Конспект по дискретной математике

October 15, 2019

1 Оценка числа элементов в схеме

Теорема 1. B_1 и B_2 $\exists c \ \forall f \ size_{B_1}(f) \leq c \cdot size_{B_2}$

Доказывалась ранее.

Теорема 2. О нижней оценке. Почти все функции требуют $\Omega(\frac{2^n}{n})$ элементов в своей записи. Альтернативная формулировка:

$$f(n)=rac{2^n}{n}\quad g(n):rac{g}{f} o 0\quad F_g=\{$$
булевы функции, $size\leq g(n)\}$

Тогда

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \to 0$$

Теорема 3. О верхней оценке.

$$\forall f$$
 — бул. ф. \exists схема из ф.э., содержащая $O\left(\frac{2^n}{n}\right)$ элементов

2 Линейная программа

Пример для $x_1 \oplus x_2$:

$$y_1 = \neg x_1$$

$$y_2 = \neg x_2$$

$$y_3 = x_1 \wedge y_2$$

$$y_4 = x_2 \wedge y_1$$

$$y_5 = y_3 \vee y_4$$

Линейная программа — нумерованное множество строк вида

$$(a,[i_1\dots i_k])$$
, где $a\in B$ (базис), i_j — индексы переменных, $a:\mathbb{B}^k o\mathbb{B}$

Теорема 4. Для $f \exists$ линейная программа длины $r \Leftrightarrow \exists$ схема из r функциональных элементов.

Оценка: сколько линейных программ над $\{\downarrow\}$ длины r?

Первая строка: n^2 вариантов (выбор 2 объектов из n)

Вторая строка: $(n+1)^2$ варинатов (выбор 2 объектов из n и y_1)

 $(n+r-1)^2$

$$K_{n,r} = \prod_{i=0}^{r-1} (n+i)^2 \le (n+r)^{2r}$$
$$\log_2 K_{n,r} \le \log_2 (n+r)^{2r} = 2r \log_2 (n+r)$$

Лемма 1.

$$\exists$$
 функция: $size_B(f) \geq rac{2^n}{2n}$

Доказательство. Предположим противное:

$$r < \frac{2^n}{2n}$$

$$\log_2 K_{n,r} \le 2r \log_2(n+r) < \frac{2 \cdot 2^n}{2n} \log_2(n+\frac{2^n}{2n}) \le \frac{2^n}{n} \log_2 2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow K_{n,r} < 2^{2^n}!!!$$

Обощим для произвольного c:

$$\begin{split} r < \frac{2^n}{2cn} \\ \log_2 K_{n,r} & \leq 2r \log_2(n+r) < \frac{2 \cdot 2^n}{2cn} \log_2(n+\frac{2^n}{2cn}) \leq \frac{2^n}{cn} \log_2 2^n = \frac{2^n}{c} \\ \Rightarrow K_{n,r} & < 2^{\frac{2^n}{c}}!!! \end{split}$$

Вернемся к доказательству теоремы 2.

стр. 3 из 3

Доказательство.

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \to 0$$

$$\frac{2^{\frac{2^n}{c}}}{2^{2^n}} = 2^{2^n \cdot (\frac{1}{n} - 1)} \to 0$$

Теорема 5. $\forall f \;\; \exists \mathsf{cxema} \; \mathsf{us} \; \mathsf{функ.эл.} O(\frac{2^n}{n})$