Функциональные последовательности и ряды

Пример. $\sum x^n, x \in (0,1)$ — нет равномерной сходимости

$\exists \varepsilon = 0.1\ \ \forall N\ \ \exists n > N$ — подходит любое > 100 $\exists p = 1\ \ \exists x = 1 - \frac{1}{n+1} : |u_{n+1}(x)| \geq \varepsilon$, т.е. $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \approx \frac{1}{e} > \frac{1}{10}$

Теорема 1 (признак Вейерштрасса).

- $\sum u_n(x)$
- $x \in X$

Пусть $\exists c_n$ — вещественная:

- $|u_n(x)| \leq c_n$ при $x \in E$
- $\sum c_n$ — сходится

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство. $|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}$ — тривиально

$\sum c_n$ — сх. $\Rightarrow c_n$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши :

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in E\ \ c_{n+1} + \ldots c_{n+p} < \varepsilon$$

Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}, x \in \mathbb{R}$. Попытаемся применить признак.

$c_n := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$ — это минимальное возможное c_n, если для него не сработает признак, до ни для какого c_n не сработает.

sup достигается в точке $x_0 = \frac{1}{n}$, $\sup = \frac{1}{2n}$. $\sum \frac{1}{2n}$ расходится $\Rightarrow$ признак не сработал.

Построим отрицание критерия Больцано-Коши:

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{6}\ \forall N\ \exists n > N\ \ p = n \in \mathbb{N}\ \exists x = \frac{1}{n}\ \ |u_{n+1}(x) + u_{2n}(x)| = \frac{\frac{1}{n}}{1 + (n+1)^2 \frac{1}{n^2}} + \ldots \frac{\frac{1}{n}}{1 + (2n)^2 \frac{1}{n^2}} \geq$$

$$\geq n \frac{\frac{1}{n}}{1 + (2n)^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{5} > \frac{1}{6} = \varepsilon$$

Пример. $\sum \dfrac{x}{1 + x^2 n^2}, x \in \left(\dfrac{1}{2020}, 2020\right)$

$$c_n := \sup \frac{x}{1+x^2n^2} \leq \frac{2020}{1+\frac{1}{2020^2}n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^2}$$

$\sum c_n$ сходится $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость.

Приложения равномерной сходимости для рядов

Теорема 1' (Стокса-Зайдля для рядов).

- $u_n : X \to Y$
- X — метрическое пространство
- Y — нормированное пространство
- $x_0 \in X$
- u_n непрерывно в x_0
- $\sum u_n(x)$ **равномерно** сходится на X
- $S(x) := \sum u_n(x)$

Тогда $S(x)$ непрерывно в x_0.

Доказательство. По теореме 1 $S_n(x) \rightrightarrows S(x), S_n(x)$ — непр. в $x_0 \xRightarrow{\text{т. 1}} S(x)$ непр. в x_0 □

Примечание. Достаточно равномерной сходимости $u_n(x)$ на некоторой окрестности x_0

Примечание. $u_n \in C(x), \sum u_n$ — равномерно сходится на $X \Rightarrow S(x) \in C(x)$

Теорема 2'. О почленном интегрировании ряда

- $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$
- u_n — непр. на $[a,b]$
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ **равномерно** сходится на $[a,b]$
- $S(x) = \sum u_n(x)$

Тогда $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx$

Можно интегрировать, т.к. $S(x)$ — непр. на $[a,b]$ по теореме 1'

Доказательство. По теореме 2

$S_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$

По теореме 2:

$$\int_a^b S_n(x)dx \to \int_a^b S(x)dx$$

$$\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} u_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(x)dx \xrightarrow{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)dx$$

$\square$

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ — равномерно сходится при $|x| \le q < 1$ по Вейерштрассу: $|(-1)^n x^n| \le q^n, \sum q^n$ сходится.

Проинтегрируем от 0 до t ($|t| \le q$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}$$

Это верно при $t \in [-q, q] \ \ \forall q : 0 < q < 1$, т.е. верно при $t \in (-1, 1)$

При $t = -1$ $\sum -\frac{1}{k}$ расходится

При $t \to 1$ ряд $\sum (-1)^{k+1} \dfrac{t^k}{k}$ равномерно сходится (*) на $[0, 1]$, слагаемые непрерывны в $t_0 = 1 \overset{\text{т. 1}}{\Longrightarrow}$ сумма ряда непрерывна в точке $t_0 = 1 \Rightarrow \ln 2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(*): равномерная сходимость есть по секретному приложению к признаку Лейбница:

$\forall t \ \ \dfrac{t^k}{k}$ — монотонно убывает по $k \Rightarrow \left| \underbrace{\sum_{k=N}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}}_{S_{N-1}-S} \right| \le \left| \dfrac{t^N}{N} \right| \le \underbrace{\dfrac{1}{N}}_{\text{не зависит от } t} \to 0$, это и есть равномерная сходимость ряда.

Криволинейный интеграл

Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

Определение.

- Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

- $\gamma(a)$ — начало пути
- $\gamma(b)$ — конец пути
- $\gamma[a, b]$ — носитель пути
- Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, путь называется замкнутым или петлёй.
- Если γ — гладкое или кусочно-гладкое, то $\gamma'(t)$ — вектор скорости
- Кусочно-гладкое отображение - отображение, имеющее не более, чем счётное число точек разрыва, все точки разрыва - I рода и $\gamma\Big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое $\forall k$, где t_k — точка разрыва.
- $\gamma(t) = (\gamma_1(t) \dots \gamma_m(t))$, то $\gamma' = (\gamma_1' \dots \gamma_m')$
- Длина гладкого пути это $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Определение. Векторное поле — непрерывное отображение $V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\forall x \in E \ \ V(x) \in \mathbb{R}^m$ — вектор, "приложенный к точке x".

Определение. Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \\ &= \int_a^b V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m \end{aligned}$$

Также используется обозначение $I(V, \gamma) = \int_\gamma V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m$

Пусть V — поле силы. Запишем интегральную сумму для интеграла векторного поля:

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle V(\gamma(\xi_k)), \gamma'(\xi_k) \rangle (t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \overbrace{\underbrace{\left\langle V(\gamma(\xi_k)), \frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|} \right\rangle}_{\substack{\text{проекция силы на} \\ \text{касательную к направлению}}} \underbrace{|\gamma'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1})}_{\approx \text{ пройденный путь}}}^{\text{работа силы}} \end{aligned}$$

Свойства:

1. Линейность интеграла по полю.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \forall U, V - \text{векторные поля} \ \ I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$$

Доказательство. Очевидно из формулы в определении. □

2. Аддитивность при дроблении пути
   - $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$
   - $c \in (a, b)$
   - $\gamma^1 = \gamma\Big|_{[a,c]}$
   - $\gamma^2 = \gamma\Big|_{[c,b]}$

   Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

   Доказательство. Очевидно из линейности интеграла в . □

3. Замена параметра
   - $\varphi : [p, q] \to [a, b]$
   - $\varphi \in C^1$
   - $\varphi(p) = a$
   - $\varphi(q) = b$
   - $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$
   - $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

   Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$

   Доказательство. Это замена переменной в интеграле.

$$\begin{aligned}
I(V, \tilde{\gamma}) &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(s)\rangle ds \\
&= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s))\rangle \varphi'(s) ds \\
t := \varphi(s) & \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\
&= I(V, \gamma)
\end{aligned}$$

□

Примечание. $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — параметризация гладкого одномерного простого многообразия

$\tilde{\varphi} : [p, q] \to \mathbb{R}^m$ — то же самое

По теореме о двух параметризациях: $\exists$ диффеоморфизм $\varphi : [p, q] \to [a, b]$ $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

4. Объединение носителей

   - $\gamma^1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$
   - $\gamma^2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$
   - $\gamma^1(b) = \gamma^2(c)$

   Зададим путь $\gamma = \gamma^2\gamma^1 : [a, b + d - c] \to \mathbb{R}^m, t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma^2(t + c - b), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$

   В точке b возможен излом, т.е. нет $\gamma'(b)$, но есть левосторонняя и правосторонняя производные.

   Если γ^1, γ^2 — кусочно-гладкие, то γ — кусочно-гладкое.

   Тогда $I(V, \gamma^2\gamma^1) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_b^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ \tau := t - b + c \\ &= \int_a^b \langle V(\gamma^1(t)), \gamma^{1\prime}(t) \rangle dt + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), \gamma^{2\prime}(\tau) \rangle d\tau \\ &= I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2) \end{aligned}$$

   □

5. Противоположный путь

   $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^m, t \mapsto = \gamma(a + b - t)$, т.е. мы идём от b к a, а не наоборот.

   Тогда $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} I(V, \gamma^-) &= \int_a^b \langle V(\gamma(a + b - \tau)), -\gamma'(a + b - \tau) \rangle d\tau \\ t := a + b - \tau \\ &= \int_b^a \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t) \rangle (-dt) \end{aligned}$$

$$= -I(V, \gamma)$$

□

6. Оценка интеграла векторного поля пути

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$$

, где $L = \gamma[a, b]$ — носитель пути.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \right| &\leq \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| \, dt \\ &\leq \int_a^b |V(\gamma(t))||\gamma'(t)| dt \qquad (1) \\ &\leq \sup_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \qquad (2) \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| l(\gamma) dt \end{aligned}$$

(1): Неравенство Коши-Буняковского

(2): V — непр., L — компакт $\Rightarrow$ sup достигается □

Потенциальные векторные поля

Определение. $V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле **потенциально**, если оно имеет потенциал:

$$\exists f \in C^1(O), \nabla f = V$$

Загадка. V — потенциально с потенциалом f_1, f_2 — тоже потенциал. Тогда $f_1 - f_2 = \text{const}$.

Теорема 2 (обобщенная формула Ньютона-Лейбница).

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- V — потенциально
- f — потенциал V
- $\gamma[a, b] \to O$

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

Тогда

$$\int_\gamma \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$$

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1. γ — гладкий

   $\Phi(t) = f(\gamma(t))$

$$\begin{aligned}\Phi' &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\gamma_m'(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum v_k dx_k &= \int_a^b \Phi'(t) dt \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= f(B) - f(A)\end{aligned}$$

2. γ — кусочно-гладкий

   $\exists$ дробление: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b : \gamma\Big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum v_k dx_k &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \varphi'(t) \rangle dt \\ &= \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) \qquad (3) \\ &= f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) \\ &= f(B) - f(A)\end{aligned}$$

   (3): по пункту 1.

□