

## Алгебра скалярных полиномов

$\triangleleft K$  — поле, над которым задано множество полиномов  $K_\infty[\lambda]$ , также обозначается  $P_\infty[K]$

$$P_\infty[K] = \{p_n(\lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda^i \quad \forall n\}$$

*Примечание.*  $P_\infty[K]$  — линейное пространство:

$$p, q \in P_\infty[K]; \lambda \in K \Rightarrow \begin{cases} (p+q)(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda) \\ (\lambda p)(\lambda) = \lambda p(\lambda) \end{cases} \Rightarrow P_\infty[K] \text{ — линейное пространство}$$

*Примечание.*  $P_\infty[K]$  — коммутативная алгебра

Зададим операцию умножения в  $P_\infty[K]$ :

$$\begin{aligned} \forall p, q \in P_\infty[K] \quad (p \cdot q)(\lambda) &= p(\lambda)q(\lambda) \\ (p \cdot q)(\lambda) &= p(\lambda)q(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) = (qp)(\lambda) \Rightarrow \text{коммутативность} \\ (p \cdot q) \cdot r &= p \cdot (q \cdot r) = p \cdot q \cdot r \\ (p+q)r &= pr + qr \\ (\lambda p)q &= p(\lambda q) = \lambda(pq) \end{aligned}$$

Нейтральный элемент:

- по сложению:  $0(\lambda) = 0$
- по умножению:  $1(\lambda) = 1$

*Примечание.*  $\{1, t, t^2 \dots t^n \dots\}$  — базис  $P_\infty[K] \Rightarrow \dim P_\infty[K] = \infty$

**Определение.** Идеалом  $J$  алгебры  $P_\infty[K]$  называется такое её подпространство, что

$$\forall q \in J \quad \forall p \in P_\infty[K] \quad q \cdot p \in J$$

*Пример.* Тривиальные идеалы:

- $\{0\}$
- $P_\infty[K]$

**Лемма 1.**  $J$  — линейное подпространство  $P_\infty[K]$

*Доказательство.*  $]q_1, q_2 \in J \quad q_1 + q_2 \in J?$

$$q_1, q_2 \in J \Rightarrow \forall p \quad q_1 p, q_2 p \in J$$

$$q_1 = r\tilde{q}_1, q_2 = r\tilde{q}_2 \quad (q_1 + q_2)p = r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p$$

$$(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in P_\infty[K] \Rightarrow r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in J$$

□

**Лемма 2.**  $J$  — подалгебра  $P_\infty[K]$

*Доказательство.*

$$(q_1 \cdot q_2)p = q_1(q_2p) \in J$$

□

*Пример.*  $J_\alpha = \{p \in P_\infty[K] : p(\alpha) = 0\}$  — идеал

**Лемма 3.**  $]q \in P_\infty[K] \Rightarrow J_q = q \cdot P_\infty[K]$  — идеал в  $P_\infty[K]$

*Доказательство.*  $]r \in J_q \Rightarrow \exists p \in P_\infty[K] : r = q \cdot p$

$$] \tilde{p} \in P_\infty[K]$$

$$r\tilde{p} = (qp)\tilde{p} = q(p\tilde{p})$$

$$p\tilde{p} \in P_\infty[K] \Rightarrow q(p\tilde{p}) \in q \cdot P_\infty[K] = J_q \Rightarrow J_q \text{ — идеал}$$

□

**Определение.** Полином  $q : J_q = q \cdot P_\infty[K]$  называется **порождающим полиномом** идеала  $J_q$

*Примечание.* Если идеал содержит  $1(\lambda)$ , то данный идеал совпадает с  $P_\infty[K]$ :

$$J_1 = 1 \cdot P_\infty[K] = P_\infty[K]$$

**Определение.**  $]J_1$  и  $J_2$  — идеалы в  $P_\infty[K]$

1. Суммой  $J_1 + J_2$  называется множество

$$J_s = \{p \in P_\infty[K] : p = p_1 + p_2 \quad p_1 \in J_1, p_2 \in J_2\}$$

2. Пересечением  $J_1 \cap J_2$  называется множество:

$$J_r = \{p \in P_\infty[K] : p \in J_1 \wedge p \in J_2\}$$

**Лемма 4.**  $J_s$  и  $J_r$  — идеалы в  $P_\infty[K]$

*Доказательство.*  $J_s = J_1 + J_2$  — идеал?

$$]q \in J_s \Rightarrow q = q_1 + q_2 \quad q_1 \in J_1, q_2 \in J_2$$

$$]p \in P_\infty[K] \quad qp = (q_1 + q_2)p = q_1p + q_2p$$

$$q_1p \in J_1, q_2p \in J_2 \Rightarrow q_1p + q_2p \in J_s$$

$$J_r = J_1 \cap J_2 \text{ — идеал?}$$

$$]q \in J_r \Rightarrow q \in J_1; q \in J_2$$

$$]p \in P_\infty[K] \quad qp \in J_1; qp \in J_2 \Rightarrow qp \in J_r$$

□

**Определение.** Нетривиальный полином минимальной степени, содержащийся в идеале, называется **минимальным полиномом идеала**.

**Лемма 5.** Любой полином идеала  $J$  делится на  $p_J$  без остатка:

$$\forall p \in J \Rightarrow p \mid p_J$$

*Доказательство.*  $\exists p : p \nmid p_J \Rightarrow p = qp_J + r; \deg r < \deg p_J \Rightarrow r = p - qp_J : \text{min полином} - \text{противоречие.}$   $\square$

*Примечание.* Если  $p_1$  и  $p_2$  — минимальные полиномы  $J \Rightarrow p_1 = \alpha p_2; \alpha \in K$

**Теорема 1.** Минимальный полином идеала является его порождающим полиномом.

*Доказательство.*  $\forall p \in J \quad p \mid p_J \Rightarrow p = p_J \cdot q \in p_J \cdot P_\infty[K]$

$$\forall p \in q \cdot P_\infty[K] \Rightarrow p = qr; r \in P_\infty[K] \Rightarrow \forall p \mid q \Rightarrow q = p_J \quad \square$$

**Лемма 6.** Сравнение идеалов:

$$J_1 \subset J_2 \Leftrightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$$

*Доказательство.* “ $\Rightarrow$ ”

$$J_1 \subset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \in J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$$

“ $\Leftarrow$ ”

$$\exists p_{J_1} \mid p_{J_2} \Rightarrow p_{J_1} = r p_{J_2}$$

$$\forall q \in J_1 \quad q = \tilde{q} p_{J_1} = \tilde{r} p_{J_2} \Rightarrow q \mid p_{J_2} \Rightarrow J_1 \subset J_2 \quad \square$$

**Лемма 7.** О минимальном полиноме пересечения

$$J_1 \Leftrightarrow p_{J_1} \quad J_2 \Leftrightarrow p_{J_2} \Rightarrow J_r = J_1 \cap J_2 \Leftrightarrow r_J = \text{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

*Доказательство.*  $J_r = J_1 \cap J_2 \Rightarrow J_r \subset J_1 \wedge J_r \subset J_2 \Rightarrow r_J \mid p_{J_1} \wedge r_J \mid p_{J_2} \Rightarrow r_J = \text{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2})$   $\square$

**Лемма 8.** О минимальном полиноме суммы

$$J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow S_J = \text{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

*Доказательство.*  $J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow J_s \supset J_1 \wedge J_s \supset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid S_J \wedge p_{J_2} \mid S_J \Rightarrow S_J = \text{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2})$   $\square$

**Теорема 2.** О взаимно простых полиномах

$[p_1, p_2]$  — взаимно простые, т.е.  $\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in P_\infty[K] : p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$

*Доказательство.*  $p_1 \leftrightarrow J_1 = p_1 P_\infty[K]$

$p_2 \leftrightarrow J_2 = p_2 P_\infty[K]$

$\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \leftrightarrow J_1 + J_2 = P_\infty[K]$

$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$

□

**Теорема 3.** Обобщение

$$p_1 \dots p_k \in P_\infty[K], \text{НОД}(p_1 \dots p_k) = 1 \Rightarrow \exists q_1 \dots q_k : \sum_{i=1}^k p_i q_i = 1$$

*Доказательство.* Аналогично.

□

*Примечание.*  $[p] = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k, \{p_i\}$  взаимно простые  $\Rightarrow \exists q_1 \dots q_k : p'_1 q_1 + p'_2 q_2 + \dots + p'_k q_k = 1, p'_j = \frac{p}{p_j}$

## Алгебра операторных полиномов

$[\varphi] : X \rightarrow X$  — линейный оператор

**Определение.** Операторным полиномом  $p(\varphi)$  называется полином вида:

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i, \varphi^0 = I$$

**Определение.**  $\mathcal{P}_\varphi = \{p_n(\varphi) \mid \forall n\}$  — множество операторных полиномов

**Лемма 9.**  $\mathcal{P}_\varphi$  — линейное пространство

**Лемма 10.**  $\mathcal{P}_\varphi$  — коммутативная алгебра

*Доказательство.*

$$\forall p(\varphi), q(\varphi) \quad p(\varphi)q(\varphi) = q(\varphi)p(\varphi) \Leftrightarrow \varphi^m \varphi^n = \varphi^n \varphi^m$$

□

$$\triangleleft S_\varphi : P_\infty[K] \rightarrow \mathcal{P}_\varphi$$

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda^i \xrightarrow{S_\varphi} p(\varphi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i$$

**Лемма 11.**  $S_\varphi$  — гомоморфизм алгебр  $P_\infty[K]$  и  $\mathcal{P}_\varphi$

*Доказательство.*

$$p(\lambda) + q(\lambda) = (p + q)(\lambda) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \beta_i) \lambda^i \mapsto \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \beta_i) \varphi^i = (p + q)(\varphi) = p(\varphi) + q(\varphi)$$

$$\alpha p(\lambda) \mapsto \alpha p(\varphi) \text{ аналогично}$$

$$p(\lambda)q(\lambda) = (pq)(\lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \lambda^{i+j} \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \varphi^{i+j} = (pq)(\varphi) = p(\varphi)q(\varphi)$$

$$1 \mapsto \varphi^0 = I$$

□

**Лемма 12.**  $p_1, p_2 \in P_\infty[K]$ ,  $\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in P_\infty[K] : p_1(\varphi)q_1(\varphi) + p_2(\varphi)q_2(\varphi) = I$

*Доказательство.* Применим к обеим частям  $p_1(\lambda)q_1(\lambda) + p_2(\lambda)q_2(\lambda) = 1$  отображение  $S_\varphi$  :

$$p_1(\varphi)q_1(\varphi) + p_2(\varphi)q_2(\varphi) = I$$

□

**Теорема 4.** О сумме ядер.

$$]p = p_1 \cdot p_2, \quad p_1, p_2 \in P_\infty[K]$$

$]p_1, p_2$  — взаимно простые

Тогда

$$\text{Ker } p(\varphi) = \text{Ker } p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker } p_2(\varphi)$$

Т.е., по определению  $\dot{+}$ :

$$\forall x \in \text{Ker } p(\varphi) \quad \exists! x_1 \in \text{Ker } p_1(\varphi), x_2 \in \text{Ker } p_2(\varphi) \quad x = x_1 + x_2$$

*Доказательство.* Покажем, что  $\text{Ker } p_1(\varphi) + \text{Ker } p_2(\varphi) \subset \text{Ker } p(\varphi)$

$]x_j \in \text{Ker } p_j(\varphi) \Rightarrow$

$$p(\varphi)(x) = p(\varphi)(x_1 + x_2) = p_1(\varphi)p_2(\varphi)x_1 + p_1(\varphi)p_2(\varphi)x_2 = 0 + 0 = 0$$

Покажем, что  $\text{Ker } p(\varphi) \subset \text{Ker } p_1(\varphi) + \text{Ker } p_2(\varphi)$

$]x \in \text{Ker } p(\varphi)$

$$\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow p_1(\varphi)q_1(\varphi) + p_2(\varphi)q_2(\varphi) = I$$

$$x = Ix = p_1(\varphi)q_1(\varphi)x + p_2(\varphi)q_2(\varphi)x$$

$$p_2(\varphi)q_2(\varphi)x \in \text{Ker } p_1(\varphi) \Leftarrow p_1(\varphi)p_2(\varphi)q_2(\varphi)x = p(\varphi)q_2(\varphi)x = 0$$

Покажем, что  $\text{Ker } p_1(\varphi) + \text{Ker } p_2(\varphi)$  — прямая сумма

$\angle \text{Ker } p_1(\varphi) \cap \text{Ker } p_2(\varphi) \ni z$

$$z = Iz = p_1(\varphi)q_1(\varphi)z + p_2(\varphi)q_2(\varphi)z = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \dim \text{Ker } p_1(\varphi) \cap \text{Ker } p_2(\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ker } p_1(\varphi) + \text{Ker } p_2(\varphi) \text{ — прямая сумма}$$

□

*Примечание.* Пусть  $p = p_1 \dots p_k$ ,  $\{p_k\}$  — взаимно простые  $\Rightarrow$

$$\text{Ker } p(\varphi) = \dot{+} \sum_{j=1}^k \text{Ker } p_j(\varphi)$$