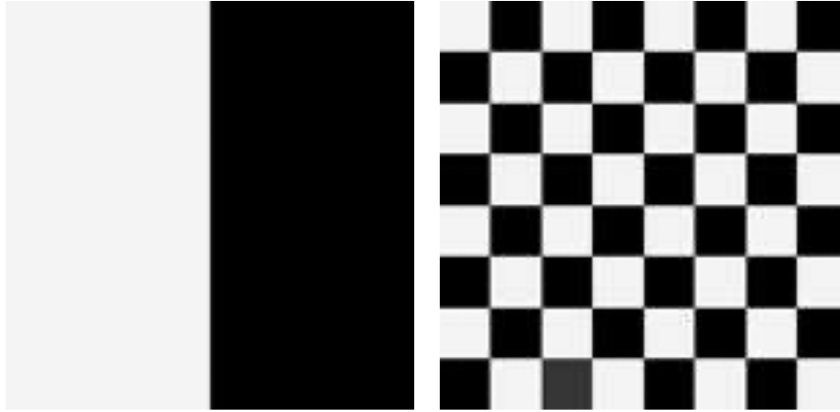


## CBM-423: Repositorio de ejercicios

1. En una aplicación dada, se aplica una máscara de promediado a las imágenes de entrada para reducir el ruido, y luego se aplica una máscara de Laplaciano para resaltar los pequeños detalles. ¿El resultado sería el mismo si se invirtiera el orden de estas operaciones?

**Respuesta:** El Laplaciano y el promediado son operaciones lineales, por lo tanto, no hay diferencia en cuál operación se aplica primero. (demostrar)

2. Considere las imágenes que se muestran a continuación. Ambas tienen el mismo histograma. Supongamos que a cada imagen se le aplica un filtro de promediado de  $3 \times 3$ . ¿Los histogramas de las imágenes filtradas seguirían siendo iguales? Explique.



**Respuesta:** El número de puntos de contorno entre las regiones negras y blancas es mucho mayor en la imagen de la derecha. Cuando las imágenes se difuminan, los puntos de contorno generarán un mayor número de valores diferentes en la imagen de la derecha, por lo que los histogramas de las dos imágenes difuminadas serán diferentes.

Para manejar los efectos de borde de la convolución, consideramos un *padding* de la imagen con ceros. Suponemos que la imagen es de tamaño  $N \times N$  (el hecho de que la imagen sea cuadrada es evidente en la imagen de la derecha en el enunciado del problema). El difuminado se implementa mediante una máscara de  $3 \times 3$  cuyos coeficientes son  $1/9$ . Los tipos de valores diferentes que tendrá la imagen de la izquierda suavizada son:

|  |       |
|--|-------|
| $N \left( \frac{N}{2} - 1 \right)$       | 0     |
| 2  | $2/9$ |
| $N - 2$                                  | $3/9$ |
| 4  | $4/9$ |
| $3N - 8$                                 | $6/9$ |
| $(N - 2) \left( \frac{N}{2} - 2 \right)$ | 1     |

Los tipos de valores diferentes que tendrá la imagen de la derecha suavizada son:

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| $\frac{N^2}{2} - 14N + 98$  | 0     |
| 28                          | $2/9$ |
| $14N - 224$                 | $3/9$ |
| 128                         | $4/9$ |
| 98                          | $5/9$ |
| $16N - 256$                 | $6/9$ |
| $\frac{N^2}{2} - 16N + 128$ | 1     |

Se verifica que la suma de los números en la columna izquierda de las tablas es  $N^2$ .

3. Considere la DFT de las imágenes que se muestran a continuación. ¿Hay diferencia entre las imágenes de amplitud o fase del espectro de Fourier entre ambas imágenes?

**Respuesta:** En amplitud son idénticas, en fase están invertidas. **Demostrar matemáticamente.**



4. Un filtro de moda se define como aquel en el cual la nueva intensidad del píxel de la imagen resultante toma el valor más probable de la distribución local de intensidad de una ventana ubicada alrededor de ese píxel de la imagen original. Muestre para una imagen en escala de grises que un filtro de moda, en todo caso, hará más abrupto los bordes de la imagen, mientras que un filtro de media tenderá a difuminarla.

**Respuesta:** En el lado del fondo de cualquier borde, la intensidad del fondo domina, por lo que el filtro de moda genera un valor de intensidad de fondo que es la que domina. De manera similar, genera un valor perteneciente a la región delimitada por el borde en el lado del primer plano (objeto) de cualquier borde. Hay un punto crítico en cualquier borde donde el valor más frecuente dominante de la distribución local de intensidad cambia del valor más frecuente de fondo a la moda de primer plano, o viceversa. Por lo tanto, el filtro de moda tiende a mejorar los bordes. El filtro de media difumina los bordes, ya que produce un perfil de intensidad en el que las intensidades de fondo y primer plano se mezclan, reduciendo así el contraste local entre las dos regiones.

5. Un filtro de máximo es aquel que toma el valor máximo de la distribución local de intensidad en una ventana alrededor de cada píxel. Explique qué se observará cuando se aplique un filtro de máximo a una imagen. Considere si pueden ocurrir efectos similares al aplicar un filtro de moda a una imagen.

**Respuesta:** Cuando se aplica un filtro máximo a una imagen, las regiones de fondo claro se expanden y tienden a reducir el tamaño de los objetos, e incluso a erradicar objetos pequeños. También tiende a producir regiones de intensidad constante (alta) en la imagen. En general, el filtro de moda tiende a preservar los bordes y no moverlos sustancialmente para reducir el tamaño de los objetos. Por otro lado, en las esquinas de los objetos o en los límites de alta curvatura, el filtro de moda tiende a cortar los objetos. Sin embargo, a diferencia del filtro máximo, actúa simétricamente entre el primer plano y el fondo, por lo que también cortará pequeñas regiones de fondo en límites de alta curvatura.

6. Explique el propósito de un filtro de mediana. ¿Será buena idea, en vez de aplicar filtros de mediana 2D, aplicar dos filtros de mediana 1D aplicados en secuencia?

**Respuesta:** El propósito del filtro de mediana es suprimir el ruido eliminando valores atípicos locales de intensidad. Además, su objetivo (y logra hacerlo con éxito) es lograr esto sin producir ningún tipo de borrosidad en la imagen local. El filtro de mediana requiere una gran cantidad de cálculos, que son proporcionales (en el peor caso) al área de la ventana en la que opera. Para contrarrestarlo, es común implementar un filtro de mediana bidimensional utilizando dos filtros unidimensionales, lo que suele ser casi un 100% efectivo.

7. Compare el comportamiento de filtros de media, máximo y mediana de un elemento 1D con cinco elementos cuando se aplican a la siguiente secuencia (para el filtro de media, dé el valor entero más cercano en cada caso):

0, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 0, 2, 3, 9, 3, 2, 4, 4, 6, 5, 6, 7, 0, 8, 8, 9, 1, 1, 8, 9

**Respuesta:**

orig:

0, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 0, 2, 3, 9, 3, 2, 4, 4, 6, 5, 6, 7, 0, 8, 8, 9, 1, 1, 8, 9

mean:

?, ?, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 5, 5, ?, ?

max:

?, ?, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 9, 9, 9, 9, 9, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, ?, ?

med1:

?, ?, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, ?, ?

med2:

?, ?, ?, ?, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, ?, ?, ?, ?

med3:

?, ?, ?, ?, ?, ?, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, ?, ?

El filtro de media promedia todos los valores ruidosos en la señal, mientras que el filtro de mediana los excluye.

8. Descubra qué sucedería si se aplicaran filtros de mediana 1D muchas veces, comenzando con la secuencia del ejercicio anterior.

**Respuesta:**

En este caso, aplicaciones adicionales de un filtro de mediana no tienen efecto adicional. El filtro máximo dispersa todos los valores altos en un rango amplio y también amplía cualquier punto de alta intensidad.

9. El filtro de difusión lineal en procesamiento de imágenes se define mediante la ecuación:

$$\nabla \cdot D(x, y, t) \nabla I(x, y, t) = \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = D(x, y, t) \nabla^2 I(x, y, t)$$

donde  $I$  es una imagen 2D y  $D(x, y, t)$  es el coeficiente de difusión en las coordenadas  $(x, y)$  y tiempo  $t$ , y  $\nabla I(x, y, t)$  corresponde al operador gradiente. En el caso de la difusión lineal se asume que  $\nabla D(x, y, t) = 0$ .

Considere la imagen:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 150 \\ 75 & 125 & 175 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Obtenga la solución  $I(x, y, t)$  para  $t = 1$  y  $D = 0.1$ . Escriba un programa en python para obtener esta solución.

**Respuesta:**

Para aplicar el filtro de difusión lineal se necesita el Laplaciano de la imagen, el cual puede ser aproximado mediante:

$$\nabla^2 I \approx I_{i+1,j} + I_{i-1,j} + I_{i,j+1} + I_{i,j-1} - 4I_{i,j}$$

donde

$$I_{i,j}$$

representa la intensidad de la imagen en la coordenada  $(i, j)$ .

Aplicando la ecuación de difusión se tiene:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0.1 \nabla^2 I$$

donde

$$D$$

es el coeficiente de difusión. La imagen se calcula iterativamente usando la ecuación:

$$I'_{i,j} = I_{i,j} + 0.1(\nabla^2 I)_{i,j}$$

En Python, la solución se puede obtener mediante el siguiente programa:

```
import numpy as np
from scipy.ndimage import convolve

def difusion_lineal(I, D, t):
    kernel_laplaciano = np.array([[0, 1, 0], [1, -4, 1], [0, 1, 0]])

    dt = 0.01 # debe ser un valor pequeño.

    for _ in range(int(t / dt)):
        #laplaciano de la imagen
        laplaciano = D * convolve(I, kernel_laplaciano)
        # Actualizar la imagen utilizando la ecuación de difusión lineal
        I += dt * laplaciano
    return I

# imagen original
I = np.array([[50, 100, 150],
              [75, 125, 175],
              [100, 150, 200]])

# parámetros
D = 0.1
t = 1

# solución
solucion = difusion_lineal(I, D, t)
```

La solución es:

$$I' = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 150 \\ 75 & \mathbf{115} & 175 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \quad (2)$$

10. Pruebe que las transformadas de Fourier 2D continua y discreta son operaciones lineales.

**Respuesta:** La Transformación de Fourier (TF) se define como:

$$F(\mu, v) = \mathfrak{J}[f(t, z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + v z)} dt dz$$

La TF es lineal si satisface:

$$\mathfrak{J}[a_1 f_1(t, z) + a_2 f_2(t, z)] = a_1 \mathfrak{J}[f_1(t, z)] + a_2 \mathfrak{J}[f_2(t, z)].$$

Si se sustituye la definición de la TF en la propiedad de linealidad se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}[a_1 f_1(t, z) + a_2 f_2(t, z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t, z) + a_2 f_2(t, z)] \\
&= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \times e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dtdz f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dtdz \\
&\quad + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dtdz \\
&= a_1 \mathfrak{J}[f_1(t, z)] + a_2 \mathfrak{J}[f_2(t, z)].
\end{aligned}$$

Note que el segundo paso es posible gracias a la propiedad de distributividad de la integral (que es un operador lineal). Procediendo de manera similar, para el caso discreto tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}[a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] e^{-j2\pi(ux/M + \nu y/N)} \\
&= a_1 \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_1(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + \nu y/N)} \\
&\quad + a_2 \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_2(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + \nu y/N)} \\
&= a_1 \mathfrak{J}[f_1(x, y)] + a_2 \mathfrak{J}[f_2(x, y)].
\end{aligned}$$

11. Un filtro pasa bajos Gaussiano continuo en el dominio de frecuencia continua tiene una función de transferencia:

$$H(\mu, \nu) = A e^{-(\mu^2 + \nu^2)/2\sigma^2}$$

Muestre que el filtro correspondiente en el dominio espacial es:

$$h(t, z) = A 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2 + z^2)}$$

**Respuesta:**

Se quiere llegar a la siguiente igualdad:

$$\mathfrak{S}^{-1} \left[ A e^{-(\mu^2 + \nu^2)/2\sigma^2} \right] = A 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2 + z^2)}$$

Para comenzar, resulta más simple analizar primero el caso unidimensional donde el filtro toma la forma  $H(\mu) = e^{-\mu^2/2\sigma^2}$  (esto no es necesario, puede ir directamente al caso 2D). Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \mathfrak{J}^{-1}[H(\mu)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2/2\sigma^2} e^{j2\pi\mu t} d\mu \\
&= \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2}.
\end{aligned}$$

La expresión anterior se puede expresar como:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\mu^2 - j4\pi\sigma^2\mu t]} d\mu.$$

Haciendo uso de la identidad:

$$e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} e^{\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} = 1,$$

la expresión anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\mu^2 - j4\pi\sigma^2\mu t - (2\pi)^2\sigma^4 t^2]} d\mu. \\ &= e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\mu - j2\pi\sigma^2 t]^2} d\mu \end{aligned}$$

Note que el resultado anterior corresponde a una distribución Gaussiana si hacemos el cambio de variable  $r = \mu - j2\pi\sigma^2 t$ ,  $dr = d\mu$  (consecuencia del cambio de variable) y si multiplicamos y dividimos el lado derecho de la ecuación por  $\sqrt{2\pi}\sigma$ . Tenemos entonces, a partir de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \\ h(t) &= \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \right]. \end{aligned}$$

Note que el término que está entre paréntesis corresponde a la distribución Gaussiana. Es sabido que como cualquier distribución de densidad de probabilidad, el área bajo la curva entre  $-\infty$  y  $\infty$  es uno, por lo tanto este término desaparece, lo que nos deja:

$$h(t) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}}.$$

El resultado anterior es justamente lo que nos piden en el problema, excepto que debemos hacerlo en 2D. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} h(t, z) &= \mathfrak{S}^{-1} \left[ A e^{-(\mu^2 + v^2)/2\sigma^2} \right] \\ &= A 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2 + z^2)}. \end{aligned}$$

Si sustituimos directamente en la definición de la transformada inversa de Fourier, tenemos:

$$\begin{aligned} h(t, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-(\mu^2 + v^2)/2\sigma^2} e^{j2\pi(\mu t + v z)} d\mu dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + j2\pi\mu t} d\mu \right] e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2} + j2\pi v z} dv. \end{aligned}$$

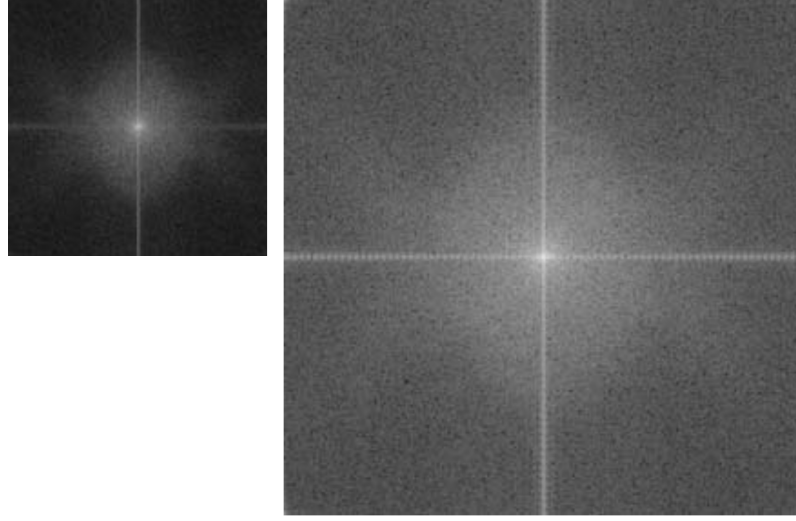
De la discusión anterior, sabemos que la integral dentro de los paréntesis (en rojo) es  $A\sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2}$ . Entonces, la última expresión queda en:

$$h(t, z) = A\sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2} + j2\pi v z} dv$$

Deberíamos reconocer que la integral que queda equivale a  $\sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 z^2}$ . Con lo anterior, llegamos al resultado:

$$\begin{aligned} h(t, z) &= \left( A\sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 t^2} \right) \left( \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2 z^2} \right) \\ &= A 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2 + z^2)} \end{aligned}$$

12. Los espectros de Fourier que se muestran son de la misma imagen. El espectro de la izquierda corresponde a la imagen original, y el espectro de la derecha se obtuvo después de que la imagen fue rellenada con ceros (*zero padding*). Explique la razón del aumento significativo de la intensidad del espectro a lo largo de los ejes vertical y horizontal de la imagen rellenada con ceros.



**Respuesta:**

A menos que todos los bordes de una imagen sean negros, rellenar la imagen con ceros introduce discontinuidades significativas (bordes) en uno o más de sus bordes. Estos se ven como líneas horizontales y verticales. Estas transiciones abruptas en el dominio espacial introducen componentes de alta frecuencia a lo largo de los ejes vertical y horizontal del espectro.

13. Considere la sección *The 2-D Discrete Convolution Theorem* (Pág. 365 del libro de Rafael Gonzalez disponible en Classroom) donde se discute respecto de la necesidad hacer *padding* con ceros a una imagen al aplicar filtros en el dominio de la frecuencia. Explique qué pasa al agregar estos ceros al principio y al final de una imagen.

**Respuesta:** Explicar la sección mencionada.

14. Explique el rol del espectro y ángulo de fase resultante al aplicar la Transformada de Fourier Discreta a una imagen (considere el ejemplo 4.14 del libro de Rafael Gonzalez)

**Respuesta:** Explicar el ejemplo indicado.

15. Demuestre la propiedad de periodicidad de la Transformada Discreta de Fourier dada por (Propiedad 8 en la Tabla 4.3 del libro de Rafael Gonzalez):

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N) \\
 &= F(u + k_1 M, v + k_2 N) \\
 f(x, y) &= f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N) \\
 &= f(x + k_1 M, y + k_2 N)
 \end{aligned}$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son enteros.

**Respuesta:** Esto se resuelve directamente reemplazando la definición de la transformada discreta de Fourier en la propiedad indicada:

$$\begin{aligned}
 F(u + k_1 M, v + k_2 N) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi([u+k_1 M]x/M + [v+k_2 N]y/N)} \\
 &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} e^{-j2\pi k_1 x} e^{-j2\pi k_2 y} \\
 &= F(u, v)
 \end{aligned}$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  toman valores  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . El última paso viene del hecho que  $k_1 x$  y  $k_2 y$  son enteros, lo que hace la exponencial de la derecha igual a uno.

16. Explique la relación entre muestreo, aliasing, remuestreo y patrones de Moiré en imágenes (ver Pág. 336 del libro de Rafael Gonzalez).

**Respuesta:** Ver sección indicada.

17. Se discutió que el término  $F(0, 0)$  de la DFT es proporcional al valor promedio de la misma imagen en el dominio del espacio. Asuma que el tamaño de la imagen es  $M \times N$ . Suponga también que hacemos un *zero padding* con ceros de tamaño  $P \times Q$ . Sea  $F_p(0, 0)$  el término central de la imagen con ceros agregados. Encuentre la razón entre valores promedio de la imagen original y la imagen con ceros agregados.

**Respuesta:** Se tiene:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

y que:

$$\begin{aligned} \bar{f}_p(x, y) &= \frac{1}{PQ} \sum_{x=0}^{P-1} \sum_{y=0}^{Q-1} f_p(x, y) \\ &= \frac{1}{PQ} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \\ &= \frac{MN}{PQ} \bar{f}(x, y) \end{aligned}$$

donde el segundo paso resulta del hecho de que la imagen fue expandida con ceros. Por lo tanto, la razón de los valores promedio es:

$$r = \frac{PQ}{MN}$$

Esta relación crece en función de  $PQ$ , indicando que el valor promedio de la imagen rellena disminuye en función de  $PQ$ . En consecuencia, agregar ceros a la imagen disminuye el valor promedio.

18. Muestre que la DFT de la función discreta  $f(x, y) = \sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y)$  es

$$F(u, v) = \frac{j}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$$

**Respuesta:** Usando la representación exponencial de senos y cosenos tenemos:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \frac{-j}{2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[ e^{j2\pi(u_0 x + v_0 y)} - e^{-j2\pi(u_0 x + v_0 y)} \right] e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \frac{-j}{2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi(Mu_0 x/M + Nv_0 y/N)} e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \frac{-j}{2} \mathfrak{I} \left[ (1) e^{j2\pi(Mu_0 x/M + Nv_0 y/N)} \right] + \frac{j}{2} \mathfrak{I} \left[ (1) e^{-j2\pi(u_0 x + v_0 y)} \right] \\ &= \frac{j}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)] \end{aligned}$$

19. Muestre que la DFT de la función discreta  $f(x, y) = 1$  es

$$\mathfrak{F}\{1\} = \delta(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } u = v = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Respuesta:** Ud.



20. Considere una filtro espacial de  $3 \times 3$  que promedia los cuatro vóxeles más cercanos al punto  $(x, y)$ , excluyendo al punto  $(x, y)$ . (a) Encuentre el filtro equivalente en el dominio de la frecuencia,  $H(u, v)$ . (b) Muestre que este filtro es un filtro pasabajo.

**Respuesta:** (a) El filtro es:

$$g(x, y) = \frac{1}{4}[f(x, y + 1) + f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y - 1)].$$

Entonces:

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \frac{1}{4} [e^{j2\pi v/N} + e^{j2\pi u/M} + e^{-j2\pi u/M} + e^{-j2\pi v/N}] F(u, v) \\ &= H(u, v)F(u, v) \end{aligned}$$

donde

$$H(u, v) = \frac{1}{2}[\cos(2\pi u/M) + \cos(2\pi v/N)]$$

es la función de transferencia del filtro en el dominio de la frecuencia.

(b) Para verificar que el filtro anterior es pasabajo, se representará de la manera usual centrada en  $(M/2, N/2)$ :

$$H(u, v) = \frac{1}{2}[\cos(2\pi[u - M/2]/M) + \cos(2\pi[v - N/2]/N)].$$

Para mayor facilidad, consideremos el caso unidimensional. Como  $u$  va desde 0 a  $M - 1$ , el valor de  $\cos(2\pi[u - M/2]/M)$  empieza en  $-1$ , alcanza el valor máximo 1 en  $u = M/2$  (el centro del filtro) y luego decrece a  $-1$  en  $u = M$ . La amplitud del filtro decrece a medida que la distancia respecto del centro del filtro aumenta, lo cual es el comportamiento necesario de un filtro pasabajo. En 2D se comporta de la misma manera.

21. Consideremos las imágenes mostradas más abajo. La imagen de la derecha se obtuvo filtrando la imagen de la izquierda con un filtro pasabajos gaussiano y luego filtrando el resultado con un filtro pasaaltos gaussiano. Las dimensiones de las imágenes son  $420 \times 344$ , y se utilizó  $D_0 = 25$  para ambos filtros.

Explique por qué la parte central del anillo en la figura de la derecha parece tan brillante y sólida, considerando que la característica dominante de la imagen filtrada consiste en bordes en el límite exterior de los objetos (por ejemplo, los dedos, los huesos de la muñeca) con un área más oscura en el medio. En otras palabras, ¿no esperarías que el filtro pasaaltos hiciera que el área constante dentro del anillo se oscureciera, ya que el filtro pasaaltos elimina el término DC (componente continua)?



**Respuesta:**

El anillo de hecho tiene un área central oscura como resultado de la operación pasaaalto únicamente (la siguiente imagen muestra el resultado solo del filtro pasaaalto). Sin embargo, el área central oscura es promediada por el filtro pasabajo. La razón por la cual el resultado final se ve tan brillante es que la discontinuidad (borde) en los límites del anillo es mucho mayor que en cualquier otro lugar de la imagen, lo que domina la visualización del resultado.



22. Dada una imagen de tamaño  $M \times N$ , se pide realizar un experimento que consiste en filtrar repetidamente la imagen con un filtro pasabajo gaussiano con una frecuencia de corte  $D_0$  dada. Puede ignorar errores de redondeo computacionales. Sea  $c_{\min}$  el número positivo más pequeño representable en la máquina en la que se llevará a cabo el experimento propuesto. (a) ¿Puede predecir (sin realizar el experimento) cuál será el resultado (imagen) para un valor suficientemente grande de  $K$ ? En caso afirmativo, ¿cuál es ese resultado? (b) Derive una expresión para el valor mínimo de  $K$  que garantizará el resultado que Ud. predijo.

**Respuesta:** (a) Una aplicación del filtro da:

$$\begin{aligned} G(u, v) &= H(u, v)F(u, v) \\ &= e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}F(u, v). \end{aligned}$$

$K$  aplicaciones del filtro daría:

$$G_K(u, v) = e^{-KD^2(u, v)/2D_0^2} F(u, v).$$

La DFT inversa de  $G_K(u, v)$  nos daría la imagen resultante de  $K$  pasos del filtro gaussiano. Si  $K$  es "suficientemente grande", el filtro pasabajo gaussiano se convertirá en un filtro Notch, pasando solo  $F(0, 0)$ . Sabemos que este término es igual al valor promedio de la imagen. Por lo tanto, existe un valor de  $K$  después del cual el resultado de filtrar repetidamente con el filtro pasabajo simplemente producirá una imagen constante. El valor de todos los píxeles de esta imagen será igual al valor promedio de la imagen original. Cabe destacar que esta respuesta se aplica incluso cuando  $K$  tiende a infinito. En ese caso, el filtro se aproximará a un impulso en el origen, lo que nos daría nuevamente  $F(0, 0)$  como resultado del filtrado.

(b) Para garantizar el resultado en (a),  $K$  debe elegirse suficientemente grande para que el filtro se convierta en un filtro Notch (en el origen) para todos los valores de  $D(u, v)$ . Teniendo en cuenta que los incrementos de frecuencias son en valores unitarios, esto significa:

$$H_K(u, v) = e^{-KD^2(u, v)/2D_0^2} = \begin{cases} 1 & \text{if } (u, v) = (0, 0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado que  $u$  y  $v$  son enteros, las condiciones en la segunda línea de esta ecuación se cumplen para todos los valores de  $u > 1$  y/o  $v > 1$ . Cuando  $u = v = 0$ ,  $D(u, v) = 0$  y  $H_K(u, v) = 1$ , como se desea. Queremos que todos los valores del filtro sean cero para todos los valores de la distancia desde el origen que sean mayores que 0 (es decir, para valores de  $u$  y/o  $v$  mayores que 0). Sin embargo, el filtro es una función gaussiana, por lo que su valor siempre es mayor que 0 para todos los valores finitos de  $D(u, v)$ . Pero estamos tratando con cantidades discretas de precisión finita (dada por  $c_{\min}$ ), que se tomarán valor cero siempre que el valor del filtro sea menor que la mitad del número positivo más pequeño representable. Según se indica en el enunciado del problema, el valor de este número es  $c_{\min}$ . Por lo tanto, los valores de  $K$  para los cuales la función del filtro es mayor que  $0.5 \times c_{\min}$  serán suficientes. Es decir, queremos el valor mínimo de  $K$  para el cual:

$$e^{-KD^2(u, v)/2D_0^2} < 0.5c_{\min}$$

o

$$\begin{aligned} K &> -\frac{\ln(0.5c_{\min})}{D^2(u, v)/2D_0^2} \\ &> -\frac{2D_0^2 \ln(0.5c_{\min})}{D^2(u, v)}. \end{aligned}$$

Como se señaló anteriormente, queremos que esta ecuación se cumpla para todos los valores de  $D^2(u, v) > 0$ . Dado que el exponencial disminuye a medida que aumenta la distancia desde el origen, elegimos el valor más pequeño posible de  $D^2(u, v)$ , que es 1. Esto nos da el resultado:

$$K > -2D_0^2 \ln(0.5c_{\min})$$

que es un número positivo debido a que  $c_{\min} \ll 1$ . Este resultado garantiza que el filtro pasabajo actuará como un filtro Notch, dejando solo el valor de la transformada en el origen. La imagen no cambiará más allá de este valor de  $K$ .

23. Entienda los pasos de los algoritmo K-means, fuzzy K-means, EM y Region Growing. (a) Modifique la implementación según el algoritmo fuzzy k-means (b) Considere el siguiente programa del algoritmo K-means, indique si hay algún error y resuélvalo (en este caso todos los programas están bien, pero debe tener en cuenta este tipo de preguntas). EM y fuzzy-kmeans están disponibles en el classroom.

```
def kmeans(image, num_clusters, max_iterations):
    cluster_centers = image[np.random.choice(range(len(image)), num_clusters)]
    for _ in range(max_iterations):
```

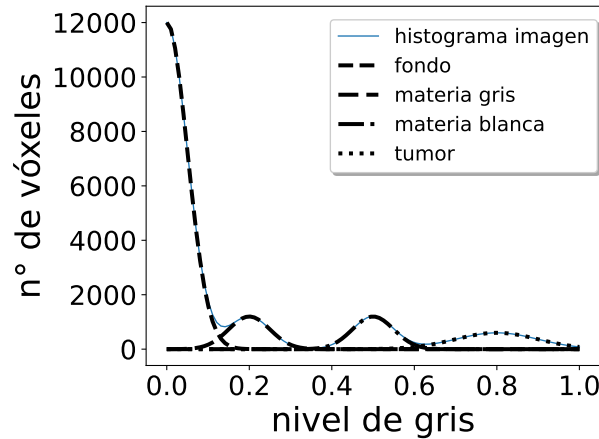
```

labels = np.argmin(
    np.linalg.norm(image - cluster_centers[:, np.newaxis], axis=-1), axis=0)
new_cluster_centers = np.array([np.mean(image[labels == i], axis=0) for i in range(num_clusters)])
if np.array_equal(cluster_centers, new_cluster_centers):
    break
cluster_centers = new_cluster_centers
return labels, cluster_centers

```

24. Explique el método de Otsu, proponga una implementación en Python que pueda hacer una segmentación con múltiples umbrales (no sólo uno). También escriba el algoritmo de Otsu para que funcione con imágenes multispectrales.

25. Se tiene una imagen con el siguiente histograma.



- Diseñe transformaciones puntuales que permitan resaltar la materia blanca por sobre el resto de las intensidades de la imagen. Explique por qué sus transformaciones deberían mejorar la imagen y cómo se debería ver el histograma de la imagen resultante para cada caso.
- Considere que la imagen presenta ruido y poco contraste. ¿Cuáles pasos se podrían aplicar para resaltar el tumor, considerando **todos** los tipos de técnicas vistos en clases hasta ahora? Indique el orden de los pasos y justifique la elección de cada uno. Además, explique con diagramas y ecuaciones (utilizando poco texto). Indique los parámetros que se deben definir para aplicar su proceso.

26. Considere la siguiente imagen:

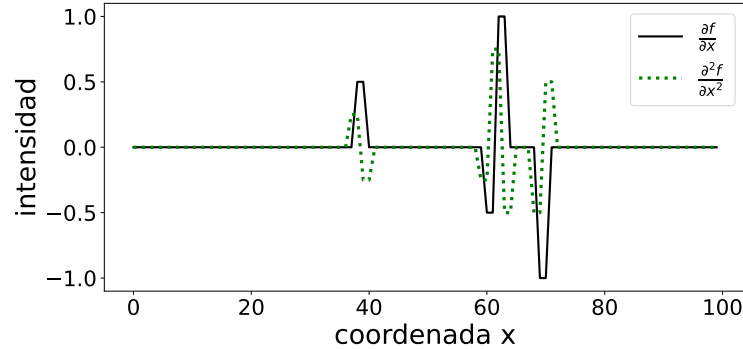
|   |    |   |   |    |
|---|----|---|---|----|
| 2 | 2  | 4 | 2 | 2  |
| 2 | 4  | 2 | 4 | 2  |
| 2 | 2  | 2 | 8 | 2  |
| 8 | 2  | 2 | 2 | 15 |
| 4 | 12 | 2 | 4 | 2  |

- Explique con diagramas y ecuaciones cómo se realiza el proceso de especificación de histograma. Indique en qué casos preferiría usar la especificación por sobre la ecualización de histogramas.
- Haga la especificación de histograma de la imagen. Justifique sus supuestos y elecciones en los diferentes pasos.

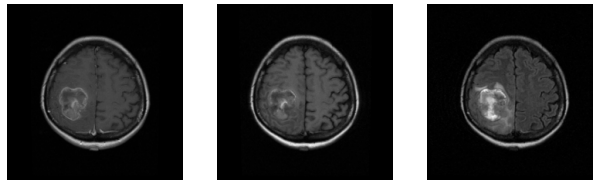
27. Se tiene la imagen  $f(x, y)$  de tamaño  $M \times N$  en el dominio del espacio,  $F(u, v)$  es la imagen que resulta luego de aplicar la FFT. Luego, se realiza *zero padding* de tamaño  $P \times Q$  a  $f$ , obteniendo  $f_p(x, y)$ ;  $F_p(u, v)$  es la representación de  $f_p$  en el dominio de la frecuencia. Se sabe que los valores de  $F(0, 0)$  y

$F_p(0,0)$  son proporcionales al valor promedio de las imágenes respectivas en el dominio del espacio y que la razón entre ambos valores es  $r = \frac{PQ}{MN}$  (resultado obtenido en la guía de ejercicios). ¿Son iguales los puntos centrales de  $F(0,0)$  y  $F_p(0,0)$ ? Explique.

28. ¿Es posible calcular la magnitud del gradiente de una imagen usando la transformada de Fourier? Si su respuesta es sí, explique como hacerlo. En ambos casos (sí o no), fundamente su respuesta.
29. La siguiente gráfica muestra un recorrido en dirección  $x$  de la segunda derivada de una imagen. Dibuje la imagen considerando que este patrón de intensidad se repite para todo  $y$ . ¿Es posible recuperar/reconstruir la imagen original si sólo conoce la magnitud del gradiente?



30. Explique la ley de probabilidad total en el contexto de segmentación de imágenes. De lo visto en clases, ¿qué utilidad presta esta propiedad?
31. Suponga que aplicó el algoritmo EM para segmentar una imagen de cerebro multispectral compuesta por 3 imágenes (T1, T1c, T2), es decir, cada vóxel es un vector en  $\mathbb{R}^3$ . Se quiere visualizar la probabilidad de que un vóxel sea materia blanca. ¿Qué debe hacer? (procure minimizar la intervención del usuario).



32. Formule el algoritmo de Otsu para una imagen bi-espectral (cada vóxel es un vector en  $\mathbb{R}^2$ ). ¿En qué casos este algoritmo no funciona?
33. ¿Es posible aplicar Region Growing a una imagen multispectral? Si su respuesta es sí, fundamente y haga un pseudocódigo (indicando el predicado que debe cumplirse). Si su respuesta es no, fundamente.
34. Considere el filtro de difusión no lineal.
- ¿Qué pasa cuando  $\kappa \rightarrow \infty$ ?
  - Si quiere reemplazar  $D$ , ¿qué criterio debe cumplir esta función?
  - ¿Cómo podríamos lograr que el nivel de suavizado disminuya en el tiempo?
  - Considere la imagen de tumor de más abajo. Queremos que la difusión sea baja dentro del tumor, pero alta fuera de éste (queremos conservar las variaciones de intensidad dentro del tumor). *Consejo:* Asuma que tiene una segmentación inicial  $X$  obtenida, por ejemplo, con el algoritmo EM, Kmeans o Fuzzy Kmeans. Diseñe una función  $D$  que permita lograr lo indicado.