Теория вероятности

Михайлов Максим

6 марта 2021 г.

Оглавление

Лекция 1

13 февраля

1 События

1.1 Статистическое определение вероятности

Определение. Пусть проводится n реальных экспериментов, событие A произошло в n_A экспериментах. Отношение $\dfrac{n_A}{n}$ называется **частотой события** A. Эксперименты показывают, что при увеличении числа n эта частота "стабилизируется" около некоторого числа, под которым понимаем **статистическую вероятность**.

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}$$

Очевидно это определение не формально, поэтому мы им пользоваться не будем.

1.2 Пространство элементарных исходов. Случайные события.

Определение.

- **Пространством элементарных исходов** Ω называется множество, содержащее все возможные результаты данного эксперимента, из которых при испытании происходит ровно один.
- Элементы данного множества называются **элементарными исходами** и обозначаются $w \in \Omega$.
- **Случайными событиями** называются подмножества $A \subset \Omega$.
- Событие A **наступило**, если в ходе эксперимента произошёл один из элементарных исходов, входящих в A.
- Такие исходы называются **благоприятными** к A.

Пример.

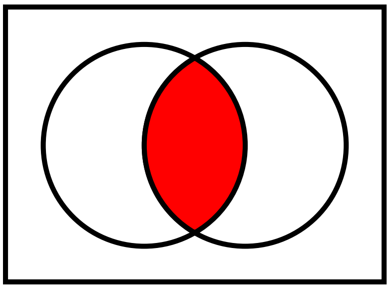
1. Бросают монетку. $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$ *(герб, решка).*
2. Бросают кубик. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A — выпало четное число очков. Тогда $A = \{2, 4, 6\}$.
3. Монета бросается дважды:
   (a) Учитываем порядок: $\Omega = \{$ГГ, РР, ГР, РГ$\}$
   (b) Не учитываем порядок: $\Omega = \{$ГГ, РР, ГР$\}$
4. Бросается дважды кубик, порядок учитывается. A — разность очков делится на 3, т.е. $A = \{(1, 4), (4, 1), (3, 3), (5, 2), (2, 5), (3, 6), (6, 3), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
5. Монета бросается до выпадения герба. $\Omega = \{$Г, РГ, РРГ, ...$\}$ — счётное число исходов.
6. Монета бросается на плоскость. $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ — несчётное число исходов.

1.3 Операции над событиями

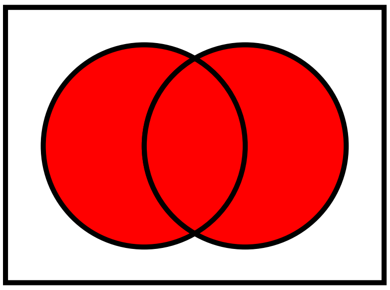
Ω — универсальное *(достоверное)* событие, т.к. содержит все элементарные исходы.

$\varnothing$ — невозможное событие.

Определение. $A + B$ это $A \cup B$



Определение. $A \cdot B$ это $A \cap B$



Определение. **Противоположным** к A называется событие $\overline{A}$, соответствующее тому, что A не произошло, т.е. $\Omega \setminus A$

Определение. Дополнение $A \setminus B$ это $A \cdot \overline{B}$

Определение. События A и B называются **несовместными**, если $A \cdot B = \varnothing$

Определение. Событие A влечет событие B, если $A \subset B$.

2 Вероятность

Определение. $0 \le P(A) \le 1$ — вероятность наступления события A.

2.1 Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит конечное число исходов, причем их можно считать равновозможными. Тогда применимо классическое определение вероятности.

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{m}{n}$, где n — число всех возможных элементарных исходов, m — число элементарных исходов, благоприятных A.

В частности, если $|\Omega| = n$, а A — элементарный исход, то $P(A) = \frac{1}{n}$.

Свойства.

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(\Omega) = 1$
4. ???

Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Доказательство. $|A| := m_1, |B| := m_2, |A \cup B| = m_1 + m_2$

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

□

Пример. Найти вероятность, что при бросании кости выпадет чётное число очков.

$$n = 6, m = 3, \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

Пример. В ящике лежат 3 белых и 2 чёрных шара. Вынули 3 шара. Найти вероятность того, что из них две белых и один чёрный.

$$n = \binom{5}{3} = 10$$
$$m = \binom{3}{2}\binom{2}{1} = 12$$
$$P(A) = \frac{6}{10}$$

Однако, это определение редко применимо.

2.2 Геометрическое определение вероятности

Определение.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченная область.
- μ — конечная мера множества Ω, например мера Лебега

Пусть выбирают точку наугад, т.е. вероятность попадания точки в область A зависит от меры A, но не от её положения.

Тогда $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

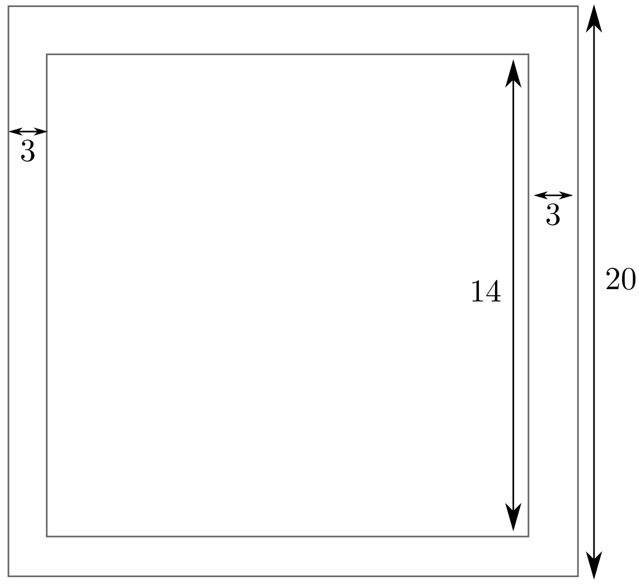
Примечание. По этому определению мера точки равна 0 и вероятность попадания в конкретную точку тоже равна 0.

Пример. Монета диаметром 6 сантиметров бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 сантиметров. Найти вероятность того, что монета целиком окажется на одной плитке.

Без ущерба для общности можно рассматривать, что монета бросается на одну плитку и положение монеты определяется положением её центра.

Чтобы монета лежала полностью на одной плитке, необходимо, чтобы её центр лежал на расстоянии ≥ 3 сантиметра от каждой стороны:

$$S(\Omega) = 20^2 = 400$$
$$S(A) = 14^2 = 196$$
$$P(A) = \frac{196}{400} = 0.49$$



Пример. ???

$$A : X \leq l \sin \varphi$$
$$S(\Omega) = \pi l$$
$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = -l(\cos \pi - \cos 0) = 2l$$
$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2}{\pi}$$

Это определение кажется хорошим — оно согласовано с классическим. Но и это определение редко применимо на практике, т.к. обычно вероятность зависит от положения в пространстве или множество исходов несчётно.

Лекция 2

20 февраля

2.3 Аксиоматическое определение вероятности

Пусть Ω — пространство элементарных исходов.

Определение. Систему $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называют σ-алгеброй событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3. $A_1 \dots A_n \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Примечание. Из 2 и 3 следует 1.

Свойства.

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$, т.к. $\overline{\Omega} = \varnothing$
2. $A_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{F}$

   Доказательство. $A_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A}_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup \overline{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup \overline{A}_i} = \bigcap A_i \in \mathcal{F}$ $\square$
3. $A, B \in F \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

???

Определение. Пусть Ω — множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра над ним.

Вероятностью на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P(A) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $P(A) \geq 0$ — свойство неотрицательности
2. Если события $A_1 \dots A_n \dots$ — равновероятные, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, то $P(\bigcap A) = \sum P(A_i)$ — свойство счётной аддитивности
3. $P(\Omega) = 1$ — свойство нормированности

Примечание. Вероятность есть нормированная мера.

Определение. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством.

Свойства.

1. $P(\varnothing) = 0$

   Доказательство. $\underbrace{P(\varnothing + \Omega)}_{1} = P(\varnothing) + \underbrace{P(\Omega)}_{1} \Rightarrow P(\varnothing) = 0$ □

2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

   Доказательство. A и $\overline{A}$ — несовместны, $A + \overline{A} = \Omega$.

   $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$ □

3. $0 \leq P(A) \leq 1$

   Доказательство. (a) $P(A) \geq 0$

   (b) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$

   □

2.4 Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\bigcap A_i = \varnothing$. Тогда $P(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

???

Теорема 1. Эта аксиома следует из второй аксиомы.

Доказательство. $A_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i \overline{A}_{i+1} \cup \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$

???

Т.к. по условию $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = \varnothing$ и $\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$, то $P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i) = 0$.

Таким образом, $P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i \overline{A}_{i+1})$ — остаточный член сходящейся последовательности $\Rightarrow P(A_n) \to 0$ □

Примечание. Аксиома счётной аддитивности следует из аксиомы непрерывности и свойства конечной аддитивности.

2.5 Формула сложения

Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Теорема 2. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Доказательство.

$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$$

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) \\ &= (P(A\overline{B}) + P(AB)) + (P(\overline{A}B) + P(AB)) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

□

Аналогично можно доказать формулу включения-исключения:

$$P\left(\sum A_i\right) = \sum P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n)$$

Пример. Опущен.

3 Независимые события

Определение. События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Доказательство. Если A и B независимы, то A и $\overline{B}$ — независимы. □

Доказательство.

$$P(A) = P(A(B + \overline{B})) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(AB)$$

Таким образом, A и $\overline{B}$ — независимы. □

Определение. События $A_1 \dots A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора $1 \le i_1 \dots i_n \le n$ $P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_n})$

Пример (Бернштейн). Три грани правильного тетраедра выкрашены в красный, синий, зеленый цвета, а четвертая грань — во все эти три цвета.

Бросаем тетраедр и смотрим на грань, на которую он упал. События:

- A — красный цвет
- B — синий цвет
- C — зеленый цвет

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

Таким образом, все события попарно независимы.

$$P(AB) = \frac{1}{8}$$

Примечание. Если в условии есть “хотя бы”, т.е. требуется найти вероятность суммы совместных независимых событий, то применима формула обратной вероятности.

Пример. Найти вероятность того, что при четырёх бросаниях кости хотя бы один раз выпадет шестерка.

A_i — при i-том броске хотя бы один раз выпала шестерка.

$$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = P(\overline{4}) = \frac{5}{6}$$

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \dots \overline{A}_4$$

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка 0.6, второго — 0.8. Найти вероятность того, что попадет ровно один стрелок.

A_1 — первый стрелок попал, A_2 — второй стрелок попал, A — ровно один попал.

$$P(A_1) = 0.8, P(\overline{A}_1) = 0.2, P(A_2) = 0.6, P(\overline{A}_2) = 0.4$$

$$A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$$

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.44$$

Лекция 3

27 февраля

4 Условная вероятность

Обозначение. $P(A|B)$ — вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло.

Пример. Кубик подбрасывается один раз. Известно, что выпало больше 3 очков. Какова вероятность, что выпало чётное число очков?

Пусть A — чётное число очков, B — больше 3 очков.

$$n = 3 \quad (4, 5, 6) \quad m = 2 \quad (4, 6)$$
$$P(A|B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Определение. **Условной вероятностью** события A при условии, что имело место событие B, называется величина $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Теорема 3. $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$

Доказательство. По индукии.

База $n = 2$ — по определению полной вероятности.

Переход

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1 \dots A_{n-1})P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$$

□

Определение. События A и B независимы, если $P(A|B) = P(A)$, что равносильно $P(AB) = P(A)P(B)$ — прошлому определению.

Доказательство.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

□

4.1 Полная группа событий

Определение. События $H_1 \dots H_n \dots$ образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и содержат все элементарные исходы.

Теорема 4. Пусть $H_1 \dots H_n$ — полная группа событий. Тогда $P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\Omega A) \\ &= P((H_1 + \dots H_n + \dots)A) \\ &= P\left(\sum_{k=1}^{+\infty} H_k A\right) \\ &\overset{(3.1)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i) \end{aligned}$$

3.1: По лемме о счётной аддитивности и т.к. H_iA и H_jA несовместны. □

4.2 Формула Байеса

Эта формула также называется формулой проверки гипотезы.

Теорема 5. Пусть $H_1 \dots H_n$ — полная группа событий и известно, что A произошло. Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{+\infty} P(H_k)P(A|H_k)}$$

Доказательство.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{+\infty} P(H_k)P(A|H_k)}$$

□