

## Полиномиальная формула

**Определение.** Мультииндекс — вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1.  $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2.  $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3.  $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4.  $f_{(x)}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^r = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r} = \sum_{\alpha: |\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha$$

Это обобщение следующих формул:

1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2.  $(a_1 + a_2)^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}$  (биномиальная формула)

**Лемма 1.**

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$  — это подразумевает, что  $E$  открыто
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при  $1 \leq k \leq r$ :

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

**Доказательство.** Как на лекции:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2}$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots \right)$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k}$$

Формальное доказательство по индукции:

Индукционное предположение:

$$\varphi^k(t) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a + th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k}$$

База:

$$\varphi'(t) = \sum_{i_1=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a + th) h_{i_1}$$

Переход:

$$\begin{aligned} \varphi^{(k+1)}(t) &= (\varphi^k(t))' \\ &= \left( \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a + th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \right)' \\ &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m \left( \frac{\partial^k f(a + th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right)' h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \\ &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m \sum_{i_{k+1}=1}^m \frac{\partial^{k+1} f(a + th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} h_{i_{k+1}} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \end{aligned}$$

□

**Теорема 1** (Формула Тейлора в терминах мультииндекса).

- $f \in C^{r+1}(E)$  — это подразумевает  $E \subset \mathbb{R}^m, f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда  $\exists t \in (0, 1)$ :

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x - a))}{\alpha!} (x - a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

Раскроем мультииндексы:

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \left( \sum_{\substack{(\alpha_1 \dots \alpha_m): \\ \alpha_i \geq 0 \\ \sum \alpha_i = k}} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \dots (x_m - a_m)^{\alpha_m} \right)$$

Ещё + аналогичный остаток.

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^r \sum \dots \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_m^{\alpha_m}$$

Тут тоже + аналогичный остаток.

*Доказательство.* Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$ , где  $h = x - a$ . Тогда  $\varphi(0) = f(a)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{o(|x-a|^r)}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha: |\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

□

**Определение.**

$$\sum_{\alpha: |\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} k\text{-й дифференциал функции } f \text{ в точке } a \text{ относительно } h \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(a, h)$$

Перепишем  $f(x)$  через дифференциал:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + o(|h|^r)$$

$f(a)$  это  $d^k f(a, h)$  при  $k=0$ , поэтому он зашел под сумму.

Пример.  $\triangleleft k=2$

$$d^2 f = f''_{x_1, x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_2, x_2}(a)h_2^2 + \dots + f''_{x_m, x_m}(a)h_m^2 + 2 \sum_{i < j} f''_{x_i, x_j} h_i h_j$$

Заметим, что  $k!/\alpha!$  - число способов реализовать дифференцирование, т.е. в каком порядке брать частные производные.

В дифференциалах работает композиция:  $d^{k+1}f = d(d^k f)$

Покажем это на примере:

$$\begin{aligned} df &= f'_{x_1} h_1 + f'_{x_2} h_2 + \dots + f'_{x_m} h_m \\ d^2 f &= (f''_{x_1 x_1} h_1 + f''_{x_1 x_2} h_2 + \dots + f''_{x_1 x_m} h_m) h_1 + (f''_{x_2 x_1} h_1 + f''_{x_2 x_2} h_2 + \dots + f''_{x_2 x_m} h_m) h_2 + \dots = \\ &= (f'_{x_1})' h_1 + (f'_{x_2})' h_2 + \dots = d(df) \end{aligned}$$

**Теорема 2** (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).

$$f(a+h) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r)$$

Доказательство. **Отсутствует**

□

Упражнение. Если  $f(a+h) = \underbrace{T_r(h)}_{\text{Многочлен степени } \leq r} + o(|h|^r)$ , то  $T_r(h)$  — многочлен Тейлора

Пример.  $(0.97)^{1.02} = ?$

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^y$$

$$f(0.97, 1.02) = ?$$

Здесь все производные в  $(1, 1)$ , это не указывается ради краткости.

$$f(x, y) = f(1, 1) + f'_x(x-1) + f'_y(y-1) + \frac{f''_{xx}}{2!}(x-1)^2 + \frac{f''_{yy}}{2!}(y-1)^2 + f''_{xy}(x-1)(y-1) + o(\dots)$$

- $f'_x = yx^{y-1} \rightarrow 1$
- $f'_y = x^y \ln x \rightarrow 0$

- $f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2} \rightarrow 0$
- $f''_{yy} = x^y \ln^2 x \rightarrow 0$
- $f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \rightarrow 1$

$$f(0.97, 1.02) \approx 1 + 1(-0.03) + 1(-0.03)(0.02)$$

**Определение.**  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  – множество линейных отображений  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , также обозначается  $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), L_{m,n}$

Это линейное пространство:

1.  $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$
2.  $(\alpha F)x = \alpha(Fx)$

**Обозначение** (Норма линейного оператора).

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |Ax|$$

**Примечание.**

1.  $\sup \Leftrightarrow \max$  в силу компактности сферы
2.  $A = (a_{ij})$  (оператор задается матрицей), тогда  $\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$  по лемме об оценке нормы линейного отображения ( $\|Ax\| \leq C\|x\|$ )
3.  $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$

**Доказательство.**

(a)  $x = 0$  – тривиально,  $0 \leq 0$

(b)  $x \neq 0 \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|} \Rightarrow |\tilde{x}| = 1 \Rightarrow |Ax| \leq \|A\|$

$$|Ax| = |A(|x|\tilde{x})| = |x| |A\tilde{x}| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \leq \|A\| \cdot |x|$$

□

4. Если  $\exists c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \leq C|x|$ , то  $\|A\| \leq C$

**Пример.** 1.  $m = l = 1 \quad A \leftrightarrow a_{11} \quad x \mapsto a_{11}x \quad \|A\| = a$

2.  $m = 1, l$  – любое.  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l \quad A \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix} = \vec{a} \quad t \mapsto t\vec{a} \quad \|A\| = |\vec{a}|$

$$3. \ m - \text{любое}, l = 1 \quad A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad A \leftrightarrow \vec{a} \quad x \mapsto (\vec{a}, x) \quad \|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |(\vec{a}, x)| = |\vec{a}|$$

4.  $m$  — любое,  $l$  — любое.  $\|A\| = \sup |Ax|$  — мы не знаем, как такое считать.

**Лемма 2.**

- $X, Y$  — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $A$  — ограниченный оператор, т.е.  $\|A\|$  — конечно
2.  $A$  — непрерывно в нуле
3.  $A$  — непрерывно всюду в  $X$
4.  $A$  — равномерно непрерывно

*Доказательство.*

1.  $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  — очевидно.

2.  $2 \Rightarrow 1$

Непрерывность в 0:  $\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

$$\triangleleft \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left| A \frac{1}{\delta} \delta x \right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$$

3.  $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 : |x_1 - x_0| < \delta$$

$$|Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$$

□

**Теорема 3 (о пространстве линейных отображений).**

1. Отображение  $A \mapsto \|A\|$  в  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  — норма, т.е.:
  - (a)  $\|A\| \geq 0$
  - (b)  $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{n \times m}$
  - (c)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
  - (d)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2.  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

*Доказательство.*

$$1. \|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

а, б, в — очевидно.

$$d: |(A+B)x| = |Ax+Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|)|x|$$

По замечанию 3  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$2. |BAx| = |B(Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

□

*Примечание.* В  $\mathcal{L}(X, Y)$ :

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x|\leq 1} |Ax| = \sup_{|x|<1} |Ax| = \sup_{|x|\neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall x \quad |Ax| \leq C|x|\}$$