

Функциональные последовательности и ряды

Пример. $\sum x^n, x \in (0, 1)$ — нет равномерной сходимости

$\exists \varepsilon = 0.1 \quad \forall N \quad \exists n > N$ — подходит любое $> 100 \quad \exists p = 1 \quad \exists x = 1 - \frac{1}{n+1} : |u_{n+1}(x)| \geq \varepsilon$, т.е.
 $(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} \approx \frac{1}{e} > \frac{1}{10}$

Теорема 1 (признак Вейерштрасса).

- $\sum u_n(x)$
- $x \in X$

Пусть $\exists c_n$ — вещественная:

- $|u_n(x)| \leq c_n$ при $x \in E$
- $\sum c_n$ — сходится

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство. $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \dots + c_{n+p}$ — тривиально

$\sum c_n$ — с.х. $\Rightarrow c_n$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon$$

Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости. \square

Пример. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}, x \in \mathbb{R}$. Попытаемся применить признак.

$c_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right|$ — это минимальное возможное c_n , если для него не работает признак, до ни для какого c_n не работает.

\sup достигается в точке $x_0 = \frac{1}{n}$, $\sup = \frac{1}{2n}$. $\sum \frac{1}{2n}$ расходится \Rightarrow признак не сработал.

Построим отрицание критерия Больцано-Коши:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon = \frac{1}{6} \quad \forall N \quad \exists n > N \quad p = n \in \mathbb{N} \quad \exists x = \frac{1}{n} \quad |u_{n+1}(x) + u_{2n}(x)| &= \frac{\frac{1}{n}}{1 + (n+1)^2 \frac{1}{n^2}} + \dots + \frac{\frac{1}{n}}{1 + (2n)^2 \frac{1}{n^2}} \geq \\ &\geq n \frac{\frac{1}{n}}{1 + (2n)^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{5} > \frac{1}{6} = \varepsilon \end{aligned}$$

Пример. $\sum \frac{x}{1+x^2n^2}, x \in \left(\frac{1}{2020}, 2020 \right)$

$$c_n := \sup \frac{x}{1 + x^2 n^2} \leq \frac{2020}{1 + \frac{1}{2020^2} n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^2}$$

$\sum c_n$ сходится \Rightarrow есть равномерная сходимость.

Приложения равномерной сходимости для рядов

Теорема 1' (Стокса-Зайдля для рядов).

- $u_n : X \rightarrow Y$
- X — метрическое пространство
- Y — нормированное пространство
- $x_0 \in X$
- u_n непрерывно в x_0
- $\sum u_n(x)$ **равномерно** сходится на X
- $S(x) := \sum u_n(x)$

Тогда $S(x)$ непрерывно в x_0 .

Доказательство. По теореме 1 $S_n(x) \Rightarrow S(x)$, $S_n(x)$ — непр. в $x_0 \xrightarrow{\tau.1} S(x)$ непр. в x_0 \square

Примечание. Достаточно равномерной сходимости $u_n(x)$ на некоторой окрестности x_0

Примечание. $u_n \in C(x)$, $\sum u_n$ — равномерно сходится на $X \Rightarrow S(x) \in C(x)$

Теорема 2'. О почленном интегрировании ряда

- $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- u_n — непр. на $[a, b]$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ **равномерно** сходится на $[a, b]$
- $S(x) = \sum u_n(x)$

Тогда $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx$

Можно интегрировать, т.к. $S(x)$ — непр. на $[a, b]$ по теореме 1'

Доказательство. По теореме 2

$$S_n \xrightarrow{[a,b]} S$$

По теореме 2:

$$\int_a^b S_n(x) dx \rightarrow \int_a^b S(x) dx$$

$$\int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n u_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

□

Пример. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ — равномерно сходится при $|x| \leq q < 1$ по Вейерштрассу: $|(-1)^n x^n| \leq q^n$, $\sum q^n$ сходится.

Проинтегрируем от 0 до t ($|t| \leq q$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}$$

Это верно при $t \in [-q, q] \quad \forall q : 0 < q < 1$, т.е. верно при $t \in (-1, 1)$

При $t = -1$ $\sum -\frac{1}{k}$ расходится

При $t \rightarrow 1$ ряд $\sum (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}$ равномерно сходится (*) на $[0, 1]$, слагаемые непрерывны в

$t_0 = 1 \xrightarrow{т.1} \text{сумма ряда непрерывна в точке } t_0 = 1 \Rightarrow \ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(*): равномерная сходимость есть по секретному приложению к признаку Лейбница:

$$\forall t \quad \frac{t^k}{k} \text{ — монотонно убывает по } k \Rightarrow \underbrace{\left| \sum_{k=N}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k} \right|}_{S_{N-1}-S} \leq \left| \frac{t^N}{N} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{N}}_{\text{не зависит от } t} \rightarrow 0, \text{ это и есть}$$

равномерная сходимость ряда.

Криволинейный интеграл

Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

Определение.

- Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$

- $\gamma(a)$ — начало пути
- $\gamma(b)$ — конец пути
- $\gamma[a, b]$ — носитель пути
- Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, путь называется замкнутым или петлёй.
- Если γ — гладкое или кусочно-гладкое, то $\gamma'(t)$ — вектор скорости
- Кусочно-гладкое отображение — отображение, имеющее не более, чем счётное число точек разрыва, все точки разрыва — I рода и $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое $\forall k$, где t_k — точка разрыва.
- $\gamma(t) = (\gamma_1(t) \dots \gamma_m(t))$, то $\gamma' = (\gamma'_1 \dots \gamma'_m)$
- Длина гладкого пути это $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Определение. Векторное поле — непрерывное отображение $V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$ — вектор, “приложенный к точке x ”.

Определение. Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m \end{aligned}$$

Также используется обозначение $I(V, \gamma) = \int_\gamma V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m$

Пусть V — поле силы. Запишем интегральную сумму для интеграла векторного поля:

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle V(\gamma(\xi_k)), \gamma'(\xi_k) \rangle (t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \overbrace{\left\langle V(\gamma(\xi_k)), \frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|} \right\rangle}^{\text{работа силы}} \underbrace{|\gamma'(\xi_k)| (t_k - t_{k-1})}_{\approx \text{пройденный путь}} \\ &\quad \underbrace{\left\langle V(\gamma(\xi_k)), \frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|} \right\rangle}_{\text{проекция силы на касательную к направлению}} \end{aligned}$$

Свойства:

1. Линейность интеграла по полю.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall U, V \text{ — векторные поля} \quad I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$$

Доказательство. Очевидно из формулы ?? в определении. □

2. Аддитивность при дроблении пути

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $c \in (a, b)$
- $\gamma^1 = \gamma|_{[a, c]}$
- $\gamma^2 = \gamma|_{[c, b]}$

Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

Доказательство. Очевидно из линейности интеграла в ??. □

3. Замена параметра

- $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$
- $\varphi \in C^1$
- $\varphi(p) = a$
- $\varphi(q) = b$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$

Доказательство. Это замена переменной в интеграле.

$$\begin{aligned}
 I(V, \tilde{\gamma}) &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(s) \rangle ds \\
 &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\
 t &:= \varphi(s) \\
 &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= I(V, \gamma)
 \end{aligned}$$

□

Примечание. $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — параметризация гладкого одномерного простого многообразия

$\tilde{\varphi} : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — то же самое

По теореме о двух параметризациях: \exists диффеоморфизм $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$ $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

4. Объединение носителей

- $\gamma^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^1(b) = \gamma^2(c)$

Зададим путь $\gamma = \gamma^2 \gamma^1 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma^2(t + c - b), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$

В точке b возможен излом, т.е. нет $\gamma'(b)$, но есть левосторонняя и правосторонняя производные.

Если γ^1, γ^2 — кусочно-гладкие, то γ — кусочно-гладкое.

Тогда $I(V, \gamma^2 \gamma^1) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_b^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ \tau &:= t - b + c \\ &= \int_a^b \langle V(\gamma^1(t)), \gamma^{1'}(t) \rangle dt + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), \gamma^{2'}(\tau) \rangle d\tau \\ &= I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2) \end{aligned}$$

□

5. Противоположный путь

$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \gamma(a + b - t)$, т.е. мы идём от b к a , а не наоборот.

Тогда $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} I(V, \gamma^-) &= \int_a^b \langle V(\gamma(a + b - \tau)), -\gamma'(a + b - \tau) \rangle d\tau \\ t &:= a + b - \tau \\ &= \int_b^a \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t) \rangle (-dt) \end{aligned}$$

$$= -I(V, \gamma)$$

□

6. Оценка интеграла векторного поля пути

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$$

, где $L = \gamma[a, b]$ — носитель пути.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \right| &\leq \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| dt \\ &\leq \int_a^b |V(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \sup_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| l(\gamma) \end{aligned}$$

(?): Неравенство Коши-Буняковского

(?): V — непр., L — компакт $\Rightarrow \sup$ достигается

□

Потенциальные векторные поля

Определение. $V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — векторное поле **потенциально**, если оно имеет потенциал:

$$\exists f \in C^1(O), \nabla f = V$$

Загадка. V — потенциально с потенциалом f_1 , f_2 — тоже потенциал. Тогда $f_1 - f_2 = \text{const.}$

Теорема 2 (обобщенная формула Ньютона-Лейбница).

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- V — потенциально
- f — потенциал V
- $\gamma[a, b] \rightarrow O$

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

Тогда

$$\int_{\gamma} \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$$

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1. γ — гладкий

$$\Phi(t) = f(\gamma(t))$$

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\gamma'_m(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum v_k dx_k &= \int_a^b \Phi'(t) dt \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned}$$

2. γ — кусочно-гладкий

\exists дробление: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b : \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum v_k dx_k &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \sum_{k=1}^n (f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1}))) \\ &= f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned}$$

(?): по пункту 1.

□