Пусть мы хотим перейти в полярные координаты $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$ в двойном интеграле $\iint_\Omega f dx dy$. Как расставлять пределы интегрирования? Пусть первая переменная будет r. Тогда:

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{r_0(\varphi)}^{r_1(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r dr$$

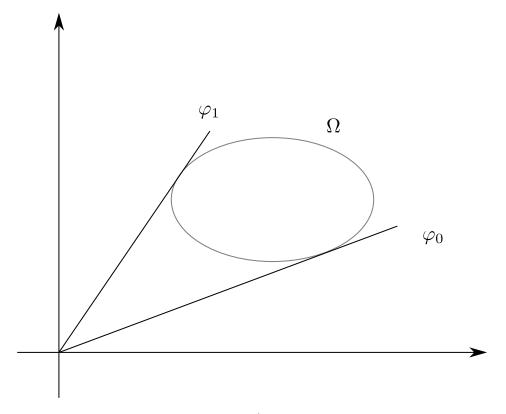


Рис. 1: Выбор φ_0 , φ_1

Для первой переменной φ :

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_{r_0}^{r_1} dr \int_{\varphi_0(r)}^{\varphi_1(r)} f r d\varphi$$

Упражнение. Пусть Ω — единичный круг

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{1} f r dr$$

Упражнение. Пусть Ω — треугольник с вершинами (0,0),(1,0),(1,1)

$$\iint_{\Omega}fdxdy=\int_{0}^{\pi/4}d\varphi\int_{0}^{1/\cos\varphi}drfr=\int_{0}^{1}dr\int_{0}^{\pi/4}fd\varphi+\int_{1}^{\sqrt{2}}dr\int_{\arccos\frac{1}{2}}^{\pi/4}fd\varphi$$

M3137y2019 25.2.2021

 ${\it Упражнение}. \ \, {\it Пусть} \ \, \Omega - {\it треугольник} \ \, {\it c} \ \, {\it вершинами} \ \, (1,0), (0,1), (1,1)$

$$\begin{split} \iint_{\Omega} f dx dy &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^{\frac{1}{\cos \varphi}} f r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^{\frac{1}{\sin \varphi}} f r dr \\ \iint_{\Omega} f dx dy &= \int_{\sqrt{2}/2}^{1} dr \int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}r} - \frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}r}} d\varphi f r + \int_{1}^{\sqrt{2}} dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} d\varphi f r \end{split}$$

Упражнение.

$$x^2 + y^2 \le ax$$

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{a\cos\varphi} fr dr = \int_{0}^{a} dr \int_{-\arccos\frac{a}{r}}^{\arccos\frac{a}{r}}$$

Упражнение.

$$(x^{2} + y^{2})^{2} = a^{2}(x^{2} - y^{2})$$

$$r^{2} = a^{2}\cos 2\varphi$$

$$\int_{0}^{a} dr \int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^{2}}{a^{2}}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^{2}}{a^{2}}} frd\varphi$$

Упражнение (3957).

$$\int_{a}^{b} dx \int_{cx}^{\beta x} f(x, y) dy$$

Замена $u=x, v=\frac{y}{x}$

$$\int_{a}^{b} du \int_{\alpha}^{\beta} dv f J$$