Лабораторная работа №6

Решение моделей в непрерывном и дискретном времени

Тазаева Анастасия Анатольевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Основной целью работы является освоение специализированных пакетов для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

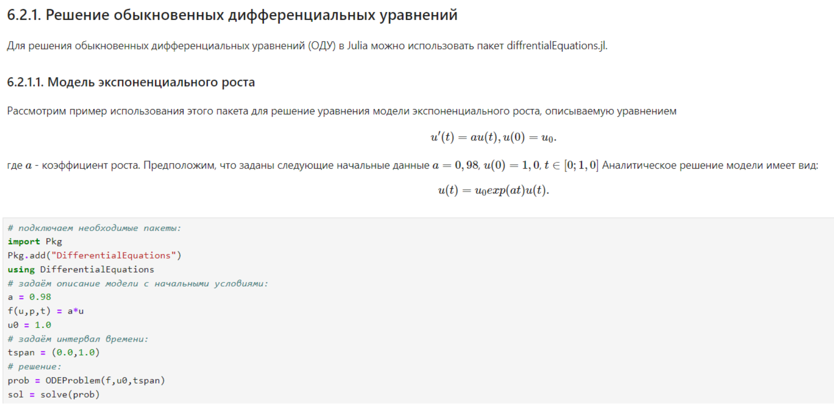
2 Задание

1. Используя Jupyter Lab, повторите примеры из раздела 6.2.
2. Выполните задания для самостоятельной работы (раздел 6.4).

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Примеры из раздела 6.2

Примеры представлены на рис. 3.1 - 3.8.



6.2.1. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в Julia можно использовать пакет diffrentialEquations.jl.

6.2.1.1. Модель экспоненциального роста

Рассмотрим пример использования этого пакета для решение уравнения модели экспоненциального роста, описываемую уравнением

$$u'(t) = au(t), u(0) = u_0.$$

где a - коэффициент роста. Предположим, что заданы следующие начальные данные $a = 0,98$, $u(0) = 1,0$, $t \in [0;1,0]$ Аналитическое решение модели имеет вид:

$$u(t) = u_0 exp(at)u(t).$$

```
# подключаем необходимые пакеты:
import Pkg
Pkg.add("DifferentialEquations")
using DifferentialEquations
# задаём описание модели с начальными условиями:
a = 0.98
f(u,p,t) = a*u
u0 = 1.0
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,1.0)
# решение:
prob = ODEProblem(f,u0,tspan)
sol = solve(prob)
```

Рис. 3.1: Модель экпоненциального роста. Часть 1

```
# подключаем необходимые пакеты:
Pkg.add("Plots")
using Plots
# строим графики:
plot(sol, linewidth=2,title="Модель экспоненциального роста", xaxis="Время",yaxis="u(t)",label="u(t)")
plot!(sol.t, t->1.0*exp(a*t),lw=3,ls=:dash,label="Аналитическое решение")
```

```
   Resolving package versions...
  No Changes to `C:\Users\noname\.julia\environments\v1.10\Project.toml`
  No Changes to `C:\Users\noname\.julia\environments\v1.10\Manifest.toml`
```

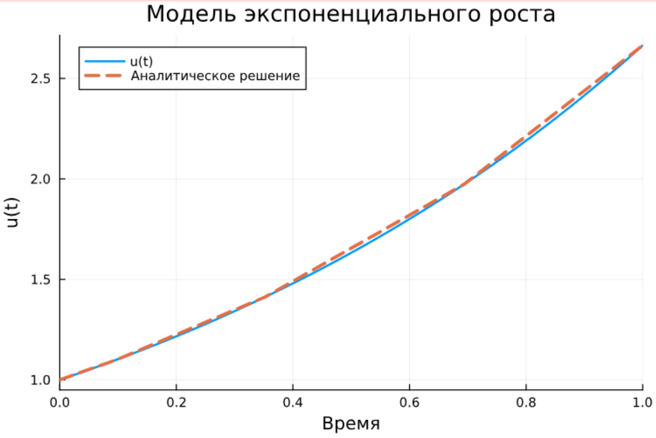


Рис. 3.2: Модель экпоненциального роста. Часть 2

```
# задаём точность решения:
sol = solve(prob,abstol=1e-8,reltol=1e-8)
#println(sol)
# строим график:
plot(sol, lw=2, color="black", title="Модель экспоненциального роста", xaxis="Время",yaxis="u(t)",label="Численное решение")
plot!(sol.t, t->1.0*exp(a*t),lw=3,ls=:dash,color="red",label="Аналитическое решение")
```

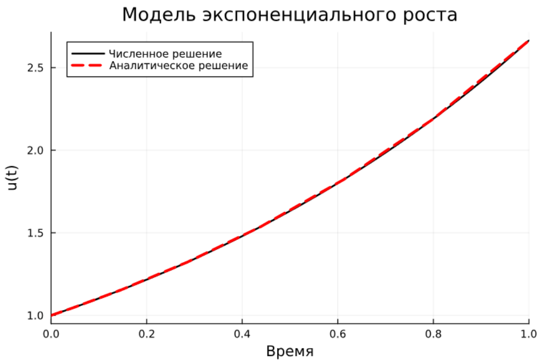


Рис. 3.3: Модель экпоненциального роста. Часть 3

6.2.1.2. Система Лоренца

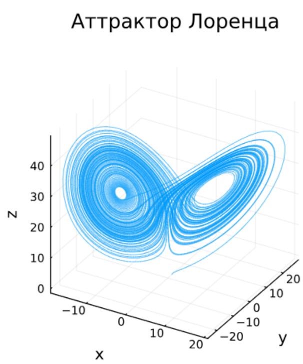
Динамической системой Лоренца является нелинейная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

где σ, ρ, β— параметры системы (некоторые положительные числа, обычно указывают $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3}$). Система получена из системы уравнений Навье–Стокса и описывает движение воздушных потоков в плоском слое жидкости постоянной толщины при разложении скорости течения и температуры в двойные ряды Фурье с последующем усечением до первых-вторых гармоник. Решение системы неустойчиво на аттракторе, что не позволяет применять классические численные методы на больших отрезках времени, требуется использовать высокоточные вычисления. Численное решение в Julia будет иметь следующий вид:

```julia
# задаём описание модели:
function lorenz!(du,u,p,t)
σ,ρ,β = p
du[1] = σ*(u[2]-u[1])
du[2] = u[1]*(ρ-u[3]) - u[2]
du[3] = u[1]*u[2] - β*u[3]
end
# задаём начальное условие:
u0 = [1.0,0.0,0.0]
# задаём значения параметров:
p = (10,28,8/3)
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,100.0)
# решение:
prob = ODEProblem(lorenz!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob)
# строим график:
plot(sol, vars=(1,2,3), lw=0.5, title="Аттрактор Лоренца", xaxis="x",yaxis="y", zaxis="z",legend=false)
```

Рис. 3.4: Система Лоренца. Часть 1



Можно отключить интерполяцию

```julia
# отключаем интерполяцию:
plot(sol,vars=(1,2,3),denseplot=false, lw=0.5, title="Аттрактор Лоренца", xaxis="x",yaxis="y", zaxis="z",legend=false)
```

Аттрактор Лоренца

Рис. 3.5: Система Лоренца. Часть 2

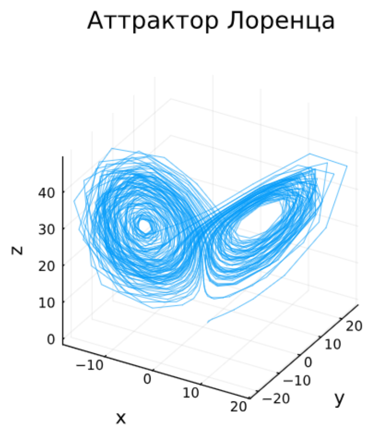


Рис. 3.6: Система Лоренца. Часть 3

6.2.2. Модель Лотки–Вольтерры

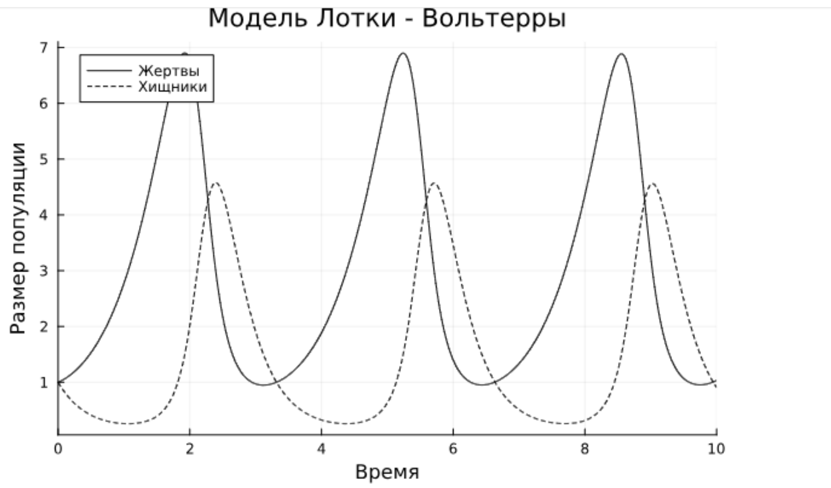
Модель Лотки–Вольтерры описывает взаимодействие двух видов типа «хищник – жертва»:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta y)x, \\ \dot{y} = (-\gamma + \delta x)y \end{cases}$$

где x — количество жертв, y — количество хищников, t — время, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами (в данном случае α — коэффициент рождаемости жертв, γ — коэффициент убыли хищников, β — коэффициент убыли жертв в результате взаимодействия с хищниками, δ — коэффициент роста численности хищников). Численное решение в Julia будет иметь следующий вид (рис. 6.5):

```
# подключаем необходимые пакеты:
import Pkg
Pkg.add("ParameterizedFunctions")
using ParameterizedFunctions, DifferentialEquations, Plots;
# задаём описание модели:
lv! = @ode_def LotkaVolterra begin
dx = a*x - b*x*y
dy = -c*y + d*x*y
end a b c d
# задаём начальное условие:
u0 = [1.0,1.0]
# задаём значения параметров:
p = (1.5,1.0,3.0,1.0)
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,10.0)
# решение:
prob = ODEProblem(lv!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob)
plot(sol, label = ["Жертвы" "Хищники"], color="black", ls=[:solid :dash], title="Модель Лотки - Вольтерры", xaxis="Время",yaxis="Размер популяции")
```

Рис. 3.7: Модель Лотки-Вольтерры. Часть 1




```
# фазовый портрет:
plot(sol,vars=(1,2), color="black", xaxis="Жертвы",yaxis="Хищники", legend=false)
```

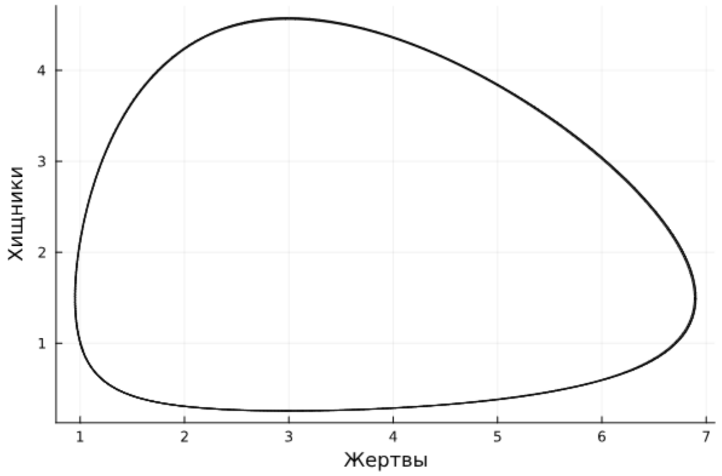


Рис. 3.8: Модель Лотки-Вольтерры. Часть 2

3.2 Самостоятельная работа

Примеры представлены на рис. 3.9 - 3.21.

Задание 1

Реализовать и проанализировать модель роста численности изолированной популяции (модель Мальтуса):

$$\dot{x} = ax, a = b - c.$$

где $x(t)$ — численность изолированной популяции в момент времени t, a — коэффициент роста популяции, b — коэффициент рождаемости, c — коэффициент смертности. Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).

```
#x'(t)=ax(t)
#a=b-c
# задаём описание модели с начальными условиями:
b = 1.36 # коэф.рождаемости
c = 0.98 # коэф.смертности
a = b - c
f(x,p,t) = a*x
x0 = 1.0
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,100.0)
# решение:
prob = ODEProblem(f,x0,tspan)
sol = solve(prob)
# строим графики:
plot(sol, linewidth=2,title="Модель Мальтуса", xaxis="Время",yaxis="x(t)",label="x(t)")
```

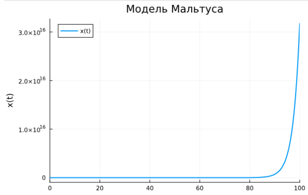


Рис. 3.9: Задание 1

```
import Pkg
Pkg.add("Distributions")
using Distributions
import Pkg
Pkg.add("Statistics")
```

```
   Resolving package versions...
  No Changes to `C:\Users\noname\.julia\environments\v1.10\Project.toml`
  No Changes to `C:\Users\noname\.julia\environments\v1.10\Manifest.toml`
   Resolving package versions...
  No Changes to `C:\Users\noname\.julia\environments\v1.10\Project.toml`
  No Changes to `C:\Users\noname\.julia\environments\v1.10\Manifest.toml`
```

```
task1_gif = @animate for i in 1:100
    tspan = (0,i)
    prob_1 = ODEProblem(f,x0,tspan)
    sol_1 = solve(prob_1)
    plot(xlim=[0,100], ylim=[0,1*10^16], xticks=(0:20:100), legend=false, title="Модель Мальтуса")
    plot!(sol_1)
end
gif(task1_gif, "Модель Мальтуса.gif", fps = 10)
```

```
[ Info: Saved animation to C:\Users\noname\Модель Мальтуса.gif
```

Рис. 3.10: Задание 1. Продолжение

Задание 2

Реализовать и проанализировать логистическую модель роста популяции, заданную уравнением:

$$\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}), r > 0, k > 0,$$

r — коэффициент роста популяции, k — потенциальная ёмкость экологической системы (предельное значение численности популяции). Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).

```julia
# задаём описание модели с начальными условиями:
r = 1.12
k = 100
f(x,p,t) = r*x*(1-x/k)
x0 = 1.0
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,10.0)
# решение:
prob = ODEProblem(f,x0,tspan)
sol = solve(prob)
# строим графики:
plot(sol, linewidth=2,title="Логистическая модель роста попул", xaxis="Время",yaxis="x(t)",label="x(t)")
```

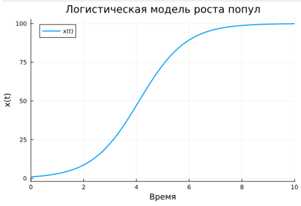


Рис. 3.11: Задание 2

```julia
task2_gif = @animate for i in 1:10
    tspan = (0,i)
    prob = ODEProblem(f,x0,tspan)
    sol = solve(prob)
    plot(xlim=[0,10], ylim=[0,100], xticks=(0:2:10), legend=false, title="Модель роста популяции")
    plot!(sol)
end
gif(task2_gif, "Задание 2.gif", fps = 10)
```

```
[ Info: Saved animation to C:\Users\noname\Задание 2.gif
```

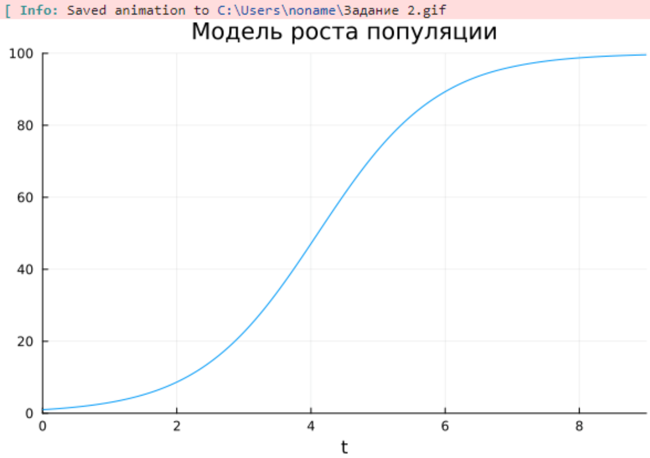


Рис. 3.12: Задание 2. Продолжение

Задание 3

Реализовать и проанализировать модель эпидемии Кермака–Маккендрика (SIR-модель):

$$\begin{cases} \dot{s} = -\beta i s, \\ \dot{i} = \beta i s - v i, \\ \dot{r} = v i \end{cases}$$

где $s(t)$ — численность восприимчивых к болезни индивидов в момент времени t, $i(t)$ — численность инфицированных индивидов в момент времени t, $r(t)$ — численность переболевших индивидов в момент времени t, β — коэффициент интенсивности контактов индивидов с последующим инфицированием, v — коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов. Численность популяции считается постоянной, т.е. $\dot{s} + \dot{i} + \dot{r} = 0$. Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).

```
#using ParameterizedFunctions, DifferentialEquations, Plots;
task3! = @ode_def KerMak begin
    ds = -β*i*s
    di = β*i*s-υ*i
    dr = υ*i
end β υ
# задаём начальное условие:
u0 = [10.0,0.1,0.1]
# задаём значения параметров:
p = (0.009,0.005)
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,500)
# решение:
prob = ODEProblem(task3!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob)
plot(sol, title = "Модель эпидемии" )
```

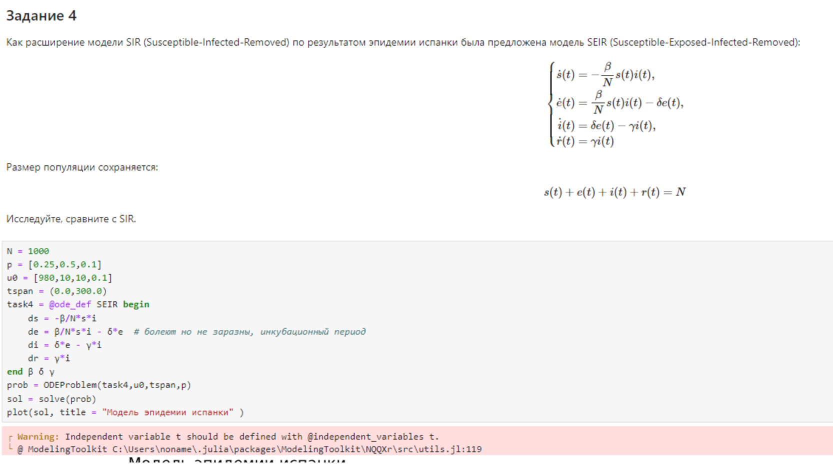
```
┌ Warning: Independent variable t should be defined with @independent_variables t.
└ @ ModelingToolkit C:\Users\noname\.julia\packages\ModelingToolkit\NQQXr\src\utils.jl:119
```


Рис. 3.13: Задание 3


```
task3_gif = @animate for i in 1:29
    plot(xlim=(0,500), ylim=(0,10), legend=false, title = "Модель эпидемии" )
    plot!(sol[1:i])
end
gif(task3_gif,"Задание 3.gif", fps=6)
```

```
[ Info: Saved animation to C:\Users\noname\Задание 3.gif
```


Рис. 3.14: Задание 3. Продолжение



Задание 4

Как расширение модели SIR (Susceptible-Infected-Removed) по результатом эпидемии испанки была предложена модель SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed):

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -\frac{\beta}{N} s(t)i(t), \\ \dot{e}(t) = \frac{\beta}{N} s(t)i(t) - \delta e(t), \\ \dot{i}(t) = \delta e(t) - \gamma i(t), \\ \dot{r}(t) = \gamma i(t) \end{cases}$$

Размер популяции сохраняется:

$$s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = N$$

Исследуйте, сравните с SIR.

```
N = 1000
p = [0.25,0.5,0.1]
u0 = [980,10,10,0.1]
tspan = (0.0,300.0)
task4 = @ode_def SEIR begin
    ds = -β/N*s*i
    de = β/N*s*i - δ*e  # болеют но не заразны, инкубационный период
    di = δ*e - γ*i
    dr = γ*i
end β δ γ
prob = ODEProblem(task4,u0,tspan,p)
sol = solve(prob)
plot(sol, title = "Модель эпидемии испанки" )
```

```
┌ Warning: Independent variable t should be defined with @independent_variables t.
└ @ ModelingToolkit C:\Users\noname\.julia\packages\ModelingToolkit\NQQXr\src\utils.jl:119
```

Рис. 3.15: Задание 4

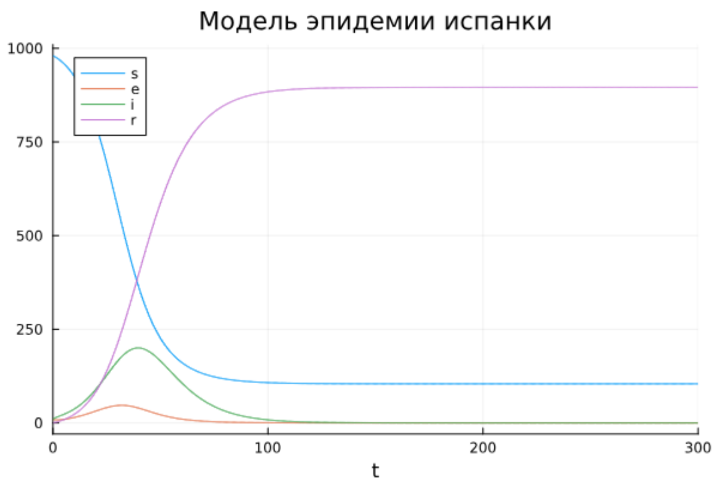


Рис. 3.16: Задание 4. Продолжение

Задание 5

Для дискретной модели Лотки–Вольтерры:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = aX_1(t)(1 - X_1(t)) - X_1(t)X_2(t), \\ X_2(t+1) = -cX_2(t) + dX_1(t)X_2(t). \end{cases}$$

с начальными данными a = 2, c = 1, d = 5 найдите точку равновесия. Получите и сравните аналитическое и численное решения. Численное решение изобразите на фазовом портрете

```
function task5(x0, p, t)
    a, b, c, d = p #parameters
    x1 = [x0[1]] #vector
    x2 = [x0[2]]
    for i=2:t
        res_x1 = a*x1[end]*(1-x1[end])-b*x1[end]*x2[end] #x1(t+1)
        append!(x1, res_x1)
        res_x2 = -c*x2[end]+d*x1[end-1]*x2[end] #x2(t+1)
        append!(x2, res_x2)
    end
    return [x1, x2]
end

#задаем параметры, по условию b=1, остальное на вкус
p = [2, 1, 1, 1.9]
x0 = [0.2, 2]
tspan = 5

sol = task5(x0, p, tspan)
plot(sol, title = "Модель Лотки - Вольтерра" )
```

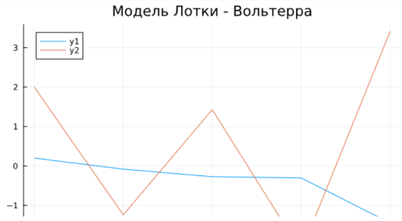


Рис. 3.17: Задание 5

Задание 6

Реализовать на языке Julia модель отбора на основе конкурентных отношений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta x y, \\ \dot{y} = \alpha y - \beta x y. \end{cases}$$

Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет.

```
function task6(du, u, p, t)
    α,β = p
    du[1] = α*u[1]-β*u[1]*u[2]
    du[2] = α*u[2]-β*u[1]*u[2]
end
p = [0.1, 0.2]
u0 = [25, 50]
tspan = 5
prob = ODEProblem(task6, u0, tspan, p)
sol = solve(prob)
```

```
retcode: Success •••
```

```
plot(sol, title = "Модель отбора на основе конкурентных отношений" )
```

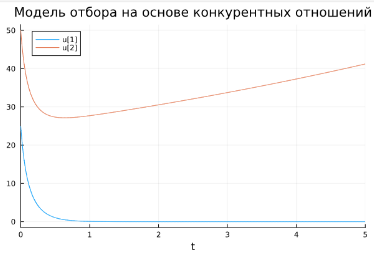
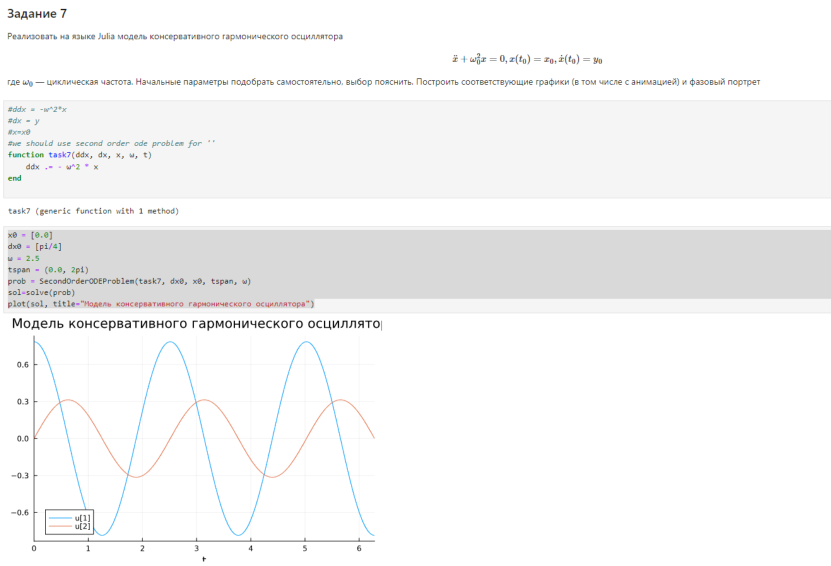


Рис. 3.18: Задание 6



Задание 7

Реализовать на языке Julia модель консервативного гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0$$

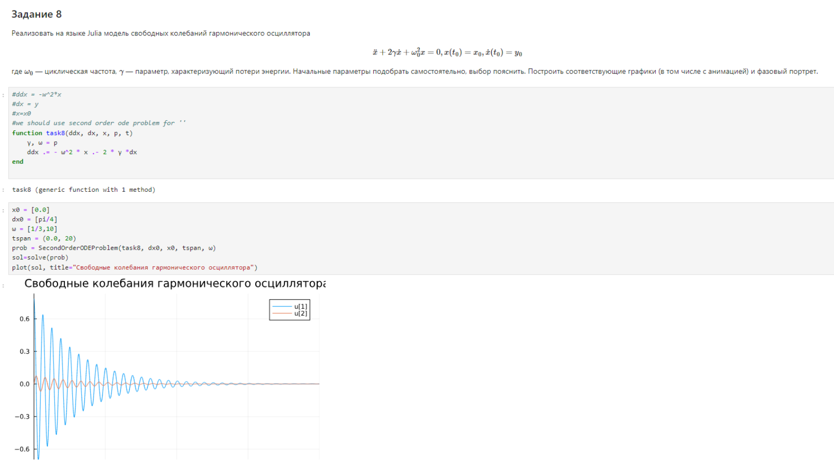
где ω_0 — циклическая частота. Начальные параметры подобрать самостоятельно, выбор пояснить. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет

```
#ddx = -w^2*x
#dx = y
#x=x0
#we should use second order ode problem for ''
function task7(ddx, dx, x, ω, t)
    ddx .= - ω^2 * x
end
```

```
task7 (generic function with 1 method)
```

```
x0 = [0.0]
dx0 = [pi/4]
ω = 2.5
tspan = (0.0, 2pi)
prob = SecondOrderODEProblem(task7, dx0, x0, tspan, ω)
sol=solve(prob)
plot(sol, title="Модель консервативного гармонического осциллятора")
```


Рис. 3.19: Задание 7



Задание 8

Реализовать на языке Julia модель свободных колебаний гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0$$

где ω_0 — циклическая частота, γ — параметр, характеризующий потери энергии. Начальные параметры подобрать самостоятельно, выбор пояснить. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет.

```
#ddx = -w^2*x
#dx = y
#x=x0
#we should use second order ode problem for ''
function task8(ddx, dx, x, p, t)
    γ, ω = p
    ddx .= - ω^2 * x .- 2 * γ *dx
end
```

```
task8 (generic function with 1 method)
```

```
x0 = [0.0]
dx0 = [pi/4]
ω = [1/3,10]
tspan = (0.0, 20)
prob = SecondOrderODEProblem(task8, dx0, x0, tspan, ω)
sol=solve(prob)
plot(sol, title="Свободные колебания гармонического осциллятора")
```


Рис. 3.20: Задание 8

```
plot(sol, vars=(1,2), title="Фазовый портрет модели свободного колебания" )
```

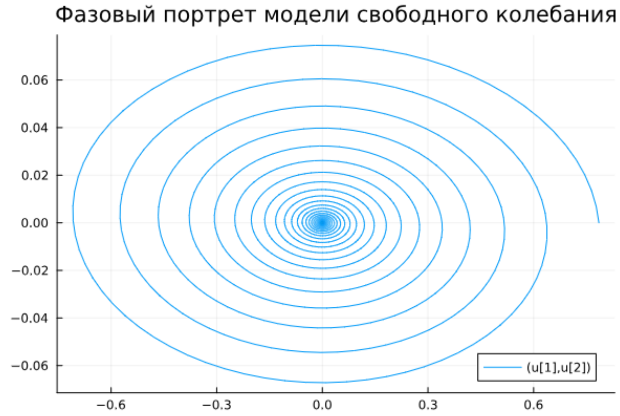


Рис. 3.21: Задание 8. Продолжение

4 Выводы

В ходе лабораторной работы мною были освоены специализированные пакеты для решения задач в непрерывном и дискретном времени.