1. Обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как $\vdash_{\text{и}}$, а выводимость в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как $\vdash_{\text{e}}$.

   Заметим, что хоть языки этих исчислений и отличаются, мы можем построить преобразование высказываний этих исчислений друг в друга: приняв $\perp \Rightarrow A \& \neg A$ и $\neg\alpha \Rightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$. Будем обозначать высказывания в гильбертовском ИИВ обычными греческими буквами, а соответствующие им высказывания в ИИВ натурального вывода — буквами с апострофами: $\alpha', \beta', \dots$.

   (a) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{e}} \alpha'$: предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для одного случая базы и одного случая перехода индукции.

   Общая схема: перебираем шаги доказательства в гильбертовом стиле и добавляем соответствующие шаги в естественном выводе в зависимости от происхождения этого шага.

   База: рассмотрим случай $\gamma_1 \in \Gamma$. Тогда дерево вывода $\gamma_1 : \dfrac{}{\Gamma \vdash \gamma_1, \gamma_1 \in \Gamma}$

   Переход: рассмотрим случай MP. Тогда дерево вывода $\gamma_n : \dfrac{\dfrac{\dots}{\Gamma \vdash \gamma_i \rightarrow \gamma_k} \quad \dfrac{\dots}{\Gamma \vdash \gamma_i}}{\Gamma \vdash \gamma_k}$

   (b) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{e}} \alpha'$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$.

   Докажем по индукции по высоте дерева.

   Доказательство. **База**: $n = 1$. Единственный случай — аксиома. Он очевиден.

   Переход:

   i. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$. По индукционному предположению $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ и по теореме об индукции $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

   ii. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}$. По индукционному предположению $\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi$. Объединим два доказательства, припишем аксиому 3 $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \,\&\, \psi$ и применим дважды MP.

   iii. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$. По индукционному предположению $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \vdash \varphi$. Объединим два доказательства, используем MP.

   Прочие случаи аналогичны. □

2. Рассмотрим $\mathbb{N}_0$ (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций $(+)$ и $(\cdot)$ в данной решётке, есть ли в ней псевдодополнение, определены ли 0 или 1? Приведите несколько свойств

традиционных определений $(+)$ и $(\cdot)$, которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и несколько свойств, которые перестанут выполняться.

$$a + b = \max(a, b) \quad a \cdot b = \min(a, b)$$

Псевдополнения нет для произвольных элементов, т.к. $\min(a, c) \le b$ не ограничивает сверху c для $a \le b$. Для $a \not\le b$ $a \to b = b$.

0 это 0, т.к. $\forall x \in \mathbb{N}_0 \;\; 0 \le x$

1 нет, т.к. $\mathbf{1} + 1 \not\le \mathbf{1}$

Выполнены:

(a) $a \cdot 0 = 0$

(b) $a + 0 = a$

(c) $a + b + c = a + (b + c)$

(d) $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(e) $a + b = b + a$

(f) $a \cdot b = b \cdot a$

Не выполнены:

(a) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

3. Постройте следующие примеры:

(a)
- непустого частично-упорядоченного множества, не имеющего операций $(+)$ и $(\cdot)$ ни для каких элементов;

  Такого не существует, т.к. $\forall a \;\; a \le a$, следовательно в $a + a$ все элементы сравнимы с a и при этом $a \in (a + a)$. Таким образом, наименьший — a. Аналогично можно сказать про $\cdot$.

- имеющего операцию $(+)$ для всех элементов, но не имеющего $(\cdot)$ для некоторых;

  Следующий номер, но наоборот.

- имеющего операцию $(\cdot)$ для всех элементов, но не имеющего $(+)$ для некоторых.

  $\{1, 2, 3\}$, упорядоченное по делимости.

(b)
- решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой;

  $\mathbb{N}_0$ со стандартным порядком.

- дистрибутивной, но не импликативной решётки;

  $\mathbb{Z}$ и его конечные подмножества с отношением $\subset$, т.е. $\{X \mid X \subset \mathbb{Z}, |X| \in \mathbb{N}_0\}$. Дистрибутивность тривиальна из теории множеств, как и то, что это решетка. Нет $\{0\} \to \mathbb{Z}$, т.к. $\{c \mid \{0\} \cdot c \leq \mathbb{Z}\}$ есть все конечные подмножества, а среди них нет наибольшего.

- импликативной решётки без 0.

  $-\mathbb{N}_0, \leq$

4. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:

   (a) ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

   Тривиально из теории множеств.

   (b) монотонность: пусть $a \preceq b$ и $c \preceq d$, тогда $a + c \preceq b + d$ и $a \cdot c \preceq b \cdot d$;

   $a \leq b \Rightarrow a \leq b + d, c \leq d \Rightarrow c \leq b + d$. Таким образом, $a + c \leq b + d$.

   Вторая часть аналогично.

   (c) *Законы поглощения:* $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;

   i. $a \cdot (a + b) = a$

   $a + b$ либо $= a$, либо $\leq a$. В обоих случаях $a \cdot (a + b) = a$

   ii. $a + (a \cdot b) = a$

   $a + b$ либо $= a$, либо $\geq a$. В обоих случаях $a + (a \cdot b) = a$

   (d) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$;

   $$a \to b = 1 \Leftrightarrow 1 \in \{c \mid a \cdot c \leq b\} \Leftrightarrow a \cdot 1 \leq b \Leftrightarrow a \leq b$$

   (e) из $a \preceq b$ следует $b \to c \preceq a \to c$ и $c \to a \preceq c \to b$;

   $$a \cdot (b \to c) \leq b \cdot (b \to c) \leq c$$
   $$b \to c \leq a \to c$$

   $$c \cdot (c \to a) \leq a \leq b$$
   $$c \to a \leq c \to b$$

   (f) из $a \preceq b \to c$ следует $a \cdot b \preceq c$;

$$a \le b \to c \Rightarrow \exists d : \begin{cases} d \ge a \\ b \cdot d \le c \end{cases} \Rightarrow b \cdot a \le c$$

Так как множество, из которого берется $b \cdot a$ есть подмножество “$b \cdot d$”

(g) $b \preceq a \to b$ и $a \to (b \to a) = 1$;

$$\begin{aligned} b \cdot a &\le b \\ a \cdot b &\le b \\ b &\le a \to b \end{aligned}$$

$a \le b \to a$ по пункту d.

(h) $a \to b \preceq ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;

(i) $a \preceq b \to a \cdot b$ и $a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$

(j) $a \to c \preceq (b \to c) \to (a + b \to c)$

5. Покажите, что импликативная решётка дистрибутивна.

Пусть $d = a \cdot b + a \cdot c$. Рассмотрим $a \to d$.

$$\begin{aligned} a \cdot b &\le d && (1) \\ b &\le a \to d && (2) \\ a \cdot c &\le d && (3) \\ c &\le a \to d && (4) \\ b + c &\le a \to d && (5) \\ a \cdot (b + c) &\le a \cdot (a \to d) && (6) \\ &\le d && (7) \\ &= a \cdot b + a \cdot c && (8) \end{aligned}$$

- (1) и (3): по построению d
- (2) и (4): по определению $\to$
- (5): из (2) и (4)

Итого $a \cdot (b + c) \le a \cdot b + a \cdot c$, покажем, что $a \cdot (b + c) \ge a \cdot b + a \cdot c$

$$\begin{aligned} a \cdot b &\le a && (9) \\ a \cdot b &\le b \le b + c && (10) \\ a \cdot b &\le a \cdot (b + c) && (11) \end{aligned}$$

$$a \cdot c \le a \cdot (b + c) \tag{12}$$
$$a \cdot b + a \cdot c \le a \cdot (b + c) \tag{13}$$

- (12): аналогично (11)

6. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$) также выполнено и $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot (a + c) &= (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot c && (14)\\ &= a + (a + b) \cdot c && (15)\\ &= a + a \cdot c + b \cdot c && (16)\\ &= a + b \cdot c && (17)\end{aligned}$$

- (14): по дистрибутивности

7. Рассмотрим топологическое пространство $\langle X, \Omega\rangle$, упорядочим его топологию Ω отношением $\subseteq$. Покажите, что такая конструкция является псевдобулевой алгеброй, а если топология — дискретная (любое подмножество X открыто), то булевой алгеброй.

   Это решетка, т.к. топология замкнута по $\cap, \cup$ и $a + b = a \cup b, a - b = a \cap b$.

   Решетка импликативна, т.к. $c = a \to b \Rightarrow a \cap c \subset b \Rightarrow c = (b \cup (X \setminus a))^\circ$, а оно определено однозначно, т.е. $\exists$.

   Ноль в этой решетке есть $\varnothing$, таким образом это псевдобулева алгебра.

   $a + (a \to 0) = a \cup \varnothing \cup (X \setminus a)^\circ \overset{\text{дискр.}}{=} a \cup (X \setminus a) = X = 1$

8. Докажите, что ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать псевдобулеву алгебру, а функции оценок определить так:

$$\begin{array}{ccc} [\![\alpha \,\&\, \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \vee \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \to \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!] \\ [\![\neg\alpha]\!] & = & [\![\alpha]\!] \to 0 \\ [\![\perp]\!] & = & 0 \end{array}$$

   Разберем случаи:

$[\![\alpha]\!]$	$[\![\beta]\!]$	$[\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!]$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$[\![\alpha]\!]$	$[\![\beta]\!]$	$[\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!]$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$[\![\alpha]\!]$	$[\![\beta]\!]$	$[\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!]$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$[\![\alpha]\!]$	$[\![\alpha]\!] \to 0$
0	1
1	0

Тогда несложно заметить, что с $V = \{0, 1\}$ оценки на псевдобулевой алгебре эквивалентны оценкам обычной интуиционистской логики, а она корректна.

9. Пусть задано отношение *предпорядка* R (транзитивное и рефлексивное, но необязательно антисимметричное) на множестве A. Напомним несколько определений:

   - определим отношение $R^= := \{\langle x, y\rangle \mid xRy \text{ и } yRx\}$;
   - $[a]_{R^=} := \{x \mid aR^=x\}$ — класс эквивалентности, порождённый элементом a;
   - фактор-множество $A/R^= := \{[a]_{R^=} \mid a \in A\}$;
   - на $A/R^=$ можно перенести отношение $R^* := \{\langle [a], [b]\rangle \mid aRb\}$.

   Покажите, что: отношение $R^=$ — отношение эквивалентности; если $x \in [a]_{R^=}$, $y \in [b]_{R^=}$ и aRb, то xRy; отношение R^* — отношение порядка на $A/R^=$.

   Доказательство. Рефлексивность и симметричность очевидны из определения $R^=$.

   $\lhd xR^=y, yR^=z \Rightarrow xRy, yRz \Rightarrow xRz$ и аналогично $zRx \Rightarrow xR^=z$, получили транзитивность.

   $$aRb, aR^=x, bR^=y \Rightarrow aRx, bRy. \begin{cases} xRa \\ aRb \\ bRy \end{cases} \Rightarrow xRy$$

   - Рефлексивность: $aR^*a \Leftarrow aRa$, что выполнено по рефлексивности R
   - Антисимметричность: $aR^*b, bR^*a \Rightarrow aRb, bRa \Rightarrow a, b \in [a]_{R^=}$ и $\in [b]_{R^=}$, но классы эквивалентности не пересекаются $\Rightarrow a = b$.
   - Транзитивность: по транзитивности R.

□

10. Покажем, что конструкция из определения алгебры Линденбаума действительно является решёткой:

(a) Покажите, что отношение $(\approx)$ — отношение эквивалентности (напомним, что $\alpha \preceq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$, а $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$). *Подсказка:* воспользуйтесь предыдущим заданием.

Покажем, что $\vdash$ есть предпорядок.

- Рефлексивность: $\alpha \vdash \alpha$
- Транзитивность: $\alpha \vdash \beta, \beta \vdash \gamma$ — верно по MP и теореме о дедукции. Также можно без них — берем вывод β, приписываем вывод γ, но удаляем шаги $\beta \in \Gamma$.

$\vdash$ это предпорядок, а $\approx$ есть его $R^{=}$. По предыдущему номеру $\approx$ — отношение эквивалентности.

(b) Покажите, что $[\alpha]_{\approx} \cdot [\beta]_{\approx} = [\alpha \,\&\, \beta]_{\approx}$. Для этого, например, можно показать:

- $\alpha \,\&\, \beta \preceq \alpha$: $\alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha$ — очевидно *(аксиома 4 и MP).*
- если $\gamma \preceq \alpha$ и $\gamma \preceq \beta$, то $\gamma \preceq \alpha \,\&\, \beta$; *(аксиома 3 и MP дважды)*
- операция однозначно определена для всех элементов решётки (то есть определена для всех классов эквивалентности и не зависит от выбора представителей). *Подсказка:* воспользуйтесь предыдущим заданием.

  Покажем независимость от выбора представителей:

  Если $\alpha \approx \gamma$, то $\alpha \,\&\, \beta \approx \gamma \,\&\, \beta$, т.к.:

$$\alpha \,\&\, \beta \approx \gamma \,\&\, \beta \Leftarrow \begin{cases} \alpha \,\&\, \beta \vdash \gamma \,\&\, \beta \Leftarrow \begin{cases} \alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha, \beta \\ \alpha \vdash \gamma \end{cases} \\ \gamma \,\&\, \beta \vdash \alpha \,\&\, \beta \Leftarrow \begin{cases} \alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha, \beta \\ \gamma \vdash \alpha \end{cases} \end{cases}$$

  $\beta \approx \gamma \Rightarrow \alpha \,\&\, \beta \approx \alpha \,\&\, \gamma$ аналогично.

  Определенность для всех классов была показана в предыдущих пунктах.

(c) Покажите, что $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$.

- $\alpha \preceq \alpha \vee \beta$ и $\beta \preceq \alpha \vee \beta$ — очевидно по аксиомам 6, 7.

- Если $\alpha \preceq \gamma$ и $\beta \preceq \gamma$, то $\alpha \vee \beta \preceq \gamma$

$$\begin{cases}\alpha \vdash \gamma \\ \beta \vdash \gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vdash \alpha \to \gamma \\ \vdash \beta \to \gamma\end{cases} \xRightarrow{\text{акс. 8, М.Р.}} \alpha \vee \beta \vdash \gamma$$

- Независимость от выбора представителей

  Если $\alpha \approx \gamma$, то $\alpha \vee \beta \approx \gamma \vee \beta$, т.к.:

$$\alpha \vee \beta \approx \gamma \vee \beta \Leftarrow \begin{cases}\alpha \vee \beta \vdash \gamma \vee \beta \\ \gamma \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta\end{cases}$$

$$\Gamma := \alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \quad \dfrac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha \to \gamma}}{\Gamma, \alpha \vdash \gamma}}{\Gamma, \alpha \vdash \gamma \vee \beta} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \beta \vdash \beta}}{\Gamma, \beta \vdash \gamma \vee \beta} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}}{\Gamma \vdash \gamma \vee \beta}$$

  Аналогично для $\gamma \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta$

(d) Покажите, что $[\alpha] \to [\beta] = [\alpha \to \beta]$.

- $\alpha \,\&\, (\alpha \to \beta) \preceq \beta$ — по аксиомам 4, 5 и М.Р.
- Если $\alpha \,\&\, \gamma \preceq \beta$, то $\gamma \preceq \alpha \to \beta$

$$\begin{aligned}\alpha \,\&\, \gamma \to \beta &\vdash \gamma \to \alpha \to \beta \\ \alpha \,\&\, \gamma \to \beta, \gamma &\vdash \alpha \to \beta \\ \alpha \,\&\, \gamma \to \beta, \gamma, \alpha &\vdash \beta\end{aligned}$$

  Это доказывается через аксиому 3 и М.Р.

- Независимость от выбора представителей

  Если $\gamma \approx \alpha$, то:

  i. $\alpha \to \beta \approx \gamma \to \beta$

     $\Gamma := \alpha \to \beta, \gamma \to \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \gamma \vdash \gamma} \quad \dfrac{}{\Gamma, \gamma \vdash \gamma \to \alpha}}{\Gamma, \gamma \vdash \alpha} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \gamma \vdash \alpha \to \beta}}{\dfrac{\Gamma, \gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \gamma \to \beta}}$$

Аналогично $\gamma \to \beta \vdash \alpha \to \beta$

ii. $\beta \to \alpha \approx \beta \to \gamma$

$\Gamma := \beta \to \alpha, \alpha \to \gamma$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \beta \vdash \beta} \quad \dfrac{}{\Gamma, \beta \vdash \beta \to \alpha}}{\Gamma, \beta \vdash \alpha} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \beta \vdash \alpha \to \gamma}}{\dfrac{\Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \beta \to \gamma}}$$

(e) Найдите классы эквивалентности для 0 и 1.

$\forall \alpha \;\; 0 \preceq \alpha$

$$\begin{aligned} 0 &\vdash \alpha \\ &\vdash 0 \to \alpha \\ &\vdash 0 \to \neg\alpha \\ &\vdash (0 \to \alpha) \to (0 \to \neg\alpha) \to \neg 0 \\ &\vdash \neg 0 \end{aligned}$$

Итого $\forall \alpha \;\; 0 \preceq \alpha \Rightarrow \vdash \neg 0$. Докажем “$\Leftarrow$”.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg 0, 0 \vdash 0} \quad \dfrac{}{\neg 0, 0 \vdash 0 \to \perp}}{\neg 0, 0 \vdash \perp}}{\neg 0, 0 \vdash \alpha}}{\neg 0 \vdash 0 \to \alpha}$$

Итого $[0]_\approx$ есть множество формул β, таких что $\vdash \neg\beta$.

$\forall \alpha \;\; \alpha \preceq 1$

Рассмотрим $\alpha = \beta \to \beta$. По построению 1 получается $\beta \to \beta \vdash 1$. Рассмотрим такое доказательство. Если в нём используется $\beta \to \beta$ с обоснованием $\in \Gamma$, вставим доказательство $\beta \to \beta$ и удалим такой шаг. Доказательство останется верным, но не будет использовать факт $\beta \to \beta \in \Gamma$, следовательно $\vdash 1$.

Итого $\forall \alpha \;\; \alpha \preceq 1 \Rightarrow \vdash 1$. Докажем “$\Leftarrow$”. Этот факт очевиден, т.к. доказательство $\vdash 1$ есть доказательство $\alpha \vdash 1$.