Конспект по дискретной математике

October 1, 2019

1 Преобразование Мёбиуса

$f(x_1 \dots x_n) \bigoplus\limits_{\alpha_1 \dots \alpha_n \in A_f} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$

$x_i^1 = x_i, x_i^0 = 1$

$f(\dots) = 0 \Leftrightarrow \exists x_i : x_i = 0, \alpha_i = 1$

$f(\dots) = 1 \Leftrightarrow \forall i : x_i = 1 \; or \; \alpha_i = 0 \Leftrightarrow \overline{x} \succeq \overline{\alpha}$

$a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \begin{cases} 1, \alpha_1 \dots \alpha_n \in A_f \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

Определение. Доминирование - частничый порядок на $\mathbb{B}^n$, такой что $\forall i \; x_i \geq y_i$. Обозначается $x_1 \dots x_n \succeq y_1 \dots y_n$.

$f(x_1 \dots x_n) = \bigoplus\limits_{\alpha_1 \dots \alpha_n} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \bigoplus\limits_{\alpha_1 \dots \alpha_n : X \succeq \alpha} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$

$a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \mapsto f(\overline{x})$

$f(x_1 \dots x_n) \mapsto a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$

Теорема 1. Преобразование Мёбиуса: $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \bigoplus\limits_{\alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha \succeq X} f(x_1 \dots x_n) - \mathbb{B}^{2^n} \to \mathbb{B}^{2^n}$

Пример ($x \vee y$):

xy	$x \vee y$	
00	0	$\alpha_{00} = 0$
01	1	$\alpha_{01} = 1$
10	1	$\alpha_{10} = 1$
11	0	$\alpha_{11} = 1$

Доказательство. Индукция по числу 1 в $\alpha_1 \dots \alpha_n$.

База: $\alpha_{0 \dots 0} = f(0 \dots 0)$

Переход: $\bigoplus\limits_{x:\alpha\succeq x} f(x_1\dots x_n) = \bigoplus\limits_{x:\alpha\succeq x}\ \bigoplus\limits_{\beta:x\succeq\beta} a_{\beta_1\dots\beta_n} = a_{\alpha_1\dots\alpha_n} \oplus \bigoplus\limits_{\substack{x,\beta\\ \alpha\succeq x\succeq\beta\\ \text{неверно}:\alpha=x=\beta}} a_{\beta_1\dots\beta_n} = a_{\alpha_1\dots\alpha_n}$

$\square$

Определение. Инволюция — преобразование, тождественное себе обратному.

Преобразование Мёбиуса является инволюцией.

Можно заметить, что при записи через некий базис функций от множества переменных, формулы получаются длинными. Поэтому существуют другие формы записи — схемы из функциональных элементов и линейные программы.

2 Схемы из функциональных элементов

Записывается в форме ациклического ориентированного графа — direct acyclic graph — dag.

Теорема 2. Если G - ациклический ориентированный граф, тогда его вершинам можно присвоить номера так, что $uv \in E \Rightarrow \#u < \#v$. Это называется топологическая сортировка

Лемма 1. *Ациклический граф содержит вершину, из которой не выходят ребра.*

Определение. Схема из функциональных элементов над базисом F — ациклический ориентированный граф, у которого есть n выделенных вершин, в которые ничего не входит, помеченные "вход" и есть одна вершина, из которой ничего не выходит, помеченная "выход". Остальные вершины называются внутренние, они — функции $f \in F$, в которые входят k ребер, каждое из которых помечено числом от 1 до k.

Чтобы построить таблицу истинности схемы из функциональных элементов, проводится слеюущий порядок действий:

1. Поместим во входные узлы значения аргументов схемы.
2. В остальные узлы в порядке топологической сортировки помещаются значения, равные значению функции, соответствующей этому узлы, если принять значения из входных узлов как аргументы данной функции.
3. Значение в выходном узле будет значением схемы.

Самый правый узел - выход.

Глубина: $d(u) = \max\limits_{V:V\to u}(d(u)+1)$

Можно заметить, что с помощью схемы можно использовать промежуточные значения несколько раз, этим эта форма записи лучше формулы.

Определение. Сложность функции f в базисе B — минимальный размер схемы, которая вычисляет эту функцию, обозначается $size_B(f) = \min\{size(C) | C \text{вычисл.} f, C \in B\}$.

$size_{\vee,\wedge,\neg}(\oplus_2) \leq 5$

$size_{\wedge,\oplus,1}(\oplus_2) = 1$

Теорема 3. Пусть B_1 и B_2 - базисы. Тогда $\exists c > 0$, которая зависит от этих двух базисов и больше не зависит ни от чего, что $\forall f : size_{B_1}(f) \leq c \cdot size_{B_2}(f)$

Таким образом, выбор базиса для сложности меняет только константу, т.е. ассимптотически сложность функции одинакова во всех базисах.

Лемма 2. *Если B - базис, то $\forall f$ можно задать схемой из функциональных элементов над B.*

Доказательство. Построим схему через дерево обхода - поставим стрелки вверх и объединим все входы. □

Доказательство. Построим для f оптимальную схему в B_2. $B_2 = \{g_1, g_2 \dots g_t\}$. Рассмотрим схемы для функций из B_2 над базисом B_1. Для каждой этой функции построим такую схему C_i. $C := \max size(C_i)$. Вместо каждой функции подставим соответствующую схему C. □

Доказательство. Глубиной функции f в базисе B называется минимальная глубина схемы, которая вычисляет f, обозначается $depth_B(f) = \min\{depth(C) | C \text{вычисл.} f, C \in B\}$. □

U_2 - множество всех функций от 2 аргументов. $T_2 = U_2 \setminus \{\oplus, =\}$