Лекция 1

8 февраля

Лемма 1 (о структуре компактного оператора).

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда $\exists$ ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

Примечание. Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

Доказательство. $W := V^*V$ — самосопряженный оператор *(матрица симметрична относительно диагонали)*.

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные *(возможно с повторениями)*
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

Примечание. Пока мы в $\mathbb{R}^m$ *(а не в $\mathbb{C}^m$)*, * есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \overset{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \overset{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- 1: т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.

- 2: из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^{m} V_{ik} V_{il}$$
$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$
$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \overset{\text{def}\, h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \overset{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \overset{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \overset{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- 3: из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- 4: т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.
- 5: при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i}\sqrt{c_i}} = 1$

Примечание. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \overset{\text{def}\, x}{=} V\left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle g_i\right) \overset{(6)}{=} \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) \overset{\text{def}\, h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

- 6: в силу линейности V

$$(\det V)^2 \overset{(7)}{=} \det(V^* V) \overset{\text{def}\, W}{=} \det W \overset{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

- 7: в силу мультипликативности det и инвариантности относительно транспонирования.
- 8: т.к. det инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \dots c_m$.

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

$\square$

Теорема 1 (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m \;\; V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

1. Если $\det V = 0 \quad \mathrm{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\mathrm{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E \;\; V(E) \subset \mathrm{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$

2. Если $\det V \neq 0 \quad \mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

   $\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

   Мы хотим найти k, для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0,1]\}$ — единичный куб на векторах g_i.

   $V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0,1]\}$.

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

   Таким образом, $k = |\det V|$

$\square$

1 Интеграл

1.1 Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i$ — разбиение множества.

2. $f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \;\; f\Big|_{e_i} = \mathrm{const}_i = c_i$$

   При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$

2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

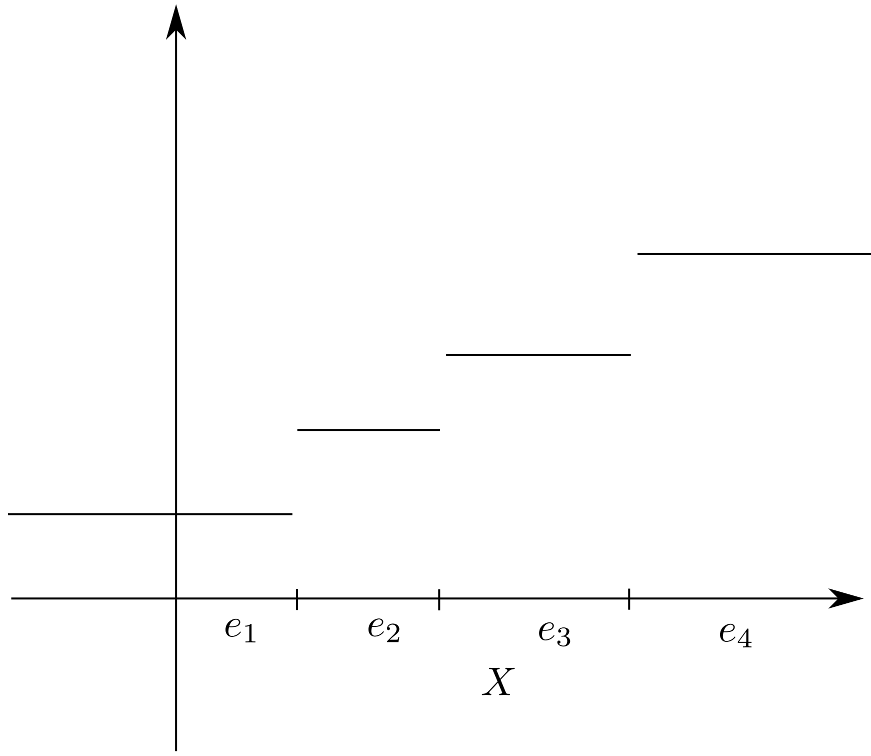


Рис. 1.1: Ступенчатая функция

Свойства.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые:

   $\exists$ разбиение X, допустимое и для f, и для g:

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} \quad g = \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k}$$
$$f = \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} \quad g = \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k}$$

2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$

   Тогда $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$ — ступенчатые.

Определение. $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — лебегово множество функции f

Аналогично можно использовать $E(f \le a), E(f > a), E(f \ge a)$

Примечание.

$$E(f \ge a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \ge a)^c$$
$$E(f \le a) = \bigcap_{b>a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f **измерима** на множестве E, если $\forall a \in \mathbb{R}\ \ E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

Вместо “f измерима на X” говорят просто “измерима”.

Если $X = \mathbb{R}^m$, мера — мера Лебега, тогда f — измеримо по Лебегу.

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a\ \ E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a\ \ E(f \le a)$ — измеримо
3. $\forall a\ \ E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a\ \ E(f \ge a)$ — измеримо

Доказательство. Тривиально по соображениям выше. □

Пример.

1. $E \subset X, E$ — измеримо $\Rightarrow \chi_E$ — измеримо.

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \varnothing, & a < 0 \\ X \setminus E, & 0 \le a \le 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывно. Тогда f — измеримо по Лебегу.

   Доказательство. $f^{-1}((-\infty, a))$ открыто по топологическому определению открытости, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

Свойства.

1. f измеримо на $E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \ E(f = a)$ измеримо.

   В обратную сторону неверно, пример — $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$

2. f — измеримо $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; \alpha f$ — измеримо.

   Доказательство. $E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \geq 0 \\ \varnothing, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases}$ □

3. f — измеримо на $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ измеримо на $E = \bigcup E_k$

4. f — измеримо на $E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f$ измеримо на E'

   Доказательство. $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$ □

5. $f \neq 0$, измеримо на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ измеримо на E.

6. $f \geq 0$, измеримо на $E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$ измеримо на E.

   Это неверно, т.к. при $f \equiv 0, \alpha = -1 \;\; \nexists f^\alpha$

Теорема 2. f_n — измеримо на X. Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.
2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.
3. Если $\forall x \;\; \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \overset{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

   9:

   - $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.

     $$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

   - $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. sup и inf измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

□

1.2 Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ-конечный объем *(и даже σ-конечная мера на $\mathcal{P}^1$)*

Также можно определить для монотонной, но непрерывной g. Тогда в точках разрыва $\exists g(a + 0), g(a - 0)$. Пусть $\mu[a, b) = g(b - 0) - g(a - 0)$. Такое изменение нужно, потому что исходное μ не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру μ_g на некоторой σ—алгебре. Это мера Лебега-Стилтьеса.

Пример. $g(x) = [x]$, тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если μ_g определена на Борелевской σ-алгебре, то она называется мерой Бореля-Стилтьеса.

Лекция 2

15 февраля

Теорема 3 (характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \to \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- f измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые:

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2. $\forall x \ \ f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

Доказательство.

$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n}\right) \qquad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

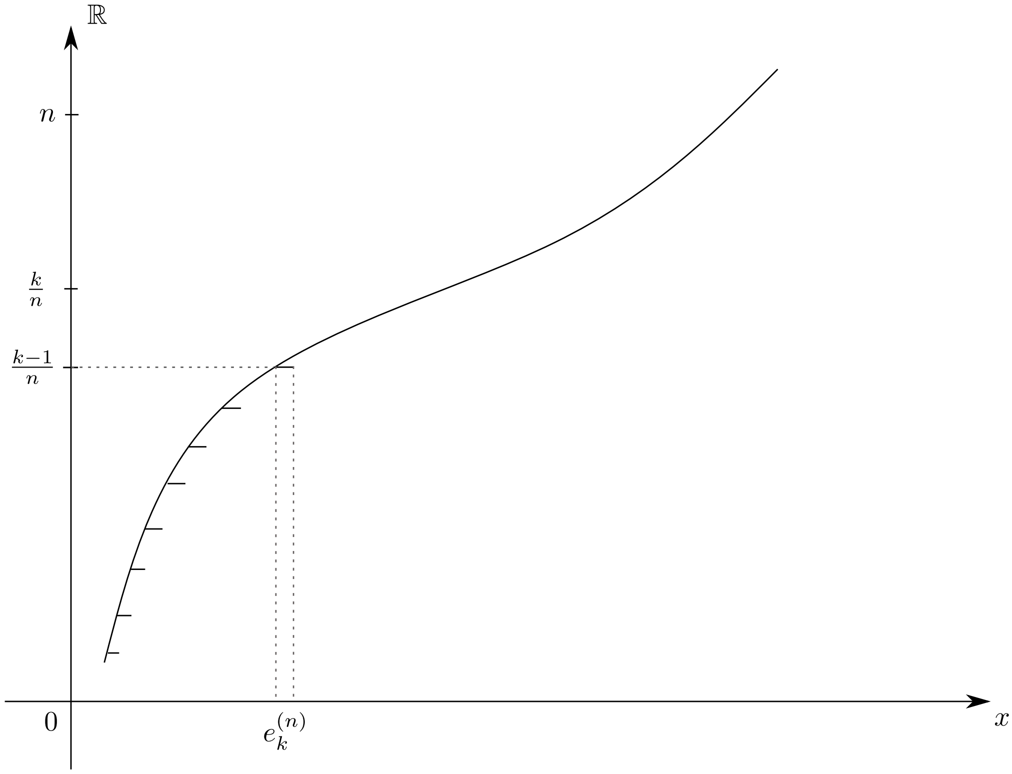
$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

Не дописано.

□

Следствие 1.



- f — измеримо

Тогда $\exists f_n$ — измеримые : $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ всюду и $|f_n| \leq |f|$

Доказательство. Рассмотрим срезки f^+, f^-, дальше очевидно. □

Следствие 2.

- f, g — измеримо

Тогда fg — измеримо, если $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство.

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \to f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \to g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \to fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела. □

Следствие 3.

- f, g — измеримо

Тогда $f + g$ измеримо.

Примечание. Считаем, что $\forall x$ не может быть одновременно $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$.

Доказательство.

$$f_n + g_n \to f + g$$

□

Теорема 4 (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры).

Примечание. $A \subset X$ — **полной меры**, если $\mu(X \setminus A) = 0$.

- $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывно на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измеримо.

Доказательство. f — измеримо на E', т.к. $E'(f < a)$ открыто в E' по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e$, λ_m — полная $\Rightarrow e(f < a)$ — измеримо в E.

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, объединение измеримых множеств измеримо. □

Пример. $E = \mathbb{R}, f = \chi_{\mathrm{Irr}}$, где Irr — множество иррациональных чисел. f непр. на Irr и разрывно на $\mathbb{R}$.

Следствие 4.

- $f : E \to \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- f измеримо на E'

Тогда можно так переопределить f на e, что полученная функция $\tilde{f}$ будет измерима.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in E' \\ \mathrm{const}, x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f<a)} \subset \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\varnothing \text{ или } e}$$

□

Следствие 5. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — монотонна.

Тогда f измерима.

Доказательство. f — непрерывно на $\langle a, b\rangle$ за исключением, возможно, счётного множества точек. □

Упражнение. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывна.

Доказать: $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$ — измеримо.

Упражнение. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримо.

Доказать: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ — измеримо.

Упражнение. Доказать, что $\exists$ измеримая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \lambda e = 0$, если f непрерывно на e, то полученная $\tilde{f}$ разрывна всюду.

Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верно при почти всех из E = почти всюду на E = почти везде на E = п.в. E, если:

$\exists e \in E : \mu e = 0\ \ W(x)$ — истинно при $x \in E \setminus e$

Пример. $X = \mathbb{R}, W$ = иррационально.

Пример. $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(x)$ при п.в. $x \in E$

Свойства.

1.
   - μ — полная
   - $f_n, f : X \to \overline{R}$ п.в. X
   - f_n измеримо

   Тогда f измеримо.

Доказательство. $f_n \to f$ на X', где $e = X \setminus X'$, $\mu e = 0$

f — измеримо на X

μ — полная $\Rightarrow f$ измеримо на X, т.к. $X(f<a) = \underbrace{X'(f<a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f<a)}_{\subset e}$ ☐

2. ???

3. Пусть $\forall n \ \ W_n(x)$ истинно при почти всех x.

   Тогда утверждение “ $\forall n \ \ W_n$ истинно” — верно при почти всех X

   Доказательство. $\lhd e_n : \mu(e_n) = 0$. Искомое высказывание верно при $x \in X \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} e_i\right)$, $\mu(\bigcup e_i) = 0$ ☐

Определение. $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечны.

f_n **сходится к** f **по мере** μ, обозначается $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f : \forall \varepsilon > 0 \ \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0, т.е. предел не задан однозначно.

Упражнение. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$; $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} g$. Тогда f и g эквивалентны.

Пример.

1. $f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$

   $f_n \to f$ всюду на $(0, +\infty)$

   $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \geq \varepsilon\right) = X(x \leq \frac{1}{\varepsilon n})$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \to 0$$

2. $f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$

   $f_n(x) \to 0$ при всех x

   $f_n(x) \Longrightarrow 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\to 0$$

3. $n = 2^k + l, 0 \leq l < 2^k, X = [0,1], \lambda$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

$\lim f_n(x)$ не существует ни при каком x!

$$X(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \to 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[\lambda]{} 0$$

Теорема 5 (Лебега).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- μX конечно
- f_n, f — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \to f$ п.в.

Тогда $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0, то есть $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon)$$

$$\bigcap X(f_n \geq \varepsilon)$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху, $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \to 0$

Рассмотрим общий случай: $f_n \to f$, $\varphi(x) := \sup\limits_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда $\varphi_n \to 0, \varphi_n \geq 0$ и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

$\square$

Теорема 6 (Рисс).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \to f$ почти везде.

Доказательство.
$$\forall k \ \ \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) \to 0$$
$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \ \ \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) \qquad E = \bigcap E_k$$
$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \overset{(10)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$
$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

10: по счётной полуаддитивности меры.

Покажем, что при $x \notin E \ \ f_{n_k} \to f$.

$$x \notin E \ \exists N \ \ x \notin E_k \text{ при } k > N \ \ |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть $f_{n_k}(x) \to f(a)$.

Т.к. $\mu E = 0$, искомое выполнено. □

Следствие 6. $f_n \overset{\mu}{\Longrightarrow} f \ \ |f_n| \leq g$ почти всюду. Тогда $|f| \leq g$ почти всюду.

Доказательство. $\exists n_k \ \ f_{n_k} \to f$ почти всюду.

□

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \ \ \forall x \Rightarrow f_n \Longrightarrow f$$

Теорема 7 (Егорова).

- $X, \mathfrak{A}, \mu$
- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечно, измеримо

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \underset{X \setminus e}{\rightrightarrows} f$$

Доказательство. Упражнение. □

Интеграл

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — зафиксировали.

Определение (1).

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- E_k — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d_{\mu(x)} := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

Свойства.

1. Не зависит от представления f в виде суммы, т.е.:

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

Примечание. При $E_k \cap E'_j \neq \varnothing$ $\alpha_k = \alpha_j$ $\Rightarrow$ можно писать любое из них.

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu (E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

2. $\underbrace{f}_{\text{ст.}} \leq \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$

Определение (2).

- $f \geq 0$
- f измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Свойства.

- Если f ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$
- $g \leq f, f$ — измеримая, g — измеримая $\Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение (3).

- f измеримо
- $\int f^+$ или $\int f^-$ конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

Теорема 8 (Тонелли).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f измерима
- Записывается как $f(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{m+n} \ \ E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ измерима на $\mathbb{R}^n$
2. Функция $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$, измерима и корректно задана.
3. $$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Примечание. Неформально говоря, можно разбить $\mathbb{R}^{m+n}$ на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.

Лекция 3

22 февраля

Определение. Если оказалось, что $\int_X f^+, \int_X f^-$ оба конечны, то f называется **суммируемой**.

Примечание.

1. Если f измеримо и $\geq$, то интеграл определения 3 = интегралу определения 2.

Определение (4).

- $E \subset X$ — измеримо
- f измеримо на X

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E$$

Примечание.

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \Rightarrow \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$
- $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g : 0 \leq g \leq f$ на E, g — ступ.$\}$ и мы считаем, что $g \equiv 0$ вне E.
- $\int_E f$ не зависит от значений f вне множества E.

Свойства. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \subset X$ — измеримо, g, f — измеримо.

1. Монотонность $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

   Доказательство.

   (a) При $f, g \geq 0$ — очевидно из определения.

   (b) При произвольных f, g $f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$ *(очевидно из определения)*. Из предыдущего случая $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$.

   $\square$

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$
3. $\mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$

   Доказательство.

   (a) f — ступ. Тривиально.

   (b) f — измеримо, $f \geq 0$. $\sup 0 = 0$, поэтому искомое выполнено.

   (c) $\int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$

   □

   Примечание. f — измерима. Тогда f суммируема $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

   Доказательство.

   $\Leftarrow$ следует из $f^+, f^- \leq |f|$

   $\Rightarrow$ будет доказано позже на этой лекции.

   □

4. $\int_E (-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$

   Доказательство.

   (a) $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$, тогда искомое очевидно.

   (b) Можно считать $c > 0$ без потери общности, тогда для $f \geq 0$ тривиально.

   □

5. $\exists \int_E f d\mu$. Тогда $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

   Доказательство.

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$$

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

   □

6. $\mu E < +\infty, a \leq f \leq b$. Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

Следствие 7. f — измеримо на E, f — ограничено на E, $\mu E < +\infty$. Тогда f суммируемо на E

7. f суммируема на E. Тогда f почти везде конечна.

   Доказательство.

   (a) $f \geq 0$ и $f = +\infty$ на $A \subset E$. Тогда $\int_E f \geq n\mu A \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

   (b) В произвольном случае аналогично со срезками.

□

Лемма 2.

- $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ — измеримо
- g — ступенчато
- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\
&= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\
&\overset{(11)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\
&= \sum_i \int_{A_i} g d\mu
\end{aligned}$$

11: переставлять можно, т.к. члены суммы ≥ 0. □

Теорема 9.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на A
- $f \geq 0$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

Доказательство. Докажем, что части равенства $\leq$ и $\geq$, тогда равенство выполнено.

$\leq$ $\lhd g : 0 \leq g \leq f$

$$\int_A g \overset{(12)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$\geq$ 1. $A = A_1 \sqcup A_2$

$\lhd 0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f\chi_{A_2}$. Пусть E_k — совместное разбиение, у g_1 коэффициенты α_k, у $g_2 : \beta_k$.

$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f\chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f$$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \leq \int_A f$$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $A = \bigsqcup A_i$ тривиально по индукции.

3. $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int A_i f$$

12: по лемме об интеграле. □

Следствие 8. $f \geq 0$ — измеримо. Пусть $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\nu E := \int_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

Следствие 9 (Счётная аддитивность интеграла). f суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. Очевидно, если рассмотреть срезки. □

Следствие 10. $A \subset B, f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

Предельный переход под знаком интеграла

Пусть $f_n \to f$. Можно ли утверждать, что $\int_E f_n \to \int_E f$?

Пример (контр).

$$f_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \quad f \equiv 0 \quad f_n \to f \quad (\text{даже } f_n \rightrightarrows f)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}\lambda[0,n] = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 10 (Леви).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n измеримо
- $\forall n \;\; 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде.
- $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Примечание. f задано везде, кроме множества e меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e. Тогда f измеримо на X.

Доказательство.

$\leq$ очевидно, т.к. $\int f_n \leq f$ почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X\setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_{0} = \int_{X\setminus e} f_n \leq \int_{X\setminus e} f \leq \int_X f$$

$\geq$ достаточно проверить, что $\forall$ ступенчатой $g : 0 \leq g < f$ выполняется следующее $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$

Сильный трюк: достаточно проверить, что $\forall c \in (0,1) \;\; \lim \int_X f_n \geq c \int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \overset{(13)}{=} c \int_X g$

13: по непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$ □

Теорема 11.

- $f, g \geq 0$
- f, g измеримо на E

Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые, т.е. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

$$\int_E f+g = \sum(\alpha_k+\beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \quad \lim f_n = f$

   $g \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \quad \lim g_n = g$

$$f_n + g_n \to f + g$$
$$\int_E f_n + g_n \xrightarrow{\text{т. Леви}} \int_E f + g$$
$$\int_E f_n + \int_E g_n \to \int_E f + \int_e g$$

□

Следствие 11. f, g суммируемы на E. Тогда $f + g$ суммируемо и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$. Таким образом, доказано 3.

суммируемости. $|f + g| \leq |f| + |g|$. Пусть $h = f + g$. Тогда

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$
$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$
$$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^-$$
$$\int_E h^+ - \int_E f^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-$$

□

Определение. $\mathcal{L}(X)$ — множество суммируемых функций на X

Следствие 12 (следствия). $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ это линейный функционал на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1 \dots f_n \in \mathcal{L}(X) \ \ \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

???

Теорема 12 (об интегрировании положительных рядов).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$ почти везде
- u_n измеримо

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

Пусть $S_n \to S$. Тогда $\int_E S_n \to \int_E S$

□

Следствие 13. u_n измеримо и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда ряд $\sum u_n(x)$ абсолютно сходится при почти всех x.

Доказательство.

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произвольная последовательность, $\sum a_n$ абсолютно сходится.

Тогда $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ абсолютно сходится при почти всех x.

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде.

$$\begin{aligned}\int_{[-N,N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x-x_n|}} &= \int_{-N}^{N} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} dx \\ &= |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &\leq |a_n| \int_{-N}^{N} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ & 4\sqrt{N}|a_n|\end{aligned}$$

□

Лекция 4

1 марта

Теорема 13 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- f суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall E$ — изм., $\mu E < \delta : \left|\int_E f\right| < \varepsilon$

Следствие 14. f суммируемо на X, $E_n \subset X$, тогда $\mu E_n \to 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \to 0$

Доказательство. [1]

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \supset X_{n+1} \supset \dots \Rightarrow \mu\left(\bigcap X_n\right) \overset{(14)}{=} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;\; \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f| \overset{(16)}{=} \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{\delta} \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

[1] Теоремы, не следствия
(14): Т.к. f на $\bigcap X_n$ бесконечна и f почти везде конечна.
(15): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
(16): Т.к. $|f|$ на $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$ не превосходит n_ε по построению X_{n_ε}

Примечание. Следующие два свойства не эквивалентны:

1. $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \;\; \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$

Из 1 не следует 2: пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$, $f_n = \frac{1}{nx}$. Тогда $f_n \overset{\lambda}{\Rightarrow} 0$, но $\int |f_n - f| = +\infty$ при всех n.

Из 2 следует 1, т.к.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \le \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \le \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Теорема 14 (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$, называемое "суммируемая мажоранта":
  1. $\forall n \;\; |f_n| \overset{(17)}{\le} g$ почти везде
  2. g — суммируемо на X

Тогда: f_n, f — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Примечание. Почти везде конечность f_n и f следует из (17), поэтому в условии этого можно не требовать.

Доказательство. f_n — суммируемы в силу неравенства (17), f суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \le \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$

   Зафиксируем ε. $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

   $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \to 0$

$$|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g \tag{18}$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} = \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[\text{сл. т. об абс. непр.}]{n \to +\infty} 0} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$

2. $\mu X = +\infty$

   Утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A \subset X$, изм., конечной меры, μA конечно : $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$. Докажем его.

$$\int_X g = \text{sup}\left\{\int g_n, 0 \le g_n \le g, g_n - \text{ступ.}\right\}$$
$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$
$$0 \le \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X\setminus A} g < \varepsilon$$
$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X\setminus A} \le \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\to 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X\setminus A} 2g}_{<2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

Теорема 15 (Лебега).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо
- $f_n \overset{(19)}{\to} f$ почти везде
- $\exists g$, называемое "суммируемая мажоранта":
  1. $\forall n \;\; |f_n| \le g$ почти везде
  2. g — суммируемо на X

Тогда f_n, f — суммируемы, $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$, и тем более $\int_X f_n \to \int_X f$

Доказательство. Суммируемость f_n, f, а также утверждение "и тем более" доказываются так же, как в теореме 14.

$$h_n := \text{sup}(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \dots)$$
$$0 \overset{(20)}{\le} h_n \overset{(21)}{\le} 2g$$

h_n монотонно убывает, что очевидно по определению sup.

$$\lim h_n \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim} |f_n - f| \overset{(22)}{=} 0 \text{ почти везде}$$

(20): по построению
(21): по (18)

$2g - h_n \geq 0$ и возрастает как последовательность функций, $2g - h_n \to 2g$ почти везде. Тогда по теореме 10:

$$\int_X 2g - h_n \to \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \to 0$$

$\square$

Не дописано

(22): по (19)