

# Конспект по дискретной математике

September 24, 2019

**Определение.** Арифметический базис —  $\oplus, \wedge, 1$

Полином Жегалкина

Пример:  $f(x, y, z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus x \wedge y \oplus 1) \leftrightarrow (x + y)(x + xy + 1) = x^2 + x^2y + x + xy + xy^2 + y$ .  
Можно заметить, что  $x^2 = x \pmod{2}$ .  $x^2 + x^2y + x + xy + xy^2 + y = x + xy + x + xy + xy = xy + y \leftrightarrow x \wedge y \oplus y$

**Определение.** Приведенный полином Жегалкина:  $\oplus_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$

**Теорема 1.** Любая булева функция, кроме 0, имеет представление в виде приведенного полинома Жегалкина, и только одно.

*Доказательство.* Существование тривиально - любую функцию записываем в арифметическом базисе и создаем приведенный полином Жегалкина. Докажем единственность. Всего существует  $2^{2^n} - 1$  функций от  $n$  аргументов, кроме 0. Кроме того, столько же существует полиномов Жегалкина от  $n$  аргументов. Если некоторой функции соответствует больше чем один полином Жегалкина, то некоторой функции не соответствует такой полином — противоречие.  $\square$

**Определение.** Булева функция называется линейной, если в её полиноме Жегалкина не используется  $\wedge$ .

*Примечание.* От  $n$  переменных существует  $2^{n+1}$  линейных функций.

Для 3 аргументов:

$$F_0 \quad f(0, 0, \dots, 0) = 0 - \text{всего } 2^{2^n-1}$$

$$F_1 \quad f(1, 1, \dots, 1) = 1 - \text{всего } 2^{2^n-1}$$

$$F_l \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \oplus_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i - \text{всего } 2^{n+1}$$

$$F_s \quad f(\neg x_1 \dots \neg x_n) = \neg f(x_1 \dots x_n) - \text{всего } 2^{2^n-1}$$

$$F_m \quad x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n, x_i \leq y_i \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

**Определение.** Эти пять множеств функций называются классы Пирса

**Лемма 1.** Классы Поста замкнуты относительно композиции

**Лемма 2.** Для любого класса Поста существует функция, не принадлежащая этому классу

*Доказательство.*  $\uparrow$  - стрелка Пирса не принадлежит ни одному классу Поста. □

**Определение.** Замыкание  $\overline{F} = \{g\}$ , где  $g$  можно записать формулой в системе связок  $F$ .

**Определение.**  $F$  — базис, если замыкание на нем - все булевы функции.

**Теорема 2.** Множество функций  $F$  является базисом тогда и только тогда, когда в этом классе содержатся функции всех пяти классов Поста. Другой способ записи:  $F$  - базис  $\Leftrightarrow \forall i \in \{0, 1, s, m, l\} F \not\subset F_i$

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”.  $F \subset F_i \Rightarrow^{L1} \overline{F} \subset F_i \Rightarrow^{L2} \downarrow \overline{F} \rightarrow F$  — не базис.

Докажем в другую сторону.

Здесь  $f_0, f_1, f_l, f_m, f_s$   $f_i \neq F_i$ , то есть рассматриваются функции, не лежащие в соответствующих классах Поста.

Рассмотрим  $f_0(0, 0, \dots, 0)$ .

1.  $f_0(1, 1, \dots, 1) = 0$   
 $f_0(x, x, \dots, x) = \neg x$
2.  $f_0(1, 1, \dots, 1) = 1$   
 $f_0(x, x, \dots, x) = 1$

Если сделать то же самое для  $f_2$ , то получим  $\neg$  и 0.

Выпишем все возможные аргументы для  $f_m$ :

$$\begin{cases} x_1 x_2 x_3 \dots x_n & f_m(X) = 1 \\ y_1 x_2 x_3 \dots x_n & f_m(X) = 1 \\ y_1 y_2 x_3 \dots x_n & f_m(X) = 1 \\ \vdots & \\ y_1 y_2 y_3 \dots y_n & f_m(X) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что для некоторого  $i$ -того набора переменных  $f_m(X_i) = 0$ , а  $f_m(X_{i-1}) = 1$ .  
 $f_m(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 1$

$f_m(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$ . Зафиксируем такие  $x$ . Тогда  $f_m(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = \neg x$

Итого, мы получили  $\neg x$  из  $f_m$

Рассмотрим  $f_s$ .  $\exists x_1, x_2 \dots x_n f_s(x_1 \dots x_n) = f_s(\neg x_1, \dots, x_n)$ . С помощью этого каким-то образом получается одна из констант. Другая константа получается отрицанием.

Рассмотрим  $f_l = x \wedge y \wedge z_3 \wedge z_4 \wedge \dots \wedge z_k \oplus \dots \oplus x \oplus \dots \oplus z_i \oplus \dots \oplus u_j$ . Мы выбрали нелинейный член с наименьшим числом элементов, его элементы обозначили за  $x, y, z_3, z_4, \dots, z_k$ . Не встречающиеся в этом члене переменные обозначили за  $u_1, u_2, \dots, u_j$ . Если подставить вместо  $z_i$  1, вместо  $u_j$  0, то  $f(x, y, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = x \wedge y[\oplus x][\oplus y][\oplus 1] = g(x, y)$ . Члены с  $u_j$  обратились в ноль.

Если в  $g$  есть  $\oplus 1$ , то от него можно избавиться, взяв  $\neg g$ . Если есть  $\oplus x$  (или  $y$ ), то берем  $g(\neg x, y)$  или наоборот.  $x \wedge y \oplus x \oplus y = x \vee y$

□

|               | сохр. 0 | сохр. 1 | мон. | сам. | лин. |
|---------------|---------|---------|------|------|------|
| $\wedge$      | .       | .       | .    | нет  | нет  |
| $\vee$        | .       | .       | .    | нет  | нет  |
| $\neg$        | нет     | нет     | нет  | .    | .    |
| $\wedge$      | .       | .       | .    | нет  | нет  |
| $\oplus$      | .       | нет     | нет  | нет  | .    |
| 1             | нет     | .       | .    | нет  | .    |
| $\rightarrow$ | нет     | .       | нет  | нет  | нет  |
| 0             | .       | нет     | .    | нет  | .    |