

## Интеграл локального потенциального векторного поля по непрерывному пути

**Лемма 1** (о гусенице).

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$  — непр.

Тогда  $\exists$  дробление  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  и  $\exists$  шары  $B_1 \dots B_n \subset O : \gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$ .



Рис. 1: “Гусеница” — покрытие пути шарами

*Доказательство.*  $\forall c \in [a, b]$  возьмём  $B_c := B(\gamma(c), \underbrace{r_c}_{\text{произвольн.}}) \subset O$ .

$$\overline{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$$

$\overline{\beta}_c := \sup\{\beta \in [a, b] : \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$  — момент первого выхода после посещения точки  $\gamma(c)$

Возьмём  $(\alpha_c, \beta_c) : \overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$

Таким образом  $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$  — открытое покрытие  $[a, b]$ , если для  $c = a$  или  $c = b$  вместо  $\alpha_c, \beta_c$  брать  $[a, \beta_a), (\alpha_b, b]$

$[a, b]$  — компактно  $\Rightarrow [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$

Не умаляя общности ни один интервал не накрывается целиком остальными  $\Leftrightarrow \forall (\alpha_c, \beta_c) \exists d_c$ , принадлежащая “только этому” интервалу.



Рис. 2: Выбор точек  $t_k$

Точка  $t_k$  выбирается на  $d_k, d_{k+1}$  и  $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ .

$$\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$$

□

*Примечание.*  $\forall \delta > 0$  мы можем требовать, чтобы все  $r_k < \delta$

*Примечание.* В силу произвольности  $r_c$  можно требовать, чтобы шары  $B_c$  удовлетворяют некоторому локальному условию.

Например пусть  $V$  — локально потенциальное поле в  $O$ . Мы можем требовать, чтобы во всех шарах существовал потенциал  $V$ . Тогда будем называть  $\{B_k\}$   $V$ -гусеницей.

**Определение.**

- $V$  — локально потенциальное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$  называются похожими ( $V$ -похожими), если у них есть общая  $V$ -гусеница:

$\exists t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \quad \exists \text{ шары } B_k \subset O :$

$$\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k, \tilde{\gamma}[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$$

*Следствие 0.1.*

- $V$  — локально потенциальное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда любой путь  $V$ -похож на ломаную:



Рис. 3: Построение ломаной (розовая) по пути (чёрный) с помощью  $V$ -гусеницы (круги)

**Лемма 2** (о равенстве интегралов локально-потенциальных векторных путей по похожим путям).

- $V$  — локально-потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$  —  $V$ -похожие, кусочно гладкие
- $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда  $\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

*Доказательство.* Рассмотрим общую  $V$ -гусеницу. Пусть  $f_k$  — потенциал  $V$  в шаре  $B_k$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Сдвинем потенциалы прибавлением константы, так что  $f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$  при  $k = 1 \dots n$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_i V_i dx_i &= \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \\ &= \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) \\ &= f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \end{aligned} \quad (1)$$

(1): По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Для  $\tilde{\gamma}$  воспользуемся свойством:  $f_k|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}|_{B_k \cap B_{k+1}}$  и тогда аналогично

$$\int_{\tilde{\gamma}} \sum v_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_1(\tilde{\gamma}(a))$$

□

*Примечание.* Вместо условия “ $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$ ” можно взять условие:  $\gamma, \tilde{\gamma}$  — петли. Тогда утверждение леммы тоже верно.

**Лемма 3.**

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O$  — непр.
- $V$  — локально-потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда  $\exists \delta > 0$  : если  $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \rightarrow O$  таковы, что:

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$$

Тогда  $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$   $V$ -похожи.

*Доказательство.* Берём  $V$ -гусеницу для  $\gamma$ .

$\delta_k$ -окрестность множества  $A := \{x : \exists a \in A \quad \rho(a, x) < \delta\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta)$

$$\forall k \quad \exists \delta_k > 0 : (\delta_k\text{-окрестность } \gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$$

Это следует из компактности:

Пусть  $B_k = B(w, r)$ , функция  $t \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$  непрерывна  $\Rightarrow$  достигается  $\max$ ,  $\rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r$

Рис. 4:  $\delta_k$ -окрестность множества  $\gamma[t_{k-1}, t_k]$ 

$$\delta_k := \frac{r-r_0}{2}, \delta := \min(\delta_1 \dots \delta_k)$$

При таком  $\delta$  все три пути лежат в одной гусенице. □

**Определение** (Интеграл локального потенциального векторного поля  $V$  по непрерывному пути  $\gamma$ ). Возьмём  $\delta > 0$  из леммы 3.

Пусть  $\tilde{\gamma}$  —  $\delta$ -близкий кусочно-гладкий путь, т.е.  $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$ .

Полагаем  $I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$ .

Корректность (*нет произвольности*) следует из лемм 3 и 2

## Равномерная сходимость функциональных рядов (*продолжение*)

**Теорема 1** (признак Дирихле).

- $\sum a_n(x)b_n(x)$  — вещественный ряд.
- $x \in X$
- Частичные суммы ряда  $\sum a_n$  равномерно ограничены :

$$\exists C_a \quad \forall n \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq C_a$$

- $\forall x$  последовательность  $b_n(x)$  — монотонна по  $n$  и  $b_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{X} 0$

Тогда ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  равномерно сходится на  $X$

*Доказательство.* Преобразование Абеля (суммирование по частям)

$$\sum_{M \leq k \leq N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{M \leq k \leq N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| &\leq C_A |b_N| + C_A |b_{M-1}| + \sum_{M \leq k \leq N-1} C_A |b_k - b_{k+1}| \\
&\leq C_A \left( |b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=M}^{N-1} |b_k - b_{k+1}| \right) \\
&\leq C_A (2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|)
\end{aligned} \tag{2}$$

(2) : Все разности одного знака  $\Rightarrow$  телескопически  $= \pm(b_M - b_N)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K : \forall l > K \quad \forall x \in X \quad |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_A}$$

Значит, при  $M, N > K \quad \forall x \in X$ :

$$\left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon$$

Это критерий Больцано-Коши равномерной сходимости ряда. □

Пример.  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$

1.  $f(x)$  — непр. на  $\mathbb{R}$

$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{n^2}$  сходится. По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на  $\mathbb{R} \Rightarrow$  ряд  $f$  — непр. на  $\mathbb{R}$

2.  $f$  — дифф.?

По теореме 3'  $\sum f'_n(x)$  — ? равномерно сходится в окрестности  $x_0$ . Если да, то  $f \in C^1(V(x_0))$ .

$f' = \sum \frac{\cos nx}{n}$ , но при  $x = 2\pi k$   $\sum$  расходится.

Применим признак Дирихле для  $a_n = \cos nx, b_n = \frac{1}{n}, x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

$$\begin{aligned}
|\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx| &= |\Re(e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{nix})| \\
&\leq \left| e^{ix} \frac{e^{nix} - 1}{e^{ix} - 1} \right| \\
&= |e^{ix}| \frac{|e^{nix} - 1|}{|e^{ix} - 1|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{|e^{ix} - 1|} \\
&\leq \frac{2}{e^{i\varepsilon} - 1} \\
&=: C_A
\end{aligned}$$

$b_n$  — монотонно,  $\rightarrow 0$ , не зависит от  $x$ , поэтому  $\Rightarrow 0$

Таким образом, признак Дирихле сработал и  $f'(x) = \sum \frac{\cos nx}{n}$  при  $x \in (0, 2\pi)$

*Упражнение.* 1. При  $x = 2\pi k$   $f(x)$  не дифференцируемая.

2. Существует ли  $f''(x)$  при  $x \in (0, 2\pi)$ ?

3. Если  $q(x) = \sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ :

(a) Непрерывна?

(b) Дифференцируема?

## Степенные ряды

$B(r_0, r) \subset \mathbb{C}$  — открытый круг

**Определение.** Степенной ряд:  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ , где  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $z$  — переменная  $\in \mathbb{C}$

**Теорема 2** (о круге сходимости степенных рядов).

•  $\sum a_n(z - z_0)^n$  — степенной ряд

Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех  $z \in \mathbb{C}$

2. Ряд сходится только при  $z = z_0$

3.  $\exists R \in (0, +\infty)$  :

(a) при  $|z - z_0| < R$  ряд абсолютно сходится

(b) при  $|z - z_0| > R$  ряд расходится

*Примечание.* Ряд не может никогда не сходить, т.к. при  $z = z_0$  ряд  $= a_0 + 0 + 0 + \dots = a_0$ .

*Доказательство.* Применим признак Коши:  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ , если  $r < 1$ , ряд сходится, если  $r > 1$ , ряд расходится.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0|^n = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| = |z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1.  $\overline{\lim} = 0$ . Тогда  $r = 0$ , есть абсолютная сходимость при всех  $z$ .
2.  $\overline{\lim} = +\infty$ . Тогда  $r = +\infty$  при  $z \neq z_0$ . При  $z = z_0$  сходимость очевидна.
3.  $\overline{\lim} \neq 0, +\infty$ . Тогда  $|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \stackrel{\text{def}}{=} R$

□

**Определение.**  $\sum a_n(z - z_0)^n$ , тогда число  $R = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}}$ . Это формула Адамара.