# Спектральная теорема для оператора общего вида

**Определение**. Операторный полином $p \in \mathcal{P}_\infty[K]$ называется аннулирующим полиномом линейного оператора $\varphi$, если $p(\varphi) = 0$

*Примечание.* Множество аннулирующих полиномов операторов $\varphi$ — ядро гомоморфизма $S_\varphi$ по определению.

**Теорема 1**. Аннулирующий полином существует.

*Доказательство.* $\dim \mathcal{P}[\varphi] = n^2 \Rightarrow \exists n^2$ ЛНЗ элементов. Эти элементы : $\varphi, \varphi^2 \ldots \varphi^{n^2}$. Тогда $\{\mathcal{I}, \varphi, \varphi^2 \ldots \varphi^{n^2}\}$ — ЛЗ

$$\Rightarrow \exists p[\varphi] = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i \varphi^i = 0 \Rightarrow \exists$$

□

$]J_\varphi$ — множество аннулирующих полиномов оператора $\varphi$

**Лемма 1**. $J_\varphi$ — идеал в $P_\infty[K]$

*Доказательство.* $]p \in J_\varphi \Rightarrow p(\varphi) = 0$

$]q \in P_\infty[K]$

$\lhd p(\lambda)q(\lambda) \xrightarrow{S_\varphi} p(\varphi)q(\varphi) = 0 \Rightarrow p(\lambda)q(\lambda)$ — аннулирующий $\Rightarrow p(\lambda)q(\lambda) \in J_\varphi$ □

**Определение**. **Минимальным аннулирующим полиномом** оператора $\varphi$ называется мнимальнй полином $J_\varphi$

*Примечание.* Обозначение минимального полинома: $p_\varphi(\lambda) \leftrightarrow p_\varphi(\varphi) = 0$

*Пример.* $]\varphi : X \to X$ — оператор с простым спектром

$]\chi_\varphi(\lambda)$ — характеристический полином $\varphi \Rightarrow \chi_\varphi(\lambda) = p_\varphi(\lambda)$

*Доказательство.*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{P}_i \Rightarrow \chi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \chi_\varphi(\lambda_i)\mathcal{P}_i = 0$$

Предположим обратное: $]p_\varphi(\lambda)$ — минимальный полином, такой что $\deg p_\varphi < \deg \chi_\varphi$

$]\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)p_\varphi(\lambda)$

$$\lhd p_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} p_\varphi(\lambda_i)\mathcal{P}_i = p(\lambda_k)\mathcal{P}_k \Rightarrow p_\varphi(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

**Лемма 2.** $]p(\varphi) = q(\varphi) \Leftrightarrow [p(\lambda) - q(\lambda)] \mid p_\varphi(\lambda)$

*Доказательство.* $\lhd p(\lambda) - q(\lambda) = 0 \Rightarrow p(\lambda) - q(\lambda) \in J_\varphi$ □

**Лемма 3.** $]p(\lambda) = q(\lambda)p_\varphi(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = r(\varphi)$

**Теорема 2.** $\lhd p_\varphi = p_1 \dots p_k, p_1 \dots p_k$ — взаимно простые

$$\Rightarrow \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \text{Ker}\, p_j(\varphi) = X$$

*Доказательство.*

$$\text{Ker}\, p_\varphi(\varphi) = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \text{Ker}\, p_j(\varphi)$$

$$\text{Ker}\, p_\varphi(\varphi) = \text{Ker}\, 0 = X$$

□

**Теорема 3.** О ядре и образе.

$]p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \Rightarrow \text{Ker}\, p_1(\varphi) = \text{Im}\, p_2(\varphi)$

*Доказательство.* Покажем, что:

1. $\text{Im}\, p_2(\varphi) \subset \text{Ker}\, p_1(\varphi)$
2. $\dim \text{Im}\, p_2(\varphi) = \dim \text{Ker}\, p_1(\varphi)$

1. $\text{Im}\, p_2(\varphi) \subset \text{Ker}\, p_1(\varphi)$

   $]y \in \text{Im}\, p_2(\varphi) \Rightarrow \exists x \in X : y = p_2(\varphi)x$

   $\lhd p_1(\varphi)y = p_1(\varphi)p_2(\varphi)x = p_\varphi(\varphi) = 0$
2. $\text{Ker}\, p_\varphi(\varphi) = \text{Ker}\, p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker}\, p_2(\varphi) \Rightarrow$

$$\dim X = \dim \text{Ker}\, p_1(\varphi) + \dim \text{Ker}\, p_2(\varphi)$$

$$\dim X = \dim \text{Ker}\, p_2(\varphi) + \dim \text{Im}\, p_2(\varphi)$$

$$\dim \text{Ker}\, p_1(\varphi) = \dim \text{Im}\, p_2(\varphi)$$

□

**Теорема 4.** $]p_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)$ — минимальный аннулирующий полином $\varphi$, $p_1 \dots p_k$ — взаимно простые делители

$\Rightarrow$

1. $\sum\limits_{j=1}^{k} p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}, \quad p'_j = \frac{p_\varphi}{p_j}$
2. $p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{P}_{L_j} \quad L_j = \operatorname{Ker} p_j(\varphi)$

*Доказательство.* $\lhd p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)\dots p_k(\lambda) \quad \exists q_1 \dots q_k :$

$$\sum_{j=1}^{k} p'_j(\lambda)q_j(\lambda) = 1 \xrightarrow{S_\varphi} \sum_{j=1}^{n} p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}$$

$]p_1(\lambda) = p_i(\lambda), p_2(\lambda) = p'_i(\lambda) \Rightarrow \operatorname{Im} p_1(\varphi) = \operatorname{Ker} p_2(\varphi)$

$\lhd \mathcal{P}_{L_1}x = p'_i(\varphi)q(\varphi) \in \operatorname{Ker} p_i(\varphi)$, т.к.

$$p_i(\varphi)[p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x] = p_i(\varphi)p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x = p_\varphi(\varphi)q_i(\varphi)x = 0$$

Осталось доказать, что $\mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = \delta_i^j \mathcal{P}_{L_i}$

$$]i \neq j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = p'_i(\varphi)q_i(\varphi)p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \frac{p_\varphi(\varphi)}{p_i(\varphi)p_j(\varphi)}q_i(\varphi)q_j(\varphi)p_\varphi(\varphi) = 0$$

$$]i = j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}(x) = \mathcal{P}_{L_i}(\mathcal{I}\cdot x) = \mathcal{P}_{L_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_{L_j}\right)x = \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i}x \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i} = \mathcal{P}_{L_i}$$

□

# Ультраинвариантные подпространства

$\lhd \varphi : X \to X, \dim X = n$

$L \subset X$ — инвариантное подпространство $\varphi$, если $\varphi(L) \subset L$

**Определение**. Инвариантное подпространство называется **ультраинвариантным подпространством**, если существует его дополнение $L'$, такое что:

$$L \dot{+} L' = X \quad L' \text{ — инвариантное подпространство } \varphi$$

**Определение**. Оператор $\varphi_L : L \to L$, такой что:

$$\varphi_L x = \varphi x \quad \forall x \in L$$

называется **сужением** оператора $\varphi$ на $L$.

Если $L$ — ультраинвариантное подпространство, то $\varphi_L$ называется **компонетной** $\varphi$ в $L$

**Лемма 4.** Дополнение $L'$ ультраинвариантного подпространства $L$ является ультраинвариантным подпространством.

**Лемма 5.** $X = L \dot{+} L' \quad L, L'$ — ультраинвариантное подпространства $\Rightarrow$

$$\varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\|L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\|L}$$

*Доказательство.*

$$X = L \dot{+} L' \Rightarrow \forall x! = x_1 + x_2 = \mathcal{P}_L^{\|L'} x + \mathcal{P}_{L'}^{\|L} x$$

$$\varphi x = \varphi \mathcal{P}_L^{\|L'} x + \varphi \mathcal{P}_{L'}^{\|L} x \quad \forall x \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\|L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\|L} \quad (*)$$

□

*Примечание.* Запись $(*)$ эквивалентна записи

$$\varphi = \varphi_L \dot{+} \varphi_{L'}$$

**Определение**. Инвариантное подпространство называется **минимальным**, если оно не содержит внутри себя нетривиальных инвариантных подпространств меньшей размерности.

**Лемма 6.** $]\varphi : X \to X$ — линейный оператор $\Rightarrow$ Ker $p(\varphi)$ — инвариантное подпространство $\varphi$

*Доказательство.* $]x \in \text{Ker}\, p(\varphi) \Rightarrow p(\varphi)x = 0$

$\lhd \varphi : p(\varphi)(\varphi x) = \varphi p(\varphi) x = 0$ □

**Лемма 7.** $]p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$ — минимальный полином $\varphi \Rightarrow$ Ker $p_i(\varphi)$ — нетривиальное инвариантное подпространство $\varphi$

*Доказательство.*

$]p_1(\lambda) : \text{Ker}\, p_1(\varphi) = X, \deg p_1(\lambda) < \deg p_\varphi(\lambda) \Rightarrow p_1(\varphi) \overset{\text{def}}{=} 0 \Rightarrow p_1(\lambda) \in J_\varphi, \deg p_1(\lambda) \subset \deg p_\varphi(\lambda)$

Это противоречит определению минимального полинома $p_\varphi$. Аналогично для $p_2$.

$$]p_1(\lambda) : \text{Ker}\, p_1(\varphi) = 0 \Rightarrow x = \text{Ker}\, p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker}\, p_2(\varphi) \quad \dim p_1(\varphi) = 0 \Rightarrow \text{Ker}\, p_2(\varphi) = x$$

Это чему-то противоречит.

Итого $p_i(\varphi) \neq 0$ и $p_i(\varphi) \neq X \Rightarrow$ Ker $p_i(\varphi)$ — нетривиальное подпространство. □

*Примечание.* Ker $p_1(\varphi)$ — ИП, Ker $p_2(\varphi)$ — ИП, Ker $p_1(\varphi)\dot{+}$Ker $p_2(\varphi) \Rightarrow p_1, p_2$ — ультраинвариантные подпространства

**Теорема 5**. Обобщение.

$p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)\dots p_k(\lambda)$ — взаимно простые

$$X = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \text{Ker}\, p_j(\varphi) = \dot{+}\sum_{j=1}^{n} L_j$$

, где $L_j = \text{Ker}\, p_j(\varphi)$ — ультраинвариантные подпространства.

*Доказательство.* Тривиально. □

$\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_{L_j} = p'_j(\varphi)q_j$ — проектора на ультраинвариантное подпространство $L_j$ *(ультрапроектор)*

$\lhd \varphi_j = \varphi/L_j : L_j \to L_J$ — компонента $\varphi$ в ультраинвариантном подпространстве $L_j$

$$\varphi = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j \mathcal{P}_j$$

**Лемма 8**. $]p_\varphi = p_1 \dots p_k$ — минимальный аннулирующий полином $\varphi$

$\Rightarrow p_j(\lambda)$ — минимальный аннулирующий полином $\varphi_j$

*Доказательство.* $\varphi_j : L_j \to L_j, L_j = \text{Ker}\, p_j(\varphi)$

$]x \in \text{Ker}\, p_j(\varphi) \quad p_j(\varphi)x = 0 \;\; \forall x \in L_j \Rightarrow p_j \in I_{\varphi_j}$

$]\tilde{p}_j(\lambda)$ — минимальный полином $I_{\varphi_j}$

$$p_j(\lambda) = q_j(\lambda)\tilde{p}_j(\lambda)$$

$$\lhd p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)\dots p_j(\lambda)\dots p_k(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)\dots \tilde{p}_j(\lambda)\dots p_k(\lambda)q_j(\lambda) = \tilde{p}_\varphi(\lambda)q(\lambda)$$

$\Rightarrow \deg p_\varphi(\lambda) > \deg \tilde{p}_\varphi(\lambda)$, но $p_\varphi(\lambda)$ — минимальный — противоречие. □

**Теорема 6**. Спектральная теорема.

$$p_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j)^{m_j} = p_1(\lambda)\dots p_k(\lambda) \quad p_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \lambda \neq \lambda_{i \neq j}$$

$$\Rightarrow L_j = \text{Ker}\, p_j(\varphi) = \text{Ker}\, (\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} \text{ — ультраинвариантное подпространство}$$

$$\Rightarrow X = \dot{+}\sum_{j=1}^{n} \text{Ker}\, (\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} L_j$$

$$\varphi = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \quad \varphi_j = \varphi|_{L_j}$$

**Определение.** **Нильпотентным оператором** порядка $m$ называется минимальный оператор $\tau$, такой что:

$$\tau^m = 0 \quad \forall k < m \;\; \tau^k \neq 0$$

*Примечание.* $(\varphi_j - \lambda_j \mathcal{I}) = \tau_j$ — нильпотентный оператор порядка $m_j$

$\varphi = \sum\limits_{j=1}^{K} (\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j)\mathcal{P}_j$ — спектральная теорема *(другая формулировка)*.

**Определение.**

- $\lambda_j$ — элементарная порция спектра
- $\mathcal{P}_j$ — спектральный ультрапроектор на $L_j$
- $L_j$ — спектральное ультраинвариантное *(корневое)* подпространство
- $\varphi_j$ — спектральная компонента оператора $\varphi$ в инвариантном подпространстве $L_j$