

1. Обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как  $\vdash_{\text{и}}$ , а выводимость в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как  $\vdash_{\text{е}}$ .

Заметим, что хотя языки этих исчислений и отличаются, мы можем построить преобразование высказываний этих исчислений друг в друга: приняв  $\perp \Rightarrow A \& \neg A$  и  $\neg \alpha \Rightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$ . Будем обозначать высказывания в гильбертовском ИИВ обычными греческими буквами, а соответствующие им высказывания в ИИВ натурального вывода — буквами с апострофами:  $\alpha', \beta', \dots$ .

- (а) Пусть  $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$ . Покажите, что  $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$ : предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для одного случая базы и одного случая перехода индукции.

Общая схема: перебираем шаги доказательства в гильбертовом стиле и добавляем соответствующие шаги в естественном выводе в зависимости от происхождения этого шага.

База: рассмотрим случай  $\gamma_1 \in \Gamma$ . Тогда дерево вывода  $\gamma_1 : \overline{\Gamma \vdash \gamma_1, \gamma_1 \in \Gamma}$

Переход: рассмотрим случай МР. Тогда дерево вывода  $\gamma_n : \frac{\overline{\Gamma \vdash \gamma_i \rightarrow \gamma_k} \quad \overline{\Gamma \vdash \gamma_i}}{\Gamma \vdash \gamma_k}$

- (b) Пусть  $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$ . Покажите, что  $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$ .

Докажем по индукции по высоте дерева.

Доказательство. База:  $n = 1$ . Единственный случай — аксиома. Он очевиден.

Переход:

- i.  $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$ . По индукционному предположению  $\Gamma, \varphi \vdash \psi$  и по теореме об индукции  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- ii.  $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}$ . По индукционному предположению  $\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi$ . Объединим два доказательства, припишем аксиому  $\exists \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \& \psi$  и применим дважды МР.
- iii.  $\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$ . По индукционному предположению  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \vdash \varphi$ . Объединим два доказательства, используем МР.

Прочие случаи аналогичны. □

2. Рассмотрим  $\mathbb{N}_0$  (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций  $(+)$  и  $(\cdot)$  в данной решётке, есть ли в ней псевдодополнение, определены ли 0 или 1? Приведите несколько свойств

традиционных определений  $(+)$  и  $(\cdot)$ , которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и несколько свойств, которые перестанут выполняться.

$$a + b = \max(a, b) \quad a \cdot b = \min(a, b)$$

Псевдополнения нет для произвольных элементов, т.к.  $\min(a, c) \leq b$  не ограничивает сверху  $c$  для  $a \leq b$ . Для  $a \not\leq b$   $a \rightarrow b = b$ .

**0** это 0, т.к.  $\forall x \in \mathbb{N}_0 \quad 0 \leq x$

**1** нет, т.к.  $1 + 1 \not\leq 1$

Выполнены:

- (a)  $a \cdot 0 = 0$
- (b)  $a + 0 = a$
- (c)  $a + b + c = a + (b + c)$
- (d)  $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (e)  $a + b = b + a$
- (f)  $a \cdot b = b \cdot a$

Не выполнены:

- (a)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

### 3. Постройте следующие примеры:

- (a) • непустого частично-упорядоченного множества, не имеющего операций  $(+)$  и  $(\cdot)$  ни для каких элементов;

Такого не существует, т.к.  $\forall a \quad a \leq a$ , следовательно в  $a + a$  все элементы сравнимы с  $a$  и при этом  $a \in (a + a)$ . Таким образом, наименьший —  $a$ . Аналогично можно сказать про  $\cdot$ .

- имеющего операцию  $(+)$  для всех элементов, но не имеющего  $(\cdot)$  для некоторых;

Следующий номер, но наоборот.

- имеющего операцию  $(\cdot)$  для всех элементов, но не имеющего  $(+)$  для некоторых.

$\{1, 2, 3\}$ , упорядоченное по делимости.

- (b) • решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой;  
 $\mathbb{N}_0$  со стандартным порядком.

- дистрибутивной, но не импликативной решётки;

$\mathbb{Z}$  и его конечные подмножества с отношением  $\subset$ , т.е.  $\{X \mid X \subset \mathbb{Z}, |X| \in \mathbb{N}_0\}$ . Дистрибутивность тривиальна из теории множеств, как и то, что это решетка. Нет  $\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ , т.к.  $\{c \mid \{0\} \cdot c \leq \mathbb{Z}\}$  есть все конечные подмножества, а среди них нет наибольшего.

- импликативной решётки без 0.

$$-\mathbb{N}_0, \leq$$

4. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:

- (а) ассоциативность:  $a + (b + c) = (a + b) + c$  и  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ;

Тривиально из теории множеств.

- (b) монотонность: пусть  $a \preceq b$  и  $c \preceq d$ , тогда  $a + c \preceq b + d$  и  $a \cdot c \preceq b \cdot d$ ;

$a \leq b \Rightarrow a \leq b + d, c \leq d \Rightarrow c \leq b + d$ . Таким образом,  $a + c \leq b + d$ .

Вторая часть аналогично.

- (c) Законы поглощения:  $a \cdot (a + b) = a$ ;  $a + (a \cdot b) = a$ ;

i.  $a \cdot (a + b) = a$

$a + b$  либо  $= a$ , либо  $\leq a$ . В обоих случаях  $a \cdot (a + b) = a$

ii.  $a + (a \cdot b) = a$

$a + b$  либо  $= a$ , либо  $\geq a$ . В обоих случаях  $a + (a \cdot b) = a$

- (d)  $a \preceq b$  выполнено тогда и только тогда, когда  $a \rightarrow b = 1$ ;

$$a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow 1 \in \{c \mid a \cdot c \leq b\} \Leftrightarrow a \cdot 1 \leq b \Leftrightarrow a \leq b$$

- (e) из  $a \preceq b$  следует  $b \rightarrow c \preceq a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow a \preceq c \rightarrow b$ ;

$$a \cdot (b \rightarrow c) \leq b \cdot (b \rightarrow c) \leq c$$

$$b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$$

$$c \cdot (c \rightarrow a) \leq a \leq b$$

$$c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$$

- (f) из  $a \preceq b \rightarrow c$  следует  $a \cdot b \preceq c$ ;

$$a \leq b \rightarrow c \Rightarrow \exists d : \begin{cases} d \geq a \\ b \cdot d \leq c \end{cases} \Rightarrow b \cdot a \leq c$$

Так как множество, из которого берется  $b \cdot a$  есть подмножество " $b \cdot d$ "

(g)  $b \leq a \rightarrow b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$ ;

$$\begin{aligned} b \cdot a &\leq b \\ a \cdot b &\leq b \\ b &\leq a \rightarrow b \end{aligned}$$

$a \leq b \rightarrow a$  по пункту d.

(h)  $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$ ;

(i)  $a \leq b \rightarrow a \cdot b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$

(j)  $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$

5. Покажите, что импликативная решётка дистрибутивна.

Пусть  $d = a \cdot b + a \cdot c$ . Рассмотрим  $a \rightarrow d$ .

$$a \cdot b \leq d \tag{1}$$

$$b \leq a \rightarrow d \tag{2}$$

$$a \cdot c \leq d \tag{3}$$

$$c \leq a \rightarrow d \tag{4}$$

$$b + c \leq a \rightarrow d \tag{5}$$

$$a \cdot (b + c) \leq a \cdot (a \rightarrow d) \tag{6}$$

$$\leq d \tag{7}$$

$$= a \cdot b + a \cdot c \tag{8}$$

- (1) и (3): по построению  $d$
- (2) и (4): по определению  $\rightarrow$
- (5): из (2) и (4)

Итого  $a \cdot (b + c) \leq a \cdot b + a \cdot c$ , покажем, что  $a \cdot (b + c) \geq a \cdot b + a \cdot c$

$$a \cdot b \leq a \tag{9}$$

$$a \cdot b \leq b \leq b + c \tag{10}$$

$$a \cdot b \leq a \cdot (b + c) \tag{11}$$

$$a \cdot c \leq a \cdot (b + c) \quad (12)$$

$$a \cdot b + a \cdot c \leq a \cdot (b + c) \quad (13)$$

- (12): аналогично (11)

6. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ ) также выполнено и  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ .

$$(a + b) \cdot (a + c) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot c \quad (14)$$

$$= a + (a + b) \cdot c \quad (15)$$

$$= a + a \cdot c + b \cdot c \quad (16)$$

$$= a + b \cdot c \quad (17)$$

- (14): по дистрибутивности

7. Рассмотрим топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$ , упорядочим его топологию  $\Omega$  отношением  $\subseteq$ . Покажите, что такая конструкция является псевдобулевой алгеброй, а если топология — дискретная (любое подмножество  $X$  открыто), то булевой алгеброй.
8. Докажите, что ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать псевдобулеву алгебру, а функции оценок определить так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \ \& \ \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0 \\ \llbracket \perp \rrbracket &= 0 \end{aligned}$$

9. Пусть задано отношение *предпорядка*  $R$  (транзитивное и рефлексивное, но необязательно антисимметричное) на множестве  $A$ . Напомним несколько определений:

- определим отношение  $R^= := \{ \langle x, y \rangle \mid xRy \text{ и } yRx \}$ ;
- $[a]_{R^=} := \{ x \mid aR^=x \}$  — класс эквивалентности, порождённый элементом  $a$ ;
- фактор-множество  $A/R^= := \{ [a]_{R^=} \mid a \in A \}$ ;
- на  $A/R^=$  можно перенести отношение  $R^* := \{ \langle [a], [b] \rangle \mid aRb \}$ .

Покажите, что: отношение  $R^=$  — отношение эквивалентности; если  $x \in [a]_{R^=}$ ,  $y \in [b]_{R^=}$  и  $aRb$ , то  $xRy$ ; отношение  $R^*$  — отношение порядка на  $A/R^=$ .

10. Покажем, что конструкция из определения алгебры Линденбаума действительно является решёткой:

- (a) Покажите, что отношение  $(\approx)$  — отношение эквивалентности (напомним, что  $\alpha \preceq \beta$ , если  $\alpha \vdash \beta$ , а  $\alpha \approx \beta$ , если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\beta \vdash \alpha$ ). Подсказка: воспользуйтесь предыдущим заданием.
- (b) Покажите, что  $[\alpha]_{\approx} \cdot [\beta]_{\approx} = [\alpha \& \beta]_{\approx}$ . Для этого, например, можно показать:
- $\alpha \& \beta \preceq \alpha$ ;
  - если  $\gamma \preceq \alpha$  и  $\gamma \preceq \beta$ , то  $\gamma \preceq \alpha \& \beta$ ;
  - операция однозначно определена для всех элементов решётки (то есть определена для всех классов эквивалентности и не зависит от выбора представителей). Подсказка: воспользуйтесь предыдущим заданием.
- (c) Покажите, что  $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$ .
- (d) Покажите, что  $[\alpha] \rightarrow [\beta] = [\alpha \rightarrow \beta]$ .
- (e) Найдите классы эквивалентности для 0 и 1.