

1 Определения

1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс — вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1. $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2. $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4. $f_{(x)}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + o(|h|^r)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

1.3 n -й дифференциал

$$\sum_{\alpha: |\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} k\text{-й дифференциал функции } f \text{ в точке } a \text{ относительно } h \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(a, h)$$

1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |Ax|$$

1.5 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Определение. Квадратичная форма $Q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} h_i h_j$$

Определение. Положительно определенная кв. форма: $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$

Определение. Отрицательно определенная кв. форма: $\forall h \neq 0 \quad Q(h) < 0$

Определение. Незнакоопределенная кв. форма: $\exists \bar{h} : Q(\bar{h}) < 0, \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) > 0$

Определение. Полуопределенная (положительно определенная вырожденная) кв. форма: $Q(h) \geq 0 \quad \exists \bar{h} \neq 0 : Q(\bar{h}) = 0$

1.6 Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$ — локальный максимум, если

$$\exists U(a) \subset E \quad \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

1.7 Диффеоморфизм

$F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм, если:

- F обратимо
- F дифференцируемо
- F^{-1} дифференцируемо

1.8 Формулировка теоремы о локальной обратимости

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $x_0 \in O$
- $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : T|_U$ — диффеоморфизм, т.е. $\exists T^{-1}$

1.9 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть (x^0, y^0) — решение этой системы, $F = (f_1 \dots f_m)$

$\det F'(x^0) \neq 0$. Тогда $\exists U(y^0) : \forall y \in U(y^0)$ система имеет решение, C^r гладко зависящее от y .

1.10 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

Дана система из n функций, $f_i \in C^r$.

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть $(a, b) = (a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n)$ — решение системы и $\det \left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \neq 0$. Тогда $\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m$ и $\exists \Phi$ такие, что $\forall x \in U(a)$ $x, \Phi(x)$ — тоже решение системы.

1.11 ! Простое k -мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^m

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k -мерное C^r -гладкое многообразие в \mathbb{R}^m , если:

- $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi(O) = M$
- $\Phi \in C^r$
- $\forall x \in O \text{ rg} \Phi'(x) = k$

1.12 Касательное пространство к k -мерному многообразию в \mathbb{R}^m

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- Φ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M — гладкое k -мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть k -мерное линейное подпространство в \mathbb{R}^m . Оно не зависит от Φ .

$\Phi'(t^0)$ — касательное пространство к M в точке p , обозначается $T_p M$.

1.13 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$
- $x_0 \in M_\Phi$

x_0 — точка **локального относительного** max, min, строгий max, строгий min, экстремума, если $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n} : \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi \ f(x_0) \geq f(x)$, остальные — аналогично.

Уравнения $\Phi(x) = 0$ называются **уравнениями связи**.

1.14 ! Формулировка достаточного условия относительного экстремума

Выполняется условие теоремы о необходимом условии экстремума, то есть:

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$: если $\Phi'(a)h = 0$, то можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$.

Пусть $G(x) = f(x) - \langle \lambda, \Phi(x) \rangle$, где λ берется из необходимого условия экстремума.

Рассмотрим квадратичную форму $Q(h_x) = d^2 G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$.

Тогда:

1. Если $Q(h)$ положительно определена, a — точка минимума
2. Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — точка максимума
3. Если $Q(h)$ не знакоопределена, a — не экстремум
4. Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= G(a+h) - G(a) \\ &= dG(a, h) + \frac{1}{2} d^2 G(a, h) + o(|h|^2) \\ &= \frac{1}{2} d^2 G(a, \tilde{h}) + o(|h|^2) > 0 \end{aligned}$$

Объяснение переходов:

1. $a + h \in M_\Phi$
2. Формула Тейлора
3. $a + \tilde{h}$ лежит на касательной поверхности, $dG(a, h) = 0$, $h \simeq \tilde{h}$

Это нестрогое доказательство, но этого нам достаточно. \square

1.15 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

Пусть $E \subset X$. Последовательность f_n сходится поточечно к f на множестве E , если $\forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$, т.е.:

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

1.16 ! Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

f_n равномерно сходится к f на $E \subset X$, если $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n > N \quad 0 \leq M_n < \varepsilon \text{ т.е. } \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается $f_n \xrightarrow[E]{} f$

1.17 Равномерная сходимость функционального ряда

- X — произвольное множество
- Y — нормированное пространство
- $u_n : X \rightarrow Y$

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $E \subset X : S_N \xrightarrow[E]{N \rightarrow +\infty} S$

1.18 Формулировка критерия Больцано-Коши для равномерной сходимости

Остаток ряда: $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$, $S(x) = S_N(x) + R_N(x)$

Ряд сходится на $E \Leftrightarrow R_N \xrightarrow[E]{} 0$ — тождественный ноль.

1.19 ! Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

Степенной ряд: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, z — переменная $\in \mathbb{C}$

$\sum a_n(z - z_0)^n$, тогда число $R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}}$. Это формула Адамара.

1.20 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Ряд $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится, если:

1. a_n равномерно ограничена и монотонна по n для любого x
2. $\sum b_n$ равномерно сходится

1.21 Кусочно-гладкий путь

Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$

Кусочно-гладкое отображение — отображение, имеющее не более, чем счётное число точек разрыва, все точки разрыва — I рода и $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое $\forall k$, где t_k — точка разрыва.

1.22 Векторное поле

Векторное поле — непрерывное отображение $V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$ — вектор, “приложенный к точке x ”.

1.23 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m \end{aligned}$$

Также используется обозначение $I(V, \gamma) = \int_\gamma V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m$

1.24 ! Потенциал, потенциальное векторное поле

$V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — векторное поле потенциально, если оно имеет потенциал:

$$\exists f \in C^1(O), \nabla f = V$$

1.25 Локально потенциальное векторное поле

V — локально потенциальное векторное поле в O , если $\forall x \in O \exists U(x) : V$ — потенциально в $U(x)$

1.26 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

Возьмём $\delta > 0$ из леммы 2.47.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — δ -близкий кусочно-гладкий путь, т.е. $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$.

Полагаем $I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$.

Корректность (нет произвольности) следует из лемм 2.47 и 2.46

1.27 Гомотопия путей связанная и петельная

Гомотопия двух (непрерывных) путей $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$ это непрерывное отображение $\Gamma : \underbrace{[a, b]}_t \times \underbrace{[0, 1]}_u \rightarrow O$, такое что:

- $\Gamma(\circ, 0) = \gamma_0$
- $\Gamma(\circ, 1) = \gamma_1$

Гомотопия связанная (не связная), если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$
- $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_1(b)$

Гомотопия петельная, если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$
- $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$



Рис. 1: Связанная гомотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных u



Рис. 2: Петельная гомотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных u

1.28 Односвязная область

Область $O \subset \mathbb{R}^m$ — **односвязная**, если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному пути.

Простыми словами — в O нет дырок, иначе путь вокруг дырки нельзя было бы стянуть.

1.29 ! Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

$\mathcal{P} \subset 2^X$ — **полукольцо**, если:

- $\emptyset \in \mathcal{P}$
- $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
- $\forall A, A' \in \mathcal{P} \quad \exists \text{ кон. и дизъюнктные } B_1 \dots B_n \in \mathcal{P} : A \setminus A' = \bigsqcup_i B_i$



Рис. 3: Стягивание замкнутого пути (сплошной линией) к постоянному пути (точке)

$\mathfrak{A} \subset 2^X$ — алгебра подмножеств в X , если:

1. $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \setminus B \in \mathfrak{A}$
2. $X \in \mathfrak{A}$

σ -алгебра $\mathfrak{A} \subset 2^X$:

1. \mathfrak{A} — алгебра
2. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

1.30 ! Объем

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — объем, если $\mu \geq 0$ и μ — аддитивная.

1.31 ! Ячейка

Ячейка в \mathbb{R}^m это $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \ x_i \in [a_i, b_i)\}$



Рис. 4: $[a, b)$ — ячейка в \mathbb{R}^2

1.32 Классический объем в \mathbb{R}^m

Классический объем в \mathbb{R}^m $\mu : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

Этот объем не конечный.

1.33 Формулировка теорема о непрерывности снизу

- \mathfrak{A} — алгебра
- $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — объем.

Тогда эквивалентно:

1. μ — мера
2. μ — непрерывна снизу:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu A_i$$

1.34 ! Мера, пространство с мерой

$\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — мера, если μ — объем и μ счётно-аддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad \mu A = \sum_i \mu A_i$$

Пространство с мерой — тройка $(\underbrace{X}_{\text{множество}}, \underbrace{\mathfrak{A}}_{\sigma\text{-алгебра}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера на } \mathfrak{A}})$

1.35 Полная мера

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — мера.

μ — полная в \mathcal{P} , если $\forall A \in \mathcal{P} \quad \mu A = 0 \quad \forall B \subset A$ выполняется: $B \in \mathcal{P}$ и (тогда автоматически) $\mu B = 0$ (по монотонности)

Это совместное свойство μ и \mathcal{P} .

1.36 ! Сигма-конечная мера

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — мера, $\mathcal{P} \subset 2^X$

μ — σ -конечна, если $\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : X = \bigcup A_i, \mu A_i < +\infty$

1.37 Дискретная мера

X — (бесконечное) множество.

$a_1, a_2, a_3 \dots$ — набор попарно различных точек.

$h_1, h_2, h_3 \dots$ — положительные числа.

Для $A \subset X$ $\mu A := \sum_{k: a_k \in A} h_k$.

Физический смысл μ : каждой точке a_i сопоставляется “масса” h_i . Мера множества точек есть сумма “масс” точек.

Счётная аддитивность $\mu \Leftrightarrow$ теореме о группировке слагаемых (в ряду можно ставить скобки).

Эта мера называется дискретной.

1.38 Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

- $\mathcal{P}_0 \subset X$ — полукольцо
- $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — σ -конечная мера

Тогда $\exists \sigma$ -алгебра $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}_0$, $\exists \mu$ — мера на \mathcal{A} :

1. μ — продолжение μ_0 на \mathcal{A}
2. μ — полная мера
3. Если $\tilde{\mu}$ — полная мера на σ -алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\mu}$ — продолжение μ_0 , то $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$ и при этом $\tilde{\mu}$ продолжает $\mu : \tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$
4. Если \mathcal{P} — полукольцо, такое что $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ и мера ν — продолжение μ_0 на \mathcal{P} , то $\forall A \in \mathcal{P} \quad \nu(A) = \mu(A)$
5. $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu A = \inf \left\{ \sum \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k \right\}$

Доказательство. Не будет, это слишком сложно.

Общая идея следующая: $\forall A \subset X$ положим $\mu^*(A) = \inf \{ \dots \}$ — не аддитивна. $A \subset \bigcup A_k \quad \mu^* A = \sum \mu^* A_k$ □

1.39 ! Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

Мера Лебега в \mathbb{R}^m — лебеговское продолжение классического объема.

\mathfrak{M}^m — σ -алгебра, на которой задана мера Лебега. Тогда множество называется **измеримым по Лебегу**

1.40 Борелевская сигма-алгебра

\mathfrak{B} — борелевская σ -алгебра (в \mathbb{R}^m или в метрическом пространстве) — минимальная σ -алгебра, которая содержит все открытые множества.

$$\mathfrak{M}^m \supset \mathfrak{B}$$

1.41 Формулировка теоремы о мерах, инвариантных относительно сдвигов

μ — мера на \mathfrak{M}^m :

1. μ — инвариантно относительно сдвигов:

$$\forall a \in \mathbb{R}^m \quad \forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E + a) = \mu E$$

2. Для любого ограниченного $E \in \mathfrak{M}^m$ $\mu(E) < +\infty$

Тогда $\exists k \in [0, +\infty) : \mu = k \cdot \lambda$, (где λ — мера Лебега) т.е.:

$$\forall E \quad \mu E = k \cdot \lambda E$$

и пусть $0 \cdot \infty = 0$ в данном контексте.

Доказательство. Нет и не будет.

Общая идея: Как мера μ задается на рациональных ячейках?

В \mathbb{R}^2 Q_1 — единичная квадратная ячейка, $\mu Q_1 = v$

Q_2 — ячейка 2×2 , $\mu Q_2 = 4v$. Аналогично $\mu Q_n = n^2 v$, $\mu Q_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} v$

Тогда $k = v$ и μ пропорционально λ . □

2 Теоремы

2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$ — это подразумевает, что E открыто
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при $1 \leq k \leq r$:

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

Доказательство. Как на лекции:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i \\ \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2} \\ \varphi''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots \right) \\ \varphi^{(k)}(0) &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}\end{aligned}$$

Формальное доказательство по индукции:

Индукционное предположение:

$$\varphi^k(t) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a + th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}$$

База:

$$\varphi'(t) = \sum_{i_1=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a + th) h_{i_1}$$

Переход:

$$\begin{aligned}\varphi^{(k+1)}(t) &= (\varphi^k(t))' \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a + th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \right)' \\ &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \left(\frac{\partial^k f(a + th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)' h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \\ &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \sum_{i_{k+1}=1}^m \frac{\partial^{k+1} f(a + th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} h_{i_{k+1}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}\end{aligned}$$

□

2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$ — это подразумевает $E \subset \mathbb{R}^m, f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда $\exists t \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

Доказательство. Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$, где $h = x - a$. Тогда $\varphi(0) = f(a)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1} \\ f(x) &= \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{o(|x-a|^r)} \end{aligned}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha: |\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

□

2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r)$$

Доказательство. **Отсутствует**

□

2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение $A \rightarrow \|A\|$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — норма, т.е.:
 - (a) $\|A\| \geq 0$
 - (b) $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{n \times m}$
 - (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
 - (d) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство.

1. $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$
 - a, b, c — очевидно.
 - d: $|(A + B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|)|x|$

По замечанию 3 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2. $|BAx| = |B(Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

□

2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- X, Y — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. A — ограниченный оператор, т.е. $\|A\|$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно всюду в X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство.

1. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно.
2. $2 \Rightarrow 1$

Непрерывность в 0: $\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

$$\triangleleft \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left| A \frac{1}{\delta} \delta x \right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$$

3. $1 \Rightarrow 4$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 : |x_1 - x_0| < \delta \\ |Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

2.5 Теорема Лагранжа для отображений

- E открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда $\exists c \in [a, b]$ ($c = a + \Theta(b - a)$), $\Theta \in (0, 1)$:

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| |b - a|$$

Доказательство. $f(t) := F(a + t(b - a)), t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

Тогда по теореме Лагранжа для векторнозначных функций

$$|f(1) - f(0)| \leq |f'(c)| |1 - 0|$$

$$|F(b) - F(a)| \leq |F'(a + c(b - a))(b - a)| \leq \|F'(a + c(b - a))\| |b - a|$$

□

2.6 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

- $L \in \Omega_m$ — обратимый
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $\|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$, т.е. M “близкий” к L

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$, т.е. Ω_m открыто в $\mathcal{L}_{m,m}$

$$2. \|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$$

$$3. \|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

Доказательство. По неравенству треугольника $|a + b| \geq |a| - |b|$:

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M - L)x| \\ &\geq |Lx| - |(M - L)x| \\ &\geq \frac{1}{\|L\|^{-1}} |x| - \|M - L\| \cdot |x| \\ &\geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 (M — биекция, т.к. $\text{Ker } M = \{0\}$) и 2, докажем 3:

Аналогично равенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ в \mathbb{R} выполняется следующее равенство в Ω_m :

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на M слева и на L справа:

Доказательство.

$$M^{-1} - L^{-1} \stackrel{?}{=} M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

$$E - L^{-1} \stackrel{?}{=} (L - M)L^{-1}$$

$$L - M = L - M$$

□

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1}(L - M)L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

□

2.7 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1. $F \in C^1(E)$, т.е. \exists все $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ и они непрерывны на E
2. $F' : E \rightarrow \mathcal{L}_{m,l}$ — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \quad \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq \varepsilon$$

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$:

Берем x, ε . $\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ для всех i, j .

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

$$\triangleleft h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \leq \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot |h| < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

2.8 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- a — точка локального экстремума
- f — дифф. в точке a

Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

Доказательство. Для $f|_{\text{прямая}(a,u)}$ a остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. \square

Следствие 0.1 (необходимое условие экстремума). a — локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

Следствие 0.2 (теорема Ролля).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $K \subset E$ компакт
- f дифф. в $\text{Int}K$
- f непрерывно на K
- $f|_{\text{граница}K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in \text{Int}K : f'(a) = \vec{0}$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо f на K const, либо $\exists a \in \text{Int}K$ — точка экстремума. В первом случае $f' \equiv 0$, во втором по т. Ферма $f'(a) = 0$ \square

2.9 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

Лемма 1 (об оценке формы).

- Q — положительно определенная

Тогда $\exists \gamma_Q > 0 \ \forall h \ Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$

Доказательство. $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ — компакт в \mathbb{R}^m , поэтому min и max достигается по т. Вейерштрасса.

$$\gamma_Q := \min_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$$

$$Q(h) = Q\left(|h| \frac{h}{|h|}\right) \stackrel{(*)}{=} |h|^2 \underbrace{Q\left(\frac{h}{|h|}\right)}_{\text{ед. вектор}} \geq \gamma_Q |h|^2$$

Переход $(*)$ работает, т.к. Q - квадратичная форма, поэтому:

$$\sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j} a_{ij} |h| \frac{h_i}{|h|} |h| \frac{h_j}{|h|} = |h|^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{h_i}{|h|} \frac{h_j}{|h|}$$

\square

Лемма 2 (об эквивалентных нормах).

- $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists C_1, C_2 > 0 \ \forall x \ C_2|x| \leq p(x) \leq C_1|x|$

Доказательство.

$$C_1 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x| p\left(\frac{x}{|x|}\right) \begin{cases} \geq C_2|x| \\ \leq C_1|x| \end{cases}$$

Существование C_1 и C_2 гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности $p(x)$.

Докажем, что p непрерывна.

Введем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p\left(\sum (x_k - y_k)e_k\right) \\ &\leq \sum p((x_k - y_k)e_k) \\ &= \sum |x_k - y_k| p(e_k) \\ &\leq |x - y| \sqrt{\sum p(e_k)^2} \\ &\leq |x - y| M \end{aligned}$$

□

2.10 ! Достаточное условие экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если $Q(h)$ положительно определена, a — локальный минимум
- Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — локальный максимум
- Если $Q(h)$ не знакоопределена, a — не экстремум

- Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

Доказательство. Для положительно определенной формы:

$$\begin{aligned}
 f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \\
 &= \frac{1}{2} (Q(h) + (d^2 f(a + \Theta h, h) - Q(h))) \\
 &= \frac{1}{2} \left(Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2} + 2 \sum_{i < j} \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i h_j}_{\substack{\leq |h|^2 \\ \text{по модулю}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \left(\gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2 \right) \geq \frac{1}{4} \gamma_Q |h|^2 > 0$$

Аналогично для отрицательно определенной формы.

Для не знакоопределенной формы:

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{h} : Q(\bar{h}) \rangle > 0 &\Rightarrow f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{t^2 Q(\bar{h})}_{Q(t\bar{h})} + t^2 \underbrace{\left(\sum (f''_{x_i x_i}(a + \Theta t\bar{h}) - f''_{x_i x_i}(a)) \bar{h}_i^2 + 2 \sum_{i < j} \dots \right)}_{\text{б.м. при } t \rightarrow 0} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} t^2 (Q(h) - \frac{1}{2} Q(h)) > 0
 \end{aligned}$$

Т.е. $f(a + t\bar{h}) > f(a)$ при t , близких к 0.

Аналогично $f(a + t\bar{\bar{h}}) < f(a)$ при t , близких к 0.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$$f(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 \dots$$

$$\bar{f}(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 \dots$$

$$a = (0, 0, \dots)$$

$$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots$$

$$d^2 f(a, h) = 2h_1^2$$

$$d^2 \bar{f}(a, h) = 2h_1^2$$

Итого f не имеет экстремума в a , но для \bar{f} a — локальный минимум. \square

2.11 Лемма о “почти локальной инъективности”

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- F дифф. в $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists C > 0, \delta > 0 \forall h \in B(0, \delta) \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

Доказательство. Если F — линейное отображение:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \|F'(x_0)\| \cdot |h| \geq \frac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|} |h|$$

В общем случае:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б.м.}}| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

\square

2.12 Теорема о сохранении области

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- F дифф.
- $\forall x \in O \quad \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открыто.

Доказательство. $x_0 \in O \Rightarrow y_0 = F(x_0) \in F(O)$ — внутренняя? в $F(O)$

По лемме $\exists c, \delta : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

В частности $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$ при $|h| = \delta$

$$r := \frac{1}{2} \rho(y_0, F(S(x_0, \delta)))$$

При этом ρ между множествами определено следующим образом:

$$\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$$

Т.к. S — компакт, $\exists \min$.



Если $y \in B(y_0, r)$, то $\rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$:

Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$, т.е. $\forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) F(x) = y$

Рассмотрим функцию $g(x) = |F(x) - y|^2$ при $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$.

Мы хотим показать, что $\exists x : g(x) = 0$. Найдем $\min g$.

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r^2$$

При $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2 \Rightarrow \min g$ не лежит на границе шара \Rightarrow он лежит внутри шара.

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2$$

$$\forall i \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

$$2(F_1(x) - y)F'_{1x_i}(x) + \dots + 2(F_m(x) - y)F'_{mx_i}(x) = 0$$

$$F'_x 2(F(x) - y) = 0$$

$$\forall x \quad \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$$

□

2.13 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F \in C^1(O)$
- $l < m$
- $\text{rg} F'(x) = l \quad \forall x \in O$

Тогда $F(O)$ открыто.

Доказательство. Зафиксируем точку x_0 . Пусть ранг реализуется на столбцах $1 \dots l$, т.е. определитель матрицы из столбцов $1 \dots l \neq 0$, т.е.:

$$\det \underbrace{\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots l}}_{A(x_0)}(x_0) \neq 0$$

И для близких точек тоже $\neq 0$

$$\tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}'(x) = \left[\begin{array}{c|c} F'(x) & \\ \hline 0 & E_{m-l} \end{array} \right]$$

$$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \det E_{m-l} \neq 0 \quad \text{в окрестности } x_0$$

Тогда $\tilde{F}|_{U(x_0)}$ удовлетворяет теореме $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$ — открытое множество в \mathbb{R}^m

$$F(U(x_0)) = \tilde{F}(U(x_0)) \cap \mathbb{R}^l$$

□

2.14 Теорема о гладкости обратного отображения

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $O \subset \mathbb{R}^m$
- $r = 1, 2, \dots + \infty$
- T обратимо
- $\det T'(x) \neq 0 \quad \forall x \in O$

Тогда $T^{-1} \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$ и $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$, где $y_0 = T(x_0)$

Доказательство. Докажем по индукции по r .

База: $r = 1$

$S := T^{-1}$ — непрерывно по теореме о сохранении области. Почему? По теореме о топологическом определении непрерывности:

$f : X \rightarrow Y$ непр. $\Leftrightarrow \forall B - \text{откр.} \subset Y \ f^{-1}(B) - \text{открыто.}$

$T'(x_0) = A$ — невырожденный оператор.

По лемме о почти локальной инъективности

$$\exists c, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) \ |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \quad (*)$$

По определению дифференцируемости $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)|x - x_0|$

$$T(x) = y \quad T(x_0) = y_0 \quad x = S(y) \quad x_0 = S(y_0)$$

В терминах y и S :

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\xrightarrow[y \rightarrow 0]{?} 0 \text{ быстрее, чем } |y - y_0|}$$

Если действительно $\rightarrow 0$, то S дифференцируемо по определению.

Пусть y близко к y_0 , тогда $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$

$$\begin{aligned} |A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)| &= |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1}\omega(S(y))| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{C}|y - y_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \end{aligned}$$

Мы доказали, что S дифференцируемо, теперь необходимо доказать, что S' непрерывно.

$$S'(y_0) = A^{-1}$$

“Алгоритм” получения обратного оператора:

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1}$$

Здесь все шаги непрерывны, поэтому S' непрерывно.

Переход

$$\begin{aligned} T \in C^{r+1} \quad T' : O \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad T' \in C^r \quad ? S \in C^{r+1} \\ y \stackrel{\in C^r}{\mapsto} \stackrel{\text{по инд.}}{\mapsto} S(y) \stackrel{\in C^r}{\mapsto} T'(x) \stackrel{\in C^\infty}{\mapsto} (S^{-1})' \end{aligned}$$

□

2.15 ! Теорема о неявном отображении

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- O откр.
- $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$
- $\det F'_y(a, b) \neq 0$

Тогда:

1. \exists откр. $P \subset \mathbb{R}^m, a \in P$
 \exists откр. $Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$
 $\exists!$ $\Phi : P \rightarrow Q \in C^r : \forall x \in P \ F(x, \Phi(x)) = 0$
2. $\Phi'(x) = - (F'_y(x, \Phi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

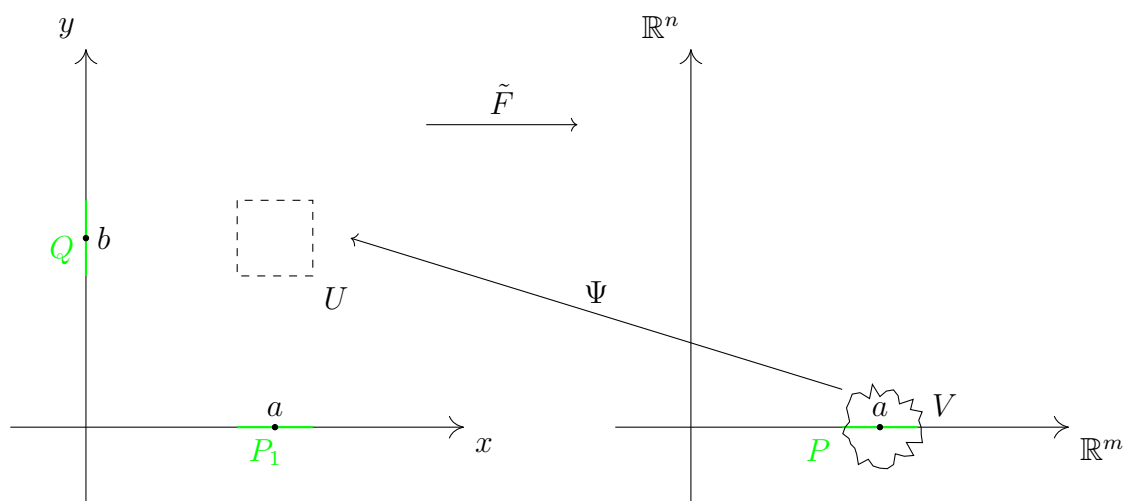
Доказательство.

$$1 \Rightarrow 2: F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x))\Phi'(x) = 0$$

$$1: \tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} : (x, y) \mapsto (x, F(x, y)), \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$$

$$\tilde{F}' = \left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array} \right)$$

Очевидно $\det \tilde{F}' \neq 0$ в (a, b) , значит $\exists U(a, b) : \tilde{F}|_U$ — диффеоморфизм



1. $U = P_1 \times Q$ — можно так считать
 2. $V = \tilde{F}(U)$
 3. \tilde{F} — диффеоморфизм на $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \rightarrow U$
 4. \tilde{F} не меняет первые m координат $\Rightarrow \Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : V \rightarrow \mathbb{R}^n$.
 5. “Ось x ” \Leftrightarrow “ось u ”, $P :=$ “ось u ” $= \mathbb{R}^m \times a \cap V$, P — откp. в \mathbb{R}^m , $P = P_1$
 6. $\Phi(x) := H(x, 0)$
- $$F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$$
- Единственность: $(x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$

□

2.16 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $1 \leq k \leq m$ (случай $k = m$ тривиален)
- $1 \leq r \leq \infty$
- $p \in M$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность p в \mathbb{R}^m : $M \cap U$ — k -мерное C^r -гладкое многообразие.
 2. $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$ и функции $f_1, f_2 \dots f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$, все $f_i \in C^r$
- $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$, при этом $\text{grad} f_1(p) \dots \text{grad} f_{m-k}(p)$ — ЛНЗ.

Доказательство.

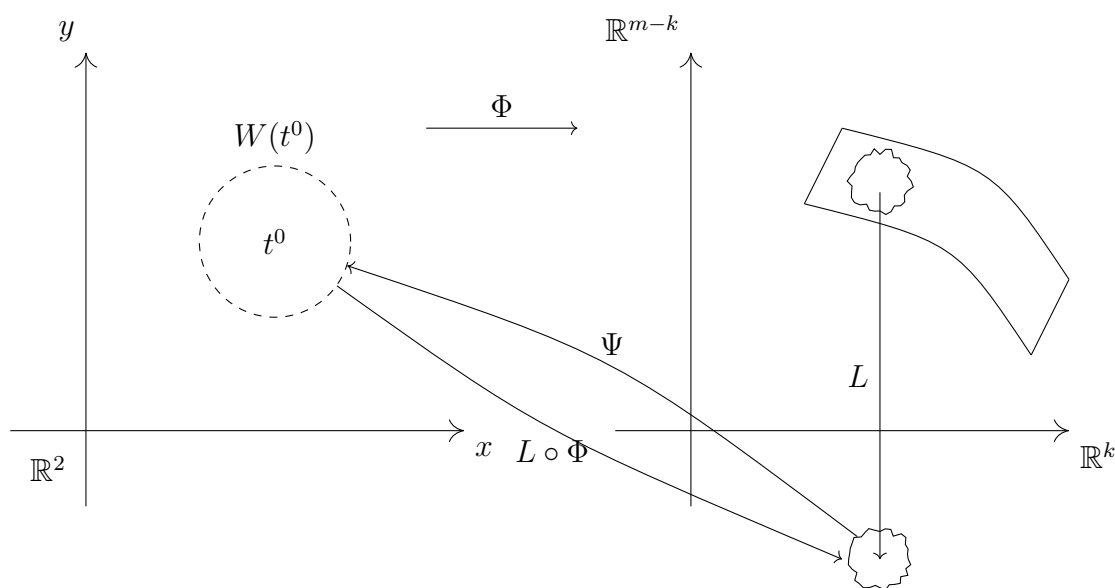
1 \Rightarrow 2: Φ — параметризация $O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^r$, $p = \Phi(t^0)$

$$\text{rg} \Phi'(t^0) = k$$

$$\text{Пусть } \det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t^0) \right)_{i,j=1\dots k} \neq 0$$

Пусть $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ — проекция на первые k координат: $(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_k)$

Тогда $(L \circ \Phi)'$ — невырожденный оператор \Rightarrow локальный диффеоморфизм. Тогда если $W(t^0)$ — окрестность точки t^0 , то $L \circ \Phi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ — диффеоморфизм.



Множество $\Phi(W)$ — график некоторого отображения $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1}$

Берем $x' \in V$, тогда $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$, т.е. $H \in C^r$

Множество $\Phi(W)$ открыто в M по топологическому определению непрерывности
 $\Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$, где \tilde{U} открыто в \mathbb{R}^m

Можно считать, что $\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$, т.к. \mathbb{R}^{m-k} открыто.

Пусть $f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto H_j(L(x)) - x_{k+j}$. Тогда $x \in M \cap \tilde{U} (= \Phi(W)) \Leftrightarrow f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad} f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = k \Rightarrow \text{ЛНЗ}$

$2 \Rightarrow 1: F := (f_1 \dots f_{m-k})$

$$I := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

Градиенты ЛНЗ $\Rightarrow \text{rg} I = m - k$.

Пусть ранг реализуется на последних $m - k$ столбцах, т.е.

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1 \dots m-k} \neq 0$$

$$F(x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_m) = 0 \text{ при } x \in \tilde{U}$$

По т. о неявном отображении:

$$\exists P - \text{окр. } (x_1 \dots x_k) \text{ в } \mathbb{R}^m$$

$$\exists Q - \text{окр. } (x_{k+1} \dots x_m) \text{ в } \mathbb{R}^{m-k}$$

$$\exists H \in C^r : P \rightarrow Q : F(x', H(x')) \equiv 0 \text{ для } x' \in P$$

$$\text{Тогда } \Phi : P \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1 \dots x_k) \mapsto (x_1 \dots x_k, H_1(x_1 \dots x_k), H_2(x_1 \dots x_k) \dots H_{m-k}(x_1 \dots x_k))$$

Φ — гомеоморфизм P и $M \cap \tilde{U}$, потому что Φ^{-1} — фактически проекция.

□

2.17 Следствие о двух параметризациях

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — k -мерное C^r -гладкое многообразие
- $p \in M$
- \exists две параметризации:

$$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_1(t^0) = p$$

$$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_2(s^0) = p$$

Тогда \exists диффеоморфизм $\Psi : O_1 \rightarrow O_2$, такой что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

Доказательство.

Частный случай: Пусть $\text{rg} \Phi'_1(t^0), \text{rg} \Phi'_2(s^0)$ достигается на первых k столбцах.

$$\text{Тогда } \Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta - \text{искомый диффеоморфизм}}$$

$$\text{Общий случай: } \Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$$

Кажется, в формуле ошибка — см. иллюстрацию.



$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Гладкость очевидна в силу гладкости всех элементов.

Невырожденность мы не доказали, поэтому то, что это диффеоморфизм — ещё не доказано. Возможно, это будет на следующей лекции.

□

2.18 Лемма о корректности определения касательного пространства

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- Φ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M — гладкое k -мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть k -мерное линейное подпространство в \mathbb{R}^m . Оно не зависит от Φ .

$\Phi'(t^0)$ — касательное пространство к M в точке p , обозначается $T_p M$.

Доказательство. $\text{rg} \Phi'(t^0) = k$ по определению параметризации \Rightarrow искомое очевидно. Если взять другую параметризацию Φ_1 , то по следствию о двух параметризациях

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

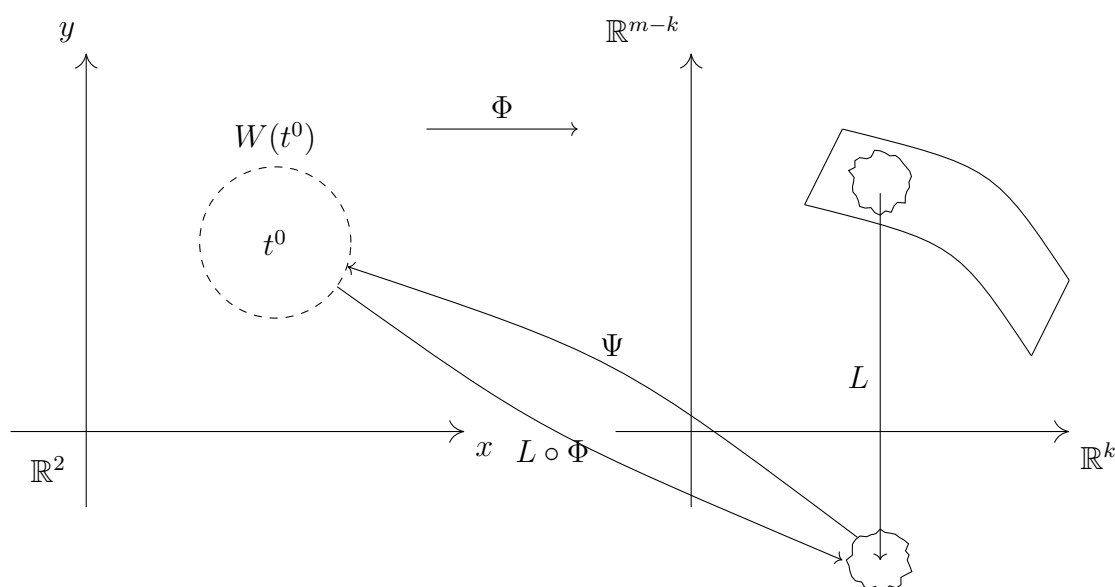
$$\Phi' = \Phi'_1 \Psi'$$

$\Psi'(t^0)$ — невырожденный оператор \Rightarrow образ $\Phi' =$ образ Φ'_1

□

2.19 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$ — гладкий путь. Тогда $\gamma'(0) \in T_p M$



Доказательство. Из иллюстрации очевидно:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

$$\gamma'(0) = \Phi'(\Psi(L(\gamma(0))))\Psi'(L(\gamma(0)))L'(\gamma(0))\gamma'(0)$$

Очевидно, что мы попадаем в образ $\Phi'(\dots)$, поэтому $\gamma'(0) \in T_p M$ □

2.20 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, f \in C(O), y = f(x)$ — поверхность в \mathbb{R}^{m+1} , задается точками (x, y) .

Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке (a, b) задается уравнением

$$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

Доказательство. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$

$$\Phi(x) = (x, f(x))$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$. В каких случаях он принадлежит образу Φ' ?

$$\Phi' \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \dots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор принадлежит образу, если $\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \dots + \alpha_m f'_{x_m}$

Сместив на a, b , получаем искомое. □

$$\Phi(x_1 \dots x_m) = 0$$

$$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(a) = 0$$

Тогда уравнение касательной плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

Доказательство. γ — путь в M : $\Phi(\gamma(s)) = 0$, $\Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$. По предыдущим утверждениям такой путь есть, кроме того, любому вектору x в касательном пространстве можно сопоставить $\gamma : \gamma'(s) = x$. Поэтому любой касательный вектор от точки a должен быть подчинён искомому отношению.

Альтернативное доказательство:

По определению дифференцируемости Φ в точке a :

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) + o(\|x - a\|)$$

Мы игнорируем o , потому что оно компенсируется тем, что мы берем не с поверхности Φ , а с касательной плоскости. Это нестрогое утверждение. \square

2.21 ! Необходимое условие относительного локального экстремума

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f'(a) + \lambda \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

Второе условие дописано для удобства, оно не содержательно, т.к. оно уже дано.

$$\text{В координатах: } \begin{cases} f'_{x_1} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} + \dots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} + \dots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Здесь неизвестны $a_1 \dots a_{m+n}$, $\lambda_1 \dots \lambda_n$, поэтому, если уравнения не вырождены, то решение есть.

Доказательство. $\text{rg}\Phi'(a) = n$. Пусть ранг реализуется на столбцах $x_{m+1} \dots x_{m+n}$.

Обозначим $y_1 = x_{m+1} \dots y_n = x_{m+n}$.

$$(x_1 \dots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y), a \leftrightarrow (a_x, a_y).$$

$\det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a) \neq 0$. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists U(a_x) \exists V(a_y) \exists \varphi : U(a_x) \rightarrow V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ и отображение $x \mapsto (x, \varphi(x))$ есть параметризация простого гладкого многообразия $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$.

a — точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ — точка локального экстремума функции $g(x) = f(x, \varphi(x))$, потому что $(x, \varphi(x)) \in U(a)$.

Необходимое свойство экстремума для a_x :

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi')(a_x) = 0 \quad (1)$$

Примечание. Здесь и далее в этом доказательстве в функции и производные операторы подставляется a и a_x , но не записывается ради краткости и запутанности.

$$\begin{aligned} \Phi(x, \varphi(x)) &\equiv 0 \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' &= 0 \end{aligned}$$

Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \cdot \varphi' = 0 \quad (2)$$

$$f'_x + \lambda \Phi'_x + (f'_y + \lambda \Phi'_y) \varphi' = 0 \quad (3)$$

(3) это (2) + (1)

Пусть $\lambda = -f'_y \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}$.

Тогда $f'_y + \lambda \Phi'_y = f'_y - f'_y (\Phi'_y(a))^{-1} \Phi'_y(a) = 0$ и $f'_x + \lambda \Phi'_x = 0$ в силу (3). Итого (3) выполнено, мы предъявили λ , подходящее под искомое. \square

2.22 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

- $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Тогда $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda - \text{собственное число } A^T A\}$

Такое число существует, т.к. $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle \Rightarrow \langle A^T Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$.

Доказательство. $x \in S^{m-1}$.

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T A x, x \rangle}_{\text{СИММ.}}$$

$$\max |Ax|^2 = \max \langle A^T A x, x \rangle = \lambda_{\max}$$

□

2.23 ! Теорема Стокса-Зайделя о непрерывности предельной функции. Следствие для рядов

Теорема 1 (Стокса-Зайделя).

- $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- $x_0 \in X$
- f_n непрерывна в x_0
- $f_n \xrightarrow[X]{} f$

Тогда f непрерывна в x_0 .

Доказательство. $|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$ — верно $\forall x, \forall n$

$$f_n \xrightarrow[X]{} f \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

Берем $\forall \varepsilon > 0$ возьмём любой n , для которого выполняется (1). Тогда подчеркнутые слагаемые $\leq \frac{\varepsilon}{3}$. Теперь для этого n подбираем $U(x_0) : \forall x \in U(x_0) |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Теорема 1' (Стокса-Зайделя для рядов).

- $u_n : X \rightarrow Y$
- X — метрическое пространство
- Y — нормированное пространство
- $x_0 \in X$
- u_n непрерывно в x_0

- $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на X
- $S(x) := \sum u_n(x)$

Тогда $S(x)$ непрерывно в x_0 .

Доказательство. По теореме 1 $S_n(x) \Rightarrow S(x)$, $S_n(x)$ — непр. в $x_0 \xrightarrow{\tau.1} S(x)$ непр. в x_0 \square

2.24 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

- X компакт
- $\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$, где $f_1, f_2 \in C(X)$

Тогда пространство $C(X)$ — полное метрическое пространство с метрикой ρ .

Доказательство. f_n — фундаментальная в $C(X) \stackrel{\text{def}}{\iff}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (4)$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in X$ вещественная последовательность $(f_n(x_0))$ фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) =: f(x_0)$, тогда f — поточечный предел f_n . Проверим, что $f_n \Rightarrow f$ и $f \in C(X)$.

В (4) перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \xRightarrow[X]{} f \xRightarrow{\text{Стокс}} f \in C(X)$$

\square

2.25 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

Теорема 2.

- $f, f_n \in C[a, b]$
- $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$

Тогда $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Доказательство.

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a,b]} |f_n - f| (b - a) = \rho(f_n, f)(b - a) \rightarrow 0$$

\square

Теорема 2'. О почленном интегрировании ряда

- $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- u_n — непр. на $[a, b]$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ **равномерно** сходится на $[a, b]$
- $S(x) = \sum u_n(x)$

Тогда $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx$

Можно интегрировать, т.к. $S(x)$ — непр. на $[a, b]$ по теореме 1'

Доказательство. По теореме 2

$$S_n \xrightarrow{[a,b]} S$$

По теореме 2:

$$\int_a^b S_n(x)dx \rightarrow \int_a^b S(x)dx$$

$$\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n u_k(x)dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)dx$$

□

2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

- $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$
- f, f'_y — непр. на $[a, b] \times [c, d]$
- $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$

Тогда Φ дифференцируема на $[c, d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(y + \frac{1}{n}) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} &= \int_a^b \frac{f(x, y + \frac{1}{n}) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx \\ &= \int_a^b f'_y \left(x, y + \frac{\Theta}{n} \right) dx \\ &= \int_a^b g_n(x, y) dx \end{aligned} \tag{5}$$

(5): по т. Лагранжа.

$g_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'_y(x, y)$ на $x \in [a, b]$ по теореме Кантора о равномерной непрерывности, и мы считаем y фиксированным.

Таким образом, $\Phi'(y) \leftarrow \frac{\Phi(y + \frac{1}{n}) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \rightarrow \int_a^b f'_y(x, y) dx$ □

2.27 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

Теорема 3 (о предельном переходе под знаком производной).

- $f_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $f_n \rightarrow f$ поточечно на $\langle a, b \rangle$
- $f'_n \xrightarrow{\langle a, b \rangle} \varphi$

Тогда $f \in C^1\langle a, b \rangle$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f \\ D \downarrow & & \vdots \\ f'_n & \xrightarrow{\quad \quad} & \varphi \end{array}$$

Доказательство. $\forall x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$:

$$\begin{aligned} f'_n &\xrightarrow{[x_0, x_1]} \varphi \xrightarrow{\text{теорема 2}} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ &\qquad \qquad \qquad \int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f(x_1) - f(x_0) &\xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ &\qquad \qquad \qquad f(x_1) - f(x_0) \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi \end{aligned}$$

Тогда $\begin{cases} f - \text{первообразная } \varphi \\ \varphi - \text{непр.} \end{cases} \Rightarrow f' = \varphi$ □

Теорема 3' (о дифференцировании ряда по параметру).

- $u_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$ (поточечная сходимость)
- $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$ (равномерная сходимость)

Тогда:

1. $S(x) \in C^1\langle a, b \rangle$
2. $S' = \varphi$ на $\langle a, b \rangle$

То есть $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$

Доказательство. Следует из теоремы 3.

$S_n \rightarrow S$ поточечно, $S'_n \Rightarrow \varphi$

□

2.28 ! Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

- $\sum u_n(x)$
- $x \in X$

Пусть $\exists c_n$ — вещественная:

- $|u_n(x)| \leq c_n$ при $x \in E$
- $\sum c_n$ — сходится

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство. $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \dots + c_{n+p}$ — тривиально

$\sum c_n$ — сх. $\Rightarrow c_n$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon$$

Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости. □

2.29 Дифференцируемость Γ функции

Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, x > 0$$

γ — постоянная Эйлера.

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) - \frac{x}{k} \right)}_{u_k(x)}$$

Зафиксируем x_0 .

$$u'_k(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{k}} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$$

Пусть $M > x_0$. Тогда

$$\left| \frac{-x}{(x+k)k} \right| \leq \frac{M}{k^2}$$

при $x \in (0, M)$.

Тогда $\sum \frac{-x}{(x+k)k}$ равномерно сходится на $(0, M)$, значит $\ln \Gamma(x) \in C^1(0, M)$, $\frac{-x}{(x+k)k}$ —
непр. $\Rightarrow \sum \frac{-x}{(x+k)k}$ — непр. $\Rightarrow \ln \Gamma(x) \in C^1(0, +\infty) \Rightarrow \Gamma(x) \in C^1(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k} \\ \Gamma'(x) &= -\Gamma(x) \left(\frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k} \right) \end{aligned}$$

Изучив равномерную сходимость $\left(\frac{x}{(x+k)k} \right)'$, получаем, что $\Gamma \in C^2(0, +\infty)$ и т.д. \Rightarrow
 $\Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$

2.30 Теорема о предельном переходе в суммах

- $u_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- x_0 — предельная точка E
- $\forall n \quad \exists \text{конечный } \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E .

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится

$$2. \sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$$

Доказательство.

1. ? $\sum a_n$ — сходится

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x), S_n^a = \sum_{k=1}^n a_k$$

Проверим, что S_n^a — фундаментальная:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E |S_{n+p} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Это критерий Больцано-Коши для равномерной сходимости)

Зададим ε по N , выберем $n, n+p$ и возьмём x близко к x_0 : $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|S_n^a - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выполнено 1, т.е. $|S_{n+p} - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

$$2. \sum a_n \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x)$$

Сведём к теореме Стокса-Зайдля.

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n, & x = x_0 \end{cases} \text{ — задано на } E \cup \{x_0\}, \text{ непрерывно в } x_0.$$

$\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится на $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна в x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n$$

$\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится, т.к.:

$$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right|}_{\rightarrow 0}$$

□

2.31 Теорема о перестановке двух предельных переходов

- $f_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- x_0 — предельная точка E
- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} S(x)$
- $f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A_n$

Тогда:

1. $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A$

То есть пунктирные преобразования верны:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} & S(x) \\ \downarrow x \rightarrow x_0 & & \downarrow x \rightarrow x_0 \\ A_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} & A \end{array}$$

Доказательство. $u_1 = f_1, \dots, u_k = f_k - f_{k-1} \dots$

$$a_1 = A_1, \dots, a_k = A_k - A_{k-1}$$

$$\text{Тогда } f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

В эти обозначениях $\sum u_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$.

$$u_k(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} a_k$$

Тогда по т. 4' $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ имеет конечный предел при $n \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum a_k = A$$

□

2.32 ! Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

- $\sum a_n(x)b_n(x)$ — вещественный ряд.
- $x \in X$

- Частичные суммы ряда $\sum a_n$ равномерно ограничены :

$$\exists C_a \quad \forall n \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq C_a$$

- $\forall x$ последовательность $b_n(x)$ — монотонна по n и $b_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{X} 0$

Тогда ряд $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на X

Доказательство. Преобразование Абеля (суммирование по частям)

$$\sum_{M \leq k \leq N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{M \leq k \leq N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| &\leq C_A |b_N| + C_A |b_{M-1}| + \sum_{M \leq k \leq N-1} C_A |b_k - b_{k+1}| \\ &\leq C_A \left(|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=M}^{N-1} |b_k - b_{k+1}| \right) \\ &\leq C_A (2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|) \end{aligned} \quad (6)$$

(6) : Все разности одного знака \Rightarrow телескопически $= \pm(b_M - b_N)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K : \forall l > K \quad \forall x \in X \quad |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_A}$$

Значит, при $M, N > K \quad \forall x \in X$:

$$\left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon$$

Это критерий Больцано-Коши равномерной сходимости ряда. □

2.33 Теорема о круге сходимости степенного ряда

- $\sum a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд

Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится только при $z = z_0$

3. $\exists R \in (0, +\infty)$:

- (a) при $|z - z_0| < R$ ряд абсолютно сходится
- (b) при $|z - z_0| > R$ ряд расходится

Доказательство. Применим признак Коши: $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, если $r < 1$, ряд сходится, если $r > 1$, ряд расходится.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| = |z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1. $\overline{\lim} = 0$. Тогда $r = 0$, есть абсолютная сходимость при всех z .
2. $\overline{\lim} = +\infty$. Тогда $r = +\infty$ при $z \neq z_0$. При $z = z_0$ сходимость очевидна.
3. $\overline{\lim} \neq 0, +\infty$. Тогда $|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \stackrel{\text{def}}{=} R$

□

2.34 Теорема о непрерывности степенного ряда

- $\sum a_n(z - z_0)^n$
- $0 < R \leq +\infty$

Тогда:

1. $\forall r : 0 < r < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ — непрерывна в $B(z_0, r)$

Доказательство.

1. Если $0 < r < R$, то при $z - z_0 = r$ ряд абсолютно сходится, т.е. $\sum |a_n| r^n < +\infty$

Признак Вейерштрасса:

- (a) При $|z - z_0| \leq r$ $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$
- (b) $\sum |a_n| r^n < +\infty$

\Rightarrow есть сходимость на $\overline{B(z_0, r)}$

2. Следствие из пункта 1 и теоремы Стокса-Зайдля.

Если z удовлетворяет $|z - z_0| < R$, то $\exists r_0 < R : z \in B(z_0, r_0)$

На $B(z_0, r_0)$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow f$ непр. в точке z .

□

2.35 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

$$(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, 0 < R < +\infty$$

$$(A') \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Тогда:

1. Радиус сходимости (A') равен R
2. $\forall z \in B(z_0, R) \exists f'(z)$ и $f'(z) = \sum n a_n (z - z_0)^{n-1}$

Доказательство.

1. По формуле Адамара.

Ряд (A') сходится при каком-то $z \Leftrightarrow \sum n a_n (z - z_0)^{n-1}$ — сходится.

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{1 \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

2. $\forall a \in B(z_0, R), \exists r < R : a \in B(z_0, r)$

$$a = z_0 + w_0, |w_0| < r$$

$$z = z_0 + w$$



$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}}_{\substack{\text{модуль по лемме} \\ nr^{n-1}|a_n|}} \quad (7)$$

$\sum nr^{n-1}|a_n|$ сходится по пункту 1.

То есть ряд (7) в круге $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lim \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum n a_n (a - z_0)^{n-1}$$

□

Следствие 0.3.

- $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$
- $a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$

Тогда:

1. $\sum \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и f
2. $\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$

Пример.

$$\int f(x) dx = \sum \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C$$

$$f(x) := \operatorname{arctg} x$$

$$f' = \frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$$

Проинтегрируем:

$$\operatorname{arctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 0 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

То же самое можно получить, взяв определенный интеграл.

2.36 Свойства экспоненты

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp(z)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp z$
3. $\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$

Доказательство.

1.

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

2.

$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

3.

$$\begin{aligned} \exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k w^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \right) \\ &= \exp(z) \exp(w) \end{aligned}$$

□

2.37 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

- $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ — сходится
- $c_n \in \mathbb{C}$
- $f(x) = \sum c_n x^n$
- $R \geq 1$
- $-1 < x < 1$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum c_n$

Доказательство. Ряд $\sum c_n x^n$ равномерно сходится на $[0, 1]$ по признаку Абеля при $a_n(x) = c_n$, $b_n(x) = x^n$.

Функции $c_n x^n$ непрерывны на $[0, 1]$ $\xRightarrow{\text{Стокса-Зайдля}} \sum c_n x^n$ — непр. на $[0, 1]$

□

Следствие 0.4 (т. Абеля).

- $\sum a_n = A$
- $\sum b_n = B$
- $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$
- $\sum c_n = C$

Тогда $C = AB$

Доказательство. $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n, x \in [0, 1]$

При $x < 1$ есть абсолютная сходимость $f(x)$ и $g(x)$. Можно перемножать: $f(x)g(x) = h(x)$, при $x \rightarrow 1 - 0$ $A \cdot B = C$ \square

2.38 Единственность разложения функции в ряд

f — разлагается в степенной ряд в окрестности x_0 , если:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists C_n - \text{вещ. посл.} \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x - x_0)^n \quad (8)$$

Теорема 1 (о единственности). f разлагается в степенной ряд в окрестности x_0 . Тогда разложение единственно.

Доказательство. Выполняется (8).

База:

$$C_0 = f(x_0) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n (x - x_0)^{n-1}$$

Переход:

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) C_n (x - x_0)^{n-k} \Rightarrow C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

\square

2.39 Разложение бинома в ряд Тейлора

$\forall \sigma \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\sigma}{n} x^n + \dots$$

Доказательство. При $|x| < 1$ ряд сходится по признаку Даламбера:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{\sigma!}{(n+1)!(n+1-\sigma)!} x^{n+1}}{\frac{\sigma!}{n!(n-\sigma)!} x^n} \right| = \left| \frac{(\sigma - n)x}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x| < 1$$

Обозначим сумму ряда через $S(x)$.

Наблюдение: $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n)}{n!} x^n + \dots$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$\begin{aligned} (1+x)S' &= \dots + \left(\frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n+1)}{n!} n \right) x^n + \dots \\ &= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n+1)}{n!} \sigma x^n + \dots \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} \quad f'(x) = \frac{S'(1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1}S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0$$

$$\Rightarrow f = \text{const}, f(0) = 1 \Rightarrow f \equiv 1 \Rightarrow S(x) = (1+x)^\sigma$$

□

2.40 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

$$f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$$

Тогда f — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности $x_0 \iff$

$$\exists \delta, C, A > 0 \quad \forall n \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$$

Доказательство.

$$\Leftarrow \text{ формула Тейлора в } x_0 : f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$$

Если

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

, то f раскладывается в ряд Тейлора. Из условия мы знаем:

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq C |A(x - x_0)|^n$$

Тогда при $C|A(x - x_0)|^n \rightarrow 0$ f раскладывается в ряд Тейлора.

$$C|A(x - x_0)|^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$$

Таким образом, f раскладывается в ряд Тейлора в области $(x_0 - \min(\delta, \frac{1}{A}), x_0 + \min(\delta, \frac{1}{A}))$

$$\Rightarrow f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Возьмём $x_1 \neq x_0$, для которого разложение верно.

(а) при $x = x_1$, ряд сходится \Rightarrow слагаемые $\rightarrow 0 \Rightarrow$ слагаемые ограничены:

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n \right| \leq C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \leq C_1 n! B^n$$

, где $B = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$

Таким образом, мы оценили производную в x_0 , но нужно уметь оценивать и производную в окрестности x_0 .

(b)

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1) \dots (n-m+1) (x - x_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} (x - x_0)^{n-m} \end{aligned}$$

Пусть $|x - x_0| < \frac{1}{2B}$

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &\leq \sum \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} |x - x_0|^{n-m} \right| \\ &\leq \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!} |x - x_0|^{n-m} \\ &= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!} \underbrace{(B|x - x_0|)^{n-m}}_{< \frac{1}{2}} \\ &= \frac{C_1 B^m m!}{\underbrace{(1 - B|x - x_0|)^{m+1}}_{> \frac{1}{2}}} \\ &< C_1 2^{m+1} B^m m! \end{aligned} \tag{9}$$

$$= \underbrace{(2C_1)}_C \underbrace{(2B)}_A^m m!$$

(9): по следствию 2.

Эта оценка выполняется при $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{2B}$

□

2.41 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

1. Линейность интеграла по полю.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall U, V - \text{векторные поля} \quad I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$$

Доказательство. Очевидно из формулы 1.23 в определении. □

2. Аддитивность при дроблении пути

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $c \in (a, b)$
- $\gamma^1 = \gamma|_{[a, c]}$
- $\gamma^2 = \gamma|_{[c, b]}$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$$

Доказательство. Очевидно из линейности интеграла в 1.23. □

3. Замена параметра

- $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$
- $\varphi \in C^1$
- $\varphi(p) = a$
- $\varphi(q) = b$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$$

Доказательство. Это замена переменной в интеграле.

$$\begin{aligned}
I(V, \tilde{\gamma}) &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(s) \rangle ds \\
&= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\
t &:= \varphi(s) \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= I(V, \gamma)
\end{aligned}$$

□

Примечание. $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — параметризация гладкого одномерного простого многообразия

$\tilde{\varphi} : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — то же самое

По теореме о двух параметризациях: \exists диффеоморфизм $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$ $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

4. Объединение носителей

- $\gamma^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^1(b) = \gamma^2(c)$

Зададим путь $\gamma = \gamma^2 \gamma^1 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma^2(t + c - b), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$

В точке b возможен излом, т.е. нет $\gamma'(b)$, но есть левосторонняя и правосторонняя производные.

Если γ^1, γ^2 — кусочно-гладкие, то γ — кусочно-гладкое.

Тогда $I(V, \gamma^2 \gamma^1) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
I(V, \gamma) &= \int_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_b^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
\tau &:= t - b + c \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma^1(t)), \gamma^{1'}(t) \rangle dt + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), \gamma^{2'}(\tau) \rangle d\tau
\end{aligned}$$

$$= I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$$

□

5. Противоположный путь

$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \gamma(a + b - t)$, т.е. мы идём от b к a , а не наоборот.

Тогда $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} I(V, \gamma^-) &= \int_a^b \langle V(\gamma(a + b - \tau)), -\gamma'(a + b - \tau) \rangle d\tau \\ t &:= a + b - \tau \\ &= \int_b^a \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t) \rangle (-dt) \\ &= -I(V, \gamma) \end{aligned}$$

□

6. Оценка интеграла векторного поля пути

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$$

, где $L = \gamma[a, b]$ — носитель пути.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \right| &\leq \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| dt \\ &\leq \int_a^b |V(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| l(\gamma) \end{aligned} \tag{11}$$

(10): Неравенство Коши-Буняковского

(11): V — непр., L — компакт $\Rightarrow \sup$ достигается

□

2.42 ! Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- V — потенциально
- f — потенциал V
- $\gamma[a, b] \rightarrow O$
- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

Тогда

$$\int_{\gamma} \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$$

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1. γ — гладкий

$$\Phi(t) = f(\gamma(t))$$

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\gamma'_m(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum v_k dx_k &= \int_a^b \Phi'(t) dt \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned}$$

2. γ — кусочно-гладкий

\exists дробление: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b : \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое

$$\int_{\gamma} \sum v_k dx_k = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) \\
&= f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) \\
&= f(B) - f(A)
\end{aligned} \tag{12}$$

(12): по пункту 1.

□

2.43 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

V — векторное поле в области O . Тогда эквивалентны следующие:

1. V — потенциально
2. $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i$ не зависит от пути в O
3. $\forall \gamma$ — кусочно-гладкий, замкнутый в O $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i = 0$

Доказательство.

1 \Rightarrow 2 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

2 \Rightarrow 3 γ — петля: $[a, b] \rightarrow O$. $\gamma(a) = \gamma(b) = A$

Рассмотрим постоянный путь $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O, t \mapsto A$. По свойству 2: $\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}} \langle V, \gamma' \rangle dt = 0$

3 \Rightarrow 2 γ_1, γ_2 — пути с общим началом и концом. Тогда $\gamma := \gamma_2^{-1} \gamma_1$ — петля. γ — кусочно гладкий $\Rightarrow 0 = \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2^{-1}} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$



$2 \Rightarrow 1$ Фиксируем $A \in O$.

$\forall x \in O$ выберем кусочно-гладкий путь γ_x из A в x . Проверим, что $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i$ — потенциал.

Достаточно проверить, что $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$ в O .

Фиксируем $x \in O$. $\gamma_0(t) = x + t h e_1, t \in [0, 1], \gamma'_0(t) = (h, 0 \dots 0) = h e_1$



$$\begin{aligned}
 f(x + h e_1) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+h e_1}} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0} \\
 &= \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) h dt \\
 &= h V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n)
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{f(x + h e_1) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n) \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x)$$

□

2.44 ! Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

V — гладкое, потенциальное в O

Тогда

$$\forall x \in O \quad \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x) \quad (13)$$

Доказательство. Непрерывные производные не изменяются при порядке дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x)$$

□

Лемма Пуанкаре:

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклая область
- $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- V удовлетворяет 13, в т.ч. V — гладкое.

Тогда V — потенциальное.

Доказательство. Фиксируем $A \in O$

$$\forall x \in O \quad \gamma_x(t) := A + t(x - A), t \in [0, 1]$$

$$\gamma'_x(t) = x - A$$

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))(x_k - A_k) dt$$

Проверим, что f — потенциал.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \text{правило Лейбница}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\dots) t(x_k - A_k) dt \\ &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\dots) t(x_k - A_k) dt \\ &= \int_0^1 (tV_j(A + t(x - A)))'_t dt \\ &= tV_j(A + t(x - A)) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= V_j(x) \end{aligned} \quad (14)$$

(14): по (13).

□

Лемма Пуанкаре о локальной потенциальности:

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — любая область
- $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- V удовлетворяет 13.

Тогда V — локально потенциально.

2.45 Лемма о гусенице

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Тогда \exists дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и \exists шары $B_1 \dots B_n \subset O : \gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$.



Рис. 5: “Гусеница” — покрытие пути шарами

Доказательство. $\forall c \in [a, b]$ возьмём $B_c := B(\gamma(c), \underbrace{r_c}_{\text{произвольн.}}) \subset O$.

$$\overline{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$$

$\overline{\beta}_c := \sup\{\beta \in [a, b] : \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$ — момент первого выхода после посещения точки $\gamma(c)$

Возьмём $(\alpha_c, \beta_c) : \overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$

Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a, b]$, если для $c = a$ или $c = b$ вместо α_c, β_c брать $[a, \beta_a), (\alpha_b, b]$

$$[a, b] \text{ — компактно} \implies [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$$

Не умаляя общности ни один интервал не накрывается целиком остальными $\Leftrightarrow \forall (\alpha_c, \beta_c) \exists d_c$, принадлежащая “только этому” интервалу.

Точка t_k выбирается на d_k, d_{k+1} и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$.

$$\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$$

□

Рис. 6: Выбор точек t_k

2.46 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

- V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$ — V -похожие, кусочно гладкие
- $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда $\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

Доказательство. Рассмотрим общую V -гусеницу. Пусть f_k — потенциал V в шаре B_k , $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Сдвинем потенциалы прибавлением константы, так что $f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1 \dots n$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_i V_i dx_i &= \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \\ &= \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) \\ &= f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \end{aligned} \quad (15)$$

(15): По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Для $\tilde{\gamma}$ воспользуемся свойством: $f_k \Big|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1} \Big|_{B_k \cap B_{k+1}}$ и тогда аналогично

$$\int_{\tilde{\gamma}} \sum v_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_1(\tilde{\gamma}(a))$$

□

2.47 Лемма о похожести путей, близких к данному

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ — непр.
- V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда $\exists \delta > 0$: если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \rightarrow O$ таковы, что:

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$$

Тогда $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ V -похожи.

Доказательство. Берём V -гусеницу для γ .

δ_k -окрестность множества $A := \{x : \exists a \in A \ \rho(a, x) < \delta\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta)$



Рис. 7: δ_k -окрестность множества $\gamma[t_{k-1}, t_k]$

$$\forall k \ \exists \delta_k > 0 : (\delta_k\text{-окрестность } \gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$$

Это следует из компактности:

Пусть $B_k = B(w, r)$, функция $t \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ непрерывна \Rightarrow достигается \max , $\rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r$

$$\delta_k := \frac{r-r_0}{2}, \delta := \min(\delta_1 \dots \delta_k)$$

При таком δ все три пути лежат в одной гусенице. □

2.48 Равенство интегралов по гомотопным путям

- V — локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- γ_0, γ_1 — связанно гомотопные пути

Тогда $\int_{\gamma_0} \sum V_i dx_i = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

Доказательство. Пусть Γ — гомотопия γ_0 и γ_1 .

$$\gamma_u(t) := \Gamma(t, u), t \in [a, b], u \in [0, 1]$$

$$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$$

Мы хотим доказать, что $\Phi(u) = \text{const}$. Докажем более простой факт, что Φ — локально постоянна, тогда в силу компактности и связности отрезка Φ будет постоянна.

Определение локально постоянной функции:

$$\forall u_0 \in [0, 1] \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$$

Γ — непр. на $[a, b] \times [0, 1]$ — комп. $\Rightarrow \Gamma$ равномерно непрерывна:

$$\forall \delta > 0 \exists \sigma > 0 \forall t, t' : |t - t'| < \sigma \forall u, u' : |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$$

Возьмём δ из леммы о похожести близких путей (2.47) для пути γ_{u_0} .

Если $|u - u_0| < \sigma$ $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$ при $t \in [a, b]$, т.е. γ_u и γ_{u_0} похожи по лемме о похожести близких путей. Хочется сказать, что интегралы по γ_u и γ_{u_0} таким образом равны, однако это не обосновано, для этого необходимо, чтобы пути были кусочно-гладкими.

Построим кусочно-гладкий путь $\tilde{\gamma}_{u_0}$, $\frac{\delta}{4}$ -близкий к γ_{u_0} , т.е.

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}(t)| < \frac{\delta}{4}$$

и кусочно-гладкий путь $\tilde{\gamma}_u$, $\frac{\delta}{4}$ -близкий к γ_u . Тогда $\tilde{\gamma}_{u_0}$ и $\tilde{\gamma}_u$ - δ -близкие к $\gamma_{u_0} \Rightarrow$ они V -похожи \Rightarrow

$$\int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$$

Таким образом, $\Phi(u) = \Phi(u_0)$ при $|u - u_0| < \delta$, т.е. Φ — локально постоянна. \square

2.49 ! Теорема Пуанкаре для односвязной области

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область
- V — локально потенциальное векторное поле в O

Тогда V — потенциальное в O

Доказательство. V — локально потенциально, $\triangleleft \gamma_0$ — кусочно-гладкая петля, тогда γ_0 гомотопна постоянному пути $\gamma_1 \Rightarrow$

$$\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0$$

Тогда по теореме о характеристизации потенциальных векторных полей в терминах интегралов V потенциально. \square

2.50 Теорема о веревочке

- $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow O, t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля нестягиваема.

Неформальная формулировка: пусть даны две плоскости, соединенные гвоздём, между плоскостями есть зазор. На гвоздь надета веревочка в виде петли. Можно ли снять веревочку с гвоздя?



Рис. 8: Веребочка (жирным), надетая на “гвоздь” (цилиндр)

Доказательство. $V(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ — векторное поле в \mathbb{R}^2

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Таким образом, $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$ в области O . Тогда по лемме Пуанкаре V — локально потенциально.

При этом

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum V_i dx_i &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

Таким образом, если бы существовал постоянный путь $\tilde{\gamma}$, которому γ гомотопен, то $\int_{\tilde{\gamma}} = \int_{\gamma} = 0$, но это не так. \square

2.51 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — объем. Тогда μ имеет свойства:

1. Усиленная монотонность

$$\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}_{\text{дизъюнкты}} \in \mathcal{P} \quad \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A \quad \sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A$$

2. Конечная полуаддитивность

$$\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \mu A \leq \sum_{i=1}^n \mu A_i$$

3. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ пусть ещё известно $A \setminus B \in \mathcal{P}$, $\mu(B)$ — конечно. Тогда $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$

Доказательство.

1. Усиление аксиомы 3 из определения полукольца:

$$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigsqcup_{l=1}^s B_l$$

Это было доказано ранее, т.к. по теореме $A = (\bigsqcup A_i) \cup (\bigsqcup B_l)$ — дизъюнктное объединение конечного числа множеств.

$$\mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_l \geq \sum \mu A_i$$

2.

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \quad A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k$$

Сделаем это множество дизъюнктым.

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) \quad A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k$$

Но эти C_k вообще говоря $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) = \bigsqcup_j D_{k_j} \in \mathcal{P}$$

$$\text{Тогда } A = \bigsqcup_{k,j} D_{k_j} \quad \mu A = \sum \mu D_{k_j}$$

$$\text{При этом } \forall k \quad \sum_j \mu D_{k_j} = \mu C_k \stackrel{\text{монот.}\mu}{\leq} \mu A_k$$

$$\text{Итого } \mu A = \sum_k \sum_j \mu D_{k_j} = \sum_k \mu C_k \leq \sum_k \mu A_k$$

3. (a) $B \subset A \quad A = B \cup (A \setminus B) \quad \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B)$
 (b) $B \not\subset A \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \quad \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu(A \cap B) \geq \mu A - \mu B$

□

Примечание. 1. В пунктах 1 и 2 не предполагается, что $\bigcup A_i \in \mathcal{P}$

2. В пункте 3 если \mathcal{P} — алгебра, условие $A \setminus B \in \mathcal{P}$ можно убрать.

2.52 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности

$\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — объем.

Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е. μ — счётно-аддитивна.
2. μ — счётно-полуаддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ как в предыдущей теореме, пункт 2, но вместо конечного объединения по k используется счётное.

$$2 \Rightarrow 1 \quad A = \bigsqcup A_i \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum \mu A_i$$

$$\forall N \quad A \supset \bigsqcup_{i=1}^N A_i \quad \mu A \geq \sum_{i=1}^N \mu A_i$$

$$A \subset \bigcup A_i \text{ (на самом деле } A = \bigsqcup A_i) \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$$

$$\Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i$$

□

2.53 Теорема о непрерывности сверху

- \mathfrak{A} — алгебра
- $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ — объем.
- μ — конечный объем.

Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е. μ счётно-аддитивная.
2. μ — непрерывна сверху:

$$A, A_1, A_2 \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \supset A_2 \supset \dots, A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu A_i$$

Доказательство.

$$1 \Rightarrow 2 \quad B_k = A_k \setminus A_{k+1}, A_1 = \bigsqcup B_k \cup A$$

$$\mu A_1 = \sum \mu B_k + \mu A$$

$$A_n = \bigsqcup_{k \geq n} B_k \cup A \quad \mu A_n = \sum_{k \geq n} \mu B_k + \mu A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu A$$

2 \Rightarrow 1 Дана непрерывность сверху. Воспользуемся ей для случая $A = \emptyset$

Проверим, что $C = \bigsqcup C_i \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum \mu C_i$.

Пусть $A_k := \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} C_i$. Тогда $A_k \in \mathfrak{A}$, т.к. $A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^k C_i$ — конечное объединение.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad \bigcap A_k = \emptyset \Rightarrow \mu A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu \emptyset = 0$$

$$C = \bigsqcup_{i=1}^k C_i \sqcup A_k \quad \mu C = \sum_{i=1}^k \mu C_i + \mu A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sum \mu C_i$$

□

2.54 Счетная аддитивность классического объема

- $\mu : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — классический объем в \mathbb{R}^m

Тогда μ это σ -конечная мера

Доказательство. σ -конечность очевидна, т.к. можно дизъюнктно разбить \mathbb{R}^m на ячейки.

Докажем счётную аддитивность μ .

Для этого достаточно проверить счётную полуаддитивность:

$$P = [a, b), P_n = [a_n, b_n) \quad P \subset \bigcup P_n \quad \mu P \stackrel{?}{\leq} \sum \mu P_n$$

Если $P = \emptyset$, то утверждение тривиально. Пусть P непустое.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Чуть уменьшим координаты вектора b , так что $[a, b'] \subset [a, b)$ и $\mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$. Последняя формула некорректна, т.к. $P \setminus [a, b')$ не обязательно ячейка. Но оно представимо в виде $\bigsqcup D_j$, поэтому под $\mu(P \setminus [a, b'))$ подразумевается $\sum \mu D_j$. Также можно было записать $\mu P - \mu[a, b') < \varepsilon$ вместо этих трюков.

Уменьшим слегка координаты векторов a_n , так что $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n)$, $\mu([a'_n, b_n) \setminus [a_n, b_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Эта запись также некорректна, поэтому напомним $\mu[a'_n, b_n) - \mu[a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$$\underbrace{[a, b']}_{\text{комп.}} \subset \bigcup (a'_n, b_n) \Rightarrow \exists \text{ конечное подпокрытие: } [a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (a'_n, b_n) \Rightarrow [a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N [a'_n, b_n)$$

$$\text{Тогда } \mu[a, b') \leq \sum_{n=1}^N \mu[a'_n, b_n)$$

$$\begin{aligned} \mu P - \varepsilon &\leq \sum_{n=1}^N \left(\mu P_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ \mu P - \varepsilon &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu P_n + \varepsilon \end{aligned}$$

□

2.55 Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

1. $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое. Тогда $O = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — ячейки с рациональными координатами. Можно считать, что ячейки кубические.
2. Можно считать, что $\overline{Q_i} \subset O$

3. E — измеримо, $\lambda E = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad E \subset \bigcup Q_i : Q_i$ — кубические ячейки и $\sum \lambda Q_i < \varepsilon$

Доказательство.

- (a, b) $\forall x \in O$ пусть $Q(x)$ — какая угодно ячейка с рациональными координатами, $Q(x) \subset O$ (можно потребовать $\overline{Q(x)} \subset O$, Q — куб, координаты двоично-рациональны для второго пункта).

$O = \bigcup_{x \in O} Q(x)$ — здесь не более чем счётное множество различных ячеек.

$\Rightarrow O = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q(x_i)$. Сделаем ячейки дизъюнктными: $Q_1 := Q(x_1)$, $Q(x_2) \setminus Q(x_1) = \bigcup D_j$. Переобозначим D_j как $Q_2, Q_3 \dots Q_k$. Аналогично для всех $Q(x_i)$.

Можно считать, что координаты всех ячеек двоично рациональны.

Ячейки можно подразбить, чтобы они стали кубическими: пусть 2^l — самый крупный знаменатель. Тогда $[a_i, b_i]$ — конечное объединение кубических ячеек со стороной $\frac{1}{2^l}$

- (c) Следует из пункта 5 теоремы о продолжении Лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ ячейки } P_k \quad E \subset \bigcup P_k \quad 0 = \lambda E \leq \sum \lambda P_k \leq \varepsilon$$

$\exists \tilde{P}_k$ — двоично-рациональные ячейки:

$$P_k \subset \tilde{P}_k \quad 0 = \lambda E \leq \sum \lambda_k \tilde{P}_k \leq 2\varepsilon$$

Можно разбить \tilde{P}_k на конечное число кубов.

□

2.56 Пример неизмеримого по Лебегу множества

Зададим отношение \sim на \mathbb{R} : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = A$ — из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Можно считать, что $A \subset [0, 1]$

Очевидно, что $\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R}$

$$[0, 1] \stackrel{(1)}{\subset} \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + q) \stackrel{(2)}{\subset} [-1, 2]$$

Измеримо ли A ? Предположим, что да.

Очевидно $\forall q \quad \lambda A = \lambda(A + q)$ по пункту 5 теоремы о продолжении меры.

Из (1):

$$\lambda[0, 1] = 1 \leq \sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \lambda(A) \Rightarrow \lambda A > 0$$

Из (2):

$$\lambda\left(\bigcup_q (A + q)\right) = \sum_q \lambda A \leq \lambda[-1, 2] = 3 \Rightarrow \lambda A = 0$$

Противоречие $\Rightarrow A$ неизмеримо.

2.57 ! Регулярность меры Лебега

$\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G - \text{откр.}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F - \text{замкн.}}} \lambda(F) \stackrel{(*)}{=} \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K - \text{комп.}}} \lambda(K)$$

Доказательство. (*) следует из σ -конечности $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q(0, n)$, где $Q(a, R) = \times_{i=1}^n [a_i - R, a_i + R]$ — куб с центром в a и ребром R .

$\lambda(A \cap Q(0, n)) \rightarrow \lambda A$ по непрерывности снизу, т.к. $A \cap Q(0, n)$ хорошо аппроксимируется замкнутым множеством. \square

2.58 Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

- $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непр.
- $\forall E \in \mathfrak{M}^m : \lambda E = 0$ выполняется $\lambda T E = 0$

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad T A \in \mathfrak{M}^n$

Доказательство.

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N}$$

, где K_j — компакт, $\lambda \mathcal{N} = 0$

$$T A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} T K_j \cup T \mathcal{N}$$

$T K_j$ компакт как образ компакта при непрерывном отображении. $\Rightarrow T A$ измеримо. \square

2.59 Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

- $O \subset \mathbb{R}^m$ открыто
- $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $\Phi \in C^1(O)$

Тогда $\forall A \in O : A \in \mathfrak{M}^m \Rightarrow \Phi(A) \in \mathfrak{M}^n$, т.е. образ измеримого множества измерим.

Доказательство. Достаточно проверить свойства $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$, т.к. если оно выполняется, то работает предыдущая лемма 2.58

$$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шары } B_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \lambda B_i < \varepsilon$$

\Rightarrow из теоремы о Лебеговском продолжении меры.

\Leftarrow по полноте меры Лебега.

1. $E \subset P \subset \overline{P} \subset O, \lambda E = 0$

$$L := \max_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\|$$

Тогда

$$\forall x, y \in P \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$$

— неравенство Лагранжа.

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr)$$

$$B_i := B(x_i, r_i), y_i := \Phi(x_i)$$

$$E \subset \bigcup B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr_i) \subset \bigcup Q(y_i, Lr_i)$$

$$\sum \lambda \Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = (2L)^m \sum r_i^m$$

Было $\sum (2r_i)^m < \varepsilon (\sqrt{m})^m$, стало $\sum \lambda \Phi(B_i) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon (\sqrt{m}L)^m$

2. Рассмотрим произвольный случай, то есть $E \subset O$

$$O = \bigsqcup Q_i, \text{ где } Q_i \text{ — кубические ячейки, } Q_i \subset \overline{Q}_i \subset O$$

$$E = \bigsqcup (E \cap Q_i), \lambda(E \cap Q_i) = 0. \text{ Тогда по пункту 1 } \lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$$

$$\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$$

□

Следствие 1.1. λ — инвариантно относительно сдвигов в \mathbb{R}^m (и \mathfrak{M}^m тоже инвариантно), т.е. $\forall a \in \mathbb{R}^m$:

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad A + a \in \mathfrak{M}^m \quad (16)$$

$$\text{и } \lambda A = \lambda(A + a) \quad (17)$$

Доказательство.

$$\Phi : x \mapsto x + a, \Phi \in C^1(\mathbb{R}^m)$$

Отсюда следует (16).

(17) следует из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

$$A \subset \bigcup P_k \Leftrightarrow A + a \subset \bigcup (P_k + a)$$

Для ячеек $\lambda P_k = \lambda(P_k + a)$

Таким образом:

$$\lambda A = \inf \left(\sum \lambda P_k \right) = \inf \left(\sum \lambda(P_k + a) \right) = \lambda(A + a)$$

□

2.60 Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

- $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ортогонально, т.е. сохраняет длины векторов.

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m$:

1. $TA \in \mathfrak{M}^m$
2. $\lambda(TA) = \lambda A$

Доказательство.

1. $T \in C^1$, поэтому измеримость сохраняется.
2. $\mu A := \lambda(TA)$

μ — мера на \mathfrak{M}^m по лемме о заготовке пространства, т.к. T биективно, при этом μ инвариантно относительно сдвигов:

$$\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \lambda(TA) = \mu A$$

A ограничено $\Rightarrow TA$ ограничено $\Rightarrow \mu A < +\infty$

По теореме 1.41 $\lambda(TA) = k \cdot \lambda(A)$. Какое у нас k ?

Возьмём шар B . TB — шар того же радиуса, т.е. TB — сдвинутый B , т.е. $TB = B + x_0$.

$$\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$$

