

1. Покажите, что если  $\Gamma \vdash \alpha$ , то  $\Gamma \models \alpha$ .

Вспомним доказательство этой теоремы без  $\Gamma$ , которое было на лекции. Мы фиксировали оценку и рассматривали доказательство  $\alpha$ . По индукции мы доказывали, что каждый шаг доказательства  $\llbracket \delta_n \rrbracket = \text{И}$ , и в частности последний шаг, т.е.  $\alpha$  тоже истинен в данной подстановке. С добавлением  $\Gamma$  у нас в индукционном переходе добавился случай  $\delta_n \in \Gamma$ . Но т.к. мы фиксируем оценку такую, что  $\forall \gamma \in \Gamma \llbracket \gamma \rrbracket = \text{И}$ , индукционный переход работает.

2. Покажите, что если  $\Gamma \models \alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha$ .

(a)  $\llbracket \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha \rrbracket = \text{И}$ .

(b)  $\models \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha$

(c)  $\vdash \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha$  по теореме о полноте

(d)  $\Gamma \vdash \alpha$  по теореме о дедукции

3. О законе исключённого третьего. Покажите, что в интуиционистском исчислении высказываний доказуемо следующее:

(a)  $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \vdash \neg \neg A \rightarrow A$

(b)  $A \vee \neg A \vdash \neg \neg A \rightarrow A$

Докажем  $A \vee \neg A \vdash \neg \neg A \rightarrow A$ :

- |                                                                                                                                     |                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 1. $(A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow A)$                                 | (акс. 8)         |
| 2. $(A \rightarrow A)$                                                                                                              | (было ранее)     |
| 3. $\neg A \rightarrow \neg \neg A \rightarrow A$                                                                                   | (акс. 10)        |
| 4. $\neg \neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg \neg A)$                                                                       | (акс. 1)         |
| 5. $\neg \neg A$                                                                                                                    | ( $\in \Gamma$ ) |
| 6. $\neg A \rightarrow \neg \neg A$                                                                                                 | (М.Р. 4,5)       |
| 7. $(\neg A \rightarrow \neg \neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg \neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ | (акс. 2)         |
| 8. $(\neg A \rightarrow \neg \neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$                                              | (М.Р. 6,7)       |
| 9. $\neg A \rightarrow A$                                                                                                           | (М.Р. 3,8)       |
| 10. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow A)$                                                              | (М.Р. 1,2)       |
| 11. $A \vee \neg A \rightarrow A$                                                                                                   | (М.Р. 9, 10)     |

4. Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:

(a)  $\neg A \vee \neg \neg A$

$$A = (0, +\infty) \quad \neg A = (-\infty, 0) \quad \neg \neg A = (0, +\infty) \quad \neg A \vee \neg \neg A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(b) (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$$

$$A = (1, 2) \cup (2, 3) \quad B = (3, 4)$$

$$(c) \neg\neg A \rightarrow A$$

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(d) (A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$$

$$X = (0, 10) \quad A = (1, 2) \cup (2, 3) \quad B = X \setminus \mathbb{Z}$$

$$(e) (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

5. Можно ли, имея  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$ , доказать закон исключённого третьего в интуиционистской логике?
6. Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять  $\neg(\alpha \& \neg\beta)$ , ведь  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \& \neg\beta)$  и  $\neg(\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:
  - (a) конъюнкцию?
  - (b) дизъюнкцию?
  - (c) импликацию?
  - (d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это.

7. Назовём теорию *противоречивой*, если в ней найдётся такое  $\alpha$ , что  $\vdash \alpha$  и  $\vdash \neg\alpha$ . Покажите, что исчисления высказываний (классическое и интуиционистское) противоречивы тогда и только тогда, когда в них доказуема любая формула.
8. *Теорема Гливенко*. Обозначим доказуемость высказывания  $\alpha$  в классической логике как  $\vdash_{\text{к}} \alpha$ , а в интуиционистской — как  $\vdash_{\text{и}} \alpha$ . Оказывается возможным показать, что какое бы ни было  $\alpha$ , если  $\vdash_{\text{к}} \alpha$ , то  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ . А именно, покажите, что:
  - (a) Если  $\alpha$  — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ .
  - (b)  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$
  - (c)  $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$
  - (d) Докажите утверждение теоремы ( $\vdash_{\text{к}} \alpha$  влечёт  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ ), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречно тогда и только тогда, когда противоречно интуиционистское.