Y. WANG ET J. K. MARKEY, *Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion*, J. Opt. Soc. Am., 68(1):78–87, 1978.
- [Weigelt-a-77] G. WEIGELT, *Modified astronomical speckle interferometry “speckle masking”*, Opt. Commun., 21(1):55–59, 1977.
- [Winker-a-91] D. M. WINKER, *Effect of a finite outer scale on the zernike decomposition of atmospheric optical turbulence*, J. Opt. Soc. Am. A, 8(10):1568, 1991.
- [Wizinowich-p-00] P. L. WIZINOWICH, D. S. ACTON, O. LAI, W. GATHRIGHT, P. J. LUPTON, ET P. J. STOMSKI, *Performance of the keck adaptive optics facility: the first year at the telescope.*, Munich, Germany, Mars 2000, SPIE/ESO.
- [Ziad-p-99] A. ZIAD, F. MARTIN, R. CONAN, ET J. BORGNIKO, *Generalized Seeing Monitor (GSM) : a dedicated monitor for wavefront optical parameter measurements*, in Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems III, Florence, Italy, Sept. 1999, ESO/SPIE.