

В первом семестре была задача нахождения максимального по площади вписанного  $n$ -угольника. Мы выяснили, что если максимум существует, то он достигается правильным  $n$ -угольником (*суждение про сдвиг точки*). Кроме того, мы доказали, что максимум существует, сделаем это снова, но другим методом.

*Доказательство.* Пусть внутренние углы многоугольника  $\varphi_1 \dots \varphi_n$ , тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2(\sin \varphi_1 + \dots + \sin \varphi_n) \\ &= \frac{1}{2}r^2(\sin \varphi_1 + \dots + \sin \varphi_{n-1} - \sin(\varphi_1 - \dots - \varphi_{n-1})) \end{aligned}$$

Очевидно  $\forall i \ 0 < \varphi_1 < \pi \quad \pi < \varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1} < 2\pi$ .

Найдём максимум путём дифференцирования. Это требует существования максимума внутри области определения. Если все неравенства сделать нестрогими, то область определения становится замкнутой, очевидно ограниченной  $\Rightarrow \exists \max$  по теореме Вейерштрасса. Кроме того, максимум не лежит на границе области определения из очевидных геометрических соображений.

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_i} = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi_i = \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1})$$

$$\cos \varphi_i - \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}) = 0$$

$$2 \sin \frac{n\varphi}{2} \sin \frac{\pi - 2n\varphi}{2} = 0$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

□

## Диффеоморфизмы

**Определение.** Область — открытое связное множество.

**Определение.**  $F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — **диффеоморфизм**, если:

- $F$  обратимо
- $F$  дифференцируемо
- $F^{-1}$  дифференцируемо

*Примечание.*  $Id = F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F$

$$E = F'(F^{-1})' \Rightarrow \forall x \quad \det F'(x) \neq 0$$

**Лемма 1** (о почти локальной инъективности).

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $F$  дифф. в  $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists C > 0, \delta > 0 \quad \forall h \in B(0, \delta) \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

*Доказательство.* Если  $F$  — линейное отображение:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \|F'(x_0)\| \cdot |h| \geq \frac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|} |h|$$

В общем случае:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б.м.}}| |h| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

□

**Теорема 1** (о сохранении области).

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $F$  дифф.
- $\forall x \in O \quad \det F'(x) \neq 0$

Тогда  $F(O)$  — открыто.

*Примечание.*  $O$  — связно,  $F$  — непр.  $\Rightarrow F(O)$  связно.

*Доказательство.*  $x_0 \in O \Rightarrow y_0 = F(x_0) \in F(O)$  — внутренняя? в  $F(O)$

По лемме  $\exists c, \delta : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

В частности  $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$  при  $|h| = \delta$

$$r := \frac{1}{2}\rho(y_0, F(S(x_0, \delta)))$$

При этом  $\rho$  между множествами определено следующим образом:

$$\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$$



Т.к.  $S$  — компакт,  $\exists \min$ .

Если  $y \in B(y_0, r)$ , то  $\rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$ :

Проверим, что  $B(y_0, r) \subset F(O)$ , т.е.  $\forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) F(x) = y$

Рассмотрим функцию  $g(x) = |F(x) - y|^2$  при  $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$ .

Мы хотим показать, что  $\exists x : g(x) = 0$ . Найдем  $\min g$ .

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r^2$$

При  $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2 \Rightarrow \min g$  не лежит на границе шара  $\Rightarrow$  он лежит внутри шара.

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2$$

$$\forall i \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

$$2(F_1(x) - y)F'_{1x_i}(x) + \dots + 2(F_m(x) - y)F'_{mx_i}(x) = 0$$

$$F'_x 2(F(x) - y) = 0$$

$$\forall x \quad \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$$

□

Следствие 1.1.

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F \in C^1(O)$
- $l < m$
- $\operatorname{rg} F'(x) = l \quad \forall x \in O$

Тогда  $F(O)$  открыто.

*Доказательство.* Зафиксируем точку  $x_0$ . Пусть ранг реализуется на столбцах  $1 \dots l$ , т.е. определитель матрицы из столбцов  $1 \dots l \neq 0$ , т.е.:

$$\det \underbrace{\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots l}}_{A(x_0)}(x_0) \neq 0$$

И для близких точек тоже  $\neq 0$

$$\tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}'(x) = \left[ \begin{array}{c|c} F'(x) \\ \hline 0 & E_{m-l} \end{array} \right]$$

$$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \det E_{m-l} \neq 0 \quad \text{в окрестности } x_0$$

Тогда  $\tilde{F}|_{U(x_0)}$  удовлетворяет теореме  $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^m$

$$F(U(x_0)) = \tilde{F}(U(x_0)) \cap \mathbb{R}^l$$

□

**Теорема 2** (о гладкости обратного отображения).

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $O \subset \mathbb{R}^m$
- $r = 1, 2, \dots + \infty$
- $T$  обратимо
- $\det T'(x) \neq 0 \quad \forall x \in O$

Тогда  $T^{-1} \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$  и  $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$ , где  $y_0 = T(x_0)$

*Доказательство.* Докажем по индукции по  $r$ .

**База:**  $r = 1$

$S := T^{-1}$  — непрерывно по теореме о сохранении области. Почему? По теореме о топологическом определении непрерывности:

$$f : X \rightarrow Y \text{ непр.} \Leftrightarrow \forall B - \text{откр.} \subset Y \quad f^{-1}(B) - \text{открыто.}$$

$T'(x_0) = A$  — невырожденный оператор.

По лемме о почти локальной инъективности

$$\exists c, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) \quad |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \quad (*)$$

По определению дифференцируемости  $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)|x - x_0|$

$$T(x) = y \quad T(x_0) = y_0 \quad x = S(y) \quad x_0 = S(y_0)$$

В терминах  $y$  и  $S$ :

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\xrightarrow[y \rightarrow 0]{?} 0 \text{ быстрее, чем } |y - y_0|}$$

Если действительно  $\rightarrow 0$ , то  $S$  дифференцируемо по определению.

Пусть  $y$  близко к  $y_0$ , тогда  $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$

$$\begin{aligned} |A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)| &= |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1}\omega(S(y))| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{C}|y - y_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \end{aligned}$$

Мы доказали, что  $S$  дифференцируемо, теперь необходимо доказать, что  $S'$  непрерывно.

$$S'(y_0) = A^{-1}$$

“Алгоритм” получения обратного оператора:

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1}$$

Здесь все шаги непрерывны, поэтому  $S'$  непрерывно.

**Переход**

$$\begin{aligned} T \in C^{r+1} \quad T' : O \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad T' \in C^r \quad ? S \in C^{r+1} \\ y \stackrel{C^r}{\mapsto} \text{по инд.} S(y) \stackrel{C^r}{\mapsto} T'(x) \stackrel{C^\infty}{\mapsto} (S^{-1})' \end{aligned}$$

□

**Теорема 3** (о локальной обратимости).

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $x_0 \in O$
- $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists U(x_0) : T|_U$  — диффеоморфизм, т.е.  $\exists T^{-1}$

Формулировка в терминах системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть  $(x^0, y^0)$  — решение этой системы,  $F = (f_1 \dots f_m)$

$\det F'(x^0) \neq 0$ . Тогда  $\exists U(y^0) : \forall y \in U(y^0)$  система имеет решение,  $C^r$  гладко зависящее от  $y$ .

**Теорема 4 (о неявном отображении).**

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $F \in C^r$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$
- $\det \left( \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{i,j=1 \dots n} \neq 0$

Будем считать  $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ , где  $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$  и первые  $m$  координат  $(x, y)$  — координаты  $x$ , остальные — координаты  $y$ .

Тогда  $\exists P(a) \subset \mathbb{R}^m, Q(b) \subset \mathbb{R}^n$  — окрестности,  $\exists \varphi : P(a) \rightarrow Q(b) \in C^r$ , такие что:

$$\forall x \in P(a) \quad F(x, \varphi(x)) = 0$$