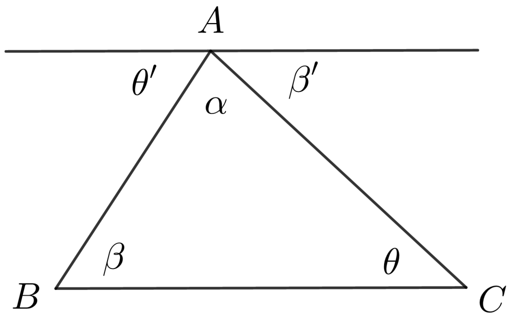
Demostraciones

1. Teorema de suma de los ángulos de un triángulo.

La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.

Demostración:



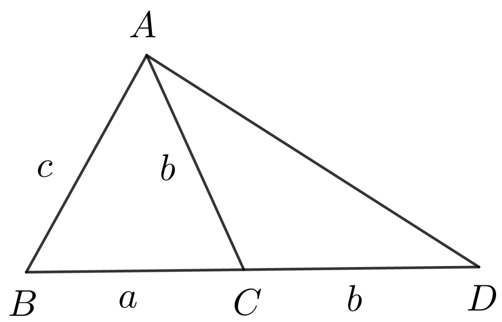
Sea un triángulo ABC, por el vértice A trazamos una recta paralela al lado BC.
Definimos el $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$ y $\angle C = \theta$ y definimos respectivamente los ángulos alternos internos que están en la paralela a BC como β' y θ'. (1)
Por definición y ser ángulo alternos internos, $\beta = \beta'$ y $\theta = \theta'$ (2)
Por (1), los ángulos α, β' y θ' forman un ángulo llano. (3)
Por (2) y (3), $\alpha + \beta + \theta = \alpha + \beta' + \theta' = 180°$ (4)
Por (4), los ángulos internos de un triángulo sumas $180°$

2.1. Desigualdad del triángulo.

Para cualquier triángulo tenemos que la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado. Es decir, si llamamos a, b y c a las longitudes de los lados del triángulo, tenemos que las siguientes tres desigualdades se cumplen

$$a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a$$

Demostración:

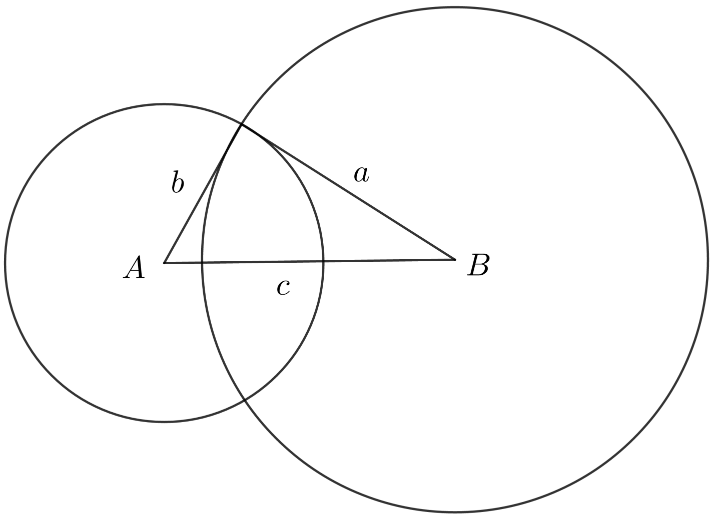


Sea D un punto sobre la prolongación del lado BC del triángulo ABC, tal que $AC = CD$ (1)
Por (1), $BD = BC + CD = a + b$ (2)
Por (2), el triángulo ADC es isósceles (3)
Por (3) y $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$, $\angle BAD > \angle CAD = \angle CDA$ (4)
Se demostrará lo siguiente, si un triángulo ABC se cumple que $\angle A > \angle B$ entonces $a > b$. (*)
Sea D un punto sobre AC tal que $CD = CB$.
Como $\angle A > \angle B$, el punto D no está sobre $\overline{AC}$ (5)
Por (5) y definición de D, $CA < CD = BC$ (6)
Por (6), se cumple que $a > b$.
Por (4) y (*), $a + b > c$. (7)
De manera análoga se demuestra que, $a + c > b$ y $b + c > a$.

2.2. Teorema.

Si a, b y c son números positivos tales que $a + b > c, a + c > b$ y $c + b > a$, entonces existe un triángulo de lados a, b y c.

Demostración:



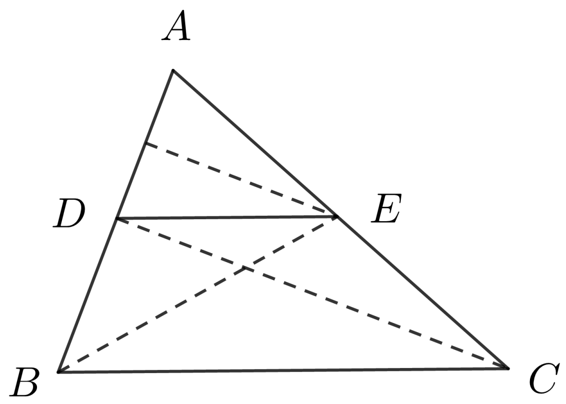
Construimos un triángulo con lados iguales a a, b y c.
Podemos suponer que $a \leq b \leq c$ y consideramos un segmento AB de longitud c.
Trazamos ahora dos circunferencias una con centro en A y radio b y otra con centro en B y radio a.
Como $c < a + b$, las dos circunferencias se intersectan (en caso contrario se tendría que $a + b \leq c$). Uno de los puntos de intersección sirve como el tercer vértice C, del triángulo buscando ABC.

3.1. Primer teorema de Thales.

En el triángulo ABC, sean D y E puntos de AB y AC respectivamente, tales que DE es paralela a BC. Entonces

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Demostración:



Se considera el triángulo ABC y DE una recta paralela a la base.
Por ser BC paralelo a DE, los triángulos ABC y ADE tienen alturas paralelas. (1)
Sea la altura h_1 que va desde E hacia AB y h_2 que va desde C hacia AB. (2)
Por (1) y (2), $\dfrac{(ABE)}{(ADE)} = \dfrac{h_1 \cdot AB}{h_1 \cdot AD} = \dfrac{AB}{AD}$ (3)
Análogamente a (3), $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{(ADC)}{(ADE)}$ (4)
Los triángulos DEB y DEC tienen DE como base común y como DE y BC son paralelos, las respectivas alturas miden lo mismo. (5)
Por (5), $(DBE) = (DCE)$ (6)
Por (6), $(ABE) = (ADE) + (DBE) = (ADE) + (DCE) = (ADC)$ (7)
Por (3), (4) y (7); tenemos que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$

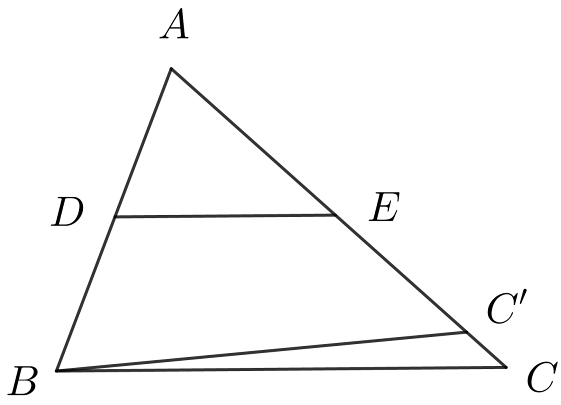
3.1.1. Teorema.

Si en el triángulo ABC tenemos puntos D y E sobre los lados AB y AC respectivamente, tales que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

entonces DE es paralela a BC.

Demostración:



Supongamos que DE no es paralela a BC. Sea BC' la recta que pasa por B paralela a DE y supongamos que intersecta a AC en C".

Por el primer teorema de Thales, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC'}{AE}$. (1)

Por hipótesis, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$. (2)

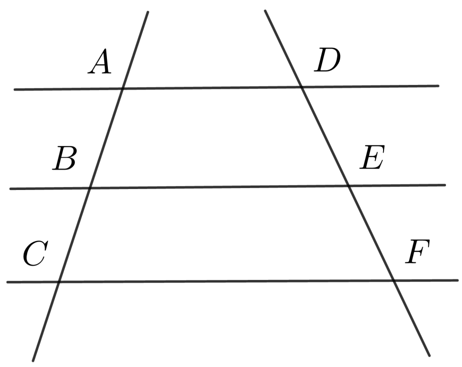
Por (1) y (2), $\dfrac{AC'}{AE} = \dfrac{AC}{AE}$. (3)

Por (3), $AC' = AC$. (4)

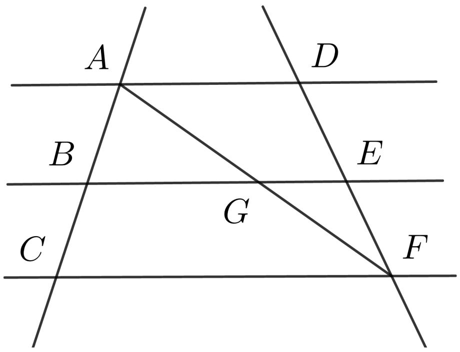
Por (4), $C' = C$ entonces DE es paralela a BC.

3.2 Segundo teorema de Thales.

Consideremos tres rectas y dos rectas transversales a éstas como se muestra en la figura. Tenemos que si AD, BE o CF son paralelas entonces $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$, Recíprocamente, si $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD, BE o CF son paralelas entonces las tres rectas son paralelas.



Demostración:



Sea la transversal AF a las tres rectas AD, BE y CF y llamamos G al punto de intersección de AF con BE.
Aplicando el teorema anterior a los triángulos ACF y FAD, que las rectas AD, BE y CF son paralelas si y sólo si

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF} \ y \ \frac{FG}{GA} = \frac{FE}{ED}$$

Son paralelas si y sólo si $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{ED}{FE} = \dfrac{DE}{EF}$ (1)

Supongamos que BE y CF son paralelas y que la otra reta AD cumple que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$ (2)

Por ser BE y CF paralelas, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AG}{GF}$ (3)

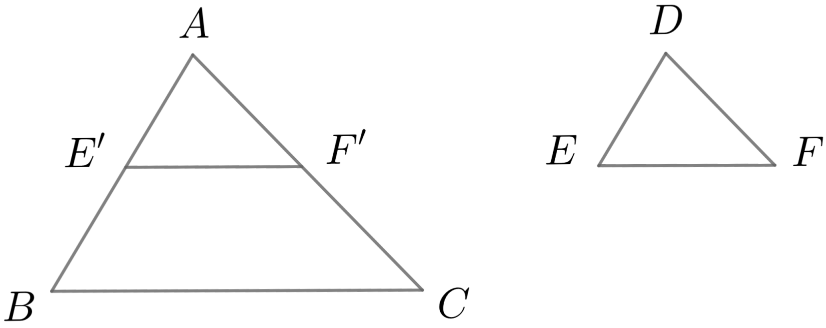
Por ser (2) y (3), $\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{AG}{GF}$. (4)

Por (4) y el primer teorema de Thales, GE y por lo tanto BE es paralelo a AD.

4.1. Teorema de semejanza $\angle - \angle - \angle$

Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales entonces sus lados correspondiente son proporcionales y los triángulos son semejantes.

Demostración:



Por definición para que dos triángulos sean semejantes se debe cumplir las siguientes condiciones.

Todos sus ángulos sean iguales y que $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$.

Sean ABC y DEF dos triángulos con ángulos correspondientes iguales, el problema es equivalente a demostrar que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{BC}{EF}$. (1)

Sean E' y F' dos puntos AB y AC respectivamente, tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. (2)

Por criterio de congruencia $L - A - L$, tenemos que los triángulos AEF y DEF son congruentes. (3)

Por (3), $\angle AE'F' = \angle DEF$ (4)

Por hipótesis y (4) $\angle AE'F' = \angle ABC$ (5)

Por (5), son $E'F'$ y BC paralelas. (6)

Por (6) y el primer teorema de Thales, $\dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AC}{AF'}$ (7)

Por (2) y (6), $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$

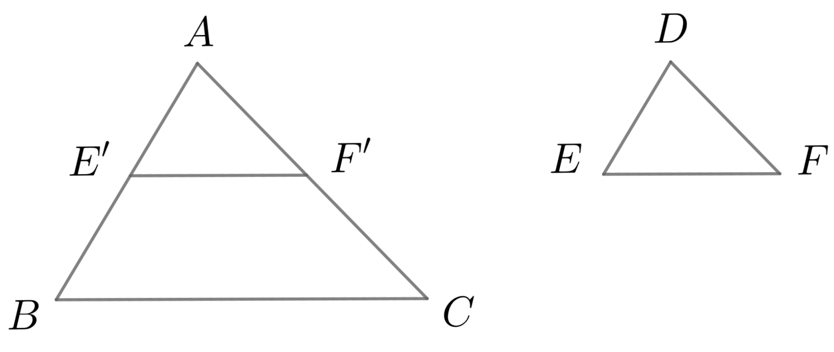
De manera análoga se demuestra que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{BC}{EF}$. (8)

Por (1) y (8), se cumplen el teorema de semejanzas $A - A - A$.

4.2 Teorema de semejanza $L - \angle - L$.

Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre éstos es igual, entonces son semejantes.

Demostración:



Por hipótesis y sin perdida de generalidad se considera dos triángulos ABC y DEF tales que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ y $\angle BAC = \angle EDF$

Sean E' y F' los puntos sobre el lado AB y AC tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$ (1)

Por el criterio de congruencia $L - A - L$, tenemos que los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes. (2)

Por (2), $\dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AC}{AF'}$ (3)

Por el teorema fundamental de la proporcionalidad (Teorema 3.1.1), EF es paralelo a BC. (4)

Por (4), los ángulos $\angle ABC$ y $\angle AEF$ son iguales. (5)

Por hipótesis y (5), $\angle BAC = \angle EAF$ (6)

Por (6) y el teorema de semejanza $A - A - A$, los triángulos ABC y $AE'F'$ son semejantes (7)

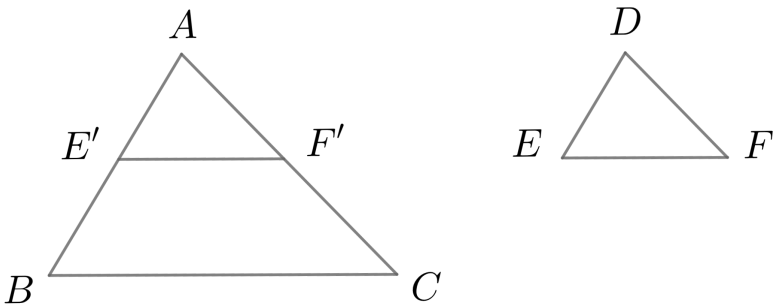
Por (7), los triángulos ABC y DEF son semejantes. (8)

Por(8), se cumple el teorema de semejanza de $L - A - L$.

4.3 Teorema de semejanza $L - L - L$.

Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales entonces los triángulos son semejantes.

Demostración:



Por hipótesis sean ABC y DEF dos triángulos que cumplen: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$ (1)

Sean E' y F' los puntos en AB y AC respectivamente, tales que $DE = AE'$ y $DF = AF'$ (2)

Sustituyendo (2) en (1), $\dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AC}{AF'}$ (3)

Por definición los triángulos ABC y AEF comparten el ángulo en A (4)

Por (1), (4) y el teorema de semejanza $L-A-L$, los triángulos ABC y $AE'F'$ son semejantes. (5)

Por definición de semejanza, $\dfrac{E'F'}{BC} = \dfrac{AE'}{AB}$ (6)

Por (2) y (6), $E'F' = BC\dfrac{DE}{AB}$. (7)

Por (1) y (7), $EF = E'F'$ (8)

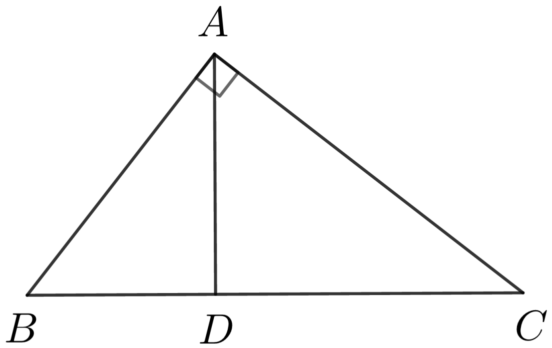
Por hipótesis (8) y el criterio de congruencia $L - L - L$, los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes (9)

Por (9), los triángulos ABC y DEF son semejantes

5.1 Teorema de Pitágoras.

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración:



Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice A y sea AD altura sobre la hipotenusa BC.

Por hipótesis y por el teorema de semejanzas de triángulos L-L-L, ABC es semejante a DBA. (1)

Análogo a (1), los rectángulos ABC y DAC (2)

Por (1), $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{CB}{AB}$ (3)

Por (3), $AB^2 = DB \cdot CB$ (4)

Por (2), $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CB}{CA}$ (5)

Por (5), $CA^2 = CD.CB$ (6)

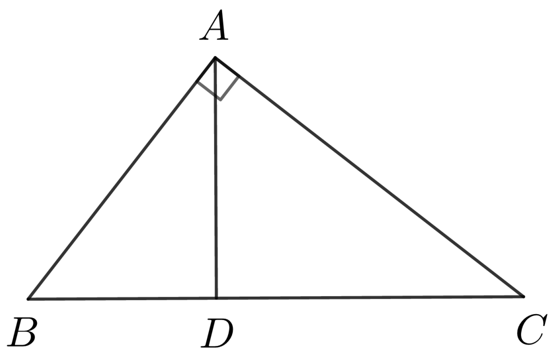
AL sumar (4) y (6), tenemos que $AB^2 + CA^2 = DB \cdot CB + CD \cdot CB$ (7)

Por hipótesis, $DB \cdot CB + CD \cdot CB = (CD + DB) \cdot CB = CB^2$ (8)

Por (7) y (8), $AB^2 + CA^2 = CB^2$

5.2 Teorema recíproco del Pitágoras.

Si un triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo.



Demostración:

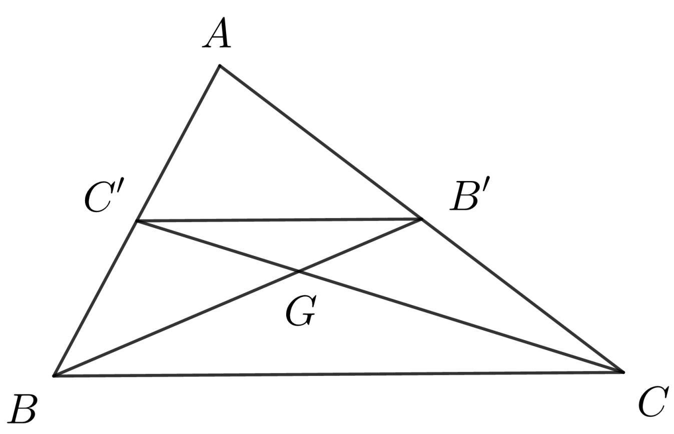
Supongamos que ABC es un triángulo con $BC^2 = AB^2 + CA^2$. (1)
Por (1), $BC > AB$ y $BC > AC$. (2)
Por(2), los ángulos en B y C son menores a $90°$.
Sea D el pie de la perpendicular de A sobre BC.
Por ser los triángulos ABD y ADC rectángulos con ángulo recto en D y el teorema de Pitágoras, $AB^2 = BD^2 + AD^2$ y $CA^2 = AD^2 + DC^2$. (3)
Por (3), $2AD^2 + BD^2 + DC^2 = AB^2 + CA^2 = BC^2 = (BD + DC)^2 = BD^2 + 2BD \cdot DC + DC^2$. (4)
Por (4), $AD^2 = BD \cdot DC$ (5)
Lema: Sea ABC un triángulo, con ángulos en B y C menores a $90^{\cdot}$ y sea D el pie de la altura de A sobre BC. Si $AD^2 = BD \cdot DC$ entonces ABC es triángulo rectángulo. (6)
Trazamos la perpendicular a AB que pasa por A, ésta corta a la recta BC en un punto C' (si no fuera el caso, entonces de tal recta es paralela a BC y resulta entonces que $B = D$, por lo que $AD^2 = BD \cdot DC$ sería falso).
Por hipótesis, ABC' es un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. (7)
Por el teorema de semejanza de triángulo, $\dfrac{AD}{CD'} = \dfrac{BD}{AD}$ (8)
Por (8), $AD^2 = BD \cdot DC'$. (9)
Por hipótesis y análogo a (9),$AD^2 = BD \cdot DC$. (10)
Por (9) y (10), $DC' = DC$ (11)
Por (11), $C = C'$. (12)
Por (12), ABC es triángulo rectángulo y se cumple el lema.
Por (5) y (6), se cumple el teorema.

Nota: La condición de que el triángulo no tenga ángulos obtusos en B y C, obliga a que C' y C queden del mismo lado con respecto a D, entonces D se encuentra entre B y C.

6. Teorema.

Las medianas de un triángulo son concurrentes.

Demostración:

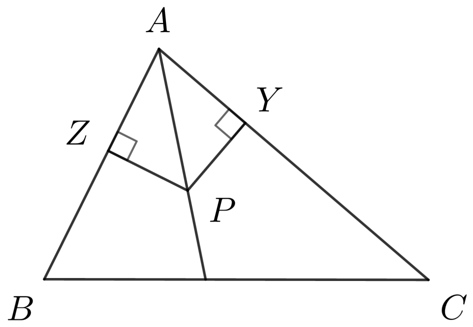


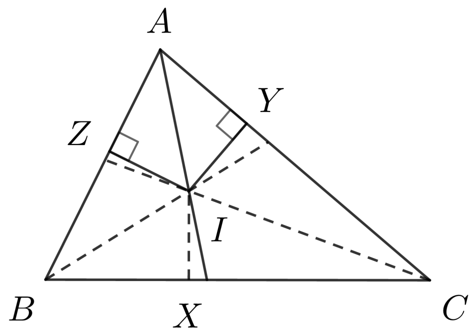
Sean ABC el triángulo y A', B', C' los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente.
Sea G el punto de intersección de las medianas BB' y CC'.
Por hipótesis y el teorema de Thales, $B'C'$ es paralelo a BC. (1)
Por (1) y semejanzas de triángulo, los lados de los triángulos GBC y $GB'C'$ son paralelos. (2)
Por (2), los triángulos son semejantes y en razón de semejanza $2:1$. (3)
Por (3), las medianas BB' y CC' se cortan en el único punto G que divide a la mediana en razón $2:1$. (4)
Por (4), G es el único punto sobre BB' con $\dfrac{BG}{GB'} = \dfrac{2}{1}$ y el único sobre CC' con $\dfrac{CG}{GC'} = \dfrac{2}{1}$. (5)
Análogo a (5) se demuestra que la otra mediana AA' se intersecta con BB'. (6)
Por (5) y (6), las tres medianas se concurren en G.

7. Teorema.

Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes.

Demostración:



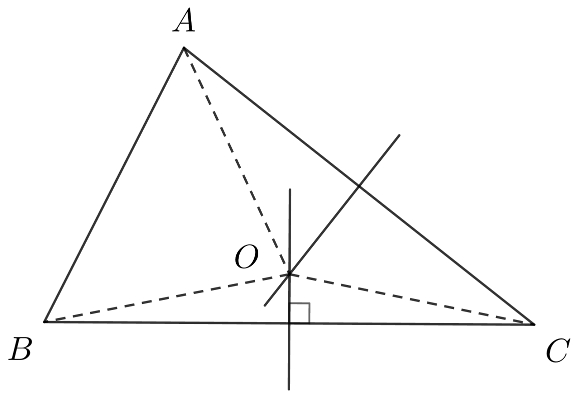


Sea Z el pie de la perpendicular de P sobre AB y Y es el pie de la perpendicular de P sobre CA.
Por criterio de congruencia en los triángulos AZP y AYP, $PZ = PY$. (1)
Sea un punto P dentro del ángulo $\angle CAB$ de un triángulo ABC, que cumpla que $PZ = PY$ donde Y y Z como los pies de la perpendicular de P sobre CA y AB, respectivamente.
Por definición y congruencia de triángulo L-A-L, $\angle PAZ = \angle PAY$. (2)
Por (2), se cumple el recíproco, es decir un punto P que cumpla que $PZ = PY$ necesariamente un punto de la bisectriz interna. (3)
Definimos por b_a, b_b, b_c a las bisectrices internas de los ángulos en A, B, C respectivamente
Sea I el punto de intersección de las bisectrices b_b y b_c (hay punto de intersección, en caso contrario los ángulos en B y C del triángulo sumarían $180°$).
Sean X, Y y Z los pies de las perpendiculares de I sobre los lados BC, CA y AB respectivamente.
Por estar I en la bisectriz b_c y (3), tenemos que $IX = IY$ y por estar I en la bisectriz b_b, tenemos que $IX = IZ$. (4)
Por (4), I cumple $IY = IZ$. (5)
Por (5), I se encuentra en la bisectriz b_a. (6)
Por definición y (6), las bisectrices internas concurren en I.

8. Teorema.

Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.

Demostración:

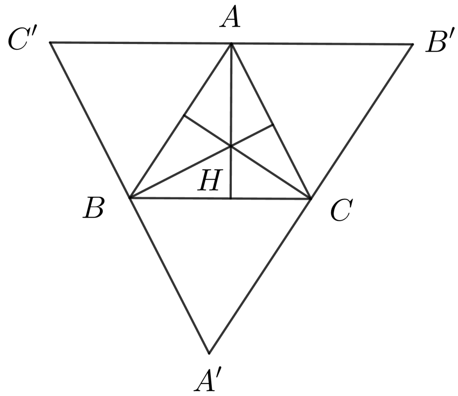


Sean l_a y l_b las mediatrices de los lados BC y CA del triángulo ABC.
Si l_a y l_b son paralelas entonces también BC y CA son paralelos, lo cual es una contradicción. (1)
Por (1), las mediatrices se intersectan y sea O el punto de intersección de estas mediatrices. (2)
Por definición, O está en l_a (3)
Por (3) y congruencia de triángulo, $OB = OC$ (4)
Análogo a (4) en l_b, $OA = OC$. (5)
Por (4) y (5), $OA = OB$. (6)
Por (6), O está en la mediatriz de AB. (7)
Por (7), las mediatrices concurren, que se denota por O, se conoce como el circuncentro del triángulo ABC.

9. Teorema.

Las alturas de un triángulo son concurrentes.

Demostración:



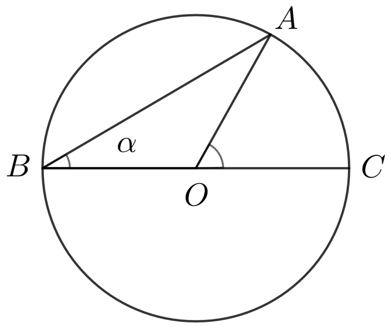
Sea ABC el triángulo y trazamos por cada vértice la recta que es paralela al lado opuesto de tal vértice, estas rectas paralelas determinan un triángulo $A'B'C'$.
Por definición; $ABCB'$, $AC'BC$ y $ABA'C$ son paralelogramos. (1)
Por (1); tenemos que A, B y C son puntos medios de $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$ respectivamente (2)
Por (2), las alturas de ABC son las mediatrices del triángulo ABC (3)
Por (3) y saber que las mediatrices concurren, las alturas que son mediatrices son concurrentes. (4)
Por (4), las alturas de ABC son concurrentes.

10.1. Teorema de la medida del ángulo inscrito.

La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, es la mitad del ángulo central que abre del mismo arco.

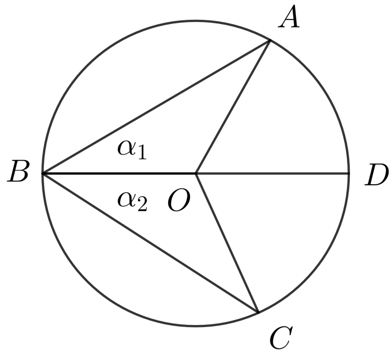
Demostración:

Primer caso.



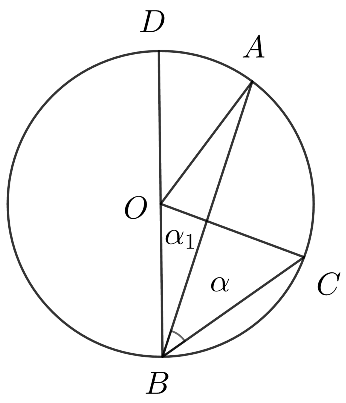
Un lado del ángulo inscrito pasa por el centro de la circunferencia
Definimos como $\alpha = \angle ABC$ que es el ángulo inscrito y que el centro de la circunferencia O se encuentra sobre BC.
Por hipótesis y definición, el triángulo ABO es isósceles. (1)
Por (1), $\angle ABO = \angle BAO = \alpha$ (2)
Por suma de ángulo internos de un triángulo, la medida del ángulo exterior al vértice O del triángulo ABO es la suma de los otros dos ángulos interiores. (3)
Por (3), tenemos que $\angle AOC = 2\alpha$ como queríamos demostrar.

Segundo caso.



El centro de la circunferencia es un punto interior del ángulo
Trazamos la cuerda BD que pase por el centro O.
Definimos el ángulo $\alpha = \angle ABC$, el cual queda divido en dos partes por BD.
Sea $\alpha_1 = \angle ABD$ y $\alpha_2 = DBC$.
Por el primer caso y definición, $\angle AOD = \angle AOD + DOC = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$ y $\angle DOC = 2\alpha_2$. (1)
Por (1), $\angle AOC = \angle AOD + \angle DOC = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$.

Tercer caso.

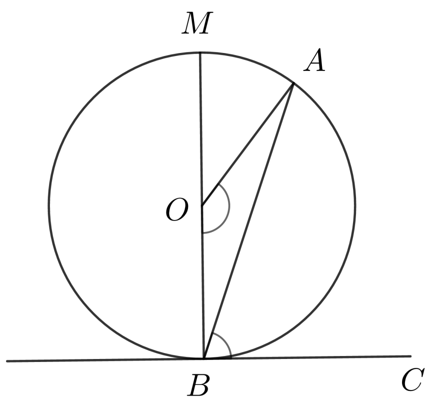


El centro de la circunferencia es un punto exterior del ángulo.
Trazamos el diámetro BD y definimos $\alpha_1 = \angle ABC$ y $\alpha_2 = \angle CDB$.
Por hipótesis, definición y suma de ángulos internos del triángulo; $\alpha = \angle ABC = \alpha_2 - \alpha_1$ (1)
Por el primer caso y definición, $\angle AOD = 2\alpha_1$ y $\angle COD = \alpha_2$. (2)
Por (1) y (2), $\angle COA = \angle COD - \angle AOD = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 = 2\alpha$ como queríamos demostrar.

10.2. Teorema de la medida del ángulo semi-inscrito.

Todo ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

Demostración:

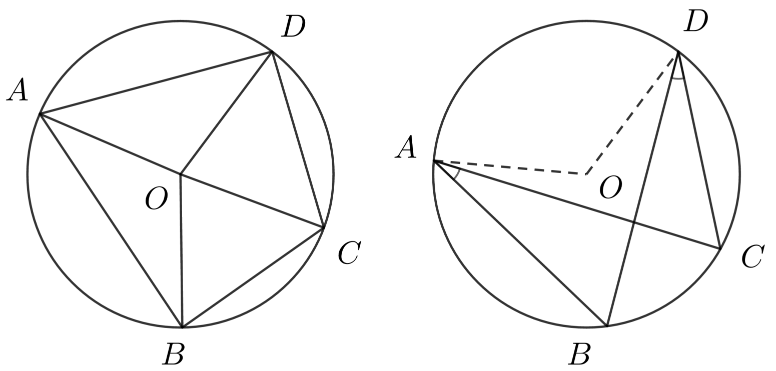


Prolonguemos el radio BO para formar un diámetro BM.
Por ser BC la tangente, el ángulo MBC es recto. (1)
Por (1), $\angle MBC = \dfrac{\angle MOB}{2}$ (2)
Por el teorema del ángulo inscrito, $\angle MBA = \dfrac{\angle MOA}{2}$ (3)
Por (1) y (2), $\angle ABC = \angle MBC - \angle MBA = \dfrac{\angle MOB}{2} - \dfrac{\angle MOA}{2} = \dfrac{\angle AOB}{2}$ que es lo que queríamos demostrar.

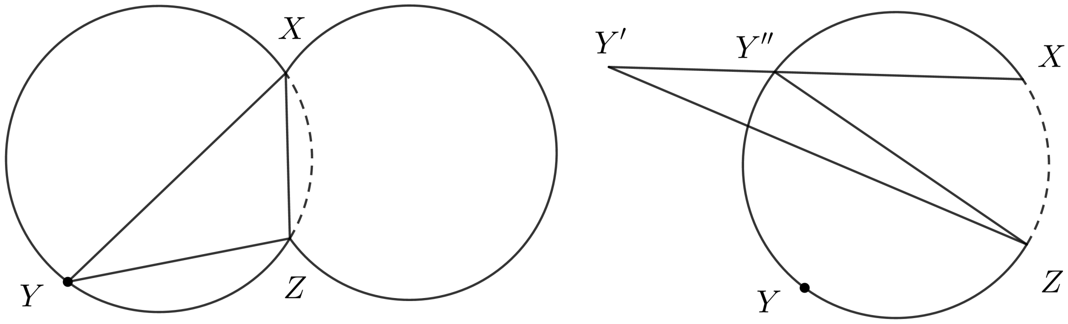
11. Teorema.

Un cuadrilátero convexo es cíclico si y solamente si tiene dos ángulos opuestos suplementarios.

Demostración:



Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea O su centro.
Si el cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia entonces por el teorema del ángulo inscrito, los ángulos inscritos que abren de un mismo tienen la misma medida. (1)
Por (1), $\angle A = \angle BAD = \dfrac{1}{2}\angle BOD$ y $\angle C = \angle DCB = \dfrac{1}{2}\angle DOB$ (2)
Por (2), $\angle BAD + \angle DCB = \dfrac{1}{2}(\angle BOD + \angle DOB) = 180^\circ$ (3)
Recíprocamente, supongamos que los ángulos en A y en C del cuadrilátero convexo $ABCD$ son suplementarios y consideramos el circuncírculo del triángulo BCD. (4)
Por (1) y (4), los puntos P que se encuentran sobre el arco DB opuesto al vértice C, cumplen que el $\angle BPD$ es suplementario al $\angle DCB$. (5)



Supongamos que Y es un punto en el conjunto y construyamos el circuncirculo del triángulo XYZ. Los puntos X y Z dividen a la circunferencia en dos arcos, en uno de ellos se encuentra Y.
Por (1), los puntos del arco que contiene a Y son puntos del conjunto que cumple que $\angle XYZ$ es constante. (6)

Consideramos el arco de circunferencia que resulta de reflejar el arco anterior con respecto a la recta por X y Z, estos pertenecen también al conjunto que cumple que $\angle XYZ$ es constante. (7)

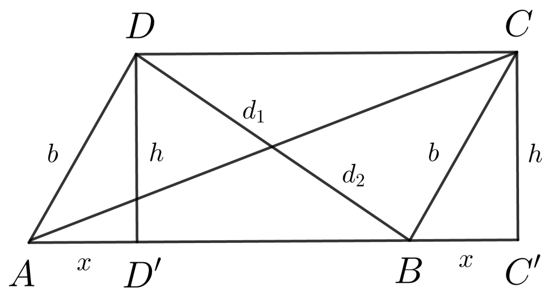
Por (6) y (7), los puntos del conjunto son solamente los puntos de estos arcos.
Supongamos que Y' es un punto del conjunto y que se encuentra en el mismo lado de Y con respecto a la recta por X y Z, caso contrario se considera su reflejo en el otro arco con respecto a XZ
Por definición de Y', $\angle XY'Z = \angle XYZ$ (8)
Si Y' no se encuentra sobre el circuncirculo del triángulo XYZ, llamamos Y" al punto de intersección de XY' con el circuncírculo.
Por (1), $\angle XY"Z = \angle XYZ$. (9)
Por (8) y (9), $Y' = Y"$. (10)
Por el (5) y (10), los puntos que cumplen que el $\angle BPD$ es suplementario al $\angle DCB$ son únicos. (11)
Por (11), A se encuentra el arco DB (12)
Por (12), $ABCD$ es cíclico. (13)
Por (3) y (13), se cumple lo que queríamos demostrar.

12. Ley del paralelogramo.

La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados, es decir, si d_1 y d_2 son las diagonales y a, b los lados, entonces tenemos que

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Demostración:



Sea $ABCD$ un paralelogramo con diagonales d_1 y d_2 y lados $AB = DC = a$, $DA = CB = b$.
Y sean D' y C' los pies de las perpendiculares sobre AB de D y C, respectivamente.
Se construye los triángulos BDD' y $AC'C$ como se muestra en la figura.
Por hipótesis y congruencia de triángulos, $CC' = DD' = h$ y $AD' = BC' = x$.
Por el teorema de Pitágoras y lo anterior,

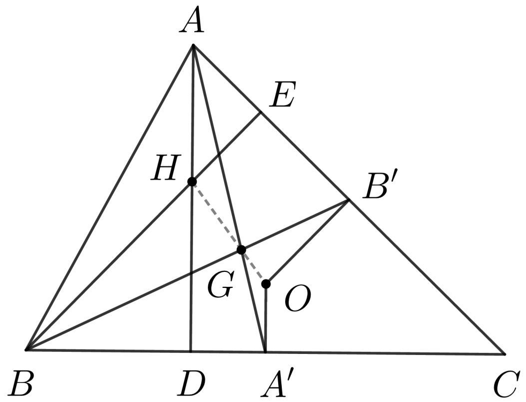
$$b^2 = h^2 + x^2 \quad (1)$$
$$d_1^2 = h^2 + (a - x)^2 \quad (2)$$
$$d_2^2 = h^2 + (a + x)^2 \quad (3)$$

Por (2) y (3), $d_1^2 + d_2^2 = h^2 + (a - x)^2 + h^2 + (a + x)^2 = 2a^2 + 2(h^2 + x^2)$ (4)
Por (1) y (4), $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2(h^2 + x^2) = 2a^2 + 2b^2$ (5)
Por (5), $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

13. Teorema de la recta de Euler

En un triángulo ABC el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la recta de Euler.

Demostración:

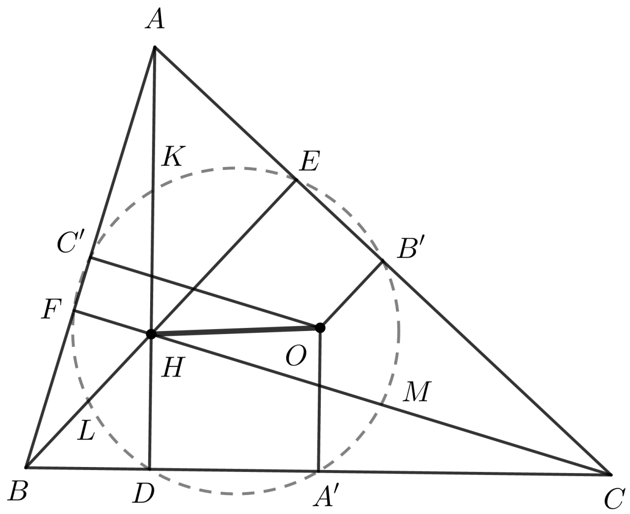


Sean las medianas AA', BB' con centroide G, las alturas AD y BE con ortocentro H y las mediatrices OA' y OB' con circuncentro O.
Por hipótesis, ser sus lados correspondientes paralelos y semejanzas de triángulos $A - A - A$; (1)
los triángulos ABH y $A'B'O$ son semejantes con razón de semejanza es $\dfrac{AB}{A'B'} = 2$
Por (1), $AH = 2A'O$ (2)
Por (2), $AH + 2AO$. (3)
Por ser G el centroide, es conocido que $AG = 2GA'$. (4)
Por hipótesis, AH y $A'O$ son ambas perpendiculares a BC y son paralelas entre si. (5)
Por (5), $\angle HAG = \angle OA'G$ (6)
Por (6), ser A, G ,A' colineales y ángulo opuestos por un vértice; H, G y O son colineales. (7)
Por (7) e hipótesis; el centroide, el ortocentro y el circuncentro son colineales.

14.1. Teorema de la Circunferencia de nueves puntos

Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro, están en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio del circuncentro del triángulo ABC.

Demostración:



Sea C', A' y B' son los puntos medios de los lados AB, BC y CA, los puntos K, L y M son los puntos medios de los segmentos AH, BH y CH donde H es un ortocentro.
Por definición y paralela media, los segmentos $C'B'$ y LM son paralelos al lado BC (1)
Por (1) y paralela media, $C'B' = LM = \frac{1}{2}BC$. (2)
Análogamente, como AH es un lado común de los triángulos BAH y CAH, $C'L$ y $B'M$ son paralelos a AH y $C'L = B'M = \frac{1}{2}AH$. (3)
Por (1) y (3), $B'C'LM$ es un paralelogramo. (4)
Por ser BC y AH perpendiculares y (4), $B'C'LM$ es rectángulo. (5)
Análogo a (5), $A'B'KL$ y $C'A'MK$ son rectángulos. (6)
Es conocido que en un rectángulo las diagonales son iguales y se cortan en su punto medio. (7)
Por (6) y (7), los rectángulos respectivos tienen una diagonal común. (8)
Por (8), $A'K$, $B'L$ y $C'M$ son diámetros de un mismo círculo (el circuncírculo del triángulo medial $A'B'C'$). (9)
Por ser $\angle A'DK$ recto, el círculo con diámetro AK pasa por D, análogamente pasa por E y F. (10)
Por (9) y (10), los puntos $A', B', C', D, E, F, K, L, M$ pertenecen a una misma circunferencia. (11)
Por ser $A'B'C'$ el triángulo medial, su circunradio es la mitad del circunradio del triángulo ABC (12)
Por (11) y (12), es lo que queríamos demostrar.

14.2. Teorema.

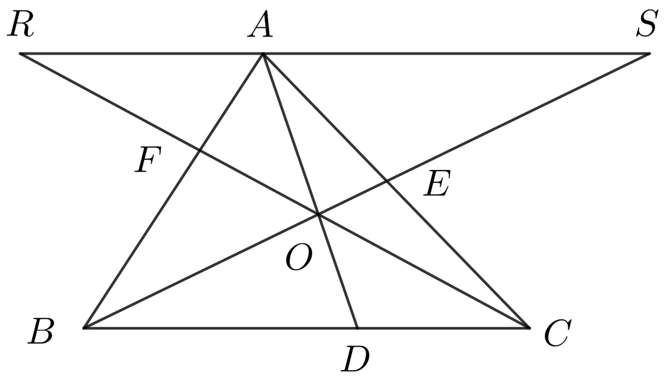
El centro de la circunferencia de nueve puntos se encuentra en la recta de Euler y es el punto medio del segmento HO.

Usando los enunciados y datos de la solución anterior.
Sea N el centro del circuncentro del triángulo $A'B'C'$.
Por (9), los puntos K, L y M son diametralmente opuestos a los puntos A', B' y C'. (13)
Por (13), el triángulo KLM se puede obtener rotando $180°$ al triángulo ABC y viceversa. (14)
Por (14) y definición, esta rotación intercambia los ortocentros H y O. (15)
Por (15), N es el centro también es el circuncentro del triángulo KLM. (16)
Por (16), N es el centro de la circunferencia de Nueve puntos.

15. Teorema de Ceva.

En un triángulo ABC los puntos D, E, F sobre los lados BC, AC, y AB, respectivamente. Las rectas AD, BE y CF concurren en un punto si y sólo si

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$



Demostración:

Se traza una recta l paralela a BC que pasa por A. Sean R y S los puntos de intersección de CF y BE con l, respectivamente.
Por ser l paralelo a BC, los triángulos FAR y FBC son semejantes (1)
Por (1), $\frac{AF}{FB}=\frac{AR}{CB}$ (2)
Análogamente; $\frac{CE}{EA}=\frac{CB}{SA}$, $\frac{BD}{DO}=\frac{SA}{AO}$, $\frac{DO}{DC}=\frac{AO}{AR}$ (3)
Por (3), $\frac{BD}{DC}=\frac{SA}{AR}$ (4)
Por (4) y (3), $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{SA}{AR}\cdot\frac{CB}{SA}\cdot\frac{AR}{CB}=1$

Inversamente, supongamos que BE y CF se intersectan en el punto y supongamos que AO corta a BC en un punto Q.

Por la parte directa de este teorema, $\dfrac{BQ}{QC} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$ (5)

Por hipótesis, $\dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$ (6)

Igualando (5) y (6), $\dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{BD}{DC}$ (7)

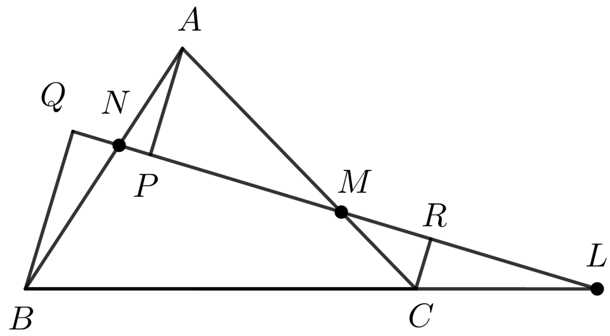
Por (7), $D = Q$. (8)

Por (8), AD pasa por O y la tres rectas concurren en un mismo punto.

16. Teorema de Menelao.

En un triángulo ABC, una recta intersecta las rectas BC, CA y AB en los puntos L, M y N si y sólo si

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$$



Demostración:

Sean AP, BQ, CR las perpendiculares desde A, B y C, respectivamente, a la recta donde se encuentran L, M y N.

Por criterio de semejanzas, los triángulos rectángulos APN y BQN son semejantes así como los triángulos rectángulos QBL y RCL. (1)

Por (1), $\dfrac{AN}{BN} = \dfrac{AP}{BQ}$ y $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{QB}{RC}$ (3)

Por criterio de semejanzas, los triángulos rectángulos APM y CRM también son semejantes. (4)

De modo que $\dfrac{CM}{AM} = \dfrac{CR}{AP}$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} &= \left(-\frac{AP}{BQ}\right)\left(-\frac{QB}{RC}\right)\left(-\frac{CR}{AP}\right) \\ &= \left(-\frac{AP}{BQ}\right)\left(\frac{BQ}{RC}\right)\left(\frac{RC}{AP}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

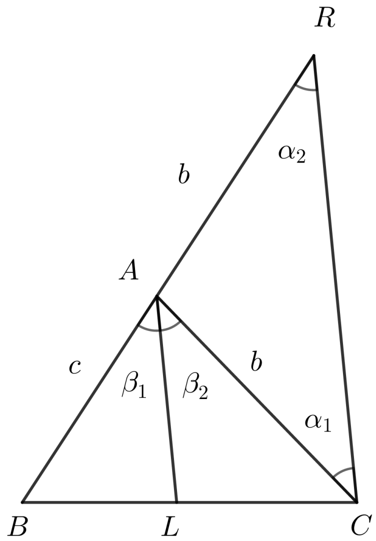
La afirmación inversa se demuestra de manera análoga a la del teorema de Ceva.

17. Teorema de la bisectriz.

Sea un triángulo ABC, la bisectriz AL, donde L es la intersección de la bisectriz con BC, del ángulo en A divide al lado opuesto BC de tal forma que

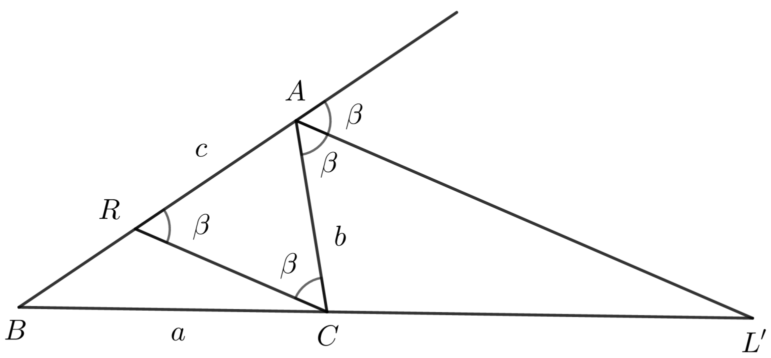
$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

Demostración con bisectriz interna:



Sea AL la bisectriz interna del ángulo interior BAC, b y c las longitudes de los lados CA y AB, respectivamente. Trazamos a paralela a la bisectriz que pasa por el punto C, llamamos R a la intersección de esta recta con la prolongación de AB.
Por ser rectas paralela y ángulos alternos internos, $\alpha_1 = \beta_1$ y $\alpha_2 = \beta_2$. (1)
Por hipótesis, $\beta_1 = \beta_2$ (2)
Por (1) y (2), $\alpha_1 = \alpha_2$ (3)
Por (3), el triángulo ACR es isósceles y $AR = b$. (4)
Por ser lados paralelos, los triángulos RBC y ABL son semejantes. (5)
Por el teorema de Thales (3), (4) y (5); $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{c}{b}$ como queríamos demostrar

Demostración con bisectriz externa:

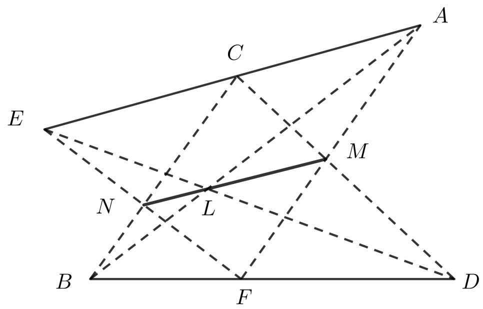


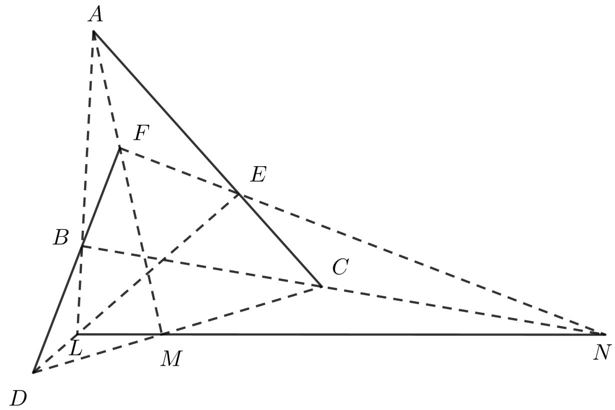
Sea AL' la bisectriz externa del ángulo exterior en A como se muestra en la figura y consideramos CR la recta paralela a AL' que pasa por C.
Por paralelas y ángulos alternos internos, el triángulo ARC es isósceles. (1)
Por el teorema de Thales y (1), los triángulos RBC y ABL son de lados paralelos, $\frac{BL}{LC} = \frac{BA}{AR} = \frac{c}{b}$

18. Teorema de Pappus.

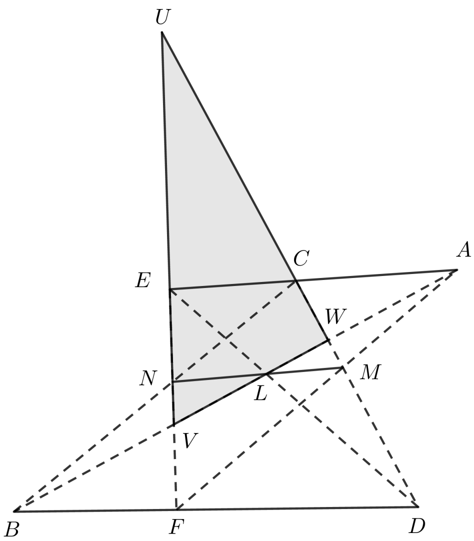
Si A, C, E son tres puntos en una recta, B, D, F tres puntos en otra recta AB, CD, EF intersectan a las rectas DE, FA y BC respectivamente, entonces los tres puntos de intersección L, M y N son colineales.

Demostración:





Observación: En cada uno de lo conjuntos de tres puntos colineales no importa cual punto está entre los otros dos; de hecho se pueden permutar cíclicamente las letras A, B, C, D, E y F siempre y cuando renombremos también correctamente las intersecciones. Cualquiera de las siguientes dos figuras cumple las condiciones. para no considerar puntos en el infinito, supondremos que las rectas AB, CD, EF forman un triángulo UVW, como se muestra en la siguiente figura.



Por el teorema de Menelao a las ternas de puntos LDE, AMF, BCN, ACE, BDF en los lados del triángulo UVW obtenemos:

$$\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1,$$

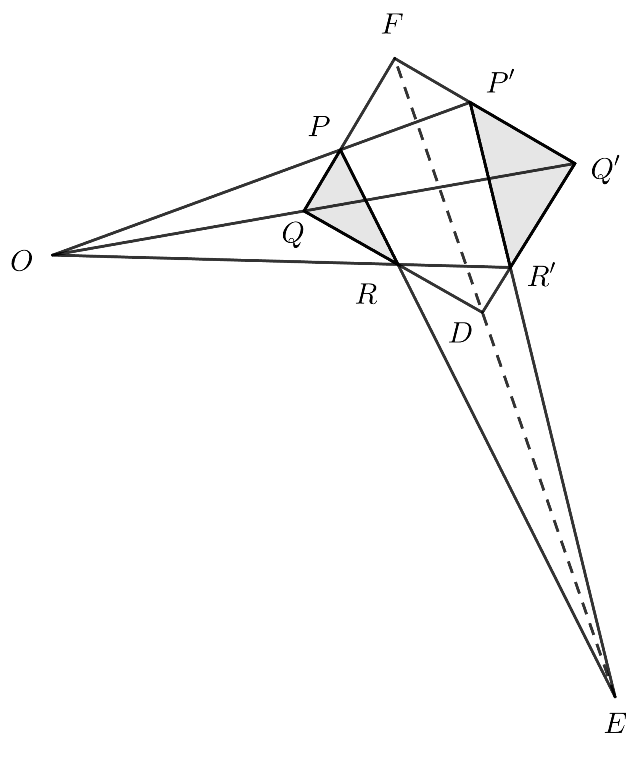
$$\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UF}{FV}=-1,$$
$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UN}{NV}=-1,$$
$$\frac{VA}{AW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1,$$
$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UF}{FV}=-1.$$

Dividiendo el producto de las primeras tres expresiones entre el producto de las últimas dos y cancelando, $\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UN}{NV}$.
Por lo anterior y el teorema de Menelao, L, M y N son colineales como queríamos demostrar.

19.1 Teorema de Desargues.

Si dos triángulos están perspectivas desde un punto y si sus pares de lados correspondientes si intersectan, entonces los tres puntos de intersección son colineales.

Demostración:



En la figura los triángulos PQR y PQR están en perspectiva desde O y su pares de lados correspondientes se intersectan en D, E, F respectivamente.
Aplicando el teorema de Menelao en las siguientes ternas de puntos, $DR'Q'$, $EP'R'$ y $FQ'P'$, en los lados de los triángulos, OQR, ORP y OPQ, respectivamente;

$$\frac{QD}{DR}\cdot\frac{RR'}{R'O}\cdot\frac{OQ'}{Q'Q}=-1,$$

$$\frac{RE}{EP}\cdot\frac{PP'}{P'O}\cdot\frac{OR'}{R'R}=-1,$$
$$\frac{PF}{FQ}\cdot\frac{QQ'}{Q'O}\cdot\frac{OP'}{P'P}=-1$$

Multiplicando y simplificando respectivamente, considerando los lados dirigidos;

$$\frac{QD}{DR}\cdot\frac{RE}{EP}\cdot\frac{PF}{FQ}=-1$$

Por lo anterior y el teorema de Menelao; D, E, F son colineales

19.2 Teorema.

Si dos triángulos están están en perspectivas desde una recta, entonces las rectas que unen dos pares de vértices correspondientes son concurrentes; por lo que los triángulos están en perspectiva desde el punto de intersección de estas rectas.

Demostración:

Cuando decimos que los triángulos PQR y P'Q'R' están en perspectiva desde una recta, sabemos que hay tres puntos que son colineales, a saber, los puntos donde se intersectan los lados correspondientes. Llamamos D al punto de intersección de las rectas QR y Q'R', E el punto de intersección de las rectas RP y R'P' y F al punto de intersección de las rectas PQ y P'Q', como se muestra en la figura siguiente.
Definimos O como la intersección de las rectas PP' y RR'. Si queremos que QQ' pase por el punto O bastará probar que O es colineal con Q y Q'. Como los triángulos FPP' y DRR' están en perspectiva desde el punto E, aplicamos el teorema directo de Desargues a estos triángulos y concluimos que los puntos de intersección de los lados correspondientes, a saber, O, Q' y Q, son colineales como queríamos.

19.3 Teorema.

Si PQR y $P'Q'R'$ son dos triángulos en perspectiva desde un punto y éstos tienen dos pares de lados correspondientes paralelos entonces los otros dos lados correspondientes paralelos entonces los otros dos lados correspondientes son paralelos. Recíprocamente, si los triángulos PQR y $P'Q'R'$ tienen lados correspondientes paralelos y dos rectas que unen puntos correspondientes se intersectan en un punto O entonces los triángulos están en perspectiva desde O.

20. Teorema.

El centroide G es el único punto dentro del triángulo ABC que tiene la propiedad de que los triángulos BCG, CAG y ABG tienen la misma área.

Demostración:

Sea A', B' y C' los puntos medios de las medianas que van desde A, B y C, respectivamente.
Sea M un punto en el triángulo (ABC), tal que $(ABM) = (AMC)$.
Por ser $(ABM) = (AMC)$ y tener los triángulos ABM y AMC a AM como base común, las alturas de B a AM y de C a AM son iguales.
Sea X la intersección de AM con BC.
Por ser MX común a los triángulos XMB y XCM tener la misma altura sobre las bases BX y XC, $BX = XC$. (1)
Por (1), X es punto medio de BC. (2)
Por (2), M se encuentra sobre la mediana AA'. (3)
EL recíproco se sigue de que $(BA'M) = (A'MC)$ y $(BA'A) = (A'AC)$, donde A' es el punto medio de BC. (4)
Por (3) y (4), un punto M dentro del triángulo ABC cumple que $(ABM) = (BCM) = (CAM)$ si y sólo si M se encuentra en las medianas AA', BB' y CC', esto es si sólo si M es el centroide. (5)
Consideramos un triángulo ABC y prolonguemos la recta que une los puntos C', B' hasta un punto A" de manera que $A''B' = B'C' = \frac{1}{2}BC$. (6)
Por (6) y paralela media, el cuadrilátero $BA'A''B'$ es un paralelogramo. (7)
Por (7), $A''C = A'B' = \frac{1}{2}AB$. (8)
Por (7), (8) y paralela medias, $AC'CA$ es otro paralelogramo (9)
Por (9), $AA'' = CC'$. (10)
Por (6) hasta (10), $AA'A''$ es un triángulo donde sus lados AA', $A'A''$, $A''A$ son iguales a las medianas del triángulo ABC (11)
Por paralelas medias, (7) y (9), $A'CA''B'$ es un paralelogramo.
Sea el punto de intersección L, de las diagonales $B'C$ y $A'A''$.
Por (12), L es un punto medio de sus diagonales. (13)
Por (13), AL es mediana del triángulo $AA'A''$. (14)
Análogamente a (14), por ser $AC'A'B'$ paralelogramo, M, la intersección de las diagonales AA' y $B'C'$; es punto medio de ellas. (15)
Por (15), $A''M$ se cortan en B', resulta que B' es el centroide del triángulo $AA'A''$.

21. Teorema.

El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro del triángulo órtico.

Demostración:

Veamos algo más sobre las alturas de un triángulo. Consideramos el triángulo ABC, $AD = h_a$ la altura desde el vértice A, O el centro del circuncírculo, y AA_0 el diámetro que pasa por A. Los ángulos en B y en A_0 son iguales, ya que abren el mismo arco, entonces los triángulos rectángulos ABD y AA_0C son semejantes, por lo que $\dfrac{h_a}{c} = \dfrac{b}{AA_0}$ de donde $h_a = \dfrac{bc}{2R}$
Sustrayendo del ángulo BAC los ángulos A_0AC y BAD que son iguales a $90° - \angle B$, tenemos que $\angle DAA_0 = \angle A - 2(90° - \angle B) = \angle A + 2\angle B - (\angle A + \angle B + \angle C) = \angle - \angle C$
Consideramos ahora la extensión de la altura AD hasta que toque al circuncírculo en el punto D'. Tenemos que $\angle DAB = \angle FCB$, ya que ambos son complementarios del ángulo en B. También $\angle BCD' = \angle BAD'$, por abrir el mismo arco, luego los triángulos rectángulos CDH y CDD' son congruentes y nos muestran que HD= DD'

22. Teorema.

Las bisectrices externas de cualesquiera dos ángulos de un triángulo son concurrentes con la bisectriz interna del tercer triángulo son concurrentes con la bisectriz interna del tercer ángulo.

23. Teorema.

Sea α y β dos ángulos cualesquiera, se cumple que:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\alpha \mp \sin\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \sin\beta \pm \cos\beta \sin\alpha$$

Demostración:

Sea AD un segmento perpendicular a OB como se muestra en la figura. Consideramos el triángulo rectángulo OAD y el segmento AC perpendicular a la recta OE.
Definimos α y β como $\angle COA$ y $\angle BOC$, respectivamente
Por definición de coseno e hipótesis, $cos(\alpha + \beta) = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OB - OD}{OA} = \dfrac{OB - CF}{OA}$ (1)
Por definición de coseno e hipótesis, $cos\beta = \dfrac{OC}{OA}, cos\alpha = \dfrac{OB}{OC}$ (2)
Por definición de seno e hipótesis, $sen\beta = \dfrac{AC}{OA}$ (3)
Por ambos estar formado por el rayo OE y ser la recta l paralela a FH por construcción, $\angle ECH$ y α son iguales. (4)
Por (4) y ser AC perpendicular a OE, los triángulos OGD y AGC son semejantes (5)
Por (5), $\alpha = \angle GAC$ (6)
Por (6), $\alpha + \angle ACF = 90°$ (7)
Por (6) y (7), $\cos\angle ACF = \operatorname{sen}\alpha$ (8)
Por (1), (2), (3) y (8); $\cos\angle ACF = \dfrac{CF}{AC}$ (9)
Por (8) y (9), $CF = AC\cos\angle ACF = AC\operatorname{sen}\alpha$
Sustituyendo respectivamente, $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{OC\cos\alpha - AC\operatorname{sen}\alpha}{OA} = \cos\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$ (10)
Análogo a (10), $\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$ (11)
Análogo a (10), $\sin(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\sin\beta \pm \cos\beta\sin\alpha$

24. Teorema.

Sea α un ángulo cualquiera,

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

25. Teorema de los cosenos.

Sea un triángulo con a, b y c las longitudes de los lados y β el ángulo opuesto al lado b.

$$b^2 = a^2 + c^2 = 2ac\cos\beta$$

Demostración:

Trazamos la altura desde el vértice A y llamamos D al pie de la altura. Definimos $x = BD$.
Por definición, $DC = a - x$. (1)
Por (1) y el teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos ADC y ABD, $b^2 = (a-x)^2 + h^2$ y $c^2 = x^2 + h^2$. respectivamente. (2)
Por (2), $b^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$ y $b^2 = a^2 - 2ax + c^2$. (3)
Por definición de coseno e hipótesis, $cos\beta = \frac{x}{c}$ (4)
Por (3) y (4) , $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta$

26. Ley de los senos.

Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia de radio R. Si a, b y c son los lados del triángulo opuestos a los vértices A, B y C respectivamente, entonces

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

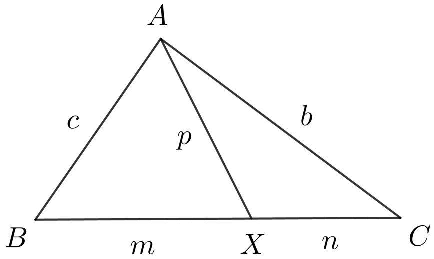
Demostración:

Consideramos el triángulo ABC y su circuncírculo de radio R. Dibujamos el diámetro CJ y la cuerda BJ.
Por ser CJ diámetro, $\angle CBJ$ es un ángulo recto. (1)
Por subtender de la misma cuerda hacia el mismo semiplano, $\angle BJC = \angle BAC$ (2)
Por (1) y (2), $sen\angle BAC = sen\angle BJC = \frac{a}{CJ} = \frac{a}{2R}$ (3)
Por (3), $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R$
Considerando el caso en que $\angle A$ es no obtuso,
Consideramos la siguiente figura donde hemos trazado el diámetro CJ.
Por ser los ángulos opuestos en un cuadrilátero cíclico, $\angle BJC = 180° - \angle BAC$. (4)
Por propiedades de senos, $sen\theta = sen(180° - \theta)$ (5)
Por (4) y (5), $sen\angle BJC = sen\angle BAC$. (6)
Por (6), $senA = sen\angle BAC = sen\angle BJC = \frac{a}{2R}$

27. Teorema de Stewart.

Sean ABC un triángulo y AX una ceviana de longitud p, que divide al segmento BC en dos segmentos $BX = m$ y $XC = n$;

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2m$$



Demostración:

Definimos $\theta = \angle CXA$.
Por la ley de los cosenos aplicada en los ángulos suplementarios en X,

$$b^2 = p^2 + n^2 - 2pn\cos\theta, \tag{1}$$
$$c^2 = p^2 + m^2 - 2p\cos(180^\circ - \theta) \tag{2}$$

Multiplicando (1) por m, (2) por n, y sumando término a término,

$$b^2m + c^2n = \ p^2(m+n) + mn(m+n) - 2mnp(cos(180^\circ - \theta) + cos\theta) \tag{3}$$

Por (3), propiedades de cosenos y ser $m + n = a$;

$$b^2m + c^2n = a(p^2 + mn)$$

28. Fórmulas de área de un triángulo.

Sea ABC un triángulo con lados de longitud a, b, y c. Si s, r y R son el semiperímetro, el inradio y el circunradio del triángulo, respectivamente: Entonces su área las podemos calcular como:

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{ac\sin\angle CBA}{2} \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= sr \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

Demostración:

1. Trazamos la altura sobre la BC desde el vértice A, tenemos dos casos: el pie de la altura D, se encuentra a la derecha de B o a la izquierda de B. En el primer casa $h_a = csen\angle CBA$ y en el segundo caso $h_a = csen\angle ABD$; pero como; pero $\angle CBA$ y $\angle ABD$ son ángulos sumplemetarios, tenemos que: $sen\angle CBA = sen\angle ABD$, luego en cualquier caso $h_a = csen\angle CBA$.

Ahora de esta última igualdad y del hecho que $(ABC)=\dfrac{ah_a}{2}$ tenemos que $(ABC)=\dfrac{acsen\angle CBA}{2}$
2. El área del triángulo ABC es $(ABC)=\dfrac{ah_a}{2}$, al sustituir el valor de h_a. dado en la ecuación, tenemos que: $(ABC)=\dfrac{abc}{4R}$
3. Consideramos i el incentro del triángulo ABC y fijémonos en los striángulos ABI, BCI y CAI. El área del triángulo ABC es igual a la suna (ABI) + (BCI) y (CAI). Las áreas de cada uno de lo striángulos están dadas por $(ABI)=\dfrac{ABr}{2}=\dfrac{cr}{2}$, $(BCI)=\dfrac{ar}{2}$, $(CAI)=\dfrac{br}{2}$, donde r es el radio del incírculo, entonces: $(ABC)=\dfrac{cr}{2}+\dfrac{ar}{2}+\dfrac{br}{2}=\dfrac{ar+br+cr}{2}=\dfrac{(a+b+c)}{2}=sr$
4.La ecuación de la nos dice que $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$
luego, multiplicando por s tenemos $rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

29. Desigualdad geométrica.

Si a, b, c son los lados de un triángulo de área (ABC) entonces

$$4\sqrt{3}(ABC)\leq a^2+b^2+c^2$$

con igualdad si y sólo si a, b, c es equilátero.

Demostración:

Como un tri;angulo equilátero de lado a tiene área igual a $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$, la igualdad se alcanza en tal caso. Trataremos de comparar lo que sucede en un triángulo cualquiera respecto a lo que pasa en un triángulo equilátero de lado a.

Si AD es el altura del triángulo desde A, su longitud la podemos escribir de la forma $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+y$, donde y y mide su defecto con respecto a la altura del triángulo equilátero. También escribimos $BD=d=\dfrac{a}{2}-x$ y $DC=e=\dfrac{a}{2}+x$, donde x se puede interpretar como el defecto que tiene el pie de la altura con respectivo al pie de la altura en el caso equilátero (que en caso es el punto medio del lado BC). Tenemos que:

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}(ABC) &= a^2+h^2+(\frac{a}{2}+x)^2+h^2+(\frac{a}{2}-x)^2-4\sqrt{3}\frac{ah}{2}\\
&= \frac{3}{2}a^2+2h^2+2x^2-2\sqrt{3}a(\frac{\sqrt{3}}{2}a+y)\\
&= \frac{3}{2}a^2+2\frac{\sqrt{3}}{2}a+y)^2+2x^2-3a^2-2\sqrt{3}ay\\
&= \frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}a^2+2\sqrt{3}ay+2y^2+2x^2-3a^2-2\sqrt{3}ay\\
&= 2(x^2+y^2)\geq 0
\end{aligned}$$

Además la igualdad se da si y sólo si x=y=0 y sólo si el triángulo es equilátero

30. Desigualdad de Nesbitt.

Sea a, b y c números positivos, se cumple que:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}-3\\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\ &= \frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\ &\geq \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

31.1 Transformación de Ravi.

Sea a, b y c lados del triángulo, entonces $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ con x, y, z pertenecientes a los reales positivos.

Demostración:

Mostramos el incírculo del triágnulo ABC que, su centro es el punto de concurrencia de las bisectrices.
LLamamos X, Y, Z los puntos, de tangencia con el lado BC, CA y AB, respectivamente.
Como las dos tangentes desde cualquier punto exterior a una circunferencia son iguales,, tenemos que Ay=AZ=x, BZ= BX=y, CX=CY=z. Entonces. y+z=a, z+x=b, x+y =c

31.2 Teorema.

Sea a, b y c lados del triángulo, con $a=x+y, b=y+z, c=z+x$, entonces:

$$i) x+y+z=s$$

$$ii) x=s-a, y=s-b, z=s-c$$

Demostración:

32. Desigualdad geométrica.

Sean A, B y C ángulos de un triángulo,

$$\cos A=\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$$

Demostración:

33.1. Teorema de Potencia de punto.

Si las cuerdas AB y CD son cuerdas; A, B, C, D están sobre una misma circunferencia, si y sólo si intersectan en un punto P y cumple que

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Demostración:

Si el punto de intesección se encuentra sobre la circunferencia, ambos miembros de la ecuación son cero y la igualdad es inmediata. Supongamos que P se encuentra en el interior de la circunfernecia. Los triángulos PAD y PCB son semejantes ya que los ángulos $\angle PAD$ y $\angle PCE$ son iguales por abrir el mismo arco, de igual manera por abrir el mismo arco los ángulos $\angle PDA$ y $\angle PBC$ son iguales. Por tanto $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$ y entonces: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$
Si P se encuentra fuera de la circunferencia tenemos, por ser el cuadrilátero PAC y PDB son semejantes y $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

33.2. Teorema del Centro Radical.

Los ejes radicales de tres circunferencias se intersectan en un punto P.

34.Teorema de Fórmula de Euler.

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un triángulo con circuncírculo (O, R) e incírculo (I, r) es la igualdad

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

Demostración:

Sea A un punto sobre el circuncírculo C=(O, R), Sean B y C los puntos de intersección del circuncírculo C con las tangentes desde A al círculo C'=(I, r). El triángulo admite a C' como incírculo si y sólo si BC es tangente a C', si y sólo si $\angle ABI = \angle IBC$
Sea D el punto de intersección de la recta AI con círculo C. Como AI es bisectriz, tenemos que $\angle IAB = \angle CAI$. Además $\angle CAI = \angle CBD$, ya que ambos ángulos abren el mismo arco CD, luego $\angle IAB = \angle CBD$. Como el ángulo $\angle BID$ es ángulo exterior del triángulo ABI, tenemos que $\angle IAB = \angle BID = -\angle ABI$. Además como $\angle CBD = \angle IBD - \angle IBC$, y $angleIAB = \angle CBD$ obtenemos que $\angle BID - \angle ABI = \angle IBD - \angle IBC$. Luego la condición $\angle ABI = \angle IBC$ es verdadera si y sólo si $\angle BID = \angle IBD$. Pero estos dos ángulos, son los ángulos opuestos a los lados BD y ID dle triángulo IBD.
Podemos reformular el rpoblema como sigue: El triángulo ABC admite a C'=(I, r) como incírculo si y sólo si BD=ID.
Sea E el punto de tangencia del círculo C' con Ab y D' el punto diametralmente opuesto a D en C. Como los triángulos rectángulos AIE y D'DB tienen los ángulos IAE y DD'B iguales por abrir el mismo arco BD, resulta que son semejantes. Esta semejanza nos garantiza que $\dfrac{AI}{IE} = \dfrac{D'D}{DB}$, por lo que: $AI \cdot DB = 2Rr$

AL tomar la potencia del punto I con respecto al círculo C, tenemos: $AI \cdot ID = (R-d)(R+d)$, donde $d = OI$. De las dos últimas igualdades obtenemos: $\dfrac{DB}{ID} = \dfrac{2Rr}{(R-d)(R+d)} = \dfrac{2Rr}{(R^2-d^2)}$
Luego, BD=ID si y sólo si $R^2 - d^2 = 2Rr$

35. Teorema de Homotecia.

Dos circunferencias de radio y centros distintos, son figuras homotéticas.

36. Teorema de la Circunferencia de Apolonio.

Si A, B son dos puntos fijos y $\dfrac{p}{q}$ es una razón fija, el lugar geométrico de los puntos P que satisfacen $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{p}{q}$ es una circunferencia.

37.1. Teorema de Inversión.

Sea $C = (O, r)$ una circunferencia de inversión.

1. Una recta que pasa por O, se invierte en ella misma.
2. El inverso de una recta que no pasa por O, es una circunferencia que pasa por O
3. El inverso de una circunferencia que pasa por O, es una recta que no pasa por O.

37.2. Teorema.

El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión O es una circunferencia que no pasa por O.

37.3. Teorema.

Circunferencias ortogonales se invierten en circunferencias ortogonales.

37.4. Teorema.

Sean $C(O.r)$ una circunferencia de inversión, P, Q dos puntos del plano y P', Q' sus puntos inversos, entonces.

$$Q'P' = \frac{r^2 PQ}{OP \cdot OQ}$$

38. Teorema de Varignon.

Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo. El perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de la diagonales y su área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.

Demostración:

Sean P, Q, R, S, los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA. En los triángulos ABC y ACD, PQ y RS son segmentos paralelos a BD y de longitud la mitad de BD. Por tanto, PQRS es un paralelogramo AC+BD. Demostraremos lo referente al área, utilizando el concepto de área con signo.

$$\begin{aligned}(PQRS) &= (ABCD) - (PBQ) - (RDS) - (QCR) - (SAP)\\ &= (ABCD) - \frac{1}{4}[(ABCD) + (CDA) + (BCD) + (DAB)]\\ &= (ABCD) - \frac{1}{4}[(ABCD) + (BCDA)]\\ &= \frac{1}{2}(ABCD)\end{aligned}$$

39. Teorema de cíclico.

1. Un cuadrilátero es cíclico si sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.
2. Un cuadrilátero es cíclico si sólo si el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el aldo opuesto y la otra diagonal.

40. Teorema de Ptolomeo.

El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Demostración:

Hacemos la siguiente construcción. Consideramos el cuadrilátero ABCD y tomamos un punto O de manera que el AOB sea semejante al ACD. Es inmediato que:
(a) ABCD es cíclico si sólo si O,B, C son colineales si sólo si OC=OB+BC
b) ABCD no es cíclico si sólo si OC $\leq$ OB + OC
Como los triángulos AOB y ACD son semejantes se tiene que
c) $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{OB}{CD}$, luego por el criterio de semejanzas de triángulos LAL, tenemos que OAC y BAD son semejantes(los ángulos $\angle OAC$ y $\angle BAD$ son iguales). Por tanto
d) $\dfrac{OC}{BD} = \dfrac{AC}{AD}$
Supongamos ahora ABCD es cíclico, entonces por a) OC=OB +BC, usando (c) y (d) esta última del triángulo se reescribe como: $\dfrac{AC \cdot BD}{AD} = \dfrac{AB \cdot CD}{AD} + BC$
por tanto $AC \cdot BD = AB \cdot CD +_A D \cdot BC$
OC¡OB+BC, entonces $AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC$

41. Teorema de Simson.

Las proyecciones de un punto sobre los lados de un triángulo son colineales si y sólo si el punto se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo.

Demostración:

Sea ABC el triángulo, P el punto y A', B' y C' las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB respectivamente. La clave de la demostración está en observar que los cuadriláteros cíclicos, esto se debe a que los ángulos en A', B' y C' son rectos.
Veamos primeros que la condición es suficiente. Supongamos entonces que P se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo ABC, podemos suponer que está sobre el arco CA que no contiene a B, los demás casos se abordan de manera semejante
Como el cuadrilátero ABCP es cíclico, tenemos que $\angle APC = 180^0 - \angle ABC$ Además BA'PC' es también cíclico, tenemos $\angle C'PA' = 180° - \angle ABC$. Igualando las dos relaciones y restando del ángulo común $\angle APA'$, obtenemos que $\angle A'PC = \angle C'PA$
Para conducir que A', B' y C' son colineales, bastará observar que B'Cƨ B'A' forman con AC angulos iguales. En el cuadrilátero cíclico AB'PC' se tiene la igualdad $\angle C'B'A = \angle C'PA$ y como A'B'CP es también cíclico se tiene que $\angle A'B'C = \angle A'PC$. Estas dos últimas igualdades junto con la identidad (3.1) nos ayuda a concluir que $\angle C'B'A = \angle A'B'C$ por lo que A', B' y C' son colineales
Veamos que la condición es necesaria. Si A', B' y C' son colineales, entonces la igualdad () es verdadera, por ser ángulos opuestos por el vértice. Como los cuadriláteros B'A'CP y AB'CP"son cíclicos tenemos que es () también verdadera, al sumar de ambos lados de (3.1) el ángulo APA' tenemos que: $\angle APC = \angle C'PA'$ Como A'BC'P es cíclico $\angle C'PA'$ es suplementario al $\angle ABC$, luego también $\angle APC + \angle ABC = 180°$, por lo que ABCP es cíclico.
La recta por A', B' y C' se conoce como la recta de Simson de P con respecto al triángulo ABC

42. Teorema extendido de Ptolomeo.

Para cuatros puntos A, B, C y D siempre es válida la desigualdad:

$$AB \cdot DC + BC \cdot DA \geq CA \cdot DB$$

y la igualdad se da solamente en el caso que A, B, C y D sean concíclicos.

43. Teorema de Brahmagupta.

El área A de un cuadrilátero cíclico de lados a, b, c, d y semiperímetro s está dada por

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

Demostración:

Es claro que si α y β son los ángulos entre los lados a, b y c, d respectivamente, entonces $A = \frac{1}{2}ab \cdot sen\alpha + \frac{1}{2}cd \cdot sen\beta$ Por tanto:

$$\begin{aligned} 16A^2 &= 4a^2b^2sen^2\alpha + 4c^2d^2sen^2\beta + 8abcd \cdot sen\alpha \cdot sen\beta \\ &= 4a^2b^2 + \alpha + 4c^2d^2 - 4a^2b^2cos\alpha - 4c^2d^2cos^2\beta + 8abcd \cdot sen\alpha \cdot sen\beta \end{aligned}$$

Por otro lado la ley de coseno nos garantiza que: $a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cdot cos\beta$ que al substituir en la ecuación anterior nos da:

$$\begin{aligned}
16A^2 &= (2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 - 8abcd(1+cos(\alpha+\beta)) \\
&= [2ab+2cd-(a^2+b^2-c^2-d^2)][2ab+2cd+(a^2+b^2-c^2-d^2)] - 8abcd(1+cos(\alpha+\beta)) \\
&= [c^2+2cd+d^2-(a^2-2ab+b^2)][a^2+2ab+b^2-(c^2-2cd+d^2)] - 8abcd(1+cos(\alpha+\beta)) \\
&= [(c+d)^2-(a-b)^2][(a+b)^2-(c-d)^2] - 8abcd(1+cos(\alpha+\beta)) \\
&= [c+d+b-a][c+d+a-b][a+b+d-c][a+b+c-d] - 8abcd(1+cos(\alpha+\beta)) \\
&= (2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d) - 8abcd(1+cos(\alpha+\beta))
\end{aligned}$$

Por tanto $A^2 = (s-a)(s-b)(s-b)(s-d) - \frac{1}{2}abcd(1+cos(\alpha+\beta))$. Como el cuadrilátero es cíclico, $\alpha+\beta = 180°$, luego se tiene que $1+cos(\alpha+\beta) = 0$

44. Teorema.

Entre los cuadriláteros de perímetro dado el cuadrado es el de mayor área.

Demostración:

Es fácil convencerse de que el cuadrilátero deberá ser onvexo. Por ejemplo, en la siguiente figura, el área del cuadrilátero convexo ABCD' es mayor que el área del cuadrilátero entrante ABCD. También el área del cuadrilátero convexo PQR'S es mayor que el área del cuadrilátero cruzado PQRS, (D' se obtiene de reflejar D sobre AC y R' de reflejar R en QS)
Por la obsevación anterior el cuadrilátero debe ser cíclico. También es claro que si el perímetro está fijo, lo está también el semiperímetro s, y entonces lo que buscamos es una descomposición del perímetro en segmentos a, b, c y d de manera que $A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ sea máxima.

45. Teorema de Pitot.

El cuadrilátero $ABCD$ es circunscrito si y sólo si

$$AB + CD = BC + DA$$

Demostración:

Si el cuadrilátero es circunscrito y si w, x, y, z son las longitudes de las tangentes a la circunferencia desde A, B, C, D, respectivamente, es fácil ver que AB + CD - w+x+y+z= BC +DA
Recíprocamente si AB+CD=BC+DA, tenemos, en el caso en que dos lados adyacentes sean iguales (y entonces los otros dos lados también iguales), que el resultado es inmediato.
Supongamos que AB¿BC, entonces AB-BC= AD-CD¿0
Sea P un punto sobre AB de manera que BP = BC y sea Q sobre AD con DQ= Dc, tenemos entonces que AP=AQ
Los triángulos APQ, BCP, CDQ son isósceles y las bisectrices de los ángulos $\angle A, \angle B, \angle D$ son las mediatrices de los lados PQ, PC y CQ. Como sabemos que las mediatrices concurren en el circuncentro O del triángulo PQC, luego O es equidistante a los lados del cuadrilátero, por lo que el cuadrilátero admite un círculo inscrito.

46. Teorema de Brahmagupta.

En un cuadrilátero cíclicos con diagonales perpendiculares, al que llamamos ortodiagonal, la recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales y es perpendicular a un lado opuesto.

Demostración

Sea P la intesección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero ABCD. Trazamos PH la perpendicular desde P al lado BC y sea X la intersección de PH con el lado DA.
La demostración se basa en observar que $\angle ACB = \angle ADB$, ya que abren del mismo arco.
Además $\angle BPH = \angle XPD$, ya que son ángulos opuesto por el vértice. Como BCP y BHP son tri;angulos semejantes, tenemso $\angle BPH = \angle PCB$
LA ecuaciones () () (), impican que $\angle XDP = \angle XPD$. Por tanto, XP= XD y como triángulo APD es rectángulo se tiene que X es punto medio de AD.

47. Teorema del Punto de Miquel.

Sea ABC un triángulo, con puntos arbitrarios A', B' y C' en lados BC, AC y AB , respectivamente. Dibuje tres circunferencias circunscritas a los triángulos $AB'C'$, $A'BC'$ y $A'B'C$. Estos círculos se intersectan en un punto M.

48. Teorema de Gergonne.

Si el incircírculo de un triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos X, Y, Z respectivamente, entonces las cevianas AX, BY y CZ son concurrentes en un punto G.

49. Teorema de Nagel.

Sea un triángulo ABC. Los puntos L, M y N están sobre los lados BC, CA y AB tales que $AB + BL = LC + CA, BC + CM = MA + AB$ y $CA + AN = NB + BC$, entonces AL, BM y CN son concurrentes.

50. Teorema de Blanchet.

Sea un triángulo ABC y sea H la base de la altura C. AX, BY y CH se intersectan un punto P, entonces

$$\angle CHY = \angle CHX$$

51. Teorema de la Mariposa.

Sea M el punto medio de la cuerda AB. Las cuerdas CD y EF pasan por M. CF y ED intersectan a AB en U y V respectivamente, entonces M también el punto medio de UV.

52. Teorema de Viviani.

Sea ABC un triángulo equilátero, P un punto arbitrario y h la altura del triángulos, entonces

$$PX + PY + PZ = h$$

53. Teorema de Vecten.

Sea un triángulo ABC. Se construye cuadrados externamente al triángulo sobre los lados BC, CA, AB con centros X, Y, Z, respectivamente. Entonces AX, BY y CA son concurrentes.

54. Teorema de Van Aubel.

Sea un cuadrilátero $ABCD$. Se trazan cuadrado externos al cuadrilátero sobre los lados AB, BC, CD, DA con centros W, X, Y, Z respectivamente. Entonces $WY = XZ$ y WY es perpendicular XZ

55. Teorema de la cuaterna armónica.

Sea un triángulo ABC. Los puntos X, Y están sobre AC y BC y D es la intersección de XY con AB. Entonces se cumple que

$$AD \cdot BC = AB \cdot CD$$

56. Teorema del punto cicloceviano conjugado.

Sea ABC un triángulo con puntos puntos X, Y, Z sobre BC, CA y AB, respectivamente, tales que AX, BY y CZ sean colineales. Los puntos X', Y', Z' son las intersecciones del circuncírculo del triángulo XYZ con AX, BY y CZ respectivamente. Entonces AX', BY' y CZ' son colineales.

57. Teorema de Monge.

Sean 3 circunferencias con centro A, B, C no colineales, que cumple que sus centros y radios son diferentes. Los puntos X, Y, Z son la intersección de la tangentes externas de los círculos con centro A y B, B y C, C y A respectivamente. Entonces X. Y, Z son colineales.

58. Teorema del Hexágono Místico de Pascal.

Sea $ABCDEF$ un hexágono cíclico. Los puntos X, Y, Z son las intersecciones de AF con CD, AB con DE, BC con EF; respectivamente. Entonces X, Y, Z son colineales.

59. Teorema de los círculos de Jhonson.

Sean tres circunferencias de radio iguales que pasan por un punto P. Sin perdida de generalidad, sean X, Y, Z las intersecciones de los pares de circunferencias diferentes P. El circuncírculo del triangulo XYZ es congruente con las 3 circunferencias.

60. Teorema de Bevan.

Sea un triángulo ABC con excentros E_A, E_B y E_C. Las rectas L_A, L_B y L_C que pasan por los excentros y son perpendiculares al correspondientes lado del triángulo, son concurrentes.

61. Teorema de Brocard.

Sea $ABCD$ un triángulo cíclico. Sea O el centro de la circunferencia del cuadrilátero $ABCD$. Los puntos P, Q y R son las intersecciones de AB con CD, BC con AD y AC con BD. Entonces el ortocentro del triángulo PQR es O.

62. Teorema de Adam.

El incircírculo con incentro I de un triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos X, Y, Z respectivamente. Las cevianas AX, BY y CZ son concurrentes en un punto G. Las rectas paralelas a XY, YZ, ZX que pasan por G, intersectan a AB, BC y CA en P y Q, R y S, T y U; respectivamente. Entonces el hexágono $PQRSTUV$ es concíclico con centro I.

63. Teorema de la Hire.

Si Q pertenece a la polar de P, entonces P pertenece a la polar de Q.