Operator sumowania

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \cdots$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x = \underset{i=1}{x} + \underset{i=2}{x} + \underset{i=3}{x} + \cdots + \underset{i=n}{x} = n\,x \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_k = n\,x_k \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i+k} = x_{1+k} + x_{2+k} + x_{3+k} + \cdots + x_{n+k} \underset{\substack{i+k=j \\ i=1 \;\Rightarrow\; j=1+k \\ i=n \;\Rightarrow\; j=n+k}}{=} \sum_{j=1+k}^{n+k} x_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = ax_1 + ax_2 + ax_3 + \cdots + ax_n = a\,(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = a \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \underbrace{x_1 + y_1}_{i=1} + \underbrace{x_2 + y_2}_{i=2} + \underbrace{x_3 + y_3}_{i=3} + \cdots + \underbrace{x_n + y_n}_{i=n} =$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \color{red}{+} y_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \color{red}{+} y_i$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) \quad = \quad a \sum_{i=1}^{n} x_i + n\,b}$$

Niech dany będzie zbiór obserwacji zebranych w m seriach po n pomiarów i niech x_{ij} oznacza j-tą obserwację, w i-tej serii.

								Sumy wierszowe
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{in}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{mj}$
Sumy kolumnowe	$\sum_{i=1}^{m} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i2}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i3}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{m} x_{in}$	

Suma obserwacji danych w powyższej tablicy

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} + \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \sum_{i=1}^{m} x_{i3} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)$$

suma sum kolumnowych

$$a_1 \quad + \quad a_2 \quad + \quad a_3 \quad + \cdots + \quad a_j \quad + \cdots + \quad a_n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} + \sum_{j=1}^{n} x_{2j} + \sum_{j=1}^{n} x_{3j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} x_{mj} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)$$

suma sum wierszowych

$$b_1 \quad + \quad b_2 \quad + \quad b_3 \quad + \cdots + \quad b_j \quad + \cdots + \quad b_m$$

Suma nie zależy od kolejności sumowania,

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_j = m\sum_{j=1}^{n} x_j \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i = n\sum_{j=1}^{n} x_i$$

Jeśli zakresy indeksów i, j są znane i ustalone, to na oznaczenie sumy wszystkich obserwacji w rozważanej tablicy stosowana jest również notacja $\sum_i \sum_j x_{ij}$

Alternatywna notacja dla sum wierszowych i sum kolumnowych

								$\sum$
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}	$x_{1\cdot}$
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2n}	$x_{2\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{in}	$x_{i\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mn}	$x_{m\cdot}$
$\sum$	$x_{\cdot 1}$	$x_{\cdot 2}$	$x_{\cdot 3}$	$\cdots$	$x_{\cdot j}$	$\cdots$	$x_{\cdot n}$	$x_{\cdot\cdot}$

Suma elementów ponad przekątną główną (włącznie) dla tablicy kwadratowej $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \geq i}^{n} x_{ij}$

x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}
x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nn}

Suma elementów na przekątnej głównej tablicy kwadratowej $\sum_{i=1}^{n} x_{ii}$

***

Centrum i rozproszenie danych;

(i) Wyrównywanie (uśrednianie) danych

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ a, a, a, \cdots, a & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a \end{array}\right\} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\,a$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

(ii) Wyznaczanie dla zbioru danych $\{x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_n\}$ „centrum", tj. wielkość b, dla której suma odchyleń obserwacji od b jest równa zero, tj.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - b) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\,b = 0$$

$$\Downarrow$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Przyjmijmy oznaczać wielkość $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ symbolem $\bar{x}$.

(wielkość tę nazywa się *średnią próbkową* albo *średnią z próby*)

(iii) Rozproszenie danych

Obserwacje	$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\ \cdots,\quad x_n$		
Odchylenia (od centrum)	$x_1 - \bar{x},\ x_2 - \bar{x},\ x_3 - \bar{x}, \cdots,\ x_n - \bar{x}$	$\longrightarrow$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$
Odchylenia kwadratowe	$(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, (x_3 - \bar{x})^2, \cdots, (x_n - \bar{x})^2$	$\longrightarrow$	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

Średnie odchylenie kwadratowe
Odchylenie średniokwadratowe
Średni kwadrat odchyleń
Wariancja z próby
Wariancja próbkowa

Przyjmijmy oznaczać wielkość $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ symbolem s^2.

(iv) Wyznaczanie dla zbioru danych $\{x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_n\}$ „centrum", tj. wielkość c, dla której suma kwadratów odchyleń obserwacji od c jest minimum.

Zauważmy, że mamy

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) + (\bar{x} - c)^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - c) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - c)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}_{=0} + n(\bar{x} - c)^2$$

A zatem

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2$$

Stąd suma kwadratów odchyleń obserwacji od c jest minimum, gdy $c = \bar{x}$.

Własności średniej próbkowej $\bar{x}$:

$$\boxed{\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = n\,\bar{x} \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \min_{c} \sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 \end{cases}}$$

Uwagi kalkulacyjne:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 - 2\,x_i\,\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}(-2\,x_i\,\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2\,\bar{x}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i}_{\sum_{i=1}^{n}x_i = n\,\bar{x}} + n\,\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - n\,\bar{x}^2$$

Stąd

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - n\,\bar{x}^2 \\ \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n} \end{cases}$$

Przykład

	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	${x_i}^2$
	5	$(5 - 3{,}2)^2 = 3{,}24$	25
	4	$(4 - 3{,}2)^2 = 0{,}64$	16
	3	$(3 - 3{,}2)^2 = 0{,}04$	9
	1	$(1 - 3{,}2)^2 = 4{,}84$	1
	3	$(3 - 3{,}2)^2 = 0{,}04$	9
Σ	16	8,8	60

$$s^2 = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{8{,}8}{5} \\ \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - n\,\bar{x}^2\right) = \frac{1}{5}(60 - 5\cdot 3{,}2^2) \\ \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{5}\left(8{,}8 - \frac{16^2}{5}\right) \end{cases}$$

$$\hat{s}^2 = \begin{cases} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{8{,}8}{4} \\ \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - n\,\bar{x}^2\right) = \frac{1}{4}(60 - 5\cdot 3{,}2^2) \\ \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(8{,}8 - \frac{16^2}{5}\right) \end{cases}$$

(1) Przykład. $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\} \xrightarrow[y_i = x_i - m]{} \{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\}$

Wykazać równości: $\bar{y} = \bar{x} - m \qquad s_y^2 = s_x^2$

(2) Przykład. $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\} \xrightarrow[y_i = k\,x_i]{} \{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\}$

Wykazać równości: $\bar{y} = k\,\bar{x} \qquad s_y^2 = k^2 s_x^2$