① Эллипсоид

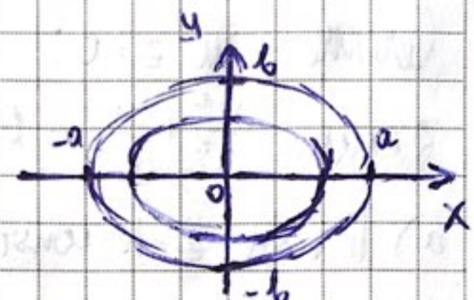
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$a, b, c > 0$
$|x| \le a,\ |y| \le b,\ |z| \le c$

а) сечения $\parallel$ Oxy

$z = h = const$
$z \in [-c; c]$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$$



С ростом h эллипсы уменьшаются

б) $\parallel$ Oxz и $\parallel$ Oyz

$y = h = const$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}=1$$

$x = h = const$

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1$$

Аналогично, но другие параметры эллипсов

2

Гиперболоиды

Однополостный

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

Сечение при $z=0$:

Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

а) $\parallel Oxy$, $z=h=const$

$$\frac{x^2}{\underbrace{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}_{\alpha}}+\frac{y^2}{\underbrace{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}_{\beta}}=1$$

$|h|\uparrow$, α и $\beta\uparrow$

Если $a=b$ – гиперб. вращ-я

Двуполостный

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

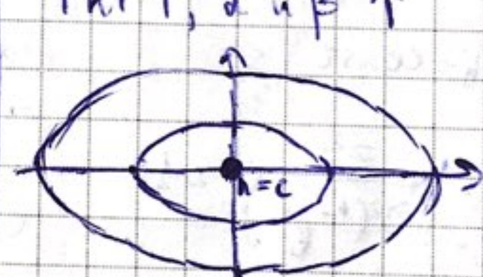
Сечение при $z=0$: $\varnothing$

При $z\in(-c;c)$ нет поверх-ти

а) $\parallel Oxy$, $z=h=const$

$$\frac{x^2}{\underbrace{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}_{\alpha}}+\frac{y^2}{\underbrace{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}_{\beta}}=1$$

$|h|\uparrow$, α и $\beta\uparrow$



Если $a=b$ – гиперб. вращ-я

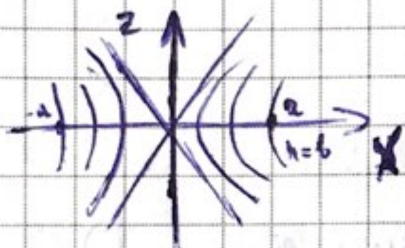
Продолжение однополостного

б) $\parallel Oxz$

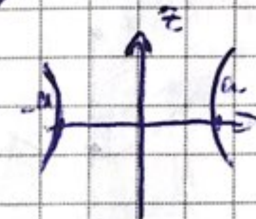
$y = h = const$ $\qquad \underbrace{\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}}_{\beta} = 1$

гипербола

$|h|\uparrow,\ h \in (-b;b) \Rightarrow \alpha$ и $\beta \downarrow$

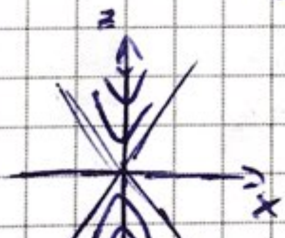


$|h| = b$

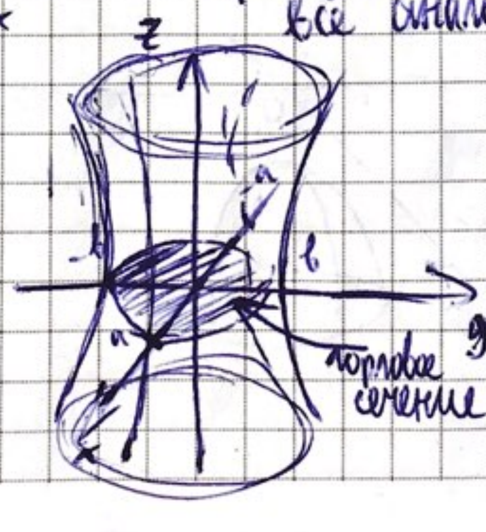


$|h|\uparrow,\ |h|>b, \Rightarrow \alpha$ и $\beta \downarrow$

Запишем по-другому: $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)} = -1$



в) при $\parallel Oyz$
все аналогично б)



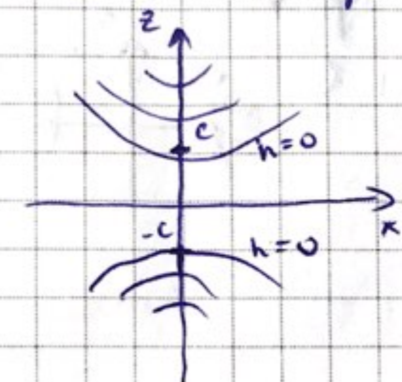
Продолжение двуполостного

б) $\parallel$ ~~...~~ Oxz

$y = h = \text{const}$ $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 - \dfrac{h^2}{b^2} \;\Big|\cdot(-1)$

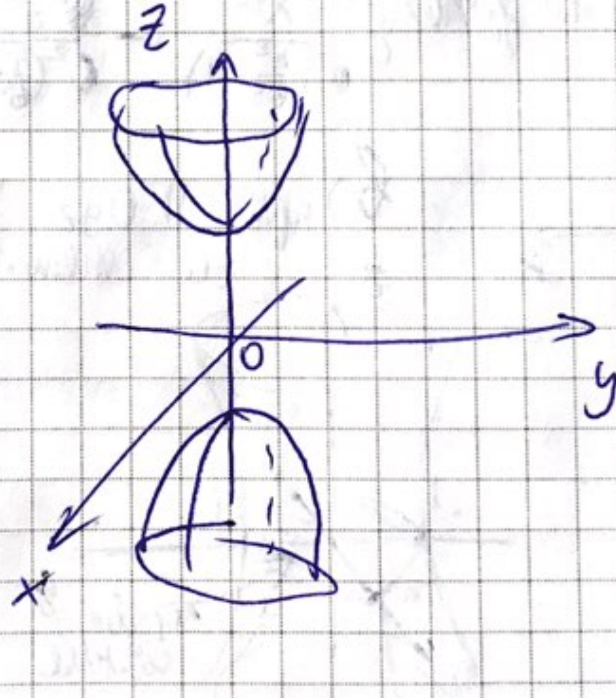
$$\frac{z^2}{\underbrace{c^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}_{\alpha}} - \frac{x^2}{\underbrace{a^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}_{\beta}} = 1$$

$|h|\uparrow$, α и $\beta \uparrow$



в) $\parallel$ Oyz

Аналогично б)



③ Параболоид

Эллиптический

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

$z \geq 0$

а) сечение $\parallel Oxy$

$z=h=const$

$$\underbrace{\frac{x^2}{2a^2h}}_{\alpha}+\underbrace{\frac{y^2}{2b^2h}}_{\beta}=1$$ ← эллипс

$|h|\uparrow$, α и $\beta\uparrow$

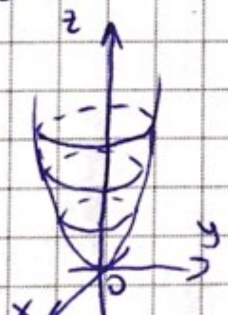
$a=b$ – параболоид вращения

б) $\parallel Oyz$, $x=h=const$

$$2z=\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{a^2}$$ – парабола, ветви ↑

в) $\parallel Oxz$

аналогично б)



Гиперболический

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

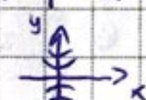
а) сечения $\parallel Oxy$

$z=h=const$

$$\frac{x^2}{2a^2h}-\frac{y^2}{2b^2h}=1$$ ← гипербола

$h>0$:

$h<0$:



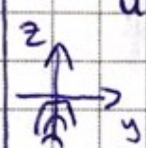
$h=0$:

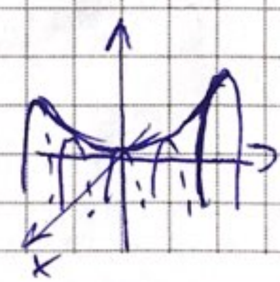
б) $\parallel Oyz$, $x=h=const$

$$2z=-\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{a^2}$$ – парабола, ветви ↓

в) $\parallel Oxz$, $y=h=const$

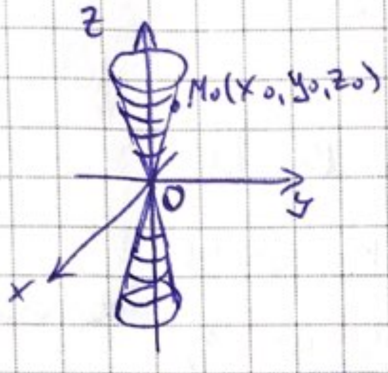
$$2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{h^2}{b^2}$$ – парабола, ветви ↑





④ Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$



$M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in$ конусу

$\overline{OM_0} = \overline{s} = (x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 t + 0 \\ y = y_0 t + 0 \\ z = z_0 t + 0 \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

1) $z = h = const$, сечение $\parallel Oxy$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \swarrow \text{эллипс}$$

2) $y = h = const$, сечение $\parallel Oxz$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{b^2} \swarrow \text{гипербола, аналогично}$$

3) $x = h = const$, $\parallel Oyz$

4) $\parallel$ касательной конуса: парабола или образующей