

**Лемма 1.**

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- $\Phi$  — параметризация многообразия  $U(p) \cap M$ , где  $p \in M$ ,  $M$  — гладкое  $k$ -мерное многообразие  $\Rightarrow U(p) \cap M$  — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ  $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  есть  $k$ -мерное линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$ . Оно не зависит от  $\Phi$ .

$\Phi'(t^0)$  — касательное пространство к  $M$  в точке  $p$ , обозначается  $T_p M$ .

*Доказательство.*  $\text{rg} \Phi'(t^0) = k$  по определению параметризации  $\Rightarrow$  искомое очевидно. Если взять другую параметризацию  $\Phi_1$ , то по следствию о двух параметризациях

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

$$\Phi' = \Phi'_1 \Psi'$$

$\Psi'(t^0)$  — невырожденный оператор  $\Rightarrow$  образ  $\Phi' =$  образ  $\Phi'_1$

□

*Пример.*  $M$  — окружность в  $\mathbb{R}^2$ , задается параметризацией  $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ,  $t^0 := \frac{\pi}{4}$

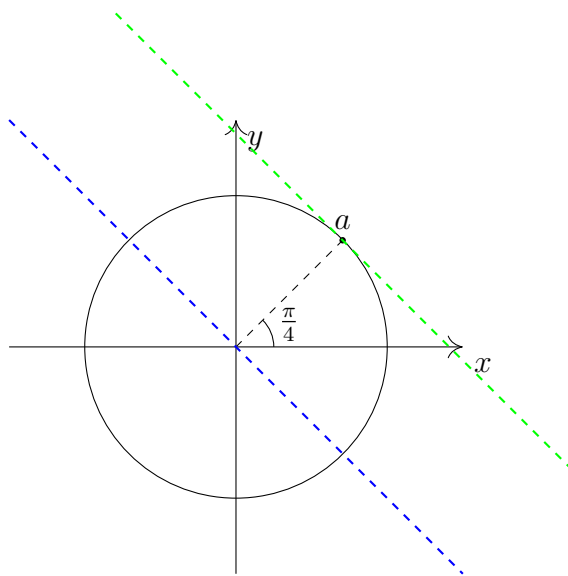


Рис. 1: Синим — касательное пространство к окружности в  $a$ . Зеленым — аффинное (“сдвинутое”) линейное подпространство.

$$\Phi'(t^0) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Тогда  $h \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} h$  — касательное подпространство.

**Определение.** Аффинное подпространство  $\{p + v, v \in T_p M\}$  называется **аффинным касательным подпространством**.

*Примечание.*

1.  $v \in T_p M$ . Тогда  $\exists$  путь  $\gamma_v : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$ , такой что  $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

*Доказательство.*  $u := (\Phi'(t_0))^{-1}(v)$



Определим путь в  $\mathbb{R}^k$ :

$$\tilde{\gamma}_v(s) := t_0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

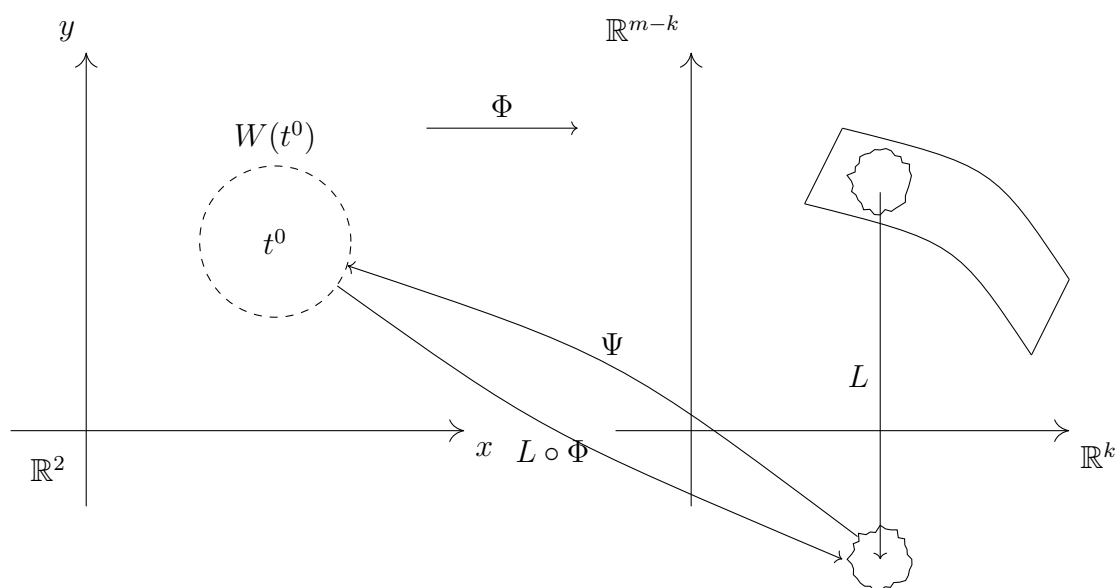
Отобразим этот путь в  $M$  и проверим, что такой путь подходит под условие:

$$\gamma_v(s) := \Phi(\tilde{\gamma}_v(s))$$

$$\gamma'_v(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0)) \cdot \tilde{\gamma}'_v(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0)) \cdot u = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0)) (\Phi'(t_0))^{-1}(v) = v$$

□

2. Пусть  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M, \gamma(0) = p$  — гладкий путь. Тогда  $\gamma'(0) \in T_p M$



*Доказательство.* Из иллюстрации очевидно:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

$$\gamma'(0) = \Phi'(\Psi(L(\gamma(0))))\Psi'(L(\gamma(0)))L'(\gamma(0))\gamma'(0)$$

Очевидно, что мы попадаем в образ  $\Phi'(\dots)$ , поэтому  $\gamma'(0) \in T_p M$  □

3.  $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, f \in C(O), y = f(x)$  — поверхность в  $\mathbb{R}^{m+1}$ , задается точками  $(x, y)$ .

Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке  $(a, b)$  задается уравнением

$$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

*Доказательство.*  $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$

$$\Phi(x) = (x, f(x))$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произвольный вектор  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$ . В каких случаях он принадлежит обра-

зу  $\Phi'$ ?

$$\Phi' \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \dots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор принадлежит образу, если  $\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \dots + \alpha_m f'_{x_m}$

Сместив на  $a, b$ , получаем искомое.  $\square$

4.  $\Phi(x_1 \dots x_m) = 0$

$$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(a) = 0$$

Тогда уравнение касательной плоскости  $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

*Доказательство.*  $\gamma$  — путь в  $M$  :  $\Phi(\gamma(s)) = 0$ ,  $\Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$ . По предыдущим утверждениям такой путь есть, кроме того, любому вектору  $x$  в касательном пространстве можно сопоставить  $\gamma : \gamma'(s) = x$ . Поэтому любой касательный вектор от точки  $a$  должен быть подчинён искомому отношению.

Альтернативное доказательство:

По определению дифференцируемости  $\Phi$  в точке  $a$ :

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) + o(\|x - a\|)$$

Мы игнорируем  $o$ , потому что оно компенсируется тем, что мы берем не с поверхности  $\Phi$ , а с касательной плоскости. Это нестрогое утверждение.  $\square$

*Примечание.*  $y(x) = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m) \Leftrightarrow$  дифференцирование, но без  $o$ .

Таким образом,  $f(x) - y(x) = o(x - a)$

## Относительный экстремум

*Пример.* Найти наибольшее/наименьшее значение выражения  $f(x, y) = x + y$  при условии  $x^2 + y^2 = 1$ .

Рассмотрим линии уровня, т.е.  $f(x, y) = C$ :

$M$  и  $m$  — точки минимума и максимума, т.к.  $M$  — точка, в которой  $f = \max$  и линия уровня касаются. Если они пересекаются, но не касаются, то есть точка больше. Аналогичное верно для минимума.

В более формальных терминах: пусть условие  $\Phi(x, y) = 0$ .



$$\Phi'_x(x - a) + \Phi'_y(y - b) = 0$$

$(\Phi'_x, \Phi'_y)$  — вектор нормали к касательной прямой. Тогда  $(f'_x, f'_y)$  и  $(\Phi'_x, \Phi'_y)$  — параллельны.

**Определение.**

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$
- $x_0 \in M_\Phi$

$x_0$  — точка **локального относительного** max, min, строгий max, строгий min, экстремума, если  $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n} : \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi \quad f(x_0) \geq f(x)$ , остальные — аналогично.

Уравнения  $\Phi(x) = 0$  называются **уравнениями связи**.

Как решать задачу нахождения локального относительного чего-то?

Если  $\text{rg} \Phi'(x_0) = n$ , то есть  $\text{rg}$  максимален, то выполнено условие теоремы о неявном отображении.

**Теорема 1** (необходимое условие относительного экстремума).

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкое в  $O$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$  — гладкое в  $O$
- $a \in O$  — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

$$\text{Тогда } \exists \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f'(a) + \lambda \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

Второе условие дописано для удобства, оно не содержательно, т.к. оно уже дано.

$$\text{В координатах: } \begin{cases} f'_{x_1} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} + \dots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} + \dots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Здесь неизвестны  $a_1 \dots a_{m+n}, \lambda_1 \dots \lambda_n$ , поэтому, если уравнения не вырождены, то решение есть.

*Доказательство.*  $\text{rg} \Phi'(a) = n$ . Пусть ранг реализуется на столбцах  $x_{m+1} \dots x_{m+n}$ .

Обозначим  $y_1 = x_{m+1} \dots y_n = x_{m+n}$ .

$$(x_1 \dots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y), a \leftrightarrow (a_x, a_y).$$

$\det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a) \neq 0$ . Тогда по теореме о неявном отображении  $\exists U(a_x) \exists V(a_y) \exists \varphi : U(a_x) \rightarrow V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$  и отображение  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  есть параметризация простого гладкого многообразия  $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$ .

$a$  — точка относительного локального экстремума  $\Rightarrow a_x$  — точка локального экстремума функции  $g(x) = f(x, \varphi(x))$ , потому что  $(x, \varphi(x)) \in U(a)$ .

Необходимое свойство экстремума для  $a_x$ :

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi')(a_x) = 0$$

*Примечание.* Здесь и далее в этом доказательстве в функции и производные операторы подставляется  $a$  и  $a_x$ , но не записывается ради краткости и запутанности.

$$\begin{aligned} \Phi(x, \varphi(x)) &\equiv 0 \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' &= 0 \end{aligned}$$

Тогда  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ :

$$\lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \cdot \varphi' = 0$$

$$f'_x + \lambda \Phi'_x + (f'_y + \lambda \Phi'_y) \varphi' = 0$$

(??) это (??) + (??)

Пусть  $\lambda = -f'_y \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}$ .

Тогда  $f'_y + \lambda \Phi'_y = f'_y - f'_y(\Phi'_y(a))^{-1} \Phi'_y(a) = 0$  и  $f'_x + \lambda \Phi'_x = 0$  в силу (??). Итого (??) выполнено, мы предъявили  $\lambda$ , подходящее под искомое.  $\square$

**Определение.**  $G := f - \lambda_1 \Phi_1 - \lambda_2 \Phi_2 - \dots - \lambda_n \Phi_n$  — функция Лагранжа.

$$f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0 \Leftrightarrow G'(a) = 0$$

*Примечание.* В определении выше можно писать “+” вместо “−”.

*Пример.*  $A = (a_{ij})$  — матрица  $m \times n$ , симметричная и вещественная.

$f(x) := \langle Ax, x \rangle, x \in \mathbb{R}^m$  — квадратичная форма.

Найдём  $\max f(x)$ , когда  $x \in S^{m-1}$  (единичной сфере в  $\mathbb{R}^m$ ).

Такой  $\max \exists$  по теореме Вейерштрасса.

$$G(x) = \sum_i^m \sum_j^n a_{ij} x_i x_j - \lambda \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 - 1 \right)$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_m \end{pmatrix}. \text{ На сфере } \operatorname{rg} \Phi' = 1.$$

$$G'_{x_k} = 2 \sum_{j=1}^m a_{kj} x_j - 2\lambda x_k \quad \forall k = 1 \dots m = 0$$

То есть  $Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda$  — собственное число  $A$ ,  $x$  — собственный единичный вектор.

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda x^2 = \lambda$$

**Теорема 2.**

$$\bullet A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Тогда  $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ — собственное число } A^T A\}$

Такое число существует, т.к.  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle \Rightarrow \langle A^T Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$ .

*Доказательство.*  $\triangleleft x \in S^{m-1}$ .

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T A x, x \rangle}_{\text{симм.}}$$

$$\max |Ax|^2 = \max \langle A^T A x, x \rangle = \lambda_{\max}$$

□

## Функциональные последовательности и ряды

### Равномерная сходимость последовательностей и функций

**Определение.** Последовательность функций  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  — пространство функций,  $n \mapsto f_n$

**Определение.**  $\mathcal{F} = \{f : \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \rightarrow \mathbb{R}\}$

**Определение.** Пусть  $E \subset X$ . Последовательность  $f_n$  **сходится поточечно** к  $f$  на множестве  $E$ , если  $\forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$ , т.е.:

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

*Пример.*  $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

Если  $E = [0, 1] \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$  — тождественный ноль, не ноль.

Если  $E \cap (1, +\infty) \neq \emptyset$ , то нет поточечной сходимости ни к какой функции.

*Пример.*  $f_n = \frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2}, x \in [0, 1], 0 < \alpha < 2$ .

Ясно, что  $f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall \alpha$ , поточечно сходится на  $[0, 1]$ .

$$\max_{x \in [0, 1]} \frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2} = n^\alpha \max \frac{x}{1+n^2 x^2} = n^\alpha \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} n^{\alpha-1}$$

При  $\alpha > 1 \quad \frac{1}{2} n^{\alpha-1} \rightarrow +\infty$ . Это странно.



Теперь мы видим, что функции стремятся к тождественному нулю, хотя  $\exists x : f(x) \rightarrow +\infty$ . Придумаем определение, которое это запрещает.



**Определение.**  $f_n$  равномерно сходится к  $f$  на  $E \subset X$ , если  $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n > N \quad 0 \leq M_n < \varepsilon \text{ т.е. } \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается  $f_n \xrightarrow[E]{} f$

*Примечание.*

- $x_0 \in E$
- $f_n \xrightarrow[E]{} f$

Тогда  $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ . То есть равномерная сходимость  $\Rightarrow$  поточечная сходимость и предел.

*Примечание.*

- $E_0 \subset E$
- $f_n \xrightarrow[E]{} f$

Тогда  $f_n \xrightarrow[E_0]{} f$

*Примечание.*

- $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} - \text{огр. функции}\}$

Тогда  $\rho(f_1, f_2) := \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$  — метрика в  $\mathcal{F}$ . Называется Чебышевское расстояние.

*Доказательство.* 1.  $\rho(f_1, f_2) \geq 0$ ,  $\rho(f_1, f_2) = 0 \Leftrightarrow f_1 = f_2$  — очевидно

2.  $\rho(f_1, f_2) = \rho(f_2, f_1)$  — очевидно

3.  $\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x$

$$\begin{aligned} \rho(f_1, f_2) - \varepsilon &= \sup |f_1 - f_2| - \varepsilon \\ &< |f_1(x) - f_2(x)| \\ &\leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_2(x) - f_3(x)| \\ &\leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3) \end{aligned}$$

□

$f_n \xrightarrow[E]{} f \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$  по метрике  $\rho_E$ .

Можем заметить, что в  $\mathcal{F}$  при различных метриках происходит различная сходимость или расходимость, в отличие от  $\mathbb{R}^m$ .

*Примечание.*

- $E = E_1 \cup E_2$

$$\left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow[E_1]{} f \\ f_n \xrightarrow[E_2]{} f \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \xrightarrow[E]{} f$$