

1 Случайные величины

Определение. Случайная величина — отображение $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Рассмотрим игру, где преподаватель бросает честную монетку, и если выпал 0, то он платит 1 рубль, иначе каждый ученик платит ему 1 рубль. Заметим, что игра не честная, т.к. $win(0) = -1, win(1) = 100$; $win : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Определение. Функция распределения случайной величины:

$$F_{\xi}(a) = P(\xi \leq a)$$

В выше рассмотренной игре $F_{win}(a) = \begin{cases} 0 & a < -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \leq a < 100 \\ 1 & a \geq 100 \end{cases}$

Определение. Плотность распределения случайной величины $f_{\xi}(a) = P(\xi = a)$ $f_{\xi}(a) = F'_{\xi}(a)$

График плотности распределения величины выигрыша для вышеуказанной игры $f_{\xi}(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} & a = -1 \\ \frac{1}{2} & a = 100 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Вернемся к игре преподавателя. $\Omega = \{0, 1\}$ $win(0) = -1, win(1) = 100$ $P(win = -1) = \frac{1}{2}, P(win = 100) = \frac{1}{2}$

Определение. Математическое ожидание — среднее взвешенное значение случайной величины.

$$E_{\xi} = M_{\xi} = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot \xi(\omega)$$

В игре преподавателя

$$E_{\xi} = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}100 = 49.5$$

$$E_{\xi} = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot \xi(\omega) = \sum_a \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \xi(\omega)=a}} p(\omega) \cdot a = \sum_a a \cdot P(\xi = a)$$

1.1 Действия с случайными величинами

ξ, η — случайные величины. Следующие операции возможны:

$$\xi + \eta \quad \xi \cdot \eta \quad a \in \mathbb{R} \cdot \xi \quad \xi^2 \quad \arctg \xi$$

$$F_{c\xi}(a) = P(c\xi \leq a) = P(\xi \leq \frac{a}{c}) = F_{\xi}\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$f_{c\xi}(a) = f_{\xi}\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$E(c\xi) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot c \cdot \xi(\omega) = c \cdot E(\xi)$$

$$E(\xi + \eta) = \sum_{\omega} p(\omega)(\xi(\omega) + \eta(\omega)) = \sum_{\Omega} (p(\omega)\xi(\omega) + p(\omega)\eta(\omega)) = E\xi + E\eta$$

Определение. **Неподвижной точкой** в перестановке называется такой индекс i , что $\pi_i = i$

Рассмотрим $\xi(\pi)$ — количество неподвижных точек в случайной перестановке.

Посчитать распределение ξ — сложная задача, в отличие от матожидания.

$$\xi_i(\pi) := \begin{cases} 1 & \pi[i] = i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Такие величины называются **индикаторными**.

$$\xi(\pi) = \sum_{i=1}^n \xi_i(\pi)$$

$$P(\xi_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$E_{\xi_i} = 0 \cdot \frac{n-1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$E_{\xi} = 1$$

Итого в случайной перестановке ожидается ровно 1 неподвижная точка.

Можно заметить, что ξ_i вроде как влияют друг на друга — если все, кроме одной $\xi_i = 1$, то и оставшаяся $\xi_j = 1$. Однако это не влияет на матожидание.

Определение. ξ и η — **независимые**, если $\forall a, b$ события $\xi \leq a$ и $\eta \leq b$ — независимые.

Матожидание линейно всегда, в том числе для зависимых величин.

Теорема 1. ξ и η — независимые, если $E(\xi, \eta) = E_{\xi}E_{\eta}$

Лемма 1. ξ и η — независимые $\Leftrightarrow [\xi = a], [\eta = b]$ независимые $\forall a$ и b

$$\begin{aligned}
E(\xi\eta) &= \sum_a P(\xi\eta = a)a = \sum_a \sum_x P(\xi \cdot \eta = a | \xi = x) \\
P(\xi = x) \cdot a &= \sum_a \sum_x P\left(\eta = \frac{a}{x}\right) P(\xi = x) \frac{a}{x} \cdot x \\
P(\xi\eta = a | \xi = x) &= \frac{P(\xi\eta = a \cap \xi = x)}{P(\xi = x)} = \frac{P(\xi = x \cap \eta = \frac{a}{x})}{P(\xi = x)} = \\
&= \frac{P(\xi = x)P(\eta = \frac{a}{x})}{P(\xi = x)} = P(\eta = \frac{a}{x})
\end{aligned}$$

Матожидание — не единственная оценка игры. Ещё есть **дисперсия** — квадрат матожидания разности величины и её матожидания:

$$\begin{aligned}
Var(x) &= Dx = E(x - Ex)^2 = E(x^2 - 2xEx + (Ex)^2) = Ex^2 - 2ExEx + (Ex)^2 = Ex^2 - (Ex)^2 \\
D(\xi + \eta) &= E(\xi + \eta)^2 - (E\xi + E\eta)^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E(\xi\eta) - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi E\eta = \\
&= D\xi + D\eta + 2(E\xi\eta - E\xi E\eta) =: D\xi + D\eta + Cov(\xi, \eta)
\end{aligned}$$