Интеграл второго рода векторного поля по пути $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3,$ $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ обозначается следующим образом:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

и вычисляется путём подстановки:

$$\int_{a}^{b} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

Длина пути есть:

$$\int_{a}^{b} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

Тогда интеграл первого рода записывается следующим образом:

$$\int f dS := \int_{a}^{b} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'^{2} + y'^{2} + z'^{2}} dt$$

Можно заметить, что интеграл второго рода меняет знак от направления обхода пути.

Упражнение (4221). Дан треугольник OAB с точками (0,0),(0,1),(1,0). Вычислить интеграл $\int_{\Lambda} (x+y) dS$.

$$\int_{\Delta} (x+y)dS = \int_{QA} + \int_{AB} + \int_{QB}$$

Здесь не важно направление.

Параметризация OA: x(t) = t, y(t) = 0. Тогда $\sqrt{x'^2 + y'^2} = 1$

$$\int_{OA} = \int_0^1 t \cdot 1 dt = \frac{1}{2}$$

Параметризация AB: x(t)=t,y(t)=1-t. Тогда $\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{2}$

$$\int_{AB} = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{2} dt = \sqrt{2}$$

$$\int_{OR} = \int_{OA} = \frac{1}{2}$$

M3137y2019 11.2.2021

Упражнение (4250). Здесь C есть часть параболы от -1 до 1

$$x(t) = t \quad y(t) = t^{2}$$

$$\int_{C} (x^{2} - 2xy)dx + (y^{2} - 2xy)dy = \int_{-1}^{1} (t^{2} - 2t^{3} + (t^{4} - 2t^{3})2t)dt$$

Это решение обречено на успех, но попробуем решить другим способом. Является ли

Это решение обречено на успел, по попроблем решение: $\begin{cases} P_y' = Q_x' \\ P_z' = R_x' \\ Q_z' = R_y' \end{cases}$. К сожалению, $Q_z' = R_y'$

это не выполнено, поэтому такое решение не работает.

Если интеграл задан от точки до точки, то у него обязан быть потенциал, иначе он зависит от пути.

Нам важно, как устроена система координат. Наша выглядит так:

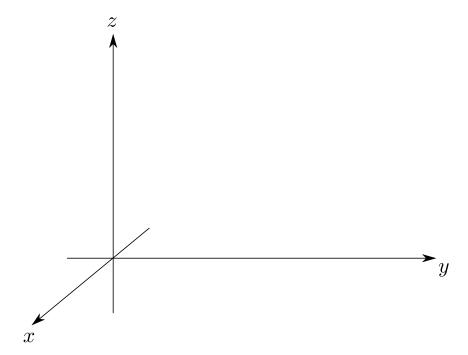


Рис. 1: Оси образуют правую тройку xyz

M3137y2019 11.2.2021