

$$\langle \mathbb{R}^{m+n}, (x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}, x = (x_1 \ \cdots \ x_m), y = (y_1 \ \cdots \ y_n) \rangle$$

$$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

**Теорема 1** (о неявном отображении).

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $O$  откр.
- $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$
- $\det F'_y(a, b) \neq 0$

Тогда:

1.  $\exists$  откр.  $P \subset \mathbb{R}^m, a \in P$   
 $\exists$  откр.  $Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$   
 $\exists! \Phi : P \rightarrow Q \in C^r : \forall x \in P \ F(x, \Phi(x)) = 0$
2.  $\Phi'(x) = - (F'_y(x, \Phi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

В терминах системы уравнений: Дана система из  $n$  функций,  $f_i \in C^r$ .

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть  $(a, b) = (a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n)$  — решение системы и  $\det \left( \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \neq 0$ . Тогда  $\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m$  и  $\exists! \Phi$  такие, что  $\forall x \in U(a) \ x, \Phi(x)$  — тоже решение системы.

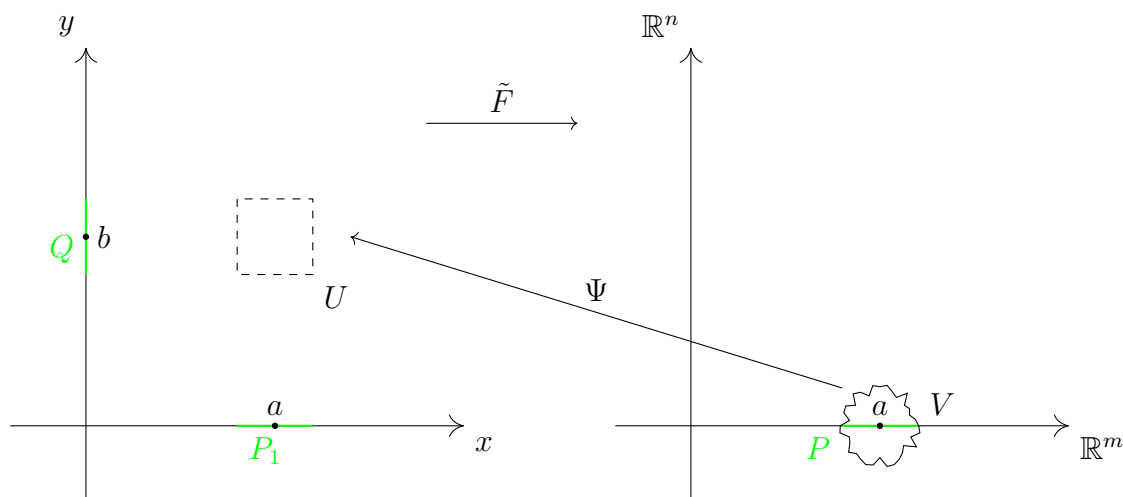
*Доказательство.*

$$1 \Rightarrow 2: F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x))\Phi'(x) = 0$$

$$1: \tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} : (x, y) \mapsto (x, F(x, y)), \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$$

$$\tilde{F}' = \left( \begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array} \right)$$

Очевидно  $\det \tilde{F}' \neq 0$  в  $(a, b)$ , значит  $\exists U(a, b) : \tilde{F}|_U$  — диффеоморфизм



1.  $U = P_1 \times Q$  — можно так считать
2.  $V = \tilde{F}(U)$
3.  $\tilde{F}$  — диффеоморфизм на  $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \rightarrow U$
4.  $\tilde{F}$  не меняет первые  $m$  координат  $\Rightarrow \Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
5. “Ось  $x$ ”  $\Leftrightarrow$  “ось  $u$ ”,  $P :=$  “ось  $u$ ”  $= \mathbb{R}^m \times a \cap V$ ,  $P$  — откp. в  $\mathbb{R}^m$ ,  $P = P_1$
6.  $\Phi(x) := H(x, 0)$

$$F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$$

$$\text{Единственность: } (x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$$

□

**Определение.**

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $k \in \{1 \dots m\}$

$M$  — простое  $k$ -мерное (**непрерывное**) многообразие в  $\mathbb{R}^m$ , если оно гомеоморфно некоторому открытому множеству  $O \subset \mathbb{R}^k$

Т.е.  $\underbrace{\Phi}_{\text{параметризация}} : \underbrace{O}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{сюрьекция}} M$  — непр., обратимо и  $\Phi^{-1}$  непрерывно.

**Определение.**  $M \subset \mathbb{R}^m$  — простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$ , если:

- $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi(O) = M$
- $\Phi \in C^r$
- $\forall x \in O \operatorname{rg} \Phi'(x) = k$

*Пример.*

1. Полусфера в  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$

$$\Phi : (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$$

$$\Phi : B(0, r) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi \in C^\infty$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}, \operatorname{rg} \Phi' = 2$$

2. Цилиндр  $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, z \in (a, b)\}$

$$\Phi : [0, 2\pi] \times (0, h) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \text{ — не инъективно.}$$

Не существует  $\Phi : \underbrace{O}_{\text{односвязн.}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{цилиндр} \subset \mathbb{R}^3$ , потому что топология: в цилиндре есть дырка, в  $O$  — нет.

Если мы допускаем дырку в  $O$ , то  $(x, y) \mapsto \left( \frac{rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right)$  — параметризация.

3. Сфера в  $\mathbb{R}^3$  без точки

$$\Phi : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \psi \\ R \sin \varphi \cos \psi \\ R \sin \psi \end{pmatrix}$$

**Теорема 2.**

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $1 \leq k \leq m$  (случай  $k = m$  тривиален)

- $1 \leq r \leq \infty$
- $p \in M$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$  — окрестность  $p$  в  $\mathbb{R}^m$  :  $M \cap U$  —  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие.
2.  $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$  и функции  $f_1, f_2 \dots f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , все  $f_i \in C^r$   
 $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$ , при этом  $\text{grad} f_1(p) \dots \text{grad} f_{m-k}(p)$  — ЛНЗ.

*Доказательство.*

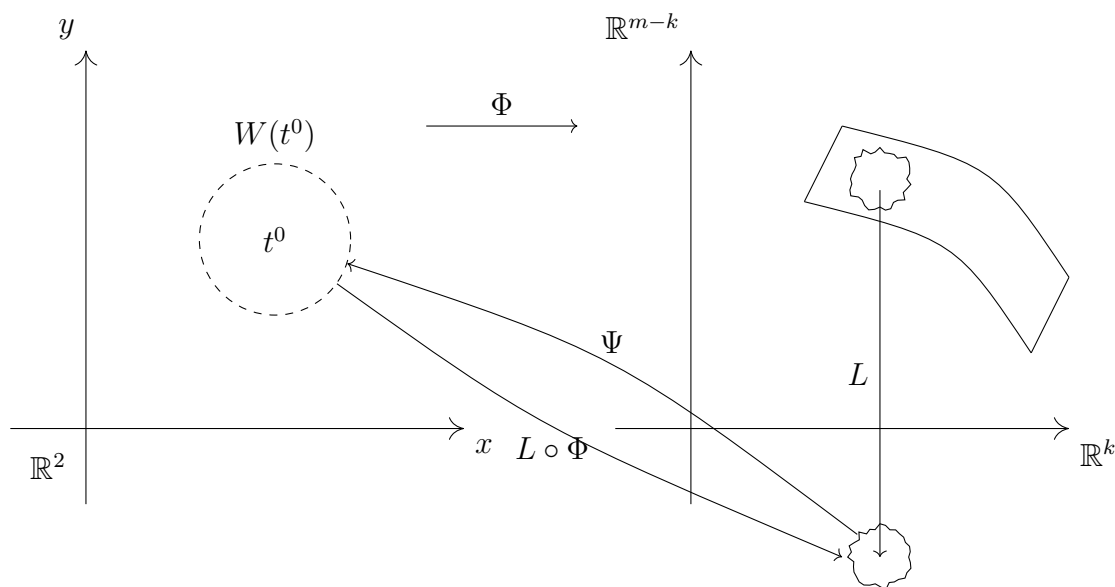
$1 \Rightarrow 2$ :  $\Phi$  — параметризация  $O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi \in C^r$ ,  $p = \Phi(t^0)$

$$\text{rg} \Phi'(t^0) = k$$

$$\text{Пусть } \det \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t^0) \right)_{i,j=1\dots k} \neq 0$$

Пусть  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  — проекция на первые  $k$  координат:  $(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_k)$

Тогда  $(L \circ \Phi)'$  — невырожденный оператор  $\Rightarrow$  локальный диффеоморфизм. Тогда если  $W(t^0)$  — окрестность точки  $t^0$ , то  $L \circ \Phi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  — диффеоморфизм.



Множество  $\Phi(W)$  — график некоторого отображения  $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

$$\text{Пусть } \Psi = (L \circ \Phi)^{-1}$$

Берем  $x' \in V$ , тогда  $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$ , т.е.  $H \in C^r$

Множество  $\Phi(W)$  открыто в  $M$  по топологическому определению непрерывности  
 $\Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$ , где  $\tilde{U}$  открыто в  $\mathbb{R}^m$

Можно считать, что  $\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$ , т.к.  $\mathbb{R}^{m-k}$  открыто.

Пусть  $f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto H_j(L(x)) - x_{k+j}$ . Тогда  $x \in M \cap \tilde{U} (= \Phi(W)) \Leftrightarrow f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad} f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = k \Rightarrow \text{ЛНЗ}$

2  $\Rightarrow$  1:  $F := (f_1 \dots f_{m-k})$

$$I := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

Градиенты ЛНЗ  $\Rightarrow \text{rg} I = m - k$ .

Пусть ранг реализуется на последних  $m - k$  столбцах, т.е.

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1 \dots m-k} \neq 0$$

$F(x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_m) = 0$  при  $x \in \tilde{U}$

По т. о неявном отображении:

$\exists P - \text{окр. } (x_1 \dots x_k) \text{ в } \mathbb{R}^m$

$\exists Q - \text{окр. } (x_{k+1} \dots x_m) \text{ в } \mathbb{R}^{m-k}$

$\exists H \in C^r : P \rightarrow Q : F(x', H(x')) \equiv 0$  для  $x' \in P$

Тогда  $\Phi : P \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1 \dots x_k) \mapsto (x_1 \dots x_k, H_1(x_1 \dots x_k), H_2(x_1 \dots x_k) \dots H_{m-k}(x_1 \dots x_k))$

$\Phi$  — гомеоморфизм  $P$  и  $M \cap \tilde{U}$ , потому что  $\Phi^{-1}$  — фактически проекция.

□

*Следствие 2.1* (о двух параметризациях).

- $M \subset \mathbb{R}^m - k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие
- $p \in M$
- $\exists$  две параметризации:  
 $\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_1(t^0) = p$

$$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_2(s^0) = p$$

Тогда  $\exists$  диффеоморфизм  $\Psi : O_1 \rightarrow O_2$ , такой что  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

*Доказательство.*

**Частный случай:** Пусть  $\operatorname{rg} \Phi_1'(t^0), \operatorname{rg} \Phi_2'(s^0)$  достигается на первых  $k$  столбцах.

$$\text{Тогда } \Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta - \text{искомый диффеоморфизм}}$$



$$\text{Общий случай: } \Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$$

Кажется, в формуле ошибка — см. иллюстрацию.



$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Гладкость очевидна в силу гладкости всех элементов.

Невырожденность мы не доказали, поэтому то, что это диффеоморфизм — ещё не доказано. Возможно, это будет на следующей лекции.

□