

## Гомотопия

Неформально гомотопия — непрерывная деформация объектов. У нас рассматриваемые объекты — пути.

**Определение.** Гомотопия двух (непрерывных) путей  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$  это непрерывное отображение  $\Gamma : \underbrace{[a, b]}_t \times \underbrace{[0, 1]}_u \rightarrow O$ , такое что:

- $\Gamma(\circ, 0) = \gamma_0$
- $\Gamma(\circ, 1) = \gamma_1$

Гомотопия **связанная** (не связанная), если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$
- $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1] \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_1(b)$



Рис. 1: Связанная гомотопия.  
Пунктиром —  $\Gamma(\circ, u)$  для различных  $u$

Гомотопия **петельная**, если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$
- $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1] \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$



Рис. 2: Петельная гомотопия.  
Пунктиром —  $\Gamma(\circ, u)$  для различных  $u$

### Теорема 1.

- $V$  — локально потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma_0, \gamma_1$  — связанно гомотопные пути

Тогда  $\int_{\gamma_0} \sum V_i dx_i = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

*Примечание.* То же самое верно для петельных гомотопий.

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma$  — гомотопия  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ .

$\gamma_u(t) := \Gamma(t, u), t \in [a, b], u \in [0, 1]$

$$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$$

Мы хотим доказать, что  $\Phi(u) = \text{const}$ . Докажем более простой факт, что  $\Phi$  — локально постоянна, тогда в силу компактности и связности отрезка  $\Phi$  будет постоянна.

Определение локально постоянной функции:

$$\forall u_0 \in [0, 1] \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$$

$\Gamma$  — непр. на  $[a, b] \times [0, 1]$  — комп.  $\Rightarrow \Gamma$  равномерно непрерывна:

$$\forall \delta > 0 \exists \sigma > 0 \forall t, t' : |t - t'| < \sigma \forall u, u' : |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$$

Возьмём  $\delta$  из леммы о похожести близких путей (??) для пути  $\gamma_{u_0}$ .

Если  $|u - u_0| < \sigma$   $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$  при  $t \in [a, b]$ , т.е.  $\gamma_u$  и  $\gamma_{u_0}$  похожи по лемме о похожести близких путей. Хочется сказать, что интегралы по  $\gamma_u$  и  $\gamma_{u_0}$  таким образом равны, однако это не обосновано, для этого необходимо, чтобы пути были кусочно-гладкими.

Построим кусочно-гладкий путь  $\tilde{\gamma}_{u_0}$ ,  $\frac{\delta}{4}$ -близкий к  $\gamma_{u_0}$ , т.е.

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}(t)| < \frac{\delta}{4}$$

и кусочно-гладкий путь  $\tilde{\gamma}_u$ ,  $\frac{\delta}{4}$ -близкий к  $\gamma_u$ . Тогда  $\tilde{\gamma}_{u_0}$  и  $\tilde{\gamma}_u$  -  $\delta$ -близкие к  $\gamma_{u_0} \Rightarrow$  они  $V$ -похожи  $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$$

Таким образом,  $\Phi(u) = \Phi(u_0)$  при  $|u - u_0| < \delta$ , т.е.  $\Phi$  — локально постоянна.  $\square$

**Определение.** Область  $O \subset \mathbb{R}^m$  — **односвязная**, если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному пути.

Простыми словами — в  $O$  нет дырок, иначе путь вокруг дырки нельзя было бы стянуть.



Рис. 3: Стягивание замкнутого пути (сплошной линией) к постоянному пути (точке)

*Примечание.*

1. Выпуклая область — односвязная.

Это доказывается тем, что для любого пути можно применить гомотетию в качестве гомотопии:  $\Gamma(t, u) = F_{1-u}(\gamma(t))$ , где  $F_\alpha$  — гомотетия с центром в произвольной точке  $A$ , лежащей внутри области, ограниченной путём  $\gamma$ , и коэффициентом  $\alpha$

*Примечание.* Гомотетия — равномерное стягивание всех точек к одной.

2. Гомеоморфный образ односвязного множества — односвязен.

$\Phi : O \rightarrow O'$  — гомеоморфизм,  $\gamma$  — петля в  $O'$ ,  $\Phi^{-1}(\gamma)$  — петля в  $O$ .

$\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow O$  — гомотопия  $\Phi^{-1}(\gamma)$  и постоянного пути  $\tilde{\gamma} \equiv A$

$\Phi \circ \Gamma$  — гомотопия  $\gamma$  с постоянным путём  $\tilde{\gamma} \equiv \Phi(A)$

Рис. 4: Применение гомотетии с центром  $A$ **Теорема 2.**

- $O \subset \mathbb{R}^m$  — односвязная область
- $V$  — локально потенциальное векторное поле в  $O$

Тогда  $V$  — потенциальное в  $O$

*Доказательство.*  $V$  — локально потенциально,  $\triangleleft \gamma_0$  — кусочно-гладкая петля, тогда  $\gamma_0$  гомотопна постоянному пути  $\gamma_1 \Rightarrow$

$$\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0$$

Тогда по теореме о характеристизации потенциальных векторных полей в терминах интегралов  $V$  потенциально.  $\square$

*Следствие 2.1.* Теорема Пуанкаре верна в односвязной области.

Пусть даны две плоскости, соединенные гвоздём, между плоскостями есть зазор. На гвоздь надета веревочка в виде петли. Можно ли снять веревочку с гвоздя?

**Теорема 3 (о веревочке).**

- $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow O, t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля нестягиваема.

Неформальная формулировка: пусть даны две плоскости, соединенные гвоздём, между плоскостями есть зазор. На гвоздь надета веревочка в виде петли. Можно ли снять веревочку с гвоздя?



Рис. 5: Вербочка (жирным), надетая на “гвоздь” (цилиндр)

Доказательство.  $V(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  — векторное поле в  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Таким образом,  $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$  в области  $O$ . Тогда по лемме Пуанкаре  $V$  — локально потенциально.

При этом

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum V_i dx_i &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

Таким образом, если бы существовал постоянный путь  $\tilde{\gamma}$ , которому  $\gamma$  гомотопен, то  $\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}} = 0$ , но это не так.  $\square$

## Степенные ряды

Пример. 1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1}} = 1, |z| < 1$  — сходится,  $|z| > 1$  — расходится,  $|z| = 1$  — расходится, т.к. слагаемые  $\not\rightarrow 0$

$$2. \sum \frac{z^n}{n}, R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$$

(a)  $z = 1, \sum \frac{1}{n}$  – расходится

(b)  $z = -1, \sum \frac{(-1)^n}{n}$  – сходится

(c)  $z = e^{i\varphi}, \varphi \neq 0, 2\pi \quad \sum \frac{e^{in\varphi}}{n} = \sum \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{n}$  – сходится по признаку Дирихле.

$$3. \sum \frac{z^n}{n^2}, R = 1, |z| = 1 \Rightarrow \left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ сходится.}$$

$$4. \sum n! z^n, R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n!}} \approx \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}} = \frac{1}{\lim \frac{n}{e}} = 0, \text{ в } 0 \text{ сходится, в остальных точках расходится.}$$

$$5. \sum \frac{z^n}{n!}, R = +\infty - \text{везде сходится.}$$

**Теорема 4** (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда).

- $\sum a_n (z - z_0)^n$
- $0 < R \leq +\infty$

Тогда:

1.  $\forall r : 0 < r < R$  ряд сходится равномерно на  $\overline{B(z_0, r)}$
2.  $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$  – непрерывна в  $B(z_0, r)$

*Доказательство.*

1. Если  $0 < r < R$ , то при  $z - z_0 = r$  ряд абсолютно сходится, т.е.  $\sum |a_n| r^n < +\infty$

Признак Вейерштрасса:

(a) При  $|z - z_0| \leq r \quad |a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$

(b)  $\sum |a_n| r^n < +\infty$

$\Rightarrow$  есть сходимость на  $\overline{B(z_0, r)}$

2. Следствие из пункта 1 и теоремы Стокса-Зайдля.

Если  $z$  удовлетворяет  $|z - z_0| < R$ , то  $\exists r_0 < R : z \in B(z_0, r_0)$

На  $B(z_0, r_0)$  есть равномерная сходимость  $\Rightarrow f$  непр. в точке  $z$ .

□

**Определение.**  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда производная  $f$  это:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*Примечание.*  $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|), h \in \mathbb{C}$

**Лемма 1.**

- $w, w_0 \in \mathbb{C}$
- $|w| < r$
- $|w_0| < r$

Тогда  $|w^n - w_0^n| \leq nr^n |w - w_0|, n \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.*

$$w^n - w_0^n = (w - w_0)(w^{n-1} + \underbrace{w^{n-2}w_0}_{\text{по модулю } \leq r^{n-1}} + \dots + w_0^{n-1})$$

□

**Лемма 2** (о дифференцируемости степенного ряда).

$$(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, 0 < R < +\infty$$

$$(A') \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Тогда:

1. Радиус сходимости (A') равен  $R$
2.  $\forall z \in B(z_0, R) \exists f'(z) \text{ и } f'(z) = \sum n a_n (z - z_0)^{n-1}$

*Доказательство.*

1. По формуле Адамара.

Ряд (A') сходится при каком-то  $z \Leftrightarrow \sum n a_n (z - z_0)^{n-1}$  — сходится.

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{1 \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

2.  $\forall a \in B(z_0, R), \exists r < R : a \in B(z_0, r)$

$$a = z_0 + w_0, |w_0| < r$$

$$z = z_0 + w$$



$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}}_{\substack{\text{модуль по лемме} \\ nr^{n-1}|a_n|}} \quad (1)$$

$\sum nr^{n-1}|a_n|$  сходится по пункту 1.

То есть ряд (1) в круге  $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lim \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum na_n(a - z_0)^{n-1}$$

□