

Reconstrucción a partir de proyecciones¹

Alejandro Veloz

2023, segundo semestre

1 Introducción

Examinaremos el problema de reconstruir una imagen a partir de múltiples proyecciones, con un enfoque en la tomografía computarizada de rayos X (CT). Esta es una de las aplicaciones más trascendentales del procesamiento de imágenes digitales en medicina.

El problema de reconstrucción es simple en principio. Considere la Fig. 1(a), que consta de un único objeto sobre un fondo uniforme.¹

Supongamos además que hacemos pasar un haz de rayos X de izquierda a través del plano de la imagen, como se muestra en la Fig. 1(a), y asumamos que la energía del haz es absorbida mayormente por el objeto que por el fondo. Al ubicar un arreglo de detectores de rayos X en el otro lado de la región producirá una señal (perfil de absorción) sobre dicho arreglo de amplitud (intensidad) proporcional a la absorción. Cada punto en la señal puede considerarse como la suma de los valores de absorción a lo largo del haz de rayos X paralelo correspondiente al otro extremo del objeto (esta suma se denomina suma de rayos (*raysum*)).²

Para reconstruir una imagen se requieren múltiples proyecciones. La Fig. 1(b) describe el proceso denominado *retroproyección* (*backprojection*) que consiste en proyectar la señal medida en el arreglo de detectores en la dirección desde la cual se originó el haz de rayos X.³

Suponga ahora que rotamos 90° la posición del par fuente-detector (1(c)). Repitiendo el procedimiento de retroproyección, se obtiene una imagen de retroproyección en la dirección vertical (Fig. 1(d)). La reconstrucción se obtiene sumando las dos imágenes de retroproyección obtenidas, lo que da como resultado la Fig. 1(e). El objeto de interés está contenido en el cuadrado mostrado y la amplitud es el doble de la amplitud de las retroproyecciones individuales. Obviamente la reconstrucción será más fiel si se suman más retroproyecciones en distintos ángulos. Esto se muestra en la Fig. 2, donde a medida que aumenta el número de proyecciones, la intensidad de las retroproyecciones que no se intersectan disminuye en comparación con las regiones en las que se intersectan varias retroproyecciones. El efecto neto es que las regiones más brillantes dominarán el resultado, y las retroproyecciones con pocas o ninguna intersección se desvanecerán en el fondo a medida que la imagen se escala para su visualización.

La Fig. 2(f), formada a partir de 32 proyecciones, ilustra este con-

Este documento es un resumen de la sección 5.11 del texto, *Digital Image Processing* de Rafael Gonzalez y Richard Woods (3 edición).

¹ Supongamos que esta imagen es un corte o sección transversal (tridimensional) de una parte del cuerpo humano, que el fondo de la imagen corresponde a tejido suave y uniforme, mientras que el objeto redondo es, por ejemplo, un tumor, también uniforme, pero con características de absorción más alta.

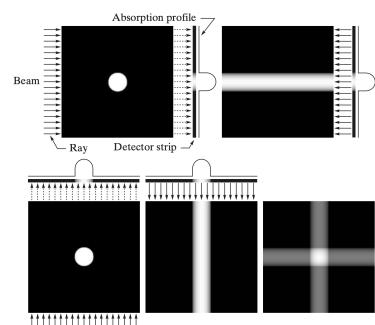


Figura 1:

a b
c d e

(a) Región plana que muestra un objeto simple, un haz de entrada paralelo y un detector al lado contrario. (b) Resultado de la retroproyección de los datos medidos en el arreglo (perfil de absorción 1D). (c) El haz y los detectores rotados 90°. (d) Retroproyección. (e) La suma de (b) y (d). La intensidad donde se intersectan las retroproyecciones es el doble de la intensidad de las retroproyecciones individuales.

² En este punto, toda la información que tenemos sobre el objeto es esta señal de absorción (proyección) unidimensional y que esta información *no es suficiente para determinar la forma del objeto*.

³ Esto es, repetir la señal del arreglo de detectores en la dirección perpendicular al haz (columnas de la imagen de la Fig. 1(b))

cepto. Sin embargo, debemos tener en cuenta que si bien esta imagen reconstruida es una aproximación razonablemente buena de la forma del objeto original, la imagen es borrosa debido a un efecto de "halo", cuya formación se puede observar en etapas progresivas en la Fig. 2. Por ejemplo, el halo en la Fig. 2(e) aparece como una "estrella" cuya intensidad es menor que la del objeto, pero mayor que el fondo. A medida que aumenta el número de vistas, la forma del halo se vuelve circular, como en la Fig. 2(f). A partir de lo observado en la Fig. 1 y Fig. 2 es posible indicar que las proyecciones separadas en 180° son imágenes especulares entre sí⁴, por lo que solo tenemos que considerar incrementos de ángulo en la mitad de una circunferencia para generar todas las proyecciones necesarias para la reconstrucción.

2 Principios de Tomografía Computarizada (CT)

La tomografía computarizada (CT) por rayos X tiene como objetivo obtener una representación tridimensional de la estructura interna de un objeto. Se logra mediante la radiografía del objeto desde diferentes direcciones empleando un haz en forma de cono. La placa de rayos X captura la intensidad de los rayos X que pasan a través del objeto, generando una imagen bidimensional. Al repetir este proceso desde múltiples ángulos y combinar las imágenes, se obtiene una representación tridimensional de la estructura. La implementación de la CT con único haz es más práctica y económica que las proyecciones bidimensionales (como el arreglo de haces de rayos X de la sección anterior), ya que requiere menos detectores, reduce el costo computacional y la dosis de rayos X.

Los fundamentos matemáticos de la TC se basan en la transformada de Radon, desarrollada por Johann Radon en 1917. Allan M. Cormack y Godfrey N. Hounsfield aplicaron estos conceptos años después para reconstruir imágenes transversales del cuerpo a partir de radiografías tomadas desde diferentes ángulos.⁵

Los escáneres de CT de primera generación (G1) utilizan un haz de rayos X en forma de "lápiz" y un único detector, como se muestra en la Fig. 4(a). Para un ángulo de rotación dado, el par de fuente/detector se desplaza a lo largo de la dirección lineal mostrada en la figura. Se genera una proyección (como las de la Fig. 1) midiendo la salida del detector en cada incremento de desplazamiento. Después de una completa traslación lineal, se rota el conjunto fuente/detector y se repite el procedimiento para generar otra proyección en un ángulo diferente. El procedimiento se repite para todos los ángulos en el intervalo $[0^\circ, 180^\circ]$.

Los escáneres CT de segunda generación (G2, Fig. 4(b)) operan según el mismo principio que los G1, pero el haz utilizado tiene

⁴ Se reflejan exactamente una en relación con la otra.

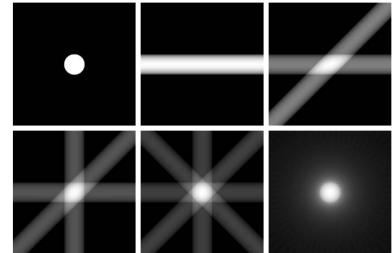


Figura 2:

a b c
d e f

(a) Misma imagen de la Fig. 1(a).
(b)–(e) reconstrucción usando 1, 2, 3, y 4 retroproyecciones separadas en 45° . (f) Reconstrucción con 32 retroproyecciones separadas en 5.625° .

La Fig. 3 muestra la reconstrucción usando retroproyecciones en una región más complicada que contiene dos objetos con diferentes propiedades de absorción. La Fig. 3(b) muestra el resultado utilizando una retroproyección. Observamos tres características principales en esta figura, de abajo hacia arriba: una banda horizontal delgada de color gris correspondiente a la porción inconclusa del objeto pequeño, una banda más brillante (mayor absorción) encima de ella correspondiente al área compartida por ambos objetos, y una banda superior correspondiente al resto del objeto elíptico. Las Figs. 3(c) y (d) muestran la reconstrucción utilizando dos proyecciones separadas por 90° y cuatro proyecciones separadas por 45° , respectivamente. La explicación de estas figuras es similar a la discusión de las Figs. 2(c) a (e). Las Figs. 3(e) y (f) muestran reconstrucciones más precisas utilizando 32 y 64 retroproyecciones, respectivamente. Estos dos resultados son visualmente muy similares y ambos muestran el problema de difuminación (halo).

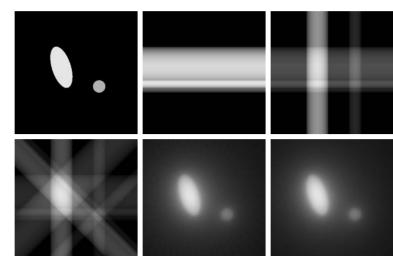


Figura 3:

a b
c d e

(a) Misma imagen de la Fig. 1(a).
(b)–(e) reconstrucción usando 1, 2, 3, y 4 retroproyecciones separadas en 45° . (f) Reconstrucción con 32 retroproyecciones separadas en 5.625° .

⁵ Cormack y Hounsfield compartieron el Premio Nobel de Medicina en 1979 por sus contribuciones a la tomografía médica.

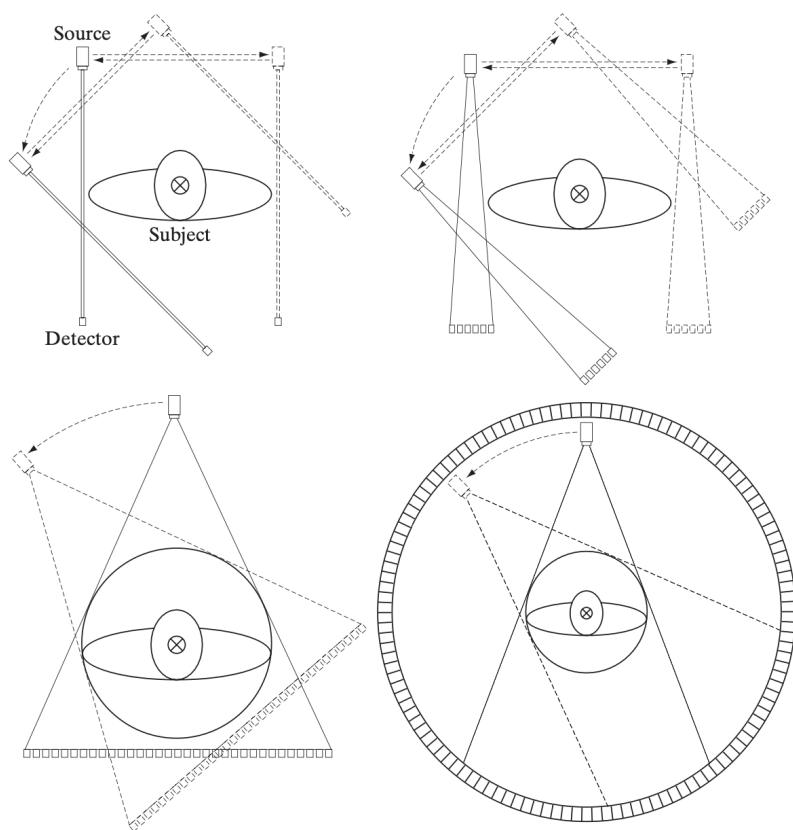


Figura 4:

<i>a</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>d</i>

Cuatro generaciones de escáneres de CT. Las flecha punteadas indican un movimiento incremental lineal. Los arcos de flecha punteados indican una rotación incremental. Las flechas dobles en (a) y (b) indican que la unidad de fuente/detector se desplaza y luego vuelve a su posición original. La marca en forma de cruz en la cabeza del sujeto indica un movimiento lineal en la dirección perpendicular al plano del par de fuente/detector (como si saliera de la página). Se genera un conjunto de imágenes transversales (cortes axiales) moviendo incrementalmente al sujeto después de cada escaneo completo.

forma de abanico. Esto permite el uso de múltiples detectores, lo que requiere menos desplazamientos del par de fuente/detector. Los escáneres de tercera generación (G₃, Fig. 4(c)) representan una mejora significativa en relación a G₁ y G₂. Utilizan un arreglo de múltiples detectores (del orden de 1000 detectores) para cubrir todo el campo de visión de un haz más amplio. De este modo, cada incremento de ángulo produce una proyección completa, eliminando la necesidad de desplazar el par de fuente/detector. Los escáneres de cuarta generación (G₄, Fig. 4(d)) utilizan un anillo circular de detectores (del orden de 5000 detectores), solo la fuente de rayos X tiene que girar. La ventaja clave de los escáneres G₃ y G₄ es la velocidad.⁶

En las generaciones posteriores se mejoran distintos mecanismos del proceso de adquisición, por ejemplo, en la quinta generación (G₅), conocidos como escáneres CT de haz de electrones (EBCT), eliminan todo movimiento mecánico mediante el uso de haces de electrones controlados electromagnéticamente. La geometría del haz de electrones es similar a G₄.

La sexta generación G₆ resuelve problemas adicionales relaciona-

⁶ Las principales desventajas son el costo y una mayor dispersión de rayos X, lo que requiere dosis más altas que los escáneres G₁ y G₂ para lograr una relación señal-ruido comparables.

dos con el problema de adquisición. Los dispositivos de esta clase se denominan escáneres CT helicoidales. La forma convencional de obtener imágenes de CT (hasta G5) era mantener al paciente inmóvil durante el tiempo de adquisición de un corte. Luego se detenía el proceso, se incrementaba la posición del paciente en el plano perpendicular al del haz de rayos X utilizando una mesa motorizada, luego se adquiría la siguiente imagen y se repite el procedimiento para el número de cortes deseado. Aunque se puede obtener una imagen en menos de un segundo, hay procedimientos (por ejemplo, escaneos abdominales y de tórax) que requieren que el paciente contenga la respiración durante la adquisición de la imagen.⁷ En G6 se configura un escáner G3 o G4 utilizando anillos deslizantes (*slip rings*) que eliminan la necesidad de cables eléctricos entre la fuente/detectores y la unidad que procesa los datos. El par fuente/detector luego gira continuamente 360° mientras el paciente se mueve a una velocidad constante a lo largo del eje perpendicular a la adquisición. El resultado es un volumen continuo helicoidal de datos que luego se procesa para obtener imágenes de cortes individuales.

Los dispositivos de séptima generación (G7) (también llamados escáneres de CT multicorte) utilizan haces de abanico "gruesos" en conjunto con bancos paralelos de detectores para recolectar datos volumétricos de CT de manera simultánea. Se generan "bloques" tridimensionales transversales por ráfaga de rayos X en lugar de imágenes transversales individuales. Además de un aumento significativo en el detalle, este enfoque tiene la ventaja de utilizar los tubos de rayos X de manera más económica, reduciendo así el costo y potencialmente la dosis.

3 Proyecciones y la transformada de Radon

En esta sección se explican los conceptos necesarios para reconstruir imágenes a partir de proyecciones.⁸

La proyección de un haz de rayos paralelos se puede representar matemáticamente mediante un conjunto de líneas rectas,⁹ como muestra la Fig. 6. Un punto arbitrario en la señal de proyección se puede obtener mediante la suma de rayos a lo largo de la línea $x \cos \theta_k + y \sin \theta_k = \rho_j$. En un dominio (x, y) continuo, los rayos X proyectados (*raysum*) es una integral de línea, dada por:

$$g(\rho_j, \theta_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k - \rho_j) dx dy \quad (2)$$

donde hemos utilizado las propiedades del impulso δ .¹⁰

El lado derecho de la Ec. (2) es cero a menos que el argumento de δ sea cero, lo que indica que la integral se calcula solo a lo largo de la

⁷ Completar estos procedimientos para, por ejemplo, 30 cortes puede llevar varios minutos.

⁸ Si bien este documento se contextualiza en la reconstrucción de CT, los conceptos de reconstrucción vistos aquí se aplican en varias modalidades de imágenes médicas, donde existe una formulación matemática similar, como por ejemplo, en la tomografía por emisión de fotón único (SPECT), la tomografía por emisión de positrones (PET), la resonancia magnética (MRI) y algunas modalidades de imágenes de ultrasonido.

⁹ Una línea recta en coordenadas cartesianas se puede describir tanto por su forma de pendiente-intersección, $y = ax + b$, como por su representación normal (Fig. 5):

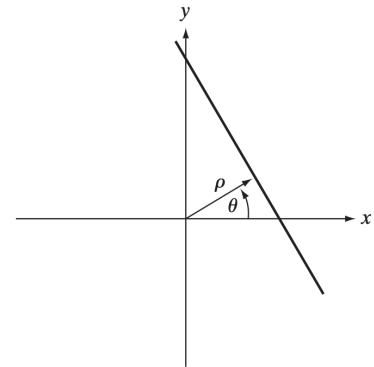


Figura 5: Representación normal de una línea recta.

¹⁰ Note que ρ_j y θ_k se definen sobre conjuntos discretos de cardinalidad igual al número de detectores y número de ángulos de rotación, respectivamente.

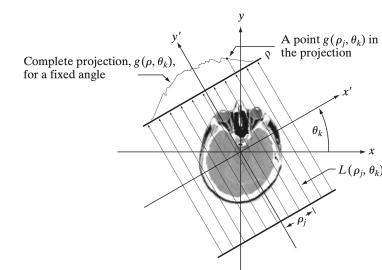


Figura 6: Geometría de los haces de rayos paralelos.

línea $x \cos \theta_k + y \sin \theta_k = \rho_j$. Si consideramos ρ y θ en la Ec. (2) como variables definidas sobre dominios continuos, tenemos:

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy \quad (3)$$

Esta ecuación es la *transformada de Radon* y nos permite calcular la proyección (integral de línea) de $f(x, y)$ a lo largo de una línea arbitraria en el plano xy . A veces se utiliza la notación $\mathfrak{R}f(x, y)$ o $\mathfrak{R}f$ en lugar de $g(\rho, \theta)$ de la Ec. (3) para denotar la transformada de Radon de f . La transformada de Radon es la piedra angular de la reconstrucción a partir de proyecciones, siendo la CT su principal aplicación en el campo del procesamiento de imágenes.

La transformada de Radon (Ec. (3)) en el dominio discreto corresponde a:

$$g(\rho, \theta) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) \quad (4)$$

donde ahora todas las variables x, y, ρ , y θ son discretas. Si fijamos θ y hacemos que ρ varíe, podemos ver que en la Ec. (4) simplemente se suman los píxeles de $f(x, y)$ a lo largo de las líneas definidas por cada valor de ρ , para un θ fijo.¹¹

Ejemplo 1 (Solución analítica de la transformada de Radón) Es posible obtener una expresión analítica de la proyección de un objeto circular en la Fig. 7(a) usando la transformada de Radón. El objeto se puede describir mediante la siguiente expresión:

$$f(x, y) = \begin{cases} A & x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde A es una constante y r es el radio del objeto. Suponemos que el círculo está centrado en el origen del plano xy . Dado que el objeto es simétrico, sus proyecciones son las mismas para todos los ángulos, por lo que se puede hacer la reconstrucción con sólo una proyección en $\theta = 0^\circ$. Evaluando la Ec. (3) tenemos:

$$\begin{aligned} g(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - \rho) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, y) dy \end{aligned}$$

La expresión anterior es una integral de línea (a lo largo de la línea $L(\rho, 0)$ en este caso). Además, hay que tener en cuenta que $g(\rho, \theta) = 0$ cuando $|\rho| > r$. Cuando $|\rho| \leq r$ la integral se evalúa desde $y = -\sqrt{r^2 - \rho^2}$ hasta

¹¹ Hacer esto para todos los valores de ρ (con θ fijo) produce una única proyección y, al repetir esto para cada valor de θ "deseado", se tendrán varias proyecciones (una por θ) que se usarán para reconstruir la imagen.

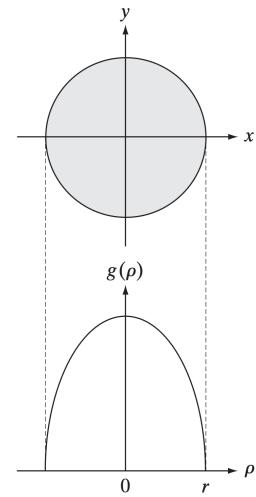


Figura 7:

- (a) Un disco. (b) Una representación gráfica de su transformada de Radón obtenida de forma analítica. Este caso se puede ver en 1D porque depende sólo de ρ . Cuando g depende de ρ y de θ en la Eq. (4), la transformada de Radon se visualiza como una imagen cuyos ejes son ρ y θ , y la intensidad de un píxel es proporcional al valor de g en la ubicación de ese píxel.

$y = \sqrt{r^2 - \rho^2}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} g(\rho, \theta) &= \int_{-\sqrt{r^2 - \rho^2}}^{\sqrt{r^2 - \rho^2}} f(\rho, y) dy \\ &= \int_{-\sqrt{r^2 - \rho^2}}^{\sqrt{r^2 - \rho^2}} Ady \end{aligned}$$

Integrando la expresión anterior se tiene:

$$g(\rho, \theta) = g(\rho) = \begin{cases} 2A\sqrt{r^2 - \rho^2} & |\rho| \leq r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde hemos utilizado el hecho mencionado anteriormente de que $g(\rho, \theta) = 0$ cuando $|\rho| > r$. La Fig. 7(b) muestra el resultado, que concuerda con las proyecciones ilustradas en las Figs. 1 y 2. Observe que $g(\rho, \theta) = g(\rho)$, es decir, g es independiente de θ .

La presentación gráfica de la transformada de Radon $g(\rho, \theta)$ se denomina *sinograma* o *senograma* y corresponde a una imagen con coordenadas ortogonales ρ y θ .¹² Al igual que la transformada de Fourier, un sinograma contiene los datos necesarios para reconstruir $f(x, y)$. Al igual que ocurre con las visualizaciones del espectro de Fourier, los sinogramas se pueden interpretar fácilmente para regiones simples, pero se vuelven cada vez más difíciles de "leer" a medida que la región proyectada se vuelve más compleja. Por ejemplo, la Fig. 8(b) muestra el sinograma del rectángulo a la izquierda. Los ejes vertical y horizontal corresponden a θ y ρ , respectivamente. Por lo tanto, la fila inferior es la proyección del rectángulo en la dirección horizontal (es decir, $\theta = 0^\circ$), y la fila del medio es la proyección en la dirección vertical ($\theta = 90^\circ$). El hecho de que la porción distinta de cero de la fila inferior sea más pequeña que la porción distinta de cero de la fila del medio nos indica que el objeto es más estrecho en la dirección horizontal. El hecho de que el sinograma sea simétrico en ambas direcciones alrededor del centro de la imagen nos indica que estamos tratando con un objeto simétrico y paralelo a los ejes x e y . Finalmente, el sinograma es suave, lo que indica que el objeto tiene una intensidad uniforme. Aparte de este tipo de observaciones generales, no podemos decir mucho más sobre este sinograma.

La Fig. 8(c) muestra una imagen del fantoma de Shepp-Logan, una imagen sintética ampliamente utilizada que fue diseñada para simular la absorción de áreas principales del cerebro. El sinograma de esta imagen es considerablemente más difícil de interpretar, como muestra la Fig. 8(d). Aún así podemos inferir algunas propiedades de simetría. El análisis visual de los sinogramas es útil en el desarrollo de algoritmos.

¹² Esto es similar a la visualización del espectro de Fourier, pero a diferencia de la transformada de Fourier, $g(\rho, \theta)$ siempre es una función real.

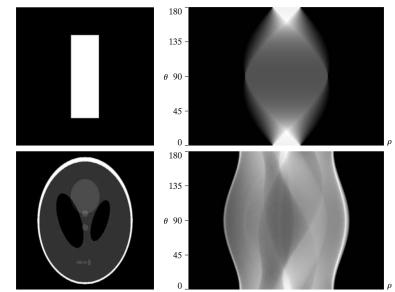


Figura 8:

a b
 c d

Dos imágenes y sus sinogramas (transformadas de Radon). Cada fila de un sinograma es una proyección a lo largo del ángulo correspondiente en el eje vertical. La imagen (c) se llama el fantoma de Shepp-Logan. En su forma original, el contraste del fantoma es bastante bajo. Aquí se muestra mejorado para facilitar su visualización.

El objetivo principal de la CT es obtener una representación 3D de un volumen a partir de sus proyecciones. Como ya se mencionó, esto se realiza al retroproyectar cada proyección de rayos X medida y luego sumar todas las retroproyecciones para generar una imagen (corte). Apilando todas las imágenes resultantes se obtiene una representación 3D del volumen. Para obtener una expresión formal para una imagen retroproyectada a partir de la transformada de Radon, comenzaremos con un solo punto de la proyección obtenida en el ángulo θ_k . En el sinograma, esto corresponde a la coordenada (j, k) , esto es, $g(\rho_j, \theta_k)$. La proyección completa para θ_k se obtiene accediendo a todas las filas de $g(\rho_j, \theta_k)$ (ver Fig. 6). Formar parte de una imagen retroproyectando este único punto equivale a copiar la línea $L(\rho_j, \theta_k)$ en la imagen, donde el valor de cada punto en esa línea es $g(\rho_j, \theta_k)$. Repitiendo esto para todos los valores ρ_j en la señal proyectada (manteniendo fijo el valor de θ en θ_k), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f_{\theta_k}(x, y) &= g(\rho, \theta_k) \\ &= g(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k, \theta_k) \end{aligned} \quad (5)$$

para la imagen usando la retroproyección de la proyección obtenida en θ_k , como en la Fig. 1(b). Si consideramos la Ec. (5) para θ definido sobre un dominio continuo, la imagen completa es la integral de todas las imágenes retroproyectadas:

$$f(x, y) = \int_0^\pi f_\theta(x, y) d\theta \quad (6)$$

En el caso discreto, la integral se convierte en una suma de todas las imágenes retroproyectadas:

$$f(x, y) = \sum_{\theta=0}^{\pi} f_\theta(x, y) \quad (7)$$

donde (x, y) y θ son ahora variables discretas.¹³

4 El teorema Fourier-Slice

Este teorema relaciona la transformada de Fourier 1D de una proyección y la transformada de Fourier 2D de la imagen a partir de la cual se obtuvo la proyección.

La transformada de Fourier 1D de una proyección con respecto a ρ es:

$$G(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\rho, \theta) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho \quad (8)$$

donde ω es la frecuencia angular.¹⁴ Si reemplazamos la Ec. (3) por el

¹³ Recuerde que las proyecciones a 0° y 180° son imágenes especulares una de la otra (en espejo), por lo que las sumas se realizan hasta el último incremento angular antes de 180° . Por ejemplo, si se utilizan incrementos de 0.5° , la suma va desde 0 hasta 179.5° en incrementos de medio grado. Una imagen retroproyectada formada de la manera descrita a veces se denomina *laminograma*. Se entiende implícitamente que un laminograma es solo una aproximación de la imagen a partir de la cual se generaron las proyecciones.

La Ec. (7) se utilizó para generar las imágenes retroproyectadas desde la Fig. 1 hasta la Fig. 3, a partir de las proyecciones obtenidas con la Ec. (4). De manera similar, estas ecuaciones se utilizaron para generar las Figs. 9(a) y 9(b), que muestran las imágenes retroproyectadas correspondientes a los sinogramas en la Figs. 8(b) y 8(d), respectivamente. Al igual que con las figuras anteriores, se observa una cantidad significativa de desenfoque, por lo que es evidente que el uso directo de la Ec. (7) y la Ec. (4) no produce resultados aceptables (tome en cuenta que son imágenes muy simples, muy distintas a las que se adquieren en la práctica). Los primeros sistemas de CT experimentales se basaron en estas ecuaciones. Sin embargo, el desarrollo de algoritmos de reconstrucción es un foco de investigación muy activo. Una de las mejoras más simples y directas se obtiene al reformular el enfoque de retroproyección como se verá más adelante.

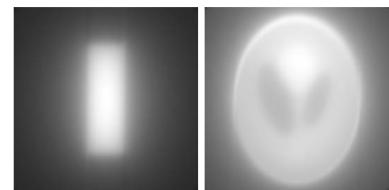


Figura 9:

a *b*
Retroproyecciones de los sinogramas de la Fig. 8.

¹⁴ Note que la Ec. (8) se define para un valor fijo de θ .

término $g(\rho, \theta)$ en la expresión anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} G(\omega, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) e^{-j2\pi\omega\rho} dx dy d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho \right] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

Si definimos $u = \omega \cos \theta$ y $v = \omega \sin \theta$, la Ec. (9) queda en:

$$G(\omega, \theta) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right]_{u=\omega \cos \theta; v=\omega \sin \theta} \quad (10)$$

La expresión anterior corresponde a la transformada de Fourier 2D de $f(x, y)$ evaluada en los valores u y v indicados. Esto es:

$$\begin{aligned} G(\rho, \theta) &= [F(u, v)]_{u=\omega \cos \theta; v=\omega \sin \theta} \\ &= F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

donde $F(u, v)$ es la transformada de Fourier 2D de la imagen $f(x, y)$.

La Ec. (11) se conoce como el teorema de la transformada Fourier-Slice (o el teorema de la transformada de proyección-slice). Indica que la transformada de Fourier de una proyección es una "slice" (corte) de la transformada de Fourier en 2D de la imagen a partir de la cual se obtuvo la proyección. La razón de esta terminología se puede explicar con la ayuda de la Fig. 10, donde la transformada de Fourier 1D de una proyección arbitraria se obtiene extrayendo los valores de $F(u, v)$ a lo largo de una línea orientada con el mismo ángulo que el utilizado en la generación de la proyección. En principio, se podría obtener $f(x, y)$ calculando la transformada inversa de Fourier de $F(u, v)$. Sin embargo, esto es costoso computacionalmente, ya que implica invertir una transformada 2D. El enfoque discutido en la siguiente sección es mucho más eficiente.

5 Retroproyecciones filtradas de haces paralelos (Parallel-Beam Filtered Backprojections)

Existe una solución simple al problema de inversión directa de las retroproyecciones que consiste en filtrar las proyecciones antes de la inversión (cálculo de la transformada inversa de Radon). La transformada inversa de Fourier 2D $F(u, v)$ es:¹⁵

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (12)$$

Si definimos, como en la Ec. (10) y la Ec. (11), $u = \omega \cos \theta$ y $v = \omega \sin \theta$, los diferenciales son $du dv = \omega d\omega d\theta$, entonces la Ec. (12) en

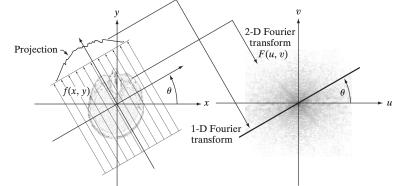


Figura 10: La transformada de Fourier 1D de una proyección es un corte de la transformada de Fourier 2D de la imagen de la cual se obtuvo la proyección. Note la correspondencia del ángulo θ .

¹⁵ La relación $du dv = \omega d\omega d\theta$ se obtiene a partir del cálculo integral, donde el Jacobiano se usa como base para un cambio de variables.

coordenadas polares es:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \quad (13)$$

Usando el teorema Fourier-slice, tenemos:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \quad (14)$$

Al dividir la integral en dos, una para $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ y otra para $\theta \in [180^\circ, 360^\circ]$, y usando el hecho de que $G(\omega, \theta + 180^\circ) = G(-\omega, \theta)$, podemos expresar la Ec. (14) como:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |\omega| G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta \quad (15)$$

En la integración en ω , el término $x \cos \theta + y \sin \theta$ es constante (esto equivale a ρ en la Ec. (1)). Por lo tanto, la Ec. (15) queda de la siguiente manera:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty |\omega| G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega\rho} d\omega \right]_{\rho=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta \quad (16)$$

La expresión interna está en la forma de una transformada de Fourier inversa 1D, con el término adicional $|\omega|$ que corresponde a un filtro 1D. El término $|\omega|$ corresponde a un filtro en rampa (Fig. 11(a)).¹⁶

La forma más sencilla de limitar la banda de una función es utilizar una ventana rectangular en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, una ventana rectangular tiene propiedades no deseadas de artefactos de *ringing*, por lo que se utiliza una ventana suavizada en su lugar. La Fig. 11(a) muestra un filtro en rampa después de ser limitado en banda por una ventana rectangular, y la Fig. 11(b) muestra su representación en el dominio espacial, obtenida mediante la transformada inversa de Fourier. Como era de esperar, el filtro en ventana resultante muestra artefactos de *ringing* en el dominio espacial. La utilización de una función suavizada como ventana ayuda en esta situación. Una función de ventana discreta de M puntos muy utilizada para filtrar en 1D es la siguiente:¹⁷

$$h(\omega) = \begin{cases} c + (c-1) \cos \frac{2\pi\omega}{M-1} & 0 \leq \omega \leq (M-1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (17)$$

Cuando $c = 0.54$, esta función se llama ventana de Hamming y, cuando $c = 0.5$, se llama ventana de Hann. La diferencia entre ambas es que en la segunda los extremos son cero, pero en términos de resultados, esta diferencia es casi imperceptible.

La Fig. 11(c) muestra la ventana de Hamming, y la Fig. 11(d) muestra el producto de esta ventana con el filtro rampa limitado en banda

¹⁶ Esta función no es integrable puesto que su amplitud es $+\infty$ en ambas direcciones, por lo que la transformada de Fourier inversa es indefinida. En la práctica, se aplica una ventana a la rampa en un intervalo de frecuencia definido.

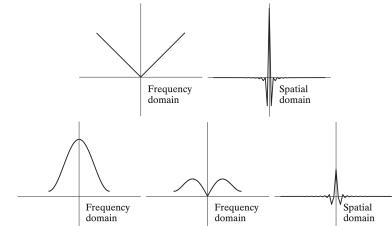


Figura 11:

- | | | |
|-----|-----|-----|
| a | b | |
| c | d | e |
- (a) Gráfico en el dominio de la frecuencia del filtro $|\omega|$ después de limitarlo en banda con un filtro rectangular.
 - (b) Representación en el dominio espacial.
 - (c) Función de ventana de Hamming.
 - (d) Filtro rampa con ventana (producto de (a) y (c)).
 - (e) Representación espacial del producto (observar la disminución del artefacto de *ringing*).

¹⁷ Debido a que se utiliza un filtro, este enfoque de reconstrucción *retroproyección filtrada*.

de la Fig. 11(a). La Fig. 11(e) muestra la representación del producto en el dominio espacial, obtenida mediante la transformada inversa de Fourier. Es evidente la reducción del *ringing* en el filtro rampa con ventana. Por otro lado, debido a que el ancho de la curva central en la Fig.11(e) es ligeramente mayor que en la Fig.11(b), se esperaría que las retroproyecciones basadas en una ventana de Hamming tengan menos *ringing* pero sean más borrosas.

Recordemos que de la Ec. (8), $G(\omega, \theta)$ en la FFT 1D de $g(\rho, \theta)$ ¹⁸. La Ec. (16) establece que la imagen completa reconstruida $f(x, y)$ se obtiene aplicando los pasos en la nota al margen ¹⁹.

Ejemplo 2 (Retroproyección filtrada) *Se muestra la retroproyección filtrada con filtro de rampa y luego con filtro de rampa con ventana de Hamming. Las retroproyecciones filtradas se comparan con los resultados de retroproyecciones "sin filtrar" en la Fig. 9. Con el fin de enfocarnos en las diferencias debidas únicamente al filtrado, los resultados se generaron con los mismos parámetros: incrementos de rotación de 0.5°, separación entre los rayos fue de un píxel, tamaño de las imágenes 600 × 600 voxels, por lo que la longitud de la diagonal es de $\sqrt{2} \times 600 \approx 849$. En consecuencia, se utilizaron 849 rayos para cubrir toda la región cuando el ángulo de rotación fue de 45° y 135°.*

*La Fig.12(a) muestra el rectángulo reconstruido utilizando un filtro de rampa. La característica más destacada de este resultado es la falta de cualquier borrosidad visualmente detectable. Sin embargo, como era de esperar, se observa ringing, visible como líneas tenues, especialmente alrededor de las esquinas del rectángulo. Estas líneas son más visibles en la sección ampliada en la Fig.12(c). El uso de una ventana de Hamming en el filtro de rampa ayudó considerablemente con este problema, a costa de una ligera borrosidad, como muestran las Figs.12(b) y (d). Las mejoras (incluso con el filtro de rampa sin ventana) respecto a la Fig.9(a) son evidentes. La imagen fantasma no tiene transiciones tan nítidas y prominentes como el rectángulo, por lo que la oscilación, incluso con el filtro de rampa sin ventana, es imperceptible en este caso, como se puede ver en la Fig.13(a). El uso de una ventana de Hamming resultó en una imagen ligeramente más suave, como muestra la Fig.13(b). Ambos resultados son mejoras considerables respecto a la Fig. 9(b), lo que ilustra nuevamente la ventaja significativa inherente en el enfoque de retroproyección filtrada.*²⁰

La discusión anterior se basa en obtener retroproyecciones filtradas mediante una implementación de FFT. Sin embargo, sabemos del teorema de convolución en el Capítulo 4 que se pueden obtener resultados equivalentes utilizando convolución espacial. En particular,

Lo expresado hasta ahora se puede realizar también en el dominio del espacio. Note que el término dentro de los corchetes en la Ec. (16) es la transformada de Fourier inversa del producto de

¹⁸ que es una proyección única obtenida a un ángulo fijo θ .

¹⁹

1. Calcular la transformada de Fourier 1D de cada proyección.
2. Multiplicar cada transformada de Fourier por la función de filtro $|\omega|$, la cual, como se explicó anteriormente, ha sido multiplicada por una ventana adecuada (por ejemplo, Hamming).
3. Obtener la transformada inversa de Fourier 1D de cada transformada filtrada resultante.
4. Integrar (sumar) todas las transformadas inversas 1D obtenidas en el paso 3.

Nota: Como en cualquier sistema discreto que es una aproximación de la realidad "continua", debemos tener presente las tasas de muestreo. En el caso de CT una consideración es el número de rayos utilizados, lo cual determina el número de muestras en cada proyección. Una segunda consideración es el número de ángulos de rotación, lo cual determina el número de imágenes reconstruidas (cuya suma es la imagen resultante). El submuestreo resulta en aliasing, lo cual puede manifestarse como artefactos en la imagen, como rayas.

²⁰ Los artefactos debido al *ringing* son una preocupación en CT, por lo que se dedica un esfuerzo significativo a minimizarlos. Ajustar los algoritmos de filtrado y utilizar un gran número de detectores son consideraciones de diseño que ayudan a reducir estos efectos.

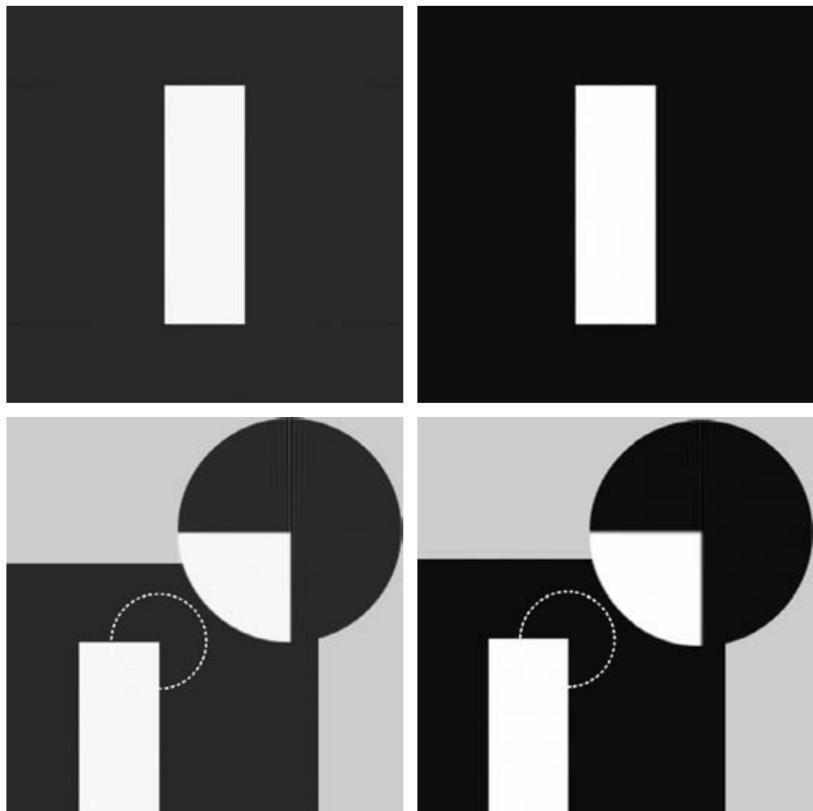


Figura 12:

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

FBP usando (a) filtro rampa, (b) filtro de rampa con ventana de Hamming. La segunda fila corresponde a un zoom de las imágenes respectivas. Comparar con Fig. 9(a).



Figura 13:

$$\begin{matrix} a & b \end{matrix}$$

FBP usando (a) filtro rampa, (b) filtro de rampa con ventana de Hamming. Comparar con Fig. 9(b).

dos funciones (en el dominio de la frecuencia). De acuerdo con el teorema de convolución, sabemos que esto es equivalente a la convolución de las funciones en el dominio del espacio. Si denotamos por $s(\rho)$ a la transformada de Fourier inversa de $|\omega|$ ²¹ la Ec. (16) queda como:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega\rho} d\omega \right]_{\rho=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi [s(\rho) * g(\rho, \theta)]_{\rho=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\rho, \theta) s(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) d\rho \right] d\theta, \quad (18) \end{aligned}$$

donde $*$ es la convolución. Las dos últimas líneas de la Ec. (18) expresan que las retroproyecciones individuales de un ángulo θ se pueden obtener convolucionando la proyección correspondiente, $g(\rho, \theta)$, y la transformada inversa de Fourier del filtro de rampa, $s(\rho)$. La imagen retroproyectada completa se obtiene integrando (sumando) todas las imágenes retroproyectadas individuales. Si ignoramos las diferencias por redondeo, los resultados obtenidos mediante la convolución serán idénticos a los resultados obtenidos utilizando la FFT.²²

Otra consideración importante es que el filtro rampa anula el término de central de la imagen en el dominio de la frecuencia, por tanto, cada imagen de retroproyección tendrá un valor de media cero. Esto implica que cada imagen de retroproyección tendrá intensidades negativas y positivas. Cuando se suman todas las retroproyecciones para formar la imagen final, algunos véxoles negativos pueden volverse positivos y el valor medio puede no ser cero, pero típicamente, la imagen final seguirá teniendo intensidades negativas.

6 Retroproyección filtrada haz-abanico (Fan-Beam Filtered Back-projections)

Los sistemas modernos de CT usan haces en forma de abanico²³ Sea $p(\alpha, \beta)$ la proyección en abanico, donde α es la posición angular de un detector particular medida con respecto al rayo central, y β es el desplazamiento angular de la fuente, medido con respecto al eje y (ver Fig. 14). También se observa que un rayo en el abanico se puede representar como una línea, $L(\rho, \theta)$ en forma normal.²⁴

A partir de la Fig. 14, note que los parámetros de la línea $L(\rho, \theta)$ están relacionados con los parámetros de un rayo de abanico por:

$$\theta = \beta + \alpha, \quad (19)$$

y

$$\rho = D \sin \alpha \quad (20)$$

²¹ Si se utiliza una función de ventana, como una ventana de Hamming, entonces se realiza la transformada de Fourier inversa sobre la rampa con ventana.

²² Generalmente los CT implementan la FBP usando la convolución que resulta ser más eficiente computacionalmente.

No es necesario almacenar todas las imágenes retroproyectadas durante la reconstrucción. Se actualiza una única suma acumulada con la última imagen retroproyectada. Al final del procedimiento, la suma acumulada es la suma total de todas las retroproyecciones.

²⁴ Esto permite utilizar los resultados de haz paralelo como punto de partida para derivar las ecuaciones correspondientes para la geometría en abanico.

El teorema Fourier-corte fue derivado para una geometría de haz paralelo y no es directamente aplicable a haces en abanico. Sin embargo, la Ec. (19) y la Ec. (20) proporcionan la base para convertir una geometría en abanico a una geometría en haz paralelo y, por lo tanto, poder aplicar el teorema Fourier-slice para resolver el problema de reconstrucción usando el método FBP.

²³ En la Fig. 4 se mostraron distintas geometrías usadas para reconstrucción de CT. Entender la reconstrucción asumiendo haces de Rx paralelos resulta más intuitiva. La Fig. 14 muestra la geometría básica de adquisición de CT en abanico. Los detectores están dispuestos en un arco circular y se asume que los incrementos angulares de la fuente de Rx son iguales.

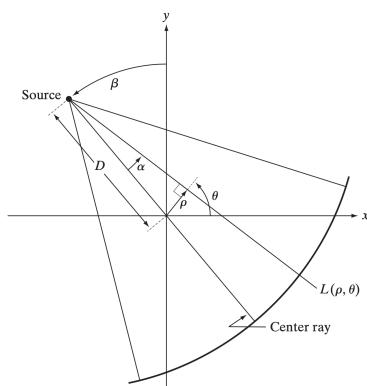


Figura 14: Geometría básica en abanico. La línea que pasa por el centro de la fuente y el origen (asumido aquí como el centro de rotación de la fuente) se llama rayo central.

donde D es la distancia desde el centro de la fuente hasta el origen del plano xy .

La fórmula de retroproyección por convolución para la geometría de imagen de haces paralelos paralelo está dada por la Ec.(18). Supongamos que nos centramos en objetos que se encuentran dentro de un área circular de radio T alrededor del origen del plano. Entonces $g(\rho, \theta) = 0$ para $|\rho| > T$ y la Ec.(18) queda como:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-T}^T g(\rho, \theta) s(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) d\rho d\theta, \quad (21)$$

donde utilizamos el hecho de que las proyecciones a 180° de diferencia son imágenes especulares (en espejo) entre sí. De esta manera, los límites de la integral externa en la Ec. (21) se extienden a un círculo completo, como se requiere en un arreglo de rayo de abanico en el que los detectores están dispuestos en un círculo.

Se busca integrar con respecto a α y β . Para hacer esto, comenzamos cambiando a coordenadas polares (r, φ) . Es decir, expresamos $x = r \cos \varphi$ y $y = r \sin \varphi$, de donde:

$$\begin{aligned} x \cos \theta + y \sin \theta &= r \cos \varphi \cos \theta + r \sin \varphi \sin \theta \\ &= r \cos(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (22)$$

Usando este resultado, se puede expresar la Ec. (21) como:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-T}^T g(\rho, \theta) s[r \cos(\theta - \alpha) - \rho] d\rho d\theta \quad (23)$$

Esta expresión es la fórmula de reconstrucción de haz paralelo escrita en coordenadas polares. Sin embargo, la integración se realiza con respecto a ρ y θ . Para integrar con respecto a α y β se requiere una transformación de coordenadas utilizando la Ec. (19) y la Ec. (20), lo que resulta en:

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &= \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} \int_{\sin^{-1}(-T/D)}^{\sin^{-1}(T/D)} g(D \sin \alpha, \alpha + \beta) \\ &\quad s[r \cos(\beta + \alpha - \varphi) - D \sin \alpha] D \cos \alpha d\alpha d\beta \end{aligned}$$

En la expresión anterior, se empleó el cambio de variable $d\rho d\theta = D \cos \alpha d\alpha d\beta$ (también usado en la Ec. (13)). Al simplificar, se obtiene:

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} p(\alpha, \beta) s[r \cos(\beta + \alpha - \varphi) - D \sin \alpha] D \cos \alpha d\alpha d\beta \quad (24)$$

Esta es la fórmula fundamental de reconstrucción por haz de abanico basada en FBP. La Ec. (24) se puede manipular aún más para expresarla en una forma de convolución. Considere la Fig. 16, se puede demostrar que:

$$r \cos(\beta + \alpha - \varphi) - D \sin \alpha = R \sin(\alpha' - \alpha) \quad (25)$$

²⁵ Primero, observe que los límites $-\alpha$ a $2\pi - \alpha$ para β abarcan todo el rango de 360° . Debido a que todas las funciones de β son periódicas, con período 2π , los límites de la integral externa se pueden reemplazar por 0 y 2π , respectivamente. El término $\sin^{-1}(T/D)$ tiene un valor máximo, α_m , que corresponde a $|\rho| > T$, más allá del cual $g = 0$ (ver Fig. 15), por lo que podemos reemplazar los límites de la integral interna por $-\alpha_m$ y α_m , respectivamente. Finalmente, consideremos la línea $L(\rho, \theta)$ en la Fig. 14. Una suma de rayos de un haz de abanico a lo largo de esta línea debe ser igual a la suma de rayos de un haz paralelo a lo largo de la misma línea (una suma de valores a lo largo de una línea, por lo que el resultado debe ser el mismo para un rayo dado, sin importar el sistema de coordenadas en el que se exprese). Esto es cierto para cualquier suma de rayos para valores correspondientes de (α, β) y (ρ, θ) . Por lo tanto, si denotamos por $p(\alpha, \beta)$ una proyección de haz de abanico, se tiene que $p(\alpha, \beta) = g(\rho, \theta)$, y a partir de la Ec. (19) y la Ec. (20), que $p(\alpha, \beta) = g(D \sin \alpha, \alpha + \beta)$. Incorporando estas observaciones en la Ec. (23) da como resultado lo expresado en la Ec. (23).

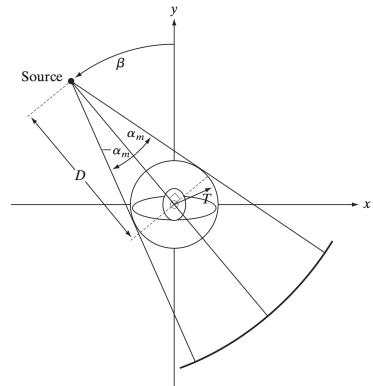


Figura 15: Máximo valor de α necesario para contener una región de interés.

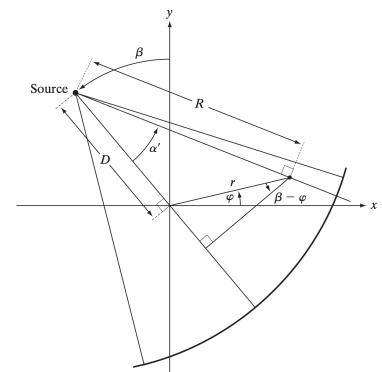


Figura 16: Representación en coordenadas polares de un punto arbitrario de un rayo en un haz del abanico.

donde R es la distancia desde la fuente hasta un punto arbitrario en un rayo de abanico, y α' es el ángulo entre este rayo y el rayo central. Nóte que R y α' se determinan según los valores de r , φ y β . Al sustituir la Ec. (25) en la Ec. (24) se obtiene:

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} p(\alpha, \beta) s [R \sin (\alpha' - \alpha)] D \cos \alpha d\alpha d\beta \quad (26)$$

Se puede demostrar también que:

$$s(R \sin \alpha) = \left(\frac{\alpha}{R \sin \alpha} \right)^2 s(\alpha) \quad (27)$$

Por lo tanto, la Ec. (26) se puede escribir como:

$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} \left[\int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} q(\alpha, \beta) h(\alpha' - \alpha) d\alpha \right] d\beta \quad (28)$$

donde:

$$h(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 s(\alpha) \quad (29)$$

y

$$q(\alpha, \beta) = p(\alpha, \beta) D \cos \alpha \quad (30)$$

En lugar de implementar directamente la Ec. (28), se puede (1) convertir una geometría de abanico a una geometría de haz paralelo utilizando la Ec. (19) y la Ec. (20), y (2) utilizar el método FBP de haz. Para esto consideremos los siguientes elementos:

Como se mencionó antes, una proyección de abanico, p , tomada con un ángulo β , tiene una proyección de haz paralelo correspondiente, g , tomada con un ángulo θ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} p(\alpha, \beta) &= g(\rho, \theta) \\ &= g(D \sin \alpha, \alpha + \beta) \end{aligned} \quad (31)$$

donde la segunda línea se obtiene de la Ec. (19) y la Ec. (20).

Considere $\Delta\beta$ como el incremento angular de proyecciones de haz en abanico sucesivas y $\Delta\alpha$ el incremento angular entre rayos, que determina el número de muestras en cada proyección. Se considera la restricción:

$$\Delta\beta = \Delta\alpha = \gamma \quad (32)$$

Entonces, $\beta = m\gamma$ y $\alpha = n\gamma$ para los enteros m y n . A partir de esto se puede escribir la Ec. (31) como:

$$p(n\gamma, m\gamma) = g[D \sin n\gamma, (m+n)\gamma] \quad (33)$$

Esta ecuación indica que el rayo n -ésimo en la proyección radial m es igual al rayo n -ésimo en la proyección paralela $(m+n)$. El término $D \sin \gamma$ en el lado derecho de la Ec. (33) implica que las proyecciones paralelas convertidas de proyecciones en abanico no están

Note que la integral interna de la Ec.(28) es una convolución, por lo tanto la Ec.(24) se puede implementar como la convolución de $q(\alpha, \beta)$ y $h(\alpha)$.

A diferencia de la fórmula de FBP para haces paralelos, la reconstrucción basada en proyecciones de abanico implica un término $1/R^2$, que es un factor de ponderación inversamente proporcional a la distancia desde la fuente.

muestreadas de forma uniforme, un problema que puede provocar borrosidad, anillos y artefactos de aliasing si los intervalos de muestreo $\Delta\alpha$ y $\Delta\beta$ son demasiado gruesos.

Ejemplo 3 (Reconstrucción con FBP con haces de abanico) La Fig. 17(a) muestra los resultados de (1) generar proyecciones en abanico de la imagen rectangular con $\Delta\alpha = \Delta\beta = 1^\circ$, (2) convertir cada rayo de abanico al rayo paralelo correspondiente usando la Ec. (33), y (3) utilizar el FBP para rayos paralelos. Las Fig. 17(b) a (d) muestran los resultados utilizando incrementos de 0.5° , 0.25° y 0.125° . Se utilizó una ventana Hamming en todos los casos. Esta variedad de incrementos de ángulo se utilizó con el propósito de ilustrar los efectos de submuestreo.

El resultado en la Fig. 17(a) es una clara indicación de que los incrementos de 1° son demasiado gruesos, ya que la borrosidad y los anillos son bastante evidentes. El resultado en (b) es interesante, en el sentido de que se compara mal con la Figura 12(b), que fue generada utilizando el mismo incremento de ángulo de 0.5° . De hecho, como muestra la Figura 17(c), incluso con incrementos de ángulo de 0.25° la reconstrucción todavía no es tan buena como en la Figura 12(b). Debemos utilizar incrementos de ángulo del orden de 0.125° antes de que los dos resultados sean comparables, como muestra la Figura 17(d). Este incremento de ángulo resulta en proyecciones con $180 \times (1/0.25) = 720$ muestras, que se acerca a las 849 rayos utilizados en las proyecciones paralelas del Ejemplo 2. Por lo tanto, no es sorprendente que los resultados sean similares en apariencia cuando se utiliza $\Delta\alpha = 0.125^\circ$.

Se obtuvieron resultados similares con el fantoma de cabeza, excepto que el aliasing es mucho más visible como interferencia sinusoidal. Podemos ver en la Fig. 18(c) que incluso con $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0.25^\circ$ aún hay una distorsión significativa, especialmente en la periferia de la elipse. Al igual que con el rectángulo, utilizando incrementos de 0.125° finalmente se obtuvieron resultados comparables con la imagen retroproyectada del fantoma de cabeza en la Fig. 13(b). Estos resultados ilustran una de las principales razones por las cuales se deben utilizar miles de detectores en la geometría de abanico de los sistemas CT actuales para reducir los artefactos de aliasing.

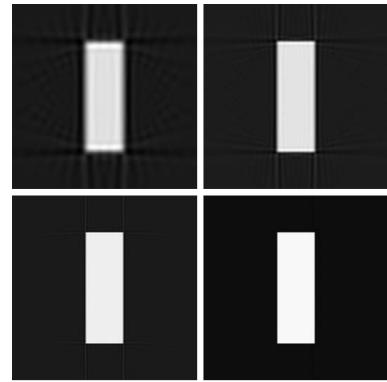


Figura 17:

a *b*
 c *d*

Reconstrucción de un rectángulo usando FBP con haces en abanico con incrementos de α y β de: (a) 1° , (b) 0.5° , (c) 0.25° y (d) 0.125° . Compare (d) con la Fig. 12(b).

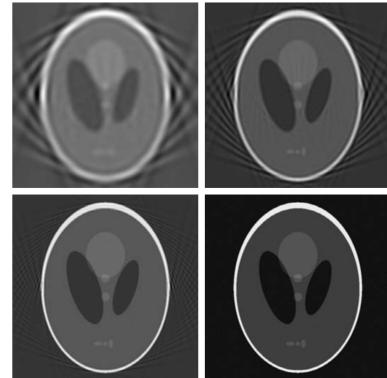


Figura 18:

a *b*
 c *d*

Reconstrucción del fantoma de cerebro usando FBP con haces en abanico con incrementos de α y β de: (a) 1° , (b) 0.5° , (c) 0.25° y (d) 0.125° . Compare (d) con la Fig. 13(b).