

Resolución de ejercicios de probabilidad y distribuciones de muestreo

Álvaro Toledo

Texto de referencia: Walpole et al. Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias (9na edición)

Distribución binomial

5.8 De acuerdo con un estudio publicado por un grupo de sociólogos de la Universidad de Massachusetts, aproximadamente 60% de los consumidores de Valium en el estado de Massachusetts empezaron a consumirlo a causa de problemas psicológicos. Calcule la probabilidad de que entre los siguientes 8 consumidores entrevistados de este estado,

- a) exactamente 3 comenzaron a consumir Valium por problemas psicológicos;
- b) al menos 5 comenzaron a consumir Valium por problemas que no fueron psicológicos.

$$\underbrace{P(X=x)}_{f(x)} = \binom{8}{x} 0,6^x \cdot 0,4^{8-x}$$
$$x = 0, 1, \dots, 8$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X=3) &= \binom{8}{3} 0,6^3 \cdot 0,4^5 \\ &= 0,124 \end{aligned}$$

X : n° de personas ... psicológicos

$$X \sim \text{Bin}(n=8, p=0,6)$$

Y : n° de personas... no psicólogos

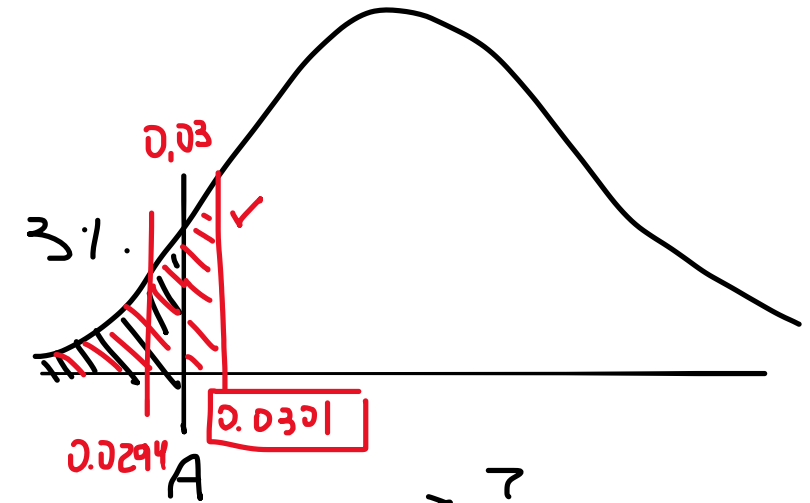
$$Y \sim \text{Bin}(n=8; p=0,4)$$

$$P(Y=y) = \binom{8}{y} 0,4^y \cdot 0,6^{8-y} \quad ; \quad y = 0, \dots, 8$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(Y \geq 5) &= P(Y=5) + P(Y=6) + P(Y=7) + P(Y=8) \\ &= \binom{8}{5} 0,4^5 \cdot 0,6^3 + \binom{8}{6} 0,4^6 \cdot 0,6^2 + \binom{8}{7} 0,4^7 \cdot 0,6^1 + \binom{8}{8} 0,4^8 \cdot 0,6^0 \\ &= 0,124 + 0,041 + 0,008 + 0,00066 \\ &= 0,174 \end{aligned}$$

Distribución Normal

6.17 La vida promedio de cierto tipo de motor pequeño es de 10 años, con una desviación estándar de 2 años. El fabricante reemplaza gratis todos los motores que fallen dentro del periodo de garantía. Si estuviera dispuesto a reemplazar sólo 3% de los motores que fallan, ¿cuánto tiempo de garantía debería ofrecer? Suponga que la duración de un motor sigue una distribución normal.



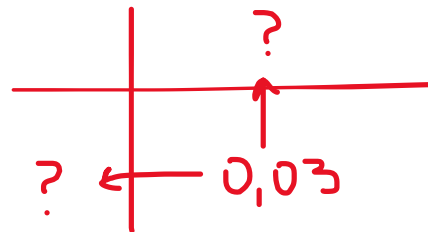
X : duración del motor (años)

$$X \sim \text{Normal}(\mu = 10, \sigma^2 = 2^2)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq A) = 0,03$$

$$P\left(Z \leq \frac{A - 10}{2}\right) = 0,03 \approx 0,0301$$



$$\frac{A - 10}{2} = -1,88 \rightarrow A = 10 - (1,88 \cdot 2) = 6,24 \text{ años}$$

Distribución de la media muestral

8.25 La vida media de una máquina para elaborar pan es de 7 años, con una desviación estándar de 1 año. Suponga que la vida de estas máquinas sigue aproximadamente una distribución normal y calcule

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

- a) la probabilidad de que la vida media de una muestra aleatoria de 9 de estas máquinas caiga entre 6.4 y 7.2 años;
- b) el valor de x a la derecha del cual caería 15% de las medias calculadas de muestras aleatorias de tamaño 9.

$$\mu = 7$$

$$\sigma = 1$$

a) $n = 9$

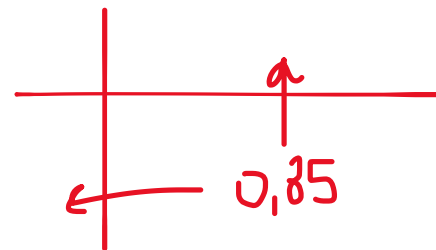
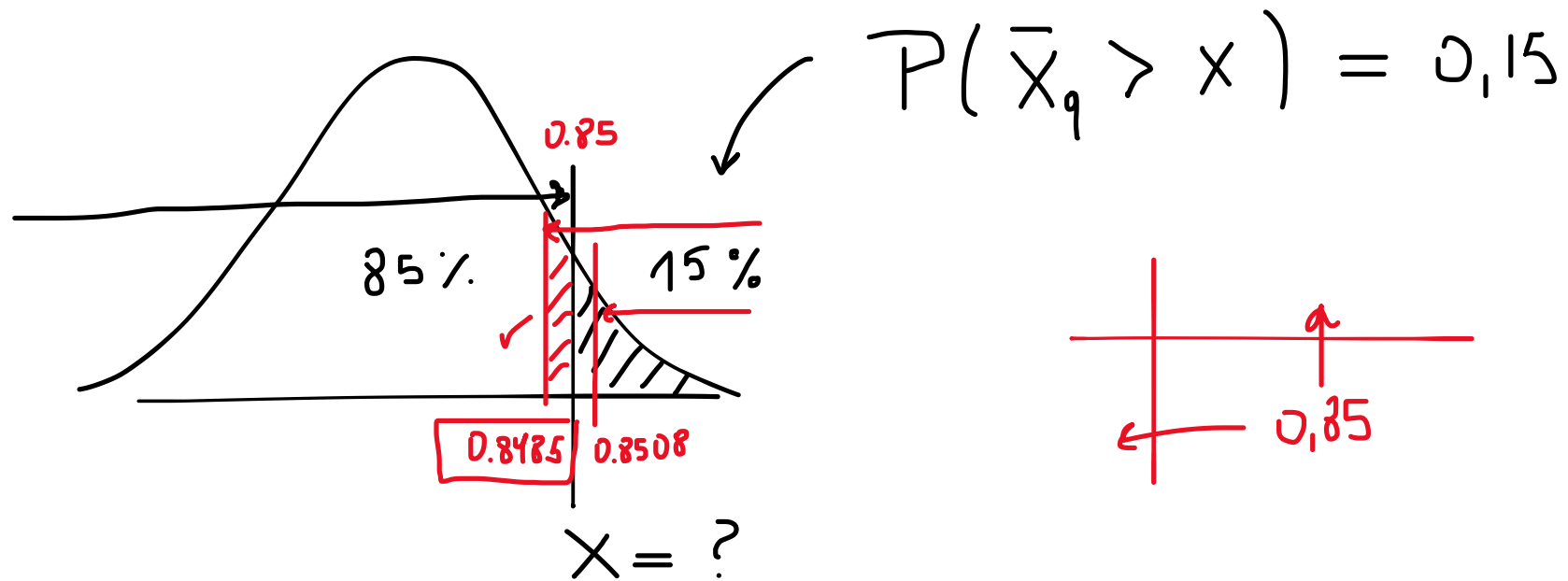
$$P(6.4 \leq \bar{X}_9 \leq 7.2)$$

$$= P\left(\frac{6.4 - 7}{1/\sqrt{9}} \leq Z \leq \frac{7.2 - 7}{1/\sqrt{9}}\right)$$

$$\begin{aligned} &= P(-1.8 \leq Z \leq 0.6) \\ &= P(Z \leq 0.6) - P(Z \leq -1.8) \end{aligned}$$

$$= 0.7257 - 0.0359$$

$$= 0.6898$$



$$P(\bar{X}_9 \leq x) = 0,85$$

$$= P\left(Z \leq \frac{x-7}{\frac{1}{\sqrt{9}}}\right) = 0,85$$

$$= P(Z \leq 3(x-7)) = 0,85 \approx 0,8485$$

$$3(x-7) = 1,03$$

$$x-7 = \frac{1,03}{3}$$

$$x = 7 + \frac{1,03}{3}$$

$$= 7,34 \text{ anos}$$

Distribución de la diferencia de medias muestrales

8.34 En la fabricación de cierto producto de acero se están utilizando dos aleaciones, la A y la B . Se necesita diseñar un experimento para comparar las dos aleaciones en términos de su capacidad de carga máxima en toneladas, es decir, la cantidad máxima de carga que pueden soportar sin romperse. Se sabe que las dos desviaciones estándar de la capacidad de carga son iguales a 5 toneladas cada una. Se realiza un experimento en el que se prueban 30 especímenes de cada aleación (A y B) y se obtienen los siguientes resultados:

$$\bar{x}_A = 49.5, \quad \bar{x}_B = 45.5; \quad \bar{x}_A - \bar{x}_B = 4.$$

Los fabricantes de la aleación A están convencidos de que esta evidencia demuestra de forma concluyente que $\mu_A > \mu_B$ y, por lo tanto, que su aleación es mejor. Los fabricantes de la aleación B afirman que el experimento fácilmente podría haber resultado $\bar{x}_A - \bar{x}_B = 4$, *incluso* si las dos medias de población fueran iguales. En otras palabras, “¡los resultados no son concluyentes!”.

- a) Encuentre un argumento que ponga en evidencia el error de los fabricantes de la aleación B . Para ello calcule

$$P(\bar{X}_A - \bar{X}_B > 4 \mid \mu_A = \mu_B).$$

- b) ¿Considera que estos datos apoyan fuertemente a la aleación A ?

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

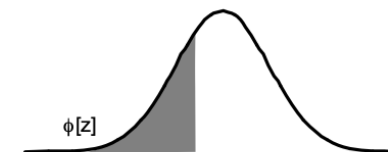
datos :

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \sigma_B = 5 & \sigma_A^2 &= \sigma_B^2 = 25 \\ n_A &= n_B = 30 \end{aligned}$$

$$a) \quad P(\bar{X}_A - \bar{X}_B > 4 \mid \underbrace{\mu_A = \mu_B}_{\mu_A - \mu_B = 0})$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(Z > \frac{4 - 0}{\sqrt{2 \cdot \frac{25}{30}}} \right) = P(Z > 3,09) \\
 &= 1 - P(Z \leq 3,09) \\
 &= 1 - 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Tabla de valores de probabilidad acumulada (Φ) para la Distribución Normal Estándar



z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000