Ejercicios resueltos de propiedades de estimadores

Estadística II – Inferencia Estadística

Álvaro Toledo

A continuación, se presentan los resultados al lanzar 20 veces una moneda **(no necesariamente equilibrada):**

Eventos: C: cara, S: sello

$X_1 = 1$ $X_2 = 0$

C	S	S	S	C	S	C	S	S	S
C	C	C	S	S	C	S	C	S	C

Se define la variable aleatoria X_i: número de caras al lanzar una moneda una vez. $i = 1,..,20$.

a) Describa la distribución de la población asociada al **experimento aleatorio** e indique el parámetro de interés.

b) Se propone como estimador para el parámetro de la distribución planteada en a) la proporción muestral, es decir:

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

¿Es $\bar{p}$ un estimador insesgado?.

c) Estime puntualmente la proporción de caras.

d) Obtenga el error cuadrático medio del estimador $\bar{p}$.

$$X_i = \begin{cases} 0 \; ; & \text{sello} \\ 1 \; ; & \text{cara} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, 20$

a) $X_i \sim Bin(n=1, p)$

$X_i \sim Ber(p) \quad \forall\, i = 1, \ldots, 20$

El parámetro de interés es la proporción de caras “p”

$\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 1 \cdot p = p$

$Var(X) = \cancel{n}^{1} \cdot p \cdot (1-p) = p \cdot (1-p)$

b) $\bar{p} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\underline{\mathbb{E}(\bar{p})} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}\, p = \underline{p}$$

$\therefore \; \bar{p}$ es insesgado

c) $\hat{p} = \frac{1}{20} \cdot 9 = \frac{9}{20} = 0{,}45$; $X_i \sim Bin\,(n=1,\ \hat{p} = 0{,}45)$

d) $ECM(\hat{p}) = Var(\hat{p}) + Sesgo^2(\hat{p})$; $\bar{p} = \hat{p}$

$\hat{p}$ es insesgado $\longrightarrow$ $sesgo(\hat{p}) = 0$

$\therefore\ ECM(\hat{p}) = Var(\hat{p})$

$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} p(1-p)$

por m.a.

$= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} \cdot p\,(1-p)$

$ECM(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$

Sea $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$ v.a, iid con $E(X_i)=\mu$ y $V(X_i)=2\mu^2$, i=1,…,4. Considere los estimadores $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ de la media poblacional. Se sabe de ellos lo siguiente:

$$\boxed{E(\hat{\mu}_1)=3\mu},\quad E(\hat{\mu}_2)=\mu,\quad Var(\hat{\mu}_2)=\frac{\mu^2}{4},\quad ECM(\hat{\mu}_1)=\frac{5\mu^2}{\cancel{4}}$$

→ insesgado !!!

a) Determine la varianza de $\hat{\mu}_1$
b) Determine el ECM de $\hat{\mu}_2$.
c) ¿Cuál de los dos estimadores es mejor? Justifique su respuesta.

a) $$\underbrace{ECM(\hat{\mu}_1)}_{5\mu^2} = \underbrace{Var(\hat{\mu}_1)}_{?} + \underbrace{\text{sesgo}^2(\hat{\mu}_1)}$$

Obs: $\text{sesgo}(\hat{\mu}_1) = E(\hat{\mu}_1)-\mu$
$= 3\mu-\mu = 2\mu$

$$5\mu^2 = Var(\hat{\mu}_1) + 4\mu^2$$
$$Var(\hat{\mu}_1) = 5\mu^2 - 4\mu^2 = \mu^2$$

b) $ECM(\hat{\mu}_2) = Var(\hat{\mu}_2) = \frac{\mu^2}{4}$

c) $ECM(\hat{\mu}_1) = 5\mu^2 \quad > \quad ECM(\hat{\mu}_2) = \frac{\mu^2}{4}$; $\mu \neq 0$

$\hat{\mu}_2$ es mejor estimador que $\hat{\mu}_1$

Si $\mu = 0$, entonces, $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ son iguales (ninguno es mejor que el otro) m.a

Sea X_1, X_2 y X_3 v.a, iid con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$ .Considere los siguientes estimadores puntuales de la media poblacional.

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$
$$\hat{\mu}_2 = \left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right)$$
$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}(3X_1 + 2X_2 + X_3)$$

a) Determine cuál(es) de los estimadores propuestos es insesgado. $E(\hat{\mu}) = \mu$
b) Determine la varianza de los estimadores.
c) Determine el ECM (error cuadrático medio) para los tres estimadores de la media poblacional
d) Determine el EIMV (estimador insesgado de varianza mínima)

a) $\mathbb{E}(\hat{\mu}_1) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{3}\left[\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)\right]$

$= \frac{1}{3}\left[\mu + \mu + \mu\right] = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\mu = \mu$

$\therefore$ $\hat{\mu}_1$ es insesgado.

$\mathbb{E}(\hat{\mu}_2) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_1) + \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_2) + \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_3)$

$= \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{4}\mu = \mu$

$\therefore$ $\hat{\mu}_2$ es insesgado.

$\mathbb{E}(\hat{\mu}_3) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{3}(3X_1 + 2X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(3\mathbb{E}(X_1) + 2\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)\right)$

$= \frac{1}{3} \cdot (3\mu + 2\mu + \mu) = \frac{6}{3}\mu = 2\mu \neq \mu$

$\therefore$ $\hat{\mu}_3$ No es insesgado

b) $Var(\hat{\mu}_1) = Var\left(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{9}\left(Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3)\right)$

$$= \frac{1}{9}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{9}_3} \cdot \cancel{3}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{3}$$

$Var(\hat{\mu}_2) = Var\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right)$

$$= \frac{1}{4}Var(X_1) + \frac{1}{16}Var(X_2) + \frac{1}{16}Var(X_3)$$

$$= \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 = \frac{4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2}{16} = \frac{6}{16}\sigma^2 = \frac{3}{8}\sigma^2$$

$Var(\hat{\mu}_3) = Var\left(\frac{1}{3}(3X_1 + 2X_2 + X_3)\right) = \frac{1}{9}\left(9Var(X_1) + 4Var(X_2) + Var(X_3)\right)$

$$= \frac{1}{9}\left(9\sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{14}{9}\sigma^2$$

c) $$ECM(\hat{\mu}_1) = Var(\hat{\mu}_1) = \frac{\sigma^2}{3}$$

$$ECM(\hat{\mu}_2) = Var(\hat{\mu}_2) = \frac{3}{8}\sigma^2$$

$$ECM(\hat{\mu}_3) = Var(\hat{\mu}_3) + Sesgo^2(\hat{\mu}_3)$$

Previo: $Sesgo(\hat{\mu}_3) = \mathbb{E}(\hat{\mu}_3) - \mu = 2\mu - \mu = \mu$

$$\therefore ECM(\hat{\mu}_3) = \frac{14}{9}\sigma^2 + \mu^2$$

$\frac{1}{3} \quad \frac{3}{8}$

$8 < 9$

d) $$Var(\hat{\mu}_1) = \frac{\sigma^2}{3} < Var(\hat{\mu}_2) = \frac{3}{8}\sigma^2$$

$\therefore \hat{\mu}_1$ es EIMV

Considere tres muestras aleatorias de tamaño $n_1 = 20$, $n_2 = 10$ y $n_3 = 8$ de una población con media μ y varianza σ^2. Sean $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ y $\hat{\sigma}_3^2$ las respectivas varianzas muestrales insesgadas determinadas en base a estas muestras aleatorias.

$$E(\hat{\sigma}_i^2) = \sigma^2 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Se define un estimador de σ^2 dado por la combinación de los tres estimadores anteriores de la forma:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{20\,\hat{\sigma}_1^2 + 10\,\hat{\sigma}_2^2 + 8\,\hat{\sigma}_3^2}{38}$$

¿Es $\hat{\sigma}^2$ un estimador insesgado de σ^2?. Justifique.

Sí

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{20\hat{\sigma}_1^2 + 10\,\hat{\sigma}_2^2 + 8\,\hat{\sigma}_3^2}{38}\right)$$

$$= \frac{1}{38}\left(20\,E(\hat{\sigma}_1^2) + 10\,E(\hat{\sigma}_2^2) + 8\,E(\hat{\sigma}_3^2)\right) = \frac{1}{\cancel{38}}\overbrace{\left(20\sigma^2 + 10\sigma^2 + 8\sigma^2\right)}^{\cancel{38}\sigma^2}$$

$$= \sigma^2$$

De una muestra aleatoria de 30 individuos a los cuales se les consultó respecto a la cantidad de dinero que gastan mensualmente en videojuegos se obtuvo el siguiente resumen mediante la función "análisis de datos" proporcionada por Excel.

Invertido (Miles de pesos: M$)	
Media	55,5
Error estándar	18,46
Mediana	47,3
Moda	49,5
Desviación estándar	$\boxed{11,2}$ = S
Varianza de la muestra	125,44
Curtosis	-0,5968
Coeficiente de asimetría	0,1465
Rango	46
Mínimo	31,6
Máximo	77,6
Suma	1557,7
Cuenta	30

Se está interesado en estimar la verdadera media respecto a la cantidad de dinero invertida (en miles de pesos). Asumiendo normalidad de las observaciones y que históricamente la desviación estándar es 12 M$: $\boxed{\sigma = 12}$

Indique el estimador puntual de la verdadera media de la cantidad de dinero gastada (en miles de pesos), además, indique la varianza de tal estimador puntual (debe especificar la forma y el valor en cada caso). ¿Es posible determinarlo con la información proporcionada?

El estimador puntual de la media es la media aritmética (muestral)

v.a's

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad n = 30 \rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} X_i$$

$$= \overline{X}$$

$$Var(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{30}$$

Por enunciado $\sigma = 12$

$$\therefore \quad Var(\hat{\mu}) = \frac{12^2}{30} = \frac{144}{30} = 4{,}8$$