$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

$$\int \leftrightarrow \sum \quad a \leftrightarrow g \quad b \leftrightarrow f \quad \sum_{i=1}^{k} a_i = A_k \quad f' \leftrightarrow b_{k+1} - b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Это **суммирование по частям**, оно же **правило Абеля суммы**.

Доказательство. $\lhd b_7$, посмотрим с какими коэффициентами оно входит в выражения по обе части равенства:

- Левая часть: a_7
- Правая часть: $A_7 - A_6 = a_7$

Для других случаев тоже верно. □

Теорема 1. Признак Абеля-Дирихле

Дирихле:

1. Последовательность $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ ограничена: $\exists C_A > 0 \;\; \forall k \;\; |A_k| < C_A$
2. b_k монотонна и $\to 0$

Абеля:

1. Ряд $\sum a_k$ сходится
2. b_k монотонна, ограничена: $\exists C_B > 0 \;\; \forall k \;\; |b_k| < C_B$

Если хотя бы один из этих признаков состоялся, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ сходится.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \underbrace{A_n b_n}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})}_{\substack{\exists \text{ конечный предел,} \\ \text{т.к. ряд абсолютно сходится}}}$$

Докажем Дирихле.

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k||b_k - b_{k+1}| \le C_A \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm C_A \sum_{k=1}^{n-1} b_k - b_{k+1} = \pm \underbrace{C_a(b_1 - b_n)}_{\text{огр.}} \le C_A C_B$$

Докажем Абеля.

$\exists$ конечный $\beta = \lim\limits_{k\to+\infty} b_k$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \beta \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k (b_k - \beta)$$

Второй ряд сходится по признаку Дирихле, первый сходится по условию. $\square$

Пример.

$$\sum \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$$

Докажем сходимость по признаку Дирихле: $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

b_n монот., $\to 0$

$A_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\right)$ - огр.?

$$|\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n| = |\Im(e^i + e^{2i} + e^{3i} + \ldots + e^{ni})| \leq |e^i + e^{2i} + \ldots + e^{ni}| =$$

$$= \left| e^i \frac{e^{ni} - 1}{e^i - 1} \right| = |e^i| \frac{|e^{ni} - 1|}{|e^i - 1|} \leq 1 \frac{2}{|e^i - 1|} =: C_A$$

Итого A_k ограничено $\Rightarrow$ искомая последовательность сходится по признаку Дирихле.

Свойства сходящихся рядов

1. Группировка

Теорема 2.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \underbrace{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2})}_{b_2} + \ldots$$

$n_1 < n_2 < \ldots$

$$A = \sum a_k \quad b_l = \sum_{i=n_l+1}^{n_{l+1}} a_i \quad B = \sum b_l$$

1. Если A сходится, B сходится и имеет ту же сумму
2. Если $\forall k \;\; a_k \geq 0$, A и B имеют одинаковую сумму.

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{n_m} a_i$$

1. A сходится $\Rightarrow \exists$ кон. $\lim \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Тогда

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{i=1}^{m} b_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n_m} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

2. Скипнуто

$\square$

Примечание. 1. B сходится $\not\Rightarrow$ A сходится. Контрпример: $\sum(-1)^n$

2. $a_n \to 0$, скобки "ограниченного размера": $\exists M \ \ \forall k \ \ |n_k - n_{k-1}| < M$

   Тогда B сходится $\Rightarrow$ A сходится:

$$|a_n| \to 0 \ \ |a_n| + |a_{n+1}| \to 0$$

   Скипнуто

Пример.

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{0}{1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \ldots = 0$$

Односторонний предел в $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} f\Big|_{[a,+\infty)\cap D}$$

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, D_1 \subset D, a$ — предельная точка D, D_1

$\lim\limits_{x\to a} f\Big|_{D_1}$ — предел по подмножеству, аналог одностороннего предела

Определение. Предел по направлению $l, |l| = 1$:

$$\lim_{t\to 0+0} f(a + t\vec{l})$$

Определение. Предел вдоль пути *(непрерывного)* $\gamma : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}^m$ функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t))$$

1. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, то $\exists$ и пределы всем направлениям и они равны L.

2. Если пределы по направлениям $\exists$ и не равны, то $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Пример.

$$f = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$l := (\cos\varphi, \sin\varphi) \quad \lim_{t\to 0} \frac{t\cos\varphi t\sin\varphi}{t^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \cos\varphi\sin\varphi \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Определение. Предел вдоль кривой

Скипнуто

Линейное отображение = линейный оператор

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n - \text{лин.} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall x, y \in \mathbb{R}^m \ \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Определение. Линейное отображение $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — **линейный функционал**

Скипнуто

Линейные отображения образуют линейное пространство, т.е. это множестве замкнуто по сложению и умножению на скаляры.

Линейное отображение задается матрицей:

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad f \leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$f(x) = Ax$$

Теорема 3. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — лин. оператор

Эквивалентны следующие утверждения:

1. $\mathcal{A}$ — обратим
2. $\mathcal{A}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$

Линейные отображения “общего вида”:

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha x \quad f \leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad f(x) = \langle x, a \rangle \quad f \leftrightarrow a \in \mathbb{R}^m$
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \quad f(x) = xv \quad f \leftrightarrow v \in \mathbb{R}^m$

2. Дифференциирование отображений

Определение. 1. **Бесконечно малое отображение** $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

x_0 — предельная точка E

φ — бесконечно малое отображение при $x \to x_0$ $\varphi(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$

2. $o(h)$ (оно же $o(|h|)$)

   $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, 0 — предельная точка E

   $\varphi(h) = o(h)$ при $h \to 0$, если $\frac{\varphi(h)}{|h|} \xrightarrow{h \to 0} 0$

   По-другому: $\exists \alpha : E \to \mathbb{R}^l$ — бесконечно малое при $h \to 0$:

$$\varphi(h) = |h|\alpha(h)$$

Определение. $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, a \in IntE$

F — дифф. в точке a, если:

$$\exists \text{ лин. оп. } L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \ \ \exists \text{ бесконечно малое } \alpha : E \to \mathbb{R}^l :$$

$$F(a+h) = F(a) + Lh + |h|\alpha(h), h \to 0$$
$$F(a+h) = F(a) + Lh + o(h)$$
$$x := a + h$$
$$F(x) = F(a) + L(x-a) + |x-a|\alpha(x-a)$$

Определение. Оператор L из определения — **производный оператор** отображениия F в точке a (“производная”), обозначается $F'(a)$.

Матрица $F'(a)$ — **матрица Якоби** F в точке a

Определение. Выражение $F'(a)h$ называется **дифференциалом** отображения F в точке a.

Это понимают как:

1. Производный оператор $h \mapsto F'(a)h$
2. Отображение $E \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \quad (x, h) \mapsto F'(x) \cdot h$

$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad a \in \mathbb{C}$

Определение. F **комплексно дифференциируема** в точке A, если $\exists \lambda \in \mathbb{C}$:

$$F(a+h) = F(a) + \lambda h + o(h), h \to 0$$

$$h = x + iy \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda = a + bi$$

$$h \mapsto \lambda h$$

$$(x + iy) \mapsto (a + bi)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Этому соответствует вещественное отображение $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(a + h) = F(a) + Lh + o(h)$$

Лемма 1. Производный оператор единственный.

Доказательство.

$$\exists \delta > 0 \ \forall h : |h| < \delta \ \ a + h \in E$$

Возьмём $v \in \mathbb{R}^m \quad h := tv, t < \frac{\delta}{|v|}$

По определению дифференциала:

$$F(a + tv) = F(a) + F'(a)tv + |tv|\alpha(tv) = F(a) + tF'(a)v + |t||v|\alpha(tv)$$

$$F'(a)v = \frac{F(a + tv) - F(a)}{t} - \overbrace{\underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\pm 1} |v|\alpha(tv)}^{\xrightarrow[t \to 0]{} \pm |v| 0}$$

$$F'(a)v = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t}$$

Т.к. по всем направлениям производная равна, оператор единственный. □

Примечание. О дифференциировании функций нескольких переменных

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE$

$f -$ дифф. $\exists \lambda_1 \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}, \exists \varphi$ бесконечно малая при $x \to a$

$$f(x_1 \ldots x_m) = f(a_1 \ldots a_m) + \lambda_1(x_1 - a_1) + \lambda_2(x_2 - a_2) + \ldots + \lambda_m(x_m - a_m) + |x - a|\varphi(x)$$

Примечание. F дифф. в $a \Rightarrow F$ непр. в a