Первая половина лекции не была записана

Определение. f — n-**гладкая**, если $\forall i = 1 \dots n \;\; \exists\, i$-ная непрерывная производная.

Класс функций $C^n([a, b])$ — множество функций, n-гладких на $[a, b]$

Некоторые разложения по Тейлору:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

Лемма 1. e^2 — ирр.

Доказательство. Предположим обратное: e^2 — рационально. Тогда e^2 представимо следующим образом:

$$e^2 = \frac{2k}{n}$$

$$ne = 2ke^{-1}$$

$$n(2k - 1)!e = (2k)!e^{-1}$$

$$n(2k - 1)!e = n(2k - 1)! \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k - 1)!} + \frac{e^c}{(2k)!}\right) = \text{целое число} + \frac{ne^c}{2k}$$

$$\frac{ne^c}{2k} \le \frac{ne}{2k} = e \cdot e^{-2} = e^{-1} \le \frac{1}{2}$$

$$(2k)!e^{-1} = (2k)! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k)!} - \frac{e^d}{(2k + 1)!}\right) = \text{целое число} - \frac{e^d}{2k + 1}$$

Заметим, что $d \in [-1, 0]$

$$\frac{e^d}{2k+1} \leq \frac{e^d}{3} \leq \frac{e^0}{3} \leq \frac{1}{3}$$

Дробная часть левой части $\leq \frac{1}{2}$, дробная часть правой $\geq \frac{2}{3}$ — противоречие. $\square$

Лемма 2. Метод Ньютона

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — дважды дифф.

$m := \inf\limits_{\langle a,b \rangle} |f'| > 0$

$M := \sup |f''|$

$\xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$

$x_1 \in (a, b) : |x_1 - \xi| \frac{M}{2m} < 1$

Рассмотрим последовательность $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Тогда $\exists \lim x_n = \xi$ и при этом !. Кроме того, оно очень быстро сходится.

$$|x_n - \xi| \leq \left(\frac{M}{2m} |x_1 - \xi| \right)^{2^n}$$

$$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(x_n - \xi) f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$|x_{n+1} - \xi| = \frac{|f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n)|}{|f'(x_n)|} = \frac{\frac{1}{2}|f''(c)||\xi - x_n|^2}{|f'(x_n)|} \leq \frac{2M}{m} |\xi - x_n|^2$$

Теорема 1. О разложении рациональной дроби на простейшие.

$P(x), Q(x)$ — многочлен $\deg P < \deg Q = n$

$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_m)^{k_m} \quad (k_1 + \ldots + k_m = n; a_i \neq a_j)$

Тогда $\exists$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} \right) + \left(\frac{B_1}{(x - a_2)} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x - a_2)^{k_2}} \right) + \\ + \ldots + \left(\frac{C_1}{(x - a_m)} + \frac{C_2}{(x - a_m)^2} + \ldots + \frac{C_{k_m}}{(x - a_m)^{k_m}} \right)$$

Доказательство.

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_m)^{k_m}} = \frac{1}{(x-a_1)^{k_1}}\frac{P(x)}{(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_m)^{k_m}} =$$

$$= \frac{1}{(x-a_1)^{k_1}}(A_{k_1} + A_{k_1+1}(x-a_1) + A_{k_1-2}(x-a_1)^2 + \ldots + A_1(x-a_1)^{k_1} + o((x-a_1)^{k_1}))$$

$$\frac{P}{Q} - \left(\frac{A_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right) = \frac{o((x-a_1)^{k_1})}{(x-a_1)^{k_1}}$$

$\frac{P}{Q}$– (Пр. часть) = знам. сократится $\Rightarrow$ многочлен $\equiv 0$ $\square$