

## Интегральные суммы

**Определение.** Дробление отрезка  $[a, b]$  это разбиение отрезка на  $n$  частей следующим образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad [x_{i-1}, x_i]$$

**Определение.** Ранг (*мелкость*) дробления — длина самого длинного из отрезков дробления:

$$\tau = \{x_0 \dots x_n\} \quad |\tau| = \max(x_i - x_{i-1})$$

**Определение.** Оснащение — множество точек  $\{\xi_1 \dots \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

**Определение.** Интегральная (*риманова*) сумма для разбиения  $\{x_i\}$ , произвольной функции  $f$  и оснащения  $\{\xi_i\}$  это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Геометрически интегральная сумма интерпретируется следующим образом:



**Теорема 1.** Об интеграле как пределе интегральных сумм.

$$f \in C[a, b]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \text{дробление } \tau = \{x_0 \dots x_n\} : |\tau| < \delta \quad \forall \text{оснащение } \xi_i :$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* По теореме Кантора о равномерной непрерывности на компакте.

$[a, b]$  — компакт,  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

По двойной бухгалтерии заменим  $\varepsilon$  на  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, \bar{x} \in [a, b] : |x - \bar{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Разобьем интеграл на части:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right)$$

Запишем  $(x_i - x_{i-1})$  в виде интеграла  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i)) dx \right| \leq \sum \left| \int \right| \leq \sum \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(\xi_i)| dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

□

*Примечание.*  $f \in C^1[a, b]$ ;  $M := \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$

$$|f(x) - f(\bar{x})| = |f'(\bar{x})(x - \bar{x})| \leq M|x - \bar{x}|$$

*Следствие 1.1.* Равномерное дробление:  $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$ ;  $|\tau| = \frac{b-a}{n}$

$$\int - \sum \leq M(b-a)^2 \frac{1}{n}$$

**Теорема 2.** Об интегральных суммах центральных прямоугольников

$f \in C^2[a, b]$   $x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b$   $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$   $\xi_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx &= \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)d(x - x_{i-1}) + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)d(x - x_i) = \\ &= f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1})dx + f(x)(x - x_i) \Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_i)dx = (*) \end{aligned}$$

Заметим, что  $\xi_i - x_{i-1} = x_i - \xi_i$ , поэтому  $f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} + f(x)(x - x_i) \Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$$\begin{aligned} (*) &= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \left( f'(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{\xi_i} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x)(x - x_{i-1})^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + f'(x) \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{\xi_i}^{x_i} - \frac{1}{2} \int_{\xi_i}^{x_i} f''(x)(x - x_i)^2 dx \right) = \\ &= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \varphi(x) dx \\ \varphi(x) &= \begin{cases} (x - x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ (x - x_i)^2, & x \in [\xi_i, x_i] \end{cases} \end{aligned}$$

Итого:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(x) \varphi(x) dx \\ \left| \int - \sum \right| &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)| \varphi(x) dx \\ \max_{x \in [a, b]} \varphi(x) &\stackrel{\text{достигается на отрезке длины } \delta}{=} \frac{\delta^2}{4} \\ \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)| \varphi(x) dx &\leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| \end{aligned}$$

□

**Теорема 3.** О формуле трапеций.

$$f \in C^2[a, b], \tau, \delta = |\tau|$$

Тогда

$$\left| \int_a^b f dx - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

Доказательство. Берем  $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) d(x - \xi_i) = f(x)(x - \xi_i) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x - \xi_i) dx = \\ &= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d((x - x_{i-1})(x_i - x)) = (*) \end{aligned}$$

Проверим, что замена выражения под дифференциалом верная:

$$((x - x_{i-1})(x_i - x))' = (-x^2 + x(x_i + x_{i-1}) - x_{i-1}x)' = -2 \left( x - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)$$

Действительно верно.

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= (x - x_{i-1})(x_i - x) \\ (*) &= (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2} f'(x)(x - x_{i-1})(x_i - x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \psi(x) dx \\ &\quad \left| \int - \sum \right| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''| \psi(x) dx \\ &\quad \max \psi = \frac{\delta^2}{4} \end{aligned}$$

□

Примечание.  $f$  — выпуклая ( $f'' \geq 0$ )

Тогда  $\int - \sum_{\text{np}} \geq 0$ ,  $\int - \sum_{\text{tp}} \leq 0$

Пример.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2 + 1} = ?$$

$[a, b] := [0, 1]$ ,  $x_i = \frac{i}{n}$ ,  $\xi_k = \frac{k}{n}$  (дробление равномерное)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1 + \frac{1}{n^2}} \frac{1}{n} \stackrel{\text{по рукомаханию}}{\approx} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \frac{1}{n} =$$

По теореме  $\sum f(\xi_k) \frac{1}{n} = \sum f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$

$$= \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Вернемся к рукомаханию. Мы заменили  $\frac{1}{n^2}$  на 0 (эквивалентную) при  $n \rightarrow \infty$ , тем самым совершив “небольшую ошибку”. Но эта ошибка совершена в  $n$  слагаемых, т.е. у нас много небольших ошибок, а это может быть большой ошибкой. Докажем, что разность выражения с заменой и выражения без замены бесконечно мала:

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1 + \frac{1}{n^2}} - \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{n} \frac{k}{n} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1\right)} \right| \leq$$

$$\leq \sum \frac{1}{n^3} \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}, f \in C^2[m, n]$ . Тогда

$$\int_m^n f(x) dx = \left( \sum_{i=m}^n \right)' f(i) - \frac{1}{2} \int f''(x) \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

' означает, что крайние слагаемые берутся с весом  $\frac{1}{2}$ ,  $\{x\}$  — дробная часть  $x$

*Доказательство.* Это очевидно по формуле трапеций:  $x_i := i$

$$\int_m^n f(x) dx = \sum_{i=m+1}^n \frac{f(i) + f(i-1)}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x) \psi(x)$$

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - x_{i-1})(x_i - x) = (x - i + 1)(i - x) = (x - i + 1)(1 - (x - i + 1)) = \{x\}(1 - \{x\})$$

$f(n)/2$  и  $f(m)/2$  в сумму попадают только 1 раз, остальные — 2 раза, как и в искомой формуле.  $\square$

Обычно эта формула используется, чтобы из суммы получить интеграл, а не наоборот.

*Пример.*  $p > -1$   $f(x) = x^p$

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)x^{p-2} \{x\}(1 - \{x\}) dx =$$

$\frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p$  добавлены, чтобы не писать слева деление крайних слагаемых на 2.

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1})) = (*)$$

Откуда появилось  $\mathcal{O}$ ?  $\{x\}(1 - \{x\}) < 1 \Rightarrow \int_1^n p(p-1)x^{p-2} \{x\}(1 - \{x\}) dx \leq C(n^{p-1} - 1)$ ,  $C$  — некоторая константа.

Занесем константы под  $\mathcal{O}$ :

$$(*) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

$$]p = -\frac{1}{2} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + \mathcal{O}(1)$$

$$]p = \pi \quad 1^\pi + 2^\pi + \dots + n^\pi = \frac{n^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{1}{2}n^\pi + \mathcal{O}(n^{\pi-1})$$

$$]p = 1 \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \mathcal{O}(1) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$\mathcal{O}(1) = 0$  в данной ситуации, т.к. при интеграле  $p-1 = 0$  и  $\frac{1}{2}$  сократилось с подстановкой в первый интеграл 1.

$$]p = -1 \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) = (*)$$

$$\int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{dx}{x^3} = \frac{1-1}{8 \alpha^2} \Big|_1^n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{8}$$

$$(*) = \ln n + \gamma + o(1) \quad \gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$$

**Определение.**  $\gamma$  — постоянная Эйлера.  $\approx 0.577$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

$$]f(x) = \ln x \quad \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} dx =$$

$$= n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1)$$

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \ln n!$$

$$n! = e^{n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C_1 + o(1)}$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C_1 + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

Найдём  $C$ .

## Формула Валлиса

Вывод формулы Валлиса:

$$\begin{aligned}
 I_n &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[ \begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \quad du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right] = \\
 &= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (n-1) \sin^{n-2} x dx = \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\
 I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\
 I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} I_{n-6} = \dots = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n - \text{чёт.} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} 1, & n - \text{нечёт.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$$

Проинтегрируем по  $[0, \frac{\pi}{2}]$ :

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k}$$

$$\text{Правая часть} - \text{левая часть} = \left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = \left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k} \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Таким образом, левая и правая части стремятся друг другу и зажимают  $\pi/2$ .

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$$

Вернемся к нахождению  $C$ .

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \frac{1}{\sqrt{k}} =$$

Домножим дробь на числитель:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2}{(2k)!} =$$

Вынесем 2 из каждого множителя в числителе:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$$

Замена на эквивалент:

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k C k^k e^{-k} \sqrt{k})^2}{C (2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$C = \sqrt{2\pi}$$

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{n} \sqrt{2\pi}$$

Это формула Стирлинга.