

**Теорема 1** (об абсолютной непрерывности интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f$  суммируемо

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E - \text{изм.}, \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

*Следствие 1.*  $f$  суммируемо на  $X$ ,  $E_n \subset X$ , тогда  $\mu E_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \rightarrow 0$

*Доказательство.* <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} X_n &:= X(|f| \geq n) \\ X_n \supset X_{n+1} \supset \dots &\Rightarrow \mu \left( \bigcap X_n \right) \stackrel{(1)}{=} 0 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть  $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ . Тогда при  $\mu E < \delta$ :

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| \stackrel{(3)}{=} \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{\delta} \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

- (1): Т.к.  $f$  на  $\bigcap X_n$  бесконечна и  $f$  почти везде конечна.
- (2): По непрерывности сверху меры  $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
- (3): Т.к.  $|f|$  на  $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$  не превосходит  $n_\varepsilon$  по построению  $X_{n_\varepsilon}$

□

*Примечание.* Следующие два свойства не эквивалентны:

1.  $f_n \xRightarrow[\mu]{def} f \iff \forall \varepsilon > 0 \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$
2.  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

Из 1 не следует 2: пусть  $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$ ,  $f_n = \frac{1}{nx}$ . Тогда  $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ , но  $\int |f_n - f| = +\infty$  при всех  $n$ .

Из 2 следует 1, т.к.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

<sup>1</sup> Теоремы, не следствия

**Теорема 2** (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists g$ , называемое “суммируемая мажоранта”:

1.  $\forall n \quad |f_n| \stackrel{(4)}{\leq} g$  почти везде
2.  $g$  — суммируемо на  $X$

Тогда:  $f_n, f$  — суммируемы и  $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , и тем более  $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

*Примечание.* Почти везде конечность  $f_n$  и  $f$  следует из (4), поэтому в условии этого можно не требовать.

*Доказательство.*  $f_n$  — суммируемы в силу неравенства (4),  $f$  суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более  $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1.  $\mu X < +\infty$

Зафиксируем  $\varepsilon$ .  $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

$f_n \Rightarrow f$ , т.е.  $\mu X_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq 2g \\ \int_X |f_n - f| &= \int_{X_n} + \int_{X_n^c} = \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \text{сл. т. об абс. непр.}}} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X \xrightarrow{\quad} 0 \end{aligned}$$

2.  $\mu X = +\infty$

Утверждение:  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \subset X$ , изм., конечной меры,  $\mu A$  конечно :  $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$ .  
Докажем его.

$$\begin{aligned} \int_X g &= \sup \left\{ \int g_n, 0 \leq g_n \leq g, g_n - \text{ступ.} \right\} \\ A &:= \{x : g_n(x) > 0\} \\ 0 &\leq \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{< 2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

**Теорема 3 (Лебега).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо
- $f_n \rightarrow f$  почти везде
- $\exists g$ , называемое “суммируемая мажоранта”:

1.  $\forall n \quad |f_n| \leq g$  почти везде

2.  $g$  — суммируемо на  $X$

Тогда  $f_n, f$  — суммируемы,  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

Не дописано