

Вывод формулы Вейерштрасса (из формулы Эйлера):

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-x} \frac{x(x+1) \dots (x+n)}{n!} = x \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \\ &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{e^{x\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - x \ln n}}_{e^{x(\gamma + o(1))}} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \end{aligned}$$

□

Примечание.

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) = \frac{(-x)}{xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} (-x)e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right) e^{\frac{x}{k}}} = \\ &= \frac{1}{x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin \pi x} \end{aligned}$$

Пример.  $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ ,  $P$  и  $Q$  — многочлены.

$\prod a_n = ?$

Пусть  $P$  и  $Q$  разложены на множители, т.е:

$$P(n) = \alpha(n+a_1)(n+a_2) \dots (n+a_k)$$

$$Q(n) = \beta(n+b_1)(n+b_2) \dots (n+b_l)$$

$$a_n = \frac{\alpha(n+a_1) \dots (n+a_k)}{\beta(n+b_1) \dots (n+b_l)}$$

Если  $k \neq l$ , то  $a_n \rightarrow 0$  или  $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \prod a_n$  расходится.  $\angle k = l$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\beta}$$

Если  $\frac{\alpha}{\beta} \neq 1$ , то  $a_n \not\rightarrow 1 \Rightarrow \prod a_n$  расходится.  $\angle \frac{\alpha}{\beta} = 1$

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{b_l}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Если  $\sum_{i=1}^k a_i \neq \sum_{i=1}^l b_i$ , то  $\prod a_n$  расходится, т.к.  $\prod 1 + \frac{c}{n}$  расходится, т.к.  $\sum \frac{c}{n}$  расходится.

$$\angle \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^l b_i$$

$$\prod_{n=1}^N \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{b_l}{n}\right)} = \prod_{n=1}^N \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) e^{-\frac{a_1}{n}} \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) e^{-\frac{b_1}{n}} \dots \left(1 + \frac{b_l}{n}\right) e^{-\frac{b_l}{n}}}$$

Равенство состоялось, т.к.  $\sum a_i = \sum b_i$ .

По формуле Вейерштрасса:

$$\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{ae^{\gamma a} \Gamma(a)}$$

$$\prod_{n=1}^N \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) e^{-\frac{a_1}{n}} \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) e^{-\frac{b_1}{n}} \dots \left(1 + \frac{b_l}{n}\right) e^{-\frac{b_l}{n}}} \rightarrow \frac{b_1 e^{\gamma b_1} \Gamma(b_1) \dots b_l e^{\gamma b_l} \Gamma(b_l)}{a_1 e^{\gamma a_1} \Gamma(a_1) \dots a_k e^{\gamma a_k} \Gamma(a_k)} =$$

$$= \frac{e^{\gamma b_1} \Gamma(b_1 + 1) \dots e^{\gamma b_l} \Gamma(b_l + 1)}{e^{\gamma a_1} \Gamma(a_1 + 1) \dots e^{\gamma a_k} \Gamma(a_k + 1)} = \frac{\Gamma(b_1 + 1) \dots \Gamma(b_l + 1)}{\Gamma(a_1 + 1) \dots \Gamma(a_k + 1)}$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-0)(n-0)}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1) \Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

## Градиент

**Определение.**  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , дифф.  $a$ , т.е.  $\exists L \in \mathbb{R}^m$

$$f(a+h) = f(a) + \langle L, h \rangle + o(h)$$

$L$  — градиент функции  $f$  в точке  $a$ , обозначается  $\text{grad} f(a)$ ,  $\text{grad}_a f$ ,  $\text{grad}(f, a)$ .

Физики (*и мличики*) обозначают  $\nabla f$

## Производная по направлению

“направление” = “единичный вектор”

**Определение.** Производная по вектору  $h \in \mathbb{R}^m, h \neq 0$ :

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

1.  $f$  — дифф.  $\Rightarrow f$  дифф. по любому вектору
2. Частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  — производная по направлению  $e_k = (0 \dots 0, \underbrace{1}_k, 0 \dots 0)$

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + th_1, \dots, x_m + th_m) - f(x_1 \dots x_m)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)th_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)th_m + o(t)}{t} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}h_m = \langle \nabla f, h \rangle \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Экстремальное свойство градиента.

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дифф.  $a \in \text{Int} E$ ,  $\nabla f(a) \neq 0$ .

Тогда  $l = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$  — направление наискорейшего возрастания функции, т.е.

$$\forall h \in \mathbb{R}^m : |h| = 1 \quad -|\nabla f(a)| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq |\nabla f(a)|$$

, причем “=” достигается только при  $h = \pm l$ , где при “+” достигается “=”

*Доказательство.*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f, h \rangle$$

$$-|\nabla f(a)||h| \leq \langle \nabla f, h \rangle \leq |\nabla f(a)||h|$$

$|h| = 1$  по построению:

$$-|\nabla f(a)| \leq \langle \nabla f, h \rangle \leq |\nabla f(a)|$$

□

*Пример.* Градиентный спуск.

$\Delta z = 1 - x^2 - y^2$  — параболоид

$$\nabla z = (-2x, -2y)$$

$\nabla(z, (0, 1)) = (0, -2) \Rightarrow$  с параболоида из точки  $(0, 1)$  быстрее всего съезжать по направлению  $\vec{v} = (0, 1)$

Это простейший метод нахождения локального минимума.

### Частные производные высших порядков

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int} E$

$k \in \{1 \dots m\}$ . Если  $\exists g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}$  в окрестности точки  $a$ :

$i \in \{1 \dots m\}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  называется второй частной производной (производной второго порядка) по переменным  $i$  и  $k$ , обозначается  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$

В общем случае:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)$$

**Теорема 2.** О независимости частных производных от порядка дифференцирования.

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in E$

$\exists r > 0 \quad B((x_0, y_0), r) \subset E$

Пусть в этом шаре  $\exists f''_{xy}, f''_{yx}$  и они непрерывны в  $x_0$ . Тогда  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

*Доказательство.*  $\Delta^2(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$

$\alpha(h) := \Delta^2(h, k)$  при фиксированном  $k$

$$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \alpha'(\bar{h})h = (f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0))h \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$$

$\beta(k) := \Delta^2(h, k)$  при фиксированном  $h$

$$\beta(k) = f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$$

$$f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk = f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$$

$$(h, k) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow (\bar{h}, \bar{k}) \rightarrow (0, 0), (\bar{h}, \bar{k}) \rightarrow (0, 0)$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

□

*Примечание.*  $E \subset \mathbb{R}^m$ , откр.

Класс  $C^r(E)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ :

$f \in C^r(E)$ , если у  $f$  существуют все частные производные порядка  $\leq r$  на всём  $E$  и они непрерывны.

$C(E)$  — непр. функции =  $C^0(E)$

$$C(E) \supsetneq C^1(E) \supsetneq C^2(E) \dots$$

Общий вид теоремы:  $f \in C^r(E) \quad \forall k \leq r$

$\forall x \in E \quad \forall i_1 \dots i_k$  : Если  $(j_1 \dots j_k)$  — перестановка  $(i_1 \dots i_k)$ , то:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x)$$

*Доказательство.* По частному случаю теоремы:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x)$$

Таким образом, можно осуществить транспозицию  $\Rightarrow$  можно осуществить любую перестановку. □

**Определение.** Мультииндекс (для  $\mathbb{R}^m$ ) — вектор  $(k_1, k_2 \dots k_m)$ ,  $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- $|k| := \sum_{i=1}^m k_i$  — высота мультииндекса

- $k! = k_1!k_2! \dots k_m!$
- $x \in \mathbb{R}^m \quad x^k = x_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$
- $f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}$

**Лемма 1.** Полиномиальная формула.

$a_i \in \mathbb{R}$  (верно для любого кольца). Тогда  $\forall r \in \mathbb{N}$ :

$$(a_1 + \dots + a_m)^r \stackrel{\text{очев}}{=} \sum_{n_1=1}^m \dots \sum_{n_r=1}^m a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_r} = \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

*Доказательство.* По индукции.

База:  $\triangleleft r = 1$

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_m &= \frac{1!}{1!0! \dots 0!} a_1 + \frac{1!}{0!1! \dots 0!} a_2 + \dots + a_m \\ a_1 + \dots + a_m &= a_1 + \dots + a_m \end{aligned}$$

Переход:

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_m)^{r+1} &= (a_1 + \dots + a_m) \sum_{\substack{j_1 \dots j_m \geq 0 \\ j_1 + \dots + j_m = r}} \frac{r!}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m} = \\ &= \sum \frac{r!}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1+1} \dots a_m^{j_m} + \dots + \sum \frac{r!}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \geq 1 \\ k_2 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{\substack{k_2 \geq 1 \\ k_1, k_3, k_4 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_2}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_2 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{\substack{k_2 \geq 0 \\ k_1, k_3, k_4 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!k_2}{j_1! \dots j_m!} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r!(k_1 + \dots + k_m)}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{(r+1)!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} \end{aligned}$$

□