

# 1 Определения

## 1.1 Ступенчатая функция

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — ступенчатая, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \left. f \right|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется допустимым для этой функции.

## 1.2 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

Дано выше. (1.1, стр. 1)

## 1.3 ! Измеримая функция

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

$f$  измерима на множестве  $E$ , если  $\forall a \in \mathbb{R} \ E(f < a)$  измеримо, т.е.  $\in \mathfrak{A}$

## 1.4 Свойство, выполняющееся почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$  — высказывание  $(x \in X)$

$W(x)$  — верно при почти всех из  $E$  = почти всюду на  $E$  = почти везде на  $E$  = п.в.  $E$ , если:

$\exists e \in E : \mu e = 0 \ W(x)$  — истинно при  $x \in E \setminus e$

## 1.5 Сходимость почти везде

## 1.6 Сходимость по мере

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — почти везде конечны.

$f_n$  сходится к  $f$  по мере  $\mu$ , обозначается  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

### 1.7 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

- $X, \mathfrak{A}, \mu$
- $\mu X < +\infty$
- $f_n, f$  — почти везде конечно, измеримо

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \xrightarrow[X \setminus e]{} f$$

### 1.8 Интеграл ступенчатой функции

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- $E_k$  — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu(x) := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть  $0 \cdot \infty = 0$

### 1.9 Интеграл неотрицательной измеримой функции

- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

## 2 Теоремы

### 2.1 Лемма “о структуре компактного оператора”

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда  $\exists$  ортонормированные базисы  $g_1 \dots g_m$  и  $h_1 \dots h_m$ , а также  $\exists s_1 \dots s_m > 0$ , такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И  $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$ .

*Доказательство.*  $W := V^*V$  — самосопряженный оператор (матрица симметрична относительно диагонали).

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа:  $c_1 \dots c_m$  — вещественные (возможно с повторениями)
- Собственные векторы:  $g_1 \dots g_m$  — ортонормированные

*Примечание.* Пока мы в  $\mathbb{R}^m$  (а не в  $\mathbb{C}^m$ ), \* есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- (1): т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .
- (2): из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^m V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом,  $c_i > 0$ .

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \stackrel{\text{def } h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \stackrel{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \stackrel{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- (3): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- (4): т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .
- (5): при  $i \neq j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 0$  в силу ортогональности, а при  $i = j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 1$  в силу ортонормированности и  $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i} \sqrt{c_i}} = 1$

*Примечание.*  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  — символ Кронекера.

Таким образом,  $\{h_i\}$  ортонормирован.

$$V(x) \stackrel{\text{def}}{=} V \left( \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i \right) \stackrel{(6)}{=} \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \stackrel{(7)}{=} \det(V^*V) \stackrel{\text{def}}{=} \det W \stackrel{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

## 2.2 ! Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение

Тогда  $\forall E \in \mathfrak{M}^m$   $V(E) \in \mathfrak{M}^m$  и  $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

*Доказательство.*

1. Если  $\det V = 0$   $\text{Im}(V)$  — подпространство в  $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$  по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда  $\forall E$   $V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если  $\det V \neq 0$   $\mu E := \lambda(V(E))$  — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$  по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти  $k$ , для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например  $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$  — единичный куб на векторах  $g_i$ .

$V(g_i) = s_i h_i$ . Таким образом,  $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ .

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом,  $k = |\det V|$

□

---

(6): в силу линейности  $V$

(7): в силу мультипликативности  $\det$  и инвариантности относительно транспонирования.

(8): т.к.  $\det$  инвариантен по базису и в базисе собственных векторов  $\det W = c_1 \dots c_m$ .

### 2.3 Теорема об измеримости пределов и супремумов

$f_n$  — измеримо на  $X$ . Тогда:

1.  $\sup f_n, \inf f_n$  измеримо.
2.  $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$  измеримо.
3. Если  $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$ , то  $h(x)$  измеримо.

*Доказательство.*

1.  $g = \sup f_n \quad X(g > a) \stackrel{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$  и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

(9):

- $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(g > a)$ , то  $g(x) > a$ .

$$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

- $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(f_n > a)$ , то  $f_n(x) > a$ , следовательно  $g(x) > a$ .

2.  $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$ . Т.к.  $\sup$  и  $\inf$  измерим,  $\overline{\lim} f_n$  тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если  $\exists \lim$ , то  $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

□

### 2.4 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

Тогда  $\exists f_n$  — ступенчатые:

1.  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2.  $\forall x \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

$$e_k^{(n)} = X \left( \frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n} \right) \quad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$



$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

Не дописано.

## 2.5 Измеримость функции, непрерывной на множестве полной меры

Примечание.  $A \subset X$  — полной меры, если  $\mu(X \setminus A) = 0$ .

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- $f$  — непрерывно на  $E' = E \setminus e$

Тогда  $f$  — измеримо.

*Доказательство.*  $f$  — измеримо на  $E'$ , т.к.  $E'(f < a)$  открыто в  $E'$  по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e, \lambda_m$  — полная  $\Rightarrow e(f < a)$  — измеримо в  $E$ .

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$ , объединение измеримых множеств измеримо.  $\square$

## 2.6 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\mu X$  конечно
- $f_n, f$  — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \rightarrow f$  п.в.

Тогда  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

*Доказательство.* Переопределим  $f_n, f$  на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай:  $\forall x$  последовательность  $f_n(x)$  монотонно убывает к 0, то есть  $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon)$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху,  $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

Рассмотрим общий случай:  $f_n \rightarrow f, \varphi(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда  $\varphi_n \rightarrow 0, \varphi_n \geq 0$  и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon) \\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

$\square$

## 2.7 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

*Доказательство.*

$$\forall k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \rightarrow 0 \\ \exists n_k : \text{при } n \geq n_k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что  $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \stackrel{(10)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\mu E_k \rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при  $x \notin E$   $f_{n_k} \rightarrow f$ .

$$x \notin E \quad \exists N \quad x \notin E_k \text{ при } k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ .

Т.к.  $\mu E = 0$ , искомое выполнено. □

---

(10): по счётной полуаддитивности меры.