ДЗ 8

Упражнение (2750).

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} \quad 0 \le x \le 1$$

1. Кандидат

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup |x - \frac{nx}{1+n+x}| = \sup \left|\frac{x+x^2}{1+n+x}\right| \le \frac{2}{1+n} \to 0$$

Ответ: сходится равномерно.

Упражнение (2751).

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

(a) $0 \le x \le 1 - \varepsilon$

1. Кандидат

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \le \sup x^n \to 0$$

Ответ: сходится равномерно.

(b) $1 - \varepsilon \le x \le 1 + \varepsilon$

1. Кандидат

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|f(x) - \frac{x^n}{1+x^n}\right|$$

$$x := 2^{-\frac{1}{n}}$$

$$\sup_x \left|f(x) - \frac{x^n}{1+x^n}\right| \le \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \not\to 0$$

Ответ: не сходится равномерно.

(c) $1 + \varepsilon \le x < +\infty$

1. Кандидат
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$$

2. ρ
$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|1 - \frac{x^n}{1+x^n}\right| = \sup_x \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+(1+\varepsilon)^n} \to 0$$

Ответ: сходится равномерно.

Упражнение (2752).
$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

(a) $0 \le x \le 1$

1. Кандидат
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

2. ρ
$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right|$$

При $x = \frac{1}{n}$ $\sup \not\to 0$

Ответ: не сходится равномерно.

(b) $1 < x < +\infty$

1. Кандидат
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

2. ρ
$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right| \le \sup_x \frac{2nx^2}{1+n^2x^2} = \sup_x \frac{2n}{\frac{1}{x^2}+n^2} \le \frac{2n}{1+n^2} \to 0$$

Ответ: сходится равномерно.

Упражнение (2753).
$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad E = \mathbb{R}$$

1. Кандидат
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = |x|$$

2. ρ
$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left||x| - \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right| = \sup_x \frac{x^2 - x^2 + \frac{1}{n^2}}{|x| + \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} < \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \to 0$$

Ответ: сходится равномерно.

Упражнение (2754).

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \quad 0 < x < +\infty$$

1. Кандидат

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}}\right| = \sup_x \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)}$$

$$x := \frac{1}{n}$$

$$\sup \leq \frac{\sqrt{\frac{2}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}})} = \frac{\sqrt{2}-1}{\frac{2}{\sqrt{n}}(1+\sqrt{2})} \not\to 0$$

Ответ: не сходится равномерно.

Упражнение (2755). (a)

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \quad E = \mathbb{R}$$

1. Кандидат

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$$

Ответ: сходится равномерно.

(b)

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) \quad E = \mathbb{R}$$

1. Кандидат
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$
2. ρ
$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \overset{x:=n}{\geq} \sin(1) \not\to 0$$

Ответ: не сходится равномерно.

Упражнение (2756). (a)
$$f_n(x) = \operatorname{arctg} nx \quad E = (0, +\infty)$$

1. Кандидат
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}$$
2. ρ
$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right| \overset{x:=n}{\geq} |\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 1| \not\to 0$$

Ответ: не сходится равномерно.

(b)
$$f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx \quad E = (0, +\infty)$$

1. Кандидат
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}x$$
2. ρ
$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left|\frac{x\pi}{2} - x \operatorname{arctg} nx\right| = x| - \operatorname{arctg} \frac{1}{nx}| \leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n} \to 0$$

Ответ: сходится равномерно.

ДЗ 9

Упражнение (2767).
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

(a) $|x| < q, q < 1$
$$|x^n| \leq q^n$$
$$q^n \text{ сходится}$$

Ответ: сходится равномерно.

(б) $|x| < 1$

$$S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

$$\lim S_N = \frac{1}{1 - x}$$

$$\rho = \sup \frac{x^{N+1}}{1 - x} = \infty$$

Можно было брать $x = 2^{-\frac{1}{n}}$. **Ответ**: не сходится равномерно.

Упражнение (2772).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad E = (0, +\infty)$$

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} < \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

Упражнение (2765). Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и

$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

Доказать, что $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ на сегменте $\alpha \leq x \leq \beta$, где $a < \alpha < \beta < b$

1. Кандидат

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \stackrel{\text{def}}{=} f'(x)$$

2. ρ

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]} \left| f'(x) - n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)\right| \to 0$$

Упражнение (2774).

(а)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

(б)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \quad E = (-2, +\infty)$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right| \le \frac{1}{2^n-2} \le \frac{1}{2^{n-1}} \text{ сходится}$$

(в)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^2} \quad E=[0,+\infty)$$

$$\begin{aligned}(1-n^2x)^2 &\ge 0\\ 1-2n^2x+n^4x^2 &\ge 0\\ 1+n^4x^2 &\ge 2n^2x\end{aligned}$$

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \le \frac{x}{2n^2x} = \frac{1}{2n^2} \text{ сходится}$$

(г)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \quad E=\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}(1-n^{2.5}x)^2 &\ge 0\\ 1-2n^{2.5}x+n^5x^2 &\ge 0\\ 1+n^5x^2 &\ge 2n^{2.5}x\end{aligned}$$

$$\frac{nx}{1+n^5x^2} \le \frac{nx}{2n^{2.5}x} = \frac{1}{2n^{1.5}} \text{ сходится}$$

(д)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}) \quad \frac{1}{2} \le |x| \le 2$$

$$\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}) \le \frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}$$

Сходится ли $\frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}$? По признаку “корня”:

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}} = 2\sqrt[n]{\underbrace{\frac{n^2}{\sqrt{n!}}2}_{\to 0}} \to 0$$

Итого сходится.

(е)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad |x| < a, a \in \mathbb{R}^+$$

$$\left|\frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\right| \leq \frac{a^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

Этот ряд сходится по признаку Даламбера ($\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$)

(ж)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[n]{n^4 + x^4}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \text{ сходится}$$

(з)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

(и)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^{1.5}}\right| \leq \frac{1}{n^{1.5}} \text{ сходится}$$

(к)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right) \quad |x| < a, a \in \mathbb{R}^+$$

$$\left|\ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)\right| < \left|\ln\left(1 + \frac{a^2}{n \ln^2 n}\right)\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a^2}{n \ln^2 n} \text{ сходится}$$

(л)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx} \quad E = [0, +\infty)$$

$$e^{nx} \overset{\text{Тейлор}}{=} 1 + nx + \frac{n^2x^2}{2} + \cdots \Rightarrow e^{nx} > 1 + nx + \frac{n^2x^2}{2}$$

$$x^2 e^{-nx} < x^2 \frac{2}{n^2x^2} = \frac{2}{n^2} \text{ сходится}$$

(м)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}\right| = \left|\frac{2x}{x^2+n^3} + o\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)\right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}) \text{ сходится}$$

(г')

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^5x^2} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N, \exists m = n, \exists x = n^{-2.5} \quad \left|\frac{\sqrt{n+1}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2n}}{2}\right| \geq \frac{1}{2}n\sqrt{n+1} > \frac{1}{2}n^{1.5} > \varepsilon$$

Ответ: расходится

(з')

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos nx}{n^2} \quad x \in (0, \pi)$$

$$\exists \varepsilon >= \frac{1}{100} \ \ \forall N \ \ \exists n > N, \exists m = \frac{n}{2}, \exists x = \frac{1}{n} \quad \left|\frac{\cos \frac{n+1}{n}}{n+1} + \dots + \frac{\cos \frac{1.5n}{n}}{2n}\right| > \frac{n}{2} \frac{\cos \frac{1.5n}{n}}{2n}$$

$$= \frac{\cos 1.5}{4} > \frac{1}{100}$$

Для того, чтобы все работало, надо брать чётный n.

Ответ: расходится

(л')

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^2 e^{-nx} \quad E = [0, +\infty)$$

Аналогично исходному, но берем четвёртый элемент ряда Тейлора.

ДЗ 10

Упражнение (2776).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x} \quad E = (0, +\infty)$$

Докажем не равн. сходимость u_n по определению:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

$$\rho(0, u_n) = \sup_x \left|2^n \sin \frac{1}{3^n x}\right| \overset{x:=3^{-n}}{\geq} 2^n \not\to 0$$

Ответ: не сходится равномерно.

Упражнение (2777).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \quad E = (0, +\infty)$$

Докажем равн. сходимость по Дирихле:

$$a_n = (-1)^n, |\sum a_n| \leq 2$$

$$b_n = \frac{1}{x+n}$$

b_n очевидно монотонно, сходимость доказана в дз до этого.

Упражнение (2778).

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Докажем равн. сходимость по Дирихле:

$$a_n = (-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{n + \sin x}$$

Все очевидно.

Упражнение (2779).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}} \quad E = [-10, 10]$$

Было сделано на практике по Дирихле, $a_n = (-1)^{\cdots}$

Упражнение (2780).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}} \quad E = \mathbb{R}$$

$$a_n = \cos \frac{2n\pi}{3} \quad \sum |a_n| \leq 6$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + x^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

$$\rho(0, b_n) = \sup_x \left|\frac{1}{\sqrt{n^2 + x^2}}\right| = \frac{1}{n} \to 0$$

Ответ: сходится по Дирихле

Упражнение (2781).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}} \quad E = [0, +\infty)$$

Сначала докажем вспомогательный факт:

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) := S_N$$

$$\sin nx \cdot \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

$$A_N \cdot \sin \frac{x}{2} \overset{\text{телескоп}}{=} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}$$

$$|A_n| = |\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}|$$

Докажем по Дирихле:

$$a_n(x) := \sin x \sin nx$$

$$\sum a_n(x) = |\sin x| \, |A_n| \leq \left| \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right| = |2 \cos \frac{x}{2}| \leq 2$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n(x) = 0$$

$$\rho(0, b_n) = \sup_x \frac{1}{\sqrt{n+x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

Ответ: сходится по Дирихле

Упражнение (2785). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$, то обязательно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$? Рассмотреть пример $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1-x)x^n, x \in [0, 1]$

Абсолютная сходимость ряда: при $x = 0$ или $x = 1$ очевидно сходится, т.к. 0, при $x \in (0, 1)$ тоже сходится.

Равномерная сходимость: по Дирихле

$$a_n = (-1)^n \quad \left|\sum a_n\right| \leq 2$$

$$b_n = (1-x)x^n$$

Монотонно по n, сходится, т.к. $x = \frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \approx \frac{1}{e}\frac{1}{n} \to 0$

Равномерная абсолютная сходимость: по Коши члены суммы при $x = \frac{n}{n+1} \approx \frac{1}{n}$, тогда при $m = n$ сумма $> \varepsilon$. Таким образом расходится.

ДЗ 11

Упражнение (2795). Определить области существования функций $f(x)$ и исследовать их на непрерывность, если:

(а)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$$

Рассмотрим **обычную** сходимость ряда.

При $x = 1$ ряд расходится, т.к. $(1 + \frac{1}{n})^n \to 1 \neq 0$

При $x > 1$ ряд расходится по признаку сравнения.

При $x \in (-1, 1)$ ряд сходится по признаку Абеля (корень).

При $x = -1$ $\nexists \lim(-1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow$ ряд расходится.

При $x < -1$ ряд очевидно расходится.

Итого $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим равномерную сходимость, чтобы найти, где f непрерывна.

Пусть $x \in U(x_0) = (\alpha, \beta)$

$$\left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^n\right| \leq \left|\beta + \frac{1}{n}\right|^n \text{ сходится}$$

Таким образом, f непр. на $(-1, 1)$

(б)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2}$$

$$\frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2} = \frac{x}{x^2 + n^2} + \frac{(-1)^n n}{x^2 + n^2}$$

Первый ряд сходится:

$$x \in (-\alpha, \alpha) \qquad \left|\frac{x}{x^2 + n^2}\right| \leq \frac{\alpha}{n^2}$$

Второй ряд сходится по Дирихле ($a_n(x) = (-1)^n, b_n(x) = \frac{1}{x^2+x^2}$)

Итого $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Заметим, что из приведенные соображения также доказывают равномерную сходимость, поэтому ответ — везде.

(в)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

По признаку Абеля (корня) ряд сходится при $x \neq 0$, т.к.:

$$\sqrt[n]{\frac{x}{(1+x^2)^n}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} \to \frac{1}{1+x^2} < 1$$

При $x = 0$ члены ряда 0 и f тоже 0.

Итого $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Докажем, что $\forall x_0$ ряд равномерно сходится в $U(x_0) = (a, b)$ и пусть наименьшее по модулю из этих чисел — α, наибольшее — β.

$$\left| \frac{x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{\beta}{(1+\alpha^2)^n}$$

$\sum \frac{\beta}{(1+\alpha^2)^n}$ сходится, если $\alpha \neq 0$. Если $\alpha = 0$, то не сходится.

Упражнение (2796). Пусть $r_k (k = 1, 2 \dots)$ — рациональные числа сегмента $[0, 1]$. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad x \in [0, 1]$$

обладает следующими свойствами: 1) непрерывна; 2) дифференцируема в иррациональных точках и недифференцируема в рациональных.

1. Непрерывность

   $u_n(x)$ непрерывны в x_0 $\forall x_0 \in [0, 1]$.

   Покажем равномерную сходимость ряда по Вейерштрассу.

   $$\frac{|x - r_k|}{3^k} \leq \frac{1}{3^k} \text{ сходится}$$

2. Дифференцируемость

   $$u'_n(x) = \frac{\text{sign}(x - r_k)}{3^k}$$

В рациональных точках $u_n'(x)$ разрывны, т.к. для каждого $x_0 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ есть r_k.

Покажем равномерную сходимость в окрестности иррациональных точек. Она очевидна, т.к. $\frac{\operatorname{sign}(x-r_k)}{3^k} \le \frac{1}{3^k}$ и по Вейерштрассу равн. сходимость есть.

Упражнение (2797). Было на практике

Упражнение (2798). Доказать, что тэта функция

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

$$\Theta(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

Покажем равномерную сходимость ряда при $x \in (\alpha, +\infty), \alpha > 1$.

$$e^{-\pi n^2 x} \le e^{-\pi n^2 \alpha} \text{ сходится}$$

При дифференцировании k раз мы получим $e^{-\pi n^2 x}(-\pi n^2)^k$, но степенная функция растет асимптотически медленнее, чем показательная $\Rightarrow$ все ряды из производных равномерно сходятся по Вейерштрассу.

Упражнение (2799). Определить области существования функций $f(x)$ и исследовать их на дифференцируемость, если:

(a)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

$$\left(\frac{(-1)^n x}{n+x}\right)' = (-1)^n \frac{n+x-x}{(n+x)^2} = (-1)^n \frac{n}{(n+x)^2}$$

Члены суммы разрывны при $x \in \mathbb{Z}^-$, в остальных точках непрерывны.

Докажем равномерную сходимость по Дирихле $a_n(x) := (-1)^n, b_n(x) = \frac{n}{(n+x)^2}$

Нет, не докажем, потому что b_n не монотонно по n.

Я не знаю, как решить.

Ответ: определена и дифференцируема в $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

(б)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$$

$$\left(\frac{|x|}{n^2+x^2}\right)' = \frac{\operatorname{sign} x(n^2+x^2) - 2x|x|}{(n^2+x^2)^2} = \frac{\operatorname{sign} x}{n^2+x^2} - \frac{2x|x|}{(n^2+x^2)^2}$$

Члены суммы непрерывны во всех точках, кроме $x = 0$.

Равномерная сходимость первого очевидна. Равномерная сходимость второго очевидна по Дирихле:

$$|\frac{2x|x|}{(n^2+x^2)^2}| \le \frac{2a^2}{n^4}$$

Ответ: везде, кроме 0.

Упражнение (2806).

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{x^n+1}$$

Если есть равномерная сходимость ряда в $(\alpha, 1)$, то $\sum u_n(x) \xrightarrow{x\to 1-0} \sum u_n(1) = \frac{-\ln 2}{2}$.

Равномерная сходимость выполняется по Дирихле $a_n = (-1)^n, b_n = \frac{x^n}{n(x^n+1)}$.

Упражнение (2807).

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1})$$

Если есть равномерная сходимость ряда в (α, β), то $\sum u_n(x) \xrightarrow{x\to 1-0} \sum u_n(1) = 0$.

Докажем по определению:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (x^n - x^{n+1}) \overset{\text{телескоп}}{=} x - x^{N+1}$$

$$\lim S_N = x$$

$$\rho(S_N, x) = \sup_x |x^{N+1}| = \beta^{N+1} \to 0$$

Упражнение (2808).

$$\lim_{x\to +0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x}$$

$$\left|\frac{1}{2^n n^x}\right| \le \frac{1}{2^n}$$

Сходится равномерно по Вейерштрассу.

$$\lim = \sum \frac{1}{2^n} = 1$$

ДЗ 12

Упражнение (2873). Найти разложения в ряд следующих фукнций:

(г) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)^2}\frac{4-2x^2+4x^2}{(2-x^2)^2} \\
&= \frac{4+2x^2}{(2-x^2)^2+(2x)^2} \\
&= \frac{4+2x^2}{4+x^4} \\
&= \frac{1+\frac{1}{2}x^2}{1+\frac{x^4}{4}} \\
&= \left(1+\frac{1}{2}x^2\right)\left(1-\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{16}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{4n}}{4^n}+\dots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tau(n)}{2^n}x^{2n}
\end{aligned}$$

, где $\tau(n) = \begin{cases} 1 & ,n\equiv 0 \mod 4 \\ 1 & ,n\equiv 1 \mod 4 \\ -1 & ,n\equiv 2 \mod 4 \\ -1 & ,n\equiv 3 \mod 4 \end{cases}$. τ можно выразить как адекватную функцию, делать я этого конечно же не буду.

Проинтегрируем:

$$f(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tau(n)}{2^n(2n+1)}x^{2n+1}$$

Найдём константу. $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, поэтому $C = 0$.

Это выполняется при $\frac{x^4}{4} \in (-1, 1)$, т.е. $x \in [0, \sqrt{2})$

(д) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$x \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$\begin{aligned}\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x \\ &= \frac{x}{1+x^2} \\ &= x\left(1-x^2+x^4-\dots+(-1)^{n+1}x^{2n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}\end{aligned}$$

Проинтегрируем:

$$\ln\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2}\right)$$

Это выполняется при $x^2 \in (-1, 1)$, т.е. $x \in [0, 1)$

(e) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} \\ &= \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2\operatorname{sign} x\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2}x^2-\dots+\frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!}(-x^2)^n+\dots\right) \\ &= 2\operatorname{sign} x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!}(-x^2)^n\end{aligned}$$

Это выполняется при $-x^2 \in (-1, 1)$, т.е. $x \in (-1, 1)$.

Проинтегрируем:

$$f(x) = 2\operatorname{sign} x\sum_{n=0}^{+\infty}\int\frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!}(-x^2)^n dx$$

$$= C + 2\operatorname{sign} x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{x(-x^2)^n}{2n+1} dx$$
$$= C + 2|x| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{(-x^2)^n}{2n+1} dx$$

$f(0) = \arccos 1 = 0$, поэтому $C = 0$

$$f(x) = 2|x| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{(-x^2)^n}{2n+1} dx$$

(ж) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}{2!}(-x)^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\dots\frac{3-2n}{2}}{n!}(-x^2)^n + \dots$$

Разложим $g(x) = \arcsin x$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + x^2 - \frac{3}{8}x^4 + \dots + \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!}(-x^2)^n + \dots$$

Проинтегрируем:

$$g(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{x(-x^2)^n}{2n+1}$$

$g(0) = \frac{\pi}{2}$, поэтому $C = \frac{\pi}{2}$. Соберем всё вместе:

$$f(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\dots\frac{3-2n}{2}}{n!}(-x^2)^n + \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{x(-x^2)^n}{2n+1}$$

(з) $f(x) = x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}{2!}x^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\dots\frac{3-2n}{2}}{n!}x^{2n} + \dots$$

$$g(x) := \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!} x^{2n}$$

Проинтегрируем:

$$g(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$g(0) \Rightarrow C = 0$$

Соберем всё вместе:

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{1-2n}{2}}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\dots\frac{3-2n}{2}}{n!}x^{2n}$$

Упражнение (2871). $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ — уже сделано в 2873.з

Упражнение (2855). $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2(-2-1)\dots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(x)^n$$

Это выполняется при $-x \in (-1,1)$, т.е. $x \in (-1,1)$.

Упражнение (2857). $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln\sqrt{1+x} - \ln\sqrt{1-x}$$

$$\left(\ln\sqrt{1+x}\right)' = \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1\cdot(-2)\dots(-n)}{n!}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$

Проинтегрируем:

$$\ln\sqrt{1+x} = C + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$\ln\sqrt{1} = 0 \Rightarrow C = 0$

$$(\ln\sqrt{1-x})' = \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$$

Проинтегрируем:

$$\ln\sqrt{1-x} = C + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$\ln\sqrt{1} = 0 \Rightarrow C = 0$ Соберем всё вместе:

$$\ln\sqrt{1+x} - \ln\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln\sqrt{1+x}-\ln\sqrt{1-x}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Это выполняется при $x\in(-1,1)$ и $x\in(-1,1)$, т.е. при $x\in(-1,1)$.

Упражнение (2861). $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{4}{(2x+\sqrt{5}+1)(-2x+\sqrt{5}-1)}$$

Разложим на простейшие:

$$\frac{A}{2x+\sqrt{5}+1}+\frac{B}{-2x+\sqrt{5}-1}=\frac{B(2x+\sqrt{5}+1)+A(-2x+\sqrt{5}-1)}{\dots}$$

$$\begin{cases}B=A\\2A\sqrt{5}=4\end{cases}$$

$$A=B=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x-x^2}&=\frac{2}{\sqrt{5}(2x+\sqrt{5}+1)}+\frac{2}{\sqrt{5}(-2x+\sqrt{5}-1)}\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}+1}\frac{1}{\frac{2x}{\sqrt{5}+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}-1}\frac{1}{1-\frac{2x}{\sqrt{5}-1}}\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}+1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n!\left(\frac{2x}{\sqrt{5}+1}\right)^n+\frac{1}{\sqrt{5}-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n!\left(\frac{-2x}{\sqrt{5}-1}\right)^n\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n2^nn!}{(\sqrt{5}+1)^{n+1}}+\frac{2^nn!}{(\sqrt{5}-1)^{n+1}}\right)x^n\right)\end{aligned}$$

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

Упражнение (2816).

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$$

$$R=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\frac{1}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

$\sphericalangle x = \frac{1}{e}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} \to 1$$

Таким образом, интервал сходимости $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

Упражнение (2817).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad a > 1$$

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{a^{n^2}}}} = \frac{1}{\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{a^n}} = +\infty$$

Найти такой предел нетривиально, можно было проще через $\frac{a_n}{a_{n+1}}$

Упражнение (2818).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \left|\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2^n}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{1}{2^{n+1}}}\right|^p = \lim 2 \left|\frac{2n+2}{2n+1}\right|^p = 2$$

Тогда интервал сходимости $(-1, 3)$, и возможно ещё точки -1 и 3.

$\sphericalangle x = -1$. При $p \le 0$ ряд расходится, т.к. $\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \ge 1$. При $p > 0$ ряд сходится по признаку Лейбница.

$\sphericalangle x = 3$. При $p \le 2$ ряд расходится, при $p > 2$ сходится.

Упражнение (2823).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad a > 0$$

$$R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{a^{\sqrt{n+1}}}{a^{\sqrt{n}}} = 1$$

Если $x = 1$, то при $a > 1$ сходится, при $a \le 1$ расходится. Аналогично для $x = -1$

Упражнение (2824).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{3^{-\sqrt{n}}\sqrt{n^2+2n+2}}{3^{-\sqrt{n+1}}\sqrt{n^2+1}} = 1$$

При $x = 1$ ряд сходится по признаку Дирихле, где $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $b_n = 3^{-\sqrt{n}}$. Также он сходится, потому что $\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} < 3^{-\sqrt{n}}$.

При $x = -1$ ряд очевидно сходится по признаку сравнения (с рядом, полученным при $x = 1$).

ДЗ 13

Упражнение (2991).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} =?$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n(2n-1)} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right)$$

$$\frac{1}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$
$$\frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n(2n-1)} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right) &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n} \right) \\
&= -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n} \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Упражнение (2998).

Упражнение (3003).

Упражнение (3007).

Упражнение (3013).

Упражнение (3015).