Теория вероятности

Михайлов Максим

22 апреля 2021 г.

Оглавление

Лекция 1 13 февраля 4
- 1 События . . . 4
  - 1.1 Статистическое определение вероятности . . . 4
  - 1.2 Пространство элементарных исходов. Случайные события. . . . 4
  - 1.3 Операции над событиями . . . 5
- 2 Вероятность . . . 6
  - 2.1 Классическое определение вероятности . . . 6
  - 2.2 Геометрическое определение вероятности . . . 7

Лекция 2 20 февраля 9
  - 2.3 Аксиоматическое определение вероятности . . . 9
  - 2.4 Аксиома непрерывности . . . 10
  - 2.5 Формула сложения . . . 10
- 3 Независимые события . . . 11

Лекция 3 27 февраля 13
- 4 Условная вероятность . . . 13
  - 4.1 Полная группа событий . . . 14
  - 4.2 Формула Байеса . . . 14

Лекция 4 6 марта 15
- 5 Последовательность независимых испытаний . . . 15
  - 5.1 Формула Бернулли . . . 15
  - 5.2 Локальная формула Муавра-Лапласа . . . 16
  - 5.3 Интегральная формула Лапласа . . . 17
  - 5.4 Вероятность отклонения относительно частоты от вероятности события 18
  - 5.5 Закон больших чисел Бернулли . . . 18

Лекция 5 13 марта 19
  - 5.6 Схема до первого успешного испытания . . . 19
  - 5.7 Испытания с несколькими исходами . . . 20
  - 5.8 Урновая схема . . . 21
  - 5.9 Теорема Пуассона для схемы Бернулли . . . 22

Лекция 6 20 марта 24
- 6 Случайные величины . . . 24
  - 6.1 Основные типы распределений . . . 25
  - 6.2 Дискретные случайные величины . . . 26
  - 6.3 Основные числовые характеристики дискретной случайной величины 26

6.3.1 Математическое ожидание *(среднее значение)* 26
6.3.2 Дисперсия 26
6.3.3 Среднеквадратическое отклонение 26
6.4 Свойства математического ожидания и дисперсии 27
6.5 Другие числовые характеристики 29
6.5.1 Мода 30
6.5.2 Медиана 30
Лекция 7 27 марта **31**
6.6 Стандартные дискретные распределения 31
6.7 Абсолютно непрерывные случайные величины 34
6.8 Числовые характеристики непрерывной случайной величины 35
Лекция 8 3 апреля **36**
6.9 Стандартные абсолютно непрерывные распределения 36
6.9.1 Равномерное распределение 36
6.9.2 Показательное *(экспоненциальное)* распределение 37
6.9.3 Нормальное распределение 38
6.9.4 Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями и её следствия 39
6.9.5 Коэффициенты асимметрии и эксцесса 41
6.10 Г-функция и Г-распределение 41
Лекция 9 10 апреля **43**
6.11 Сингулярное распределение 43
6.12 Общий взгляд на математическое ожидание 44
6.13 Преобразование случайных величин 45
6.13.1 Стандартизация случайных величин 45
6.13.2 Линейное преобразование 45

Лекция 1

13 февраля

1 События

1.1 Статистическое определение вероятности

Определение. Пусть проводится n реальных экспериментов, событие A произошло в n_A экспериментах. Отношение $\dfrac{n_A}{n}$ называется **частотой события** A. Эксперименты показывают, что при увеличении числа n эта частота "стабилизируется" около некоторого числа, под которым понимаем **статистическую вероятность**.

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}$$

Очевидно это определение не формально, поэтому мы им пользоваться не будем.

1.2 Пространство элементарных исходов. Случайные события.

Определение.

- **Пространством элементарных исходов** Ω называется множество, содержащее все возможные результаты данного эксперимента, из которых при испытании происходит ровно один.
- Элементы данного множества называются **элементарными исходами** и обозначаются $w \in \Omega$.
- **Случайными событиями** называются подмножества $A \subset \Omega$.
- Событие A **наступило**, если в ходе эксперимента произошёл один из элементарных исходов, входящих в A.
- Такие исходы называются **благоприятными** к A.

Пример.

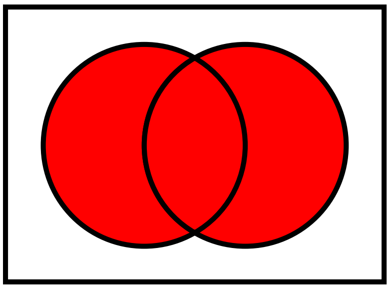
1. Бросают монетку. $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$ *(герб, решка).*
2. Бросают кубик. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A — выпало четное число очков. Тогда $A = \{2, 4, 6\}$.
3. Монета бросается дважды:
   (a) Учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ, РР, ГР, РГ}\}$
   (b) Не учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ, РР, ГР}\}$
4. Бросается дважды кубик, порядок учитывается. A — разность очков делится на 3, т.е. $A = \{(1,4), (4,1), (3,3), (5,2), (2,5), (3,6), (6,3), (1,1), (2,2), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
5. Монета бросается до выпадения герба. $\Omega = \{\text{Г, РГ, РРГ, ...}\}$ — счётное число исходов.
6. Монета бросается на плоскость. $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ — несчётное число исходов.

1.3 Операции над событиями

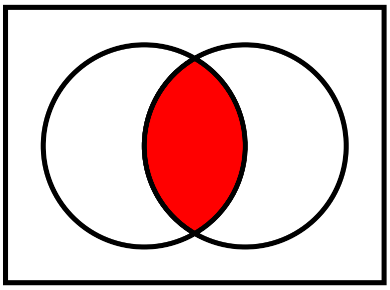
Ω — универсальное *(достоверное)* событие, т.к. содержит все элементарные исходы.

$\varnothing$ — невозможное событие.

Определение. $A + B$ это $A \cup B$



Определение. $A \cdot B$ это $A \cap B$



Определение. **Противоположным** к A называется событие $\overline{A}$, соответствующее тому, что A не произошло, т.е. $\Omega \setminus A$

Определение. Дополнение $A \setminus B$ это $A \cdot \overline{B}$

Определение. События A и B называются **несовместными**, если $A \cdot B = \varnothing$

Определение. Событие A влечет событие B, если $A \subset B$.

2 Вероятность

Определение. $0 \leq P(A) \leq 1$ — вероятность наступления события A.

2.1 Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит конечное число исходов, причем их можно считать равновозможными. Тогда применимо классическое определение вероятности.

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{m}{n}$, где n — число всех возможных элементарных исходов, m — число элементарных исходов, благоприятных A.

В частности, если $|\Omega| = n$, а A — элементарный исход, то $P(A) = \frac{1}{n}$.

Свойства.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(\Omega) = 1$
4. Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Доказательство. $|A| := m_1, |B| := m_2, |A \cup B| = m_1 + m_2$

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

□

Пример. Найти вероятность, что при бросании кости выпадет чётное число очков.

$$n = 6, m = 3, \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

Пример. В ящике лежат 3 белых и 2 чёрных шара. Вынули 3 шара. Найти вероятность того, что из них две белых и один чёрный.

$$n = \binom{5}{3} = 10$$
$$m = \binom{3}{2}\binom{2}{1} = 12$$
$$P(A) = \frac{6}{10}$$

Однако, это определение редко применимо.

2.2 Геометрическое определение вероятности

Определение.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченная область.
- μ — конечная мера множества Ω, например мера Лебега

Пусть выбирают точку наугад, т.е. вероятность попадания точки в область A зависит от меры A, но не от её положения.

Тогда $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Примечание. По этому определению мера точки равна 0 и вероятность попадания в конкретную точку тоже равна 0.

Пример. Монета диаметром 6 сантиметров бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 сантиметров. Найти вероятность того, что монета целиком окажется на одной плитке.

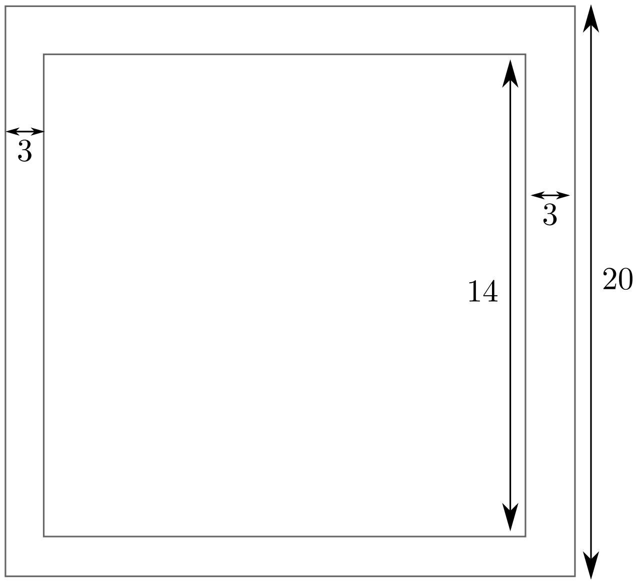
Без ущерба для общности можно рассматривать, что монета бросается на одну плитку и положение монеты определяется положением её центра.

Чтобы монета лежала полностью на одной плитке, необходимо, чтобы её центр лежал на расстоянии ≥ 3 сантиметра от каждой стороны:

$$S(\Omega) = 20^2 = 400$$
$$S(A) = 14^2 = 196$$
$$P(A) = \frac{196}{400} = 0.49$$

Пример. ???

$$A : X \leq l \sin\varphi$$



$$S(\Omega) = \pi l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l \sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^\pi = -l(\cos\pi - \cos 0) = 2l$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2}{\pi}$$

Это определение кажется хорошим — оно согласовано с классическим. Но и это определение редко применимо на практике, т.к. обычно вероятность зависит от положения в пространстве или множество исходов несчётно.

Лекция 2

20 февраля

2.3 Аксиоматическое определение вероятности

Пусть Ω — пространство элементарных исходов.

Определение. Систему $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называют σ-алгеброй событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3. $A_1 \dots A_n \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Примечание. Из 2 и 3 следует 1.

Свойства.

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$, т.к. $\overline{\Omega} = \varnothing$
2. $A_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{F}$

   Доказательство. $A_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A}_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup \overline{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup \overline{A}_i} = \bigcap A_i \in \mathcal{F}$ □
3. $A, B \in F \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

???

Определение. Пусть Ω — множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра над ним.

Вероятностью на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P(A) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $P(A) \geq 0$ — свойство неотрицательности
2. Если события $A_1 \dots A_n \dots$ — равновероятные, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, то $P(\bigcap A) = \sum P(A_i)$ — свойство счётной аддитивности
3. $P(\Omega) = 1$ — свойство нормированности

Примечание. Вероятность есть нормированная мера.

Определение. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством.

Свойства.

1. $P(\varnothing) = 0$

   Доказательство. $\underbrace{P(\varnothing + \Omega)}_{1} = P(\varnothing) + \underbrace{P(\Omega)}_{1} \Rightarrow P(\varnothing) = 0$ □

2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

   Доказательство. A и $\overline{A}$ — несовместны, $A + \overline{A} = \Omega$.

   $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$ □

3. $0 \leq P(A) \leq 1$

   Доказательство. (a) $P(A) \geq 0$

   (b) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$

   □

2.4 Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap A_i = \varnothing$. Тогда $P(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

???

Теорема 1. Эта аксиома следует из второй аксиомы.

Доказательство. $A_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i \overline{A}_{i+1} \cup \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$

???

Т.к. по условию $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = \varnothing$ и $\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$, то $P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i) = 0$.

Таким образом, $P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i \overline{A}_{i+1})$ — остаточный член сходящейся последовательности $\Rightarrow P(A_n) \to 0$ □

Примечание. Аксиома счётной аддитивности следует из аксиомы непрерывности и свойства конечной аддитивности.

2.5 Формула сложения

Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Теорема 2. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Доказательство.

$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$$

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) \\ &= (P(A\overline{B}) + P(AB)) + (P(\overline{A}B) + P(AB)) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

□

Аналогично можно доказать формулу включения-исключения:

$$P\left(\sum A_i\right) = \sum P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

Пример. Опущен.

3 Независимые события

Определение. События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Доказательство. Если A и B независимы, то A и $\overline{B}$ — независимы. □

Доказательство.

$$P(A) = P(A(B + \overline{B})) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(AB)$$

Таким образом, A и $\overline{B}$ — независимы. □

Определение. События $A_1 \dots A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора $1 \leq i_1 \dots i_k \leq n$ $P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$

Пример (Бернштейн). Три грани правильного тетраедра выкрашены в красный, синий, зеленый цвета, а четвертая грань — во все эти три цвета.

Бросаем тетраэдр и смотрим на грань, на которую он упал. События:

- A — красный цвет
- B — синий цвет
- C — зеленый цвет

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$
$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

Таким образом, все события попарно независимы.

$$P(AB) = \frac{1}{8}$$

Примечание. Если в условии есть "хотя бы", т.е. требуется найти вероятность суммы совместных независимых событий, то применима формула обратной вероятности.

Пример. Найти вероятность того, что при четырёх бросаниях кости хотя бы один раз выпадет шестерка.

A_i — при i-том броске хотя бы один раз выпала шестерка.

$$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = P(\overline{4}) = \frac{5}{6}$$

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \dots \overline{A}_4$$
$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$
$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка 0.6, второго — 0.8. Найти вероятность того, что попадет ровно один стрелок.

A_1 — первый стрелок попал, A_2 — второй стрелок попал, A — ровно один попал.

$$P(A_1) = 0.8, P(\overline{A}_1) = 0.2, P(A_2) = 0.6, P(\overline{A}_2) = 0.4$$

$$A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$$
$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.44$$

Лекция 3

27 февраля

4 Условная вероятность

Обозначение. $P(A|B)$ — вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло.

Пример. Кубик подбрасывается один раз. Известно, что выпало больше 3 очков. Какова вероятность, что выпало чётное число очков?

Пусть A — чётное число очков, B — больше 3 очков.

$$n = 3 \quad (4, 5, 6) \quad m = 2 \quad (4, 6)$$
$$P(A|B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Определение. **Условной вероятностью** события A при условии, что имело место событие B, называется величина $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Теорема 3. $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$

Доказательство. По индукии.

База $n = 2$ — по определению полной вероятности.

Переход

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1 \dots A_{n-1})P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$$

□

Определение. События A и B независимы, если $P(A|B) = P(A)$, что равносильно $P(AB) = P(A)P(B)$ — прошлому определению.

Доказательство.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

□

4.1 Полная группа событий

Определение. События $H_1 \dots H_n \dots$ образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и содержат все элементарные исходы.

Теорема 4. Пусть $H_1 \dots H_n$ — полная группа событий. Тогда $P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\Omega A) \\ &= P((H_1 + \dots H_n + \dots)A) \\ &= P\left(\sum_{k=1}^{+\infty} H_k A\right) \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i) \end{aligned}$$

1: По лемме о счётной аддитивности и т.к. H_iA и H_jA несовместны. □

4.2 Формула Байеса

Эта формула также называется формулой проверки гипотезы.

Теорема 5. Пусть $H_1 \dots H_n$ — полная группа событий и известно, что A произошло. Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{+\infty} P(H_k)P(A|H_k)}$$

Доказательство.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

□

Лекция 4

6 марта

5 Последовательность независимых испытаний

Определение. Схемой Бернулли называется серия одинаковых независимых испытаний, каждое из которых имеет лишь два исхода — интересующее нас событие произошло *(успех)* или не произошло *(неудача)*.

Обозначение.

- n — число испытаний
- p — вероятность события A при одном испытании
- $q = 1 - p$
- v_n — число успехов при n испытаниях
- $P_n(k) = P(v_n = k)$

5.1 Формула Бернулли

Теорема 6. Вероятность того, что при n испытаниях произойдёт ровно k успехов равна:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Доказательство. Рассмотрим один из исходов, благоприятных событию A: $A_1 = \underbrace{\text{У}\dots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{Н}\dots\text{Н}}_{n-k}$.

Т.к. рассматриваемые события независимы, верна следующая формула:

$$P(A_1) = \underbrace{p\dots p}_{k}\underbrace{q\dots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

Остальные благоприятные исходы отличаются лишь расстановкой k успехов по n местам, а их вероятности будут те же самые. $\square$

Выясним, при каком значении k вероятность предшествующего числа успехов $k-1$ будет не более, чем вероятность k успехов, т.е. $P_n(k) \geq P_n(k-1)$

$$\begin{aligned} P_n(k-1) &\leq P_n(k) \\ \binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} &\leq \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q &\leq \frac{n!}{k!(n-k)!} p \\ \frac{k!}{(k-1)!} q &\leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!} p \\ k(1-p) &\leq (n-k+1)p \\ k - kp &\leq np - kp + p \\ np + p - 1 \leq k &\leq np + p \end{aligned}$$

1. np — целое. Тогда $np+p$ — не целое и $k = np$ — наибольшее искомое k
2. $np+p$ — не целое. Тогда $k = [np+p]$
3. $np+p$ — целое. Тогда $np+p-1$ — целое и $P_n(k-1) = P_n(k)$ и $k = np+p$ или $k = np+p-1$

5.2 Локальная формула Муавра-Лапласа

Примечание. Локальность формулы означает, что мы её применям, чтобы найти вероятность некоторого числа успехов.

$$P_n(v_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \text{ , где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

φ называется функцией Гаусса.

Свойства.

- $\varphi(-x) = \varphi(x)$
- При $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$

5.3 Интегральная формула Лапласа

Примечание. Эта формула применяется, если искомое число успехов лежит в некотором диапазоне.

$$P_n(k_1 \le v_n \le k_2) \xrightarrow{n \to +\infty} \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \text{ , где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}dt}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства.

- $\Phi(-x) = -\Phi(x)$
- При $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0.5$

Примечание. В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевается несколько иная функция, чаще всего

$$F_0(X) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}dt}$$

Несложно заметить, что $F_0(x) = 0.5 + \Phi(x)$

Мы применяем эти формулы при $n \ge 100$ и $p, q \ge 0.1$

Пример. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, что:

1. Произошло ровно 330 попаданий.
2. Произошло от 312 до 336 попаданий.

1. $k = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{10}{8} = 1.25$$

$$P_{400}(320) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1.25^2}{2}} \approx 0.0228$$

2. $k = 400, k_1 = 312, k_2 = 336, p = 0.8, q = 0.2$

$$x_1 = \frac{332 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{312 - 320}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 320}{8} = 2$$

$$P_{400}(312 \le v_n \le 336) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8285$$

5.4 Вероятность отклонения относительно частоты от вероятности события

Пусть p — вероятность события A, $\frac{n_A}{n}$ — частота A. По интегральной формуле Лапласа найдём вероятность того, что частота отклонится от p не больше, чем на ε:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) &= P(-\varepsilon \le \frac{n_A}{n} - p \le \varepsilon) \\ &= P(-n\varepsilon \le n_A - np \le n\varepsilon) \\ &= P(np - n\varepsilon \le n_A \le np + n\varepsilon) \\ &\approx \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

Итого:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

5.5 Закон больших чисел Бернулли

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

При $n \to +\infty : \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}} \to +\infty$ и $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right) \to 0.5$, поэтому $P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) \to 2\cdot 0.5 = 1$, т.е.:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

Эта формула называется законом больших чисел Бернулли.

Лекция 5

13 марта

Примечание. Конспект этой лекции написан по другому конспекту, т.к. записи лекции нет.

Определение. Отображение $k \mapsto \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$, где $0 \le k \le n$ называется **биноминальным распределением** с параметрами n и p.

Обозначение. $B(n,p)$ или $B_{n,p}$

5.6 Схема до первого успешного испытания

Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успеха. Номер такого успеха обозначается τ.

Теорема 7. $P(\tau = k) = q^{n-1}p$

Доказательство.

$$P(\tau = k) = P(\underbrace{\text{НН}\dots\text{Н}}_{k-1}\text{У}) = q^{k-1}p$$

$\square$

Определение. Отображение $k \mapsto q^{k-1}p$ при $1 \le k < +\infty$ называется **геометрическим распределением** с параметром p.

Обозначение. G_p или $G(p)$

Примечание. Это распределение обладает свойством “отсутствие последействия” или нестарения, т.е. знание о том, что у вас не было успеха в течение n испытаний, никак не влияет на распределение оставшегося числа испытаний.

Теорема 8. $p(\tau = k) = q^{k-1}p$. Тогда

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \;\; P(\tau > k + n \mid \tau > n) = p(\tau > k)$$

Доказательство.

$$P(\tau > n) = P(\underbrace{\text{НН}\ldots\text{Н}}_{m}) = q^m$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned}
P(\tau > n + k \mid \tau > n) &= \frac{P(\tau > n + k \cap \tau > n)}{P(\tau > k)} \\
&= \frac{P(\tau > n + k)}{P(\tau > n)} \\
&= \frac{q^{n+k}}{q^n} \\
&= q^k \\
&= P(\tau > k)
\end{aligned}$$

□

Примечание. Аналогично $P(\tau = n + k \mid \tau > n) = P(\tau = k)$

5.7 Испытания с несколькими исходами

Пусть мы выполняем n испытаний, и при каждом из них может произойти один из m несовместных исходов.

Обозначение. p_i — вероятность i-го исхода при одном испытании.

Теорема 9. Вероятность того, что при n испытаниях первый исход появится n_1 раз, второй n_2 раз, m-тый исход n_m раз:

$$P(n_1 \ldots n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!} \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$$

Примечание. При $m = 2$ эта теорема эквивалентна формуле Бернулли.

Доказательство. Рассмотрим следующий благоприятный исход A_1:

$$\underbrace{1\ldots1}_{n_1}\underbrace{2\ldots2}_{n_2}\ldots\underbrace{m\ldots m}_{n_m}$$

$$P(A_1) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$$

Остальные благоприятные исходы имеют ту же вероятность и равны с точностью до перестановки. Всего таких исходов

$$\binom{n}{n_1}\binom{n - n_1}{n_2}\binom{n - n_1 - n_2}{n_3}\ldots\binom{n_m}{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$$

□

5.8 Урновая схема

В урне N шаров, из них K белых и $N-K$ чёрных. Из неё выбрали n шаров без учета порядка.

1. Схема с возвратом.

   Вероятность выбрать белый шар не меняется и равна $\frac{K}{N}$. Тогда $P_n(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ — опять биноминальное распределение.

2. Схема без возврата.

   Тогда $P_{N,K}(n,k) = \dfrac{\binom{N}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Определение. Отображение $k \mapsto \dfrac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ при $k < K$ называется **гипергеометрическим распределением**.

Теорема 10. Если $N \to +\infty$ и $K \to +\infty$ так, что $\frac{K}{N} \to p \in (0,1)$, n и $0 \leq k \leq n$ фиксированы, то $P_{N,K}(n,k) = \dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$

Лемма 1. $\binom{K}{k} \sim \frac{K^k}{k!}$, где $K \to +\infty$, $k = \mathrm{const}$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\binom{K}{k} &= \frac{K!}{k!(K-k)!}\\ &= \frac{K\cdot(K-1)\dots(K-k+1)}{k^k}\frac{K^k}{k!}\\ &= 1\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\cdot\frac{K^k}{k!}\\ &\sim \frac{K^k}{k!}\end{aligned}$$

□

Доказательство 10.

$$\begin{aligned}P_{N,K}(n,k) &= \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{\substack{\text{к каждому}\\ \text{применили}\\ \text{формулу}}} \frac{K^k}{k!}\frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!}{N^n}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{K^k}{N^k}\frac{(N-k)^{n-k}}{N^{n-k}} \\
&= \binom{N}{k}\left(\frac{k}{N}\right)\left(1-\frac{K}{N}\right)^{n-k} \\
&\xrightarrow{N\to+\infty} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

□

5.9 Теорема Пуассона для схемы Бернулли

Теорема 11 (Формула Пуассона). Пусть $n \to +\infty, p_n \to 0$ так, что $np_n \to \lambda = \text{const} > 0$. Тогда вероятность успеха при n испытаниях:

$$P_n(k) = \binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Эта формула применима при малых *(или крупных)* p и $n \geq 100$.

Доказательство.

Обозначение. $\lambda_n = n \cdot p_n$, при этом $\lambda_n \to \lambda$.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} &\to \frac{n^k}{k!}\frac{\lambda_n^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&\to \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n} \\
&\to \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right)^{-\lambda_n} \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

□

Теорема 12. Пусть v_n — число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли с вероятностью успеха p, $\lambda = np$, $A \subset \mathbb{N}_0$ — произвольное подмножество.

Тогда:

$$\left|P(v_n \in A) - \sum \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| \leq \min(p, np^2) = \min(p, \lambda p) = \min\left(p, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

Лекция 6

20 марта

6 Случайные величины

Пример.

1. Бросаем кость. ξ — число выпавших очков. $\xi \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Достали случайную микросхему из ящика. ξ — время работы до отказа.
   (a) Пусть время измеряется в часах. Тогда $\xi \in \{0, 1, 2, 3 \dots\}$
   (b) Пусть время измеряется точно. Тогда $\xi \in [0, +\infty)$
3. ξ — температура воздуха в текущий момент времени. $\xi \in (-50°, 50°)$
4. ξ — индикатор события A. Обозначается $I_A = \begin{cases} 0, & A \text{ не наступает} \\ 1, & A \text{ наступает} \end{cases}$

Определение. Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется **$\mathfrak{F}$-измеримой**, если $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \{w : \xi(w) < x\} \in \mathfrak{F}$. Иными словами, прообраз $\xi^{-1}(-\infty, x) \in \mathfrak{F}$.

Определение. **Случайной величиной** ξ, заданной на пространстве $\Omega, \mathfrak{F}, P$, называется $\mathfrak{F}$-измеримая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, ставящая в соотвествие каждому элементарному исходу некоторое вещественное число.

Примечание. Не все функции являются измеримыми.

Пример. Бросаем кость. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathfrak{F} = \{\varnothing, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$. $\xi(i) = i$

Пусть $x = 4$, $\{w : \xi(w) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathfrak{F}$. ξ не измеримо.

Упражнение. Описать класс измеримых функций для тривиальной σ-алгебры $\{\varnothing, \Omega\}$

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима. Тогда $P(\xi < x) = P(\underbrace{\{w : \xi(w) < x\}}_{A_x})$, т.к. $A_x \in \mathfrak{F}$, а также:

- $\overline{A_x} = \{w : \xi(w) \geq x\} \in \mathfrak{F}$
- При $x > y$ $A_x \setminus B_y = \{w : y \leq \xi(w) < x\} \in \mathfrak{F}$.
- $B_x = \bigcap_{t=1}^{\infty} A_{x-\frac{1}{t}} = \{w : \xi(w) \leq x\}$
- $B_x \setminus A_x = \{w : \xi(w) = x\} \in \mathfrak{F}$

Отсюда видим, что по теореме Каратеодори вероятностную меру можно продолжить до любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра.

$$P(B \in \mathfrak{B}) = P(\{w : \xi(w) \in B\})$$

Итак, пусть случайная величина ξ задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Тогда:

1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, \mathfrak{B}, P)$
2. В свою очередь совокупность прообразов $\xi^{-1}(B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}$ является σ-алгеброй $\mathfrak{F}_\xi \subset \mathfrak{F}$. Такая σ-алгебра называется **σ-алгеброй, порожденной случайной величиной ξ**.

Упражнение. Найти σ-алгебру, порожденную индикатором $I_A = \begin{cases} 0, & w \notin A \\ 1, & w \in A \end{cases}$

Определение. Функция $P(B), B \in \mathfrak{B}$ называется **распределением вероятностей** случайной величины $\xi(w)$, т.е. распределение с.в. это соотвествие между множествами на вещественной прямой и вероятностями случайной величины попасть в это множество.

6.1 Основные типы распределений

1. Дискретное
2. Абсолютно непрерывное
3. Смешанное
4. Сингулярное — непрерывное, но не абсолютно непрерывное

Мы будем рассматривать только первые два. Соответствующие величины мы также будем называть дискретными или непрерывными.

6.2 Дискретные случайные величины

Определение. Случайная величина ξ имеет **дискретное распределение**, если она принимает не более чем счётное число значений, то есть существует конечный или счётный набор чисел $x_1 \dots x_n \dots$, такой что $p_i = P(\xi = x_i) > 0$ и $\sum p_i = 1$

Дискретная случайная величина задаётся законом распределения *(рядом, таблицей).*

Пример. Кость.

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

6.3 Основные числовые характеристики дискретной случайной величины

6.3.1 Математическое ожидание *(среднее значение)*

Определение. **Математическим ожиданием** $\mathbb{E}\xi$ называется число $\mathbb{E}\xi = \sum_i x_i p_i$ при условии, что данный ряд сходится абсолютно. В противном случае говорят, что матожидания не существует.

Примечание. Смысл: значения случайной величины группируются вокруг матожидания.

6.3.2 Дисперсия

Определение. **Дисперсией** $\mathbb{D}\xi$ случайной величины ξ называется среднее квадратов отклонений этой величины от математического ожидания: $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}x)^2$ или $\mathbb{D}\xi = \sum_i (x_i - \mathbb{E}\xi)^2 - p_i$ при условии, что данное значение существует *(конечно).*

Примечание. Вычислять дисперсию удобнее по формуле $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}\xi)^2$

Примечание. Смысл: квадрат среднего разброса рассеяния случайной величины около её математического ожидания.

6.3.3 Среднеквадратическое отклонение

Определение. **Среднеквадратическим отклонением** σ_ξ случайной величины ξ называется число $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

Примечание. Смысл: характеризует средний разброс случайной величины около её математического ожидания.

Пример. Кость.

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mathbb{E}\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$
$$\mathbb{D}\xi = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 \approx 2.32$$
$$\sigma \approx \sqrt{2.32} \approx 1.71$$

6.4 Свойства математического ожидания и дисперсии

Определение. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, если $\xi(w) = C \;\; \forall w \in \Omega$.

Свойства.

1. $\mathbb{E}C = C, \mathbb{D}C = 0$

   Доказательство.
   $$\mathbb{E}C = C \cdot 1 = C$$
   $$\mathbb{D}C = \mathbb{E}(\underbrace{C - \mathbb{E}C}_{0}) = 0$$
   □

2. $\mathbb{E}(\xi + C) = \mathbb{E}\xi + C, \mathbb{D}(\xi + C) = \mathbb{D}\xi$

   Доказательство.
   $$\mathbb{E}(\xi + C) = \sum_i (x_i + C)p_i = \sum_i x_i p_i + C \underbrace{\sum_i p_i}_{1} = \mathbb{E}\xi + C$$
   $$\mathbb{D}(\xi + C) = \mathbb{E}(\xi + C - \mathbb{E}(\xi + C))^2 = \mathbb{E}(\xi + C - \mathbb{E}\xi - C)^2 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{D}\xi$$
   □

3. Растяжение: $\mathbb{E}(C\xi) = C\mathbb{E}\xi, \mathbb{D}(C\xi) = C^2\mathbb{D}\xi$

   Доказательство.
   $$\mathbb{E}(C\xi) = \sum_i Cx_i p_i = C \sum_i x_i p_i = C\mathbb{E}\xi$$
   $$\mathbb{D}(C\xi) = \mathbb{E}(C\xi - \mathbb{E}C\xi)^2 = C^2\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = C^2\mathbb{D}\xi$$
   □

4. $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$

Доказательство. Пусть x_i, y_j — соответствующие значения случайных величин ξ и η.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi+\eta) &= \sum_{i,j}(x_i+y_j)P(\xi=x_i,\eta=y_j) \\
&= \sum_i x_i \sum_j P(\xi=x_i,\eta=y_j) + \sum_j y_j \sum_i P(\xi=x_j,\eta=y_i) \\
&= \sum_i x_i P(\xi=x_i) + \sum_j y_j P(\eta=y_j) \\
&= \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta
\end{aligned}$$

□

Определение. Дискретные случайные величины ξ и η **независимы**, если $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) \;\; \forall i, j$, т.е. случайные величины принимают свои значения независимо друг от друга.

5. Если ξ и η независимы, то $\mathbb{E}(\xi\cdot\eta) = \mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta$

   Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi\cdot\eta) &= \sum_{i,j} x_i y_j P(\xi=x_i,\eta=y_j) \\
&= \sum_i x_i \sum_j y_j P(\xi=x_i,\eta=y_j) \\
&= \sum_i x_i \sum_j y_j P(\xi=x_i)P(\eta=y_j) \\
&= \sum_i x_i P(\xi=x_i) \sum_j y_j P(\eta=y_j) \\
&= \sum_i x_i P(\xi=x_i)\mathbb{E}\eta \\
&= \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta
\end{aligned}$$

□

   В обратную сторону это утверждение не верно.

6. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

   Доказательство.

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) \\
&= \mathbb{E}\xi^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}(\mathbb{E}\xi^2) \\
&= \mathbb{E}\xi^2 - 2(\mathbb{E}\xi)^2 + (\mathbb{E}\xi)^2 \\
&= \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2
\end{aligned}
$$

□

7. $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2 \cdot \operatorname{cov}(\xi, \eta)$, где $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$ — ковариация.

   Доказательство.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}(\xi + \eta) &= \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 \\
&= \mathbb{E}(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta)^2 \\
&= \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}\xi\eta + \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta \\
&= \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2(\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta)
\end{aligned}
$$

□

8. Если случайные величины ξ и η независимы, то $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

   Доказательство. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$ □

9. Среднеквадратическое отклонение — минимум отклонения случайной величины от точек вещественной прямой: $\mathbb{D} = \min_a (\xi - a)^2$

   Доказательство.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi - a)^2 &= \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi) + (\mathbb{E}\xi - a))^2 \\
&= \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 + 2\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi) \cdot (\mathbb{E}\xi - a) + (\mathbb{E}\xi - a)^2 \\
&= \mathbb{D}\xi + (\mathbb{E}\xi - a)^2 \leq \mathbb{D}\xi
\end{aligned}
$$

□

6.5 Другие числовые характеристики

1. $M_k = \mathbb{E}y^k$ — момент k-го порядка. В частности, при $k = 1$ это матожидание.
2. $\mathbb{E}|y|^k$ — абсолютный момент k-го порядка
3. $\mu_k = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$ — центральный момент k-го порядка. В частности, при $k = 1$ это дисперсия.
4. $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$ — абсолютный центральный момент k-го порядка.

Примечание. Центральные моменты можно выразить через моменты.

Примечание. Обычно не рассматривают моменты выше, чем 4 порядка.

6.5.1 Мода

Определение. **Модой** M_o называется такое значение случайной величины, где вероятность события является наибольшей: $P(\xi - M_o) = \max_i p_i$

6.5.2 Медиана

Определение. **Медианой** M_e называется значение случайной величины такое, что вероятность того, что $P(\xi < M_e) = P(\xi > M_e)$. Обычно используется для обычной случайной величины, т.к. для дискретной величины медиана может не существовать.

Лекция 7

27 марта

6.6 Стандартные дискретные распределения

1. Распределение Бернулли B_p с параметром $0 < p < 1$. ξ — число успехов при одном испытании, где p — вероятность успеха при одном испытании. Закон распределения:

ξ	0	1
p	$1-p$	p

$$\mathbb{E}\xi = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$$
$$\mathbb{D}\xi = 0^2(1-p) + 1^2 p - p^2 = p - p^2 = pq$$

2. Биномиальное распределение $B_{n,p}$ с параметрами n и p. ξ — число успехов при n испытаниях, p — вероятность успеха при одном испытании.

$$\xi \in B_{n,p} \Leftrightarrow P(\xi = x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad 0 \le k \le n, q = 1-p$$

Примечание. $B_p = B_{1,p}$

$\xi = \xi_1 + \ldots \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$, $\mathbb{E}\xi_i = p, \mathbb{D}\xi_i = pq$.

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i = np$$

$$\mathbb{D}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\xi_i = npq$$
$$\sigma\xi = \sqrt{npq}$$

3. Геометрическое распределение G_p. ξ — номер первого успешного испытания.

$$\xi \in G_p \Leftrightarrow P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad 1 \le k < +\infty$$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{+\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p = p\left(\sum_{i=1}^{+\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{1}{1-q}\right)' = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot q^{k-1} \cdot p = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\cdot q^{k-1} + k \cdot q^{k-1} = pq\cdot\left(\frac{1}{1-q}\right)' + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{q}{p^2}$$

4. Распределение Пуассона Π_λ с параметром $\lambda > 0$.

$$\xi \in \Pi_\lambda \Leftrightarrow P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad 0 \le k < +\infty$$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k(k-1)+k)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\sigma\xi = \sqrt{\lambda}$$

Определение. **Функцией распределения** случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P(\xi < x)$

Пример. $\xi \in B_p$. Тогда $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-p, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.

Свойства.

1. $F(x)$ — ограниченная функция.
2. $F(x)$ — неубывающая функция.

   Доказательство.

$$\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$$
$$P(\xi < x_1) \le P(\xi < x_2)$$
$$F(x_1) \le F(x_2)$$

$\square$

3. $P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} P(\xi < x_2) &= P(\xi < x_1) + P(x_1 \leq \xi < x_2) \\ F(x_2) &= F(x_1) + P(x_1 \leq \xi < x_2) \\ P(x_1 \leq \xi < x_2) &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned}$$

   □

4. Т.к. $\mathfrak{B}$ порождается интервалами, то, зная функцию распределения, можно найти вероятность попадания случайной величины в любое борелевское множество $B \in \mathfrak{B}$, а значит распределение полностью задаётся функцией распределения.

5. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

   Доказательство. Т.к. $F(x)$ ограничена и монотонна, эти пределы существуют. Поэтому достаточно доказать пределы для каких-нибудь последовательностей $x_n \to \pm\infty$.

   Рассмотрим $A_n = \{w : n-1 \leq \xi(w) < n\}, n \in \mathbb{N}$ — несовместные события и по счётной аддитивности

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P\left(\bigcup A_n\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(a_n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) - F(n-1) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} F(n) - F(n-1) \\ &= \lim_{N\to\infty} F(N) - F(-N-1) \\ &= \lim_{N\to\infty} F(N) - \lim_{N\to\infty} F(-N-1) \end{aligned}$$

   Таким образом, $\lim_{N\to\infty} F(N) = 1$, т.к. $F(N) \leq 1$ и $F(-N-1) \geq 0$ □

6. $F(x)$ — непрерывная слева и $F(x-0) = F(x)$

   Доказательство. В силу монотонности и ограниченности предел существует.

   Рассмотрим $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} < \xi < x_0\}$. $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ и $\bigcap B_n = \varnothing$. Таким образом, по аксиоме непрерывности $\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty}(F(x_0) - F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)) = F(x_0) - \lim\limits_{n\to+\infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow F(x_0) = F(x_0 - 0)$ □

7. Скачок в точке x_0 равен вероятности попадания в эту точку.

   Доказательство. $C_n = \{x_0 < \xi < x_0 + \frac{1}{n}\}$. По аксиоме непрерывности $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = 0$.

$$P(C_n) + P(\xi \geq x_0) = P(\xi = x_0)$$
$$P\left(x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} P(\xi = x_0)$$
$$F\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - F(x_0) \xrightarrow{n\to+\infty} P(\xi = x_0)$$
$$F(x_0 + 0) - F(x_0) = P(\xi = x_0)$$

□

8. $P(\xi = x_0) = 0$
9. Если $F(x)$ непрерывно, то $P(x_1 \leq \xi < x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

6.7 Абсолютно непрерывные случайные величины

Определение. Случайная величина ξ имеет **абсолютно непрерывное распредление**, если для любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}$ $P(\xi \in \mathfrak{B}) = \int_B f_\xi(x)dx$ для некоторой функции $f_\xi(x)$.

Примечание. Интеграл выше — Лебега, а не Римана.

Определение. Функция $f_\xi(x)$ называется **полностью распределения** случайной величины ξ.

Свойства.

1. $P(\alpha < \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x)dx$

   Доказательство. Очевидно из определения, если взять интеравл $B = (\alpha, \beta)$. □
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$.
3. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

   Доказательство. По определению $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ □
4. $F_\xi(x)$ — непрерывная функция
5. $F_\xi(x)$ дифференцируема почти всюду
6. $f_\xi(x) \geq 0$

7. $P(\xi = x_0) = 0$
8. $P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
9. Если для $f(x)$ выполнены свойства 2 и 6, то она является плотностью некоторой случайной величины.

6.8 Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение. **Математическим ожиданием** абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется число $\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ при условии, что данный интеграл сходится абсолютно.

Определение. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \mathbb{E}\xi)^2 f(x)dx$ — **дисперсия**

Примечание. Удобная формула: $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbb{E}\xi)^2$

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$$

Примечание. Смысл и свойства характеристик идентичны таковым для дискретной величины.

Лекция 8

3 апреля

6.9 Стандартные абсолютно непрерывные распределения

6.9.1 Равномерное распределение

ξ равномерно распределена на $[a, b]$, если её плотность постоянна на этом отрезке и такая величина обозначается $\xi \in U_{a,b}$ или $\xi \in U(a; b)$.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx$$

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_a^b x^2\frac{dx}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$P(\alpha < q < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}, \quad \alpha, \beta \in [a, b]$$

6.9.2 Показательное *(экспоненциальное)* распределение

ξ показательно распределена с параметром $\alpha > 0$ на $[a, b]$, если $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$ и такая величина обозначается $\xi \in E_\alpha$ или $\xi \in E(\alpha)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x}\Big|_0^x = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Определение. Гамма-фукнция Эйлера $G(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt$. При $\lambda \in \mathbb{N}$ $\Gamma(\lambda+1) = \lambda!$

$$\mathbb{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_\xi(x) dx = \int_0^{+\infty} x^k \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^k} \int_0^{+\infty} (\alpha x)^k \alpha e^{-\alpha k} d(\alpha x) = \frac{k!}{\alpha^k}$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\alpha}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$\mathbb{D}\xi = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}$$

$$P(\alpha < \xi < \beta) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}$$

Доказательство.

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F(b) - F(a) = (1 - e^{-\alpha b}) - (1 - e^{-\alpha a}) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}$$

□

Теорема 13. Если $\xi \in E_\alpha$, то $P(\xi > x + y \mid \xi > x) = P(\xi > y)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(\xi > x + y \mid \xi > x) &= \frac{P(\xi > x + y, \xi > x)}{P(\xi > x)} \\ &= \frac{1 - P(\xi < x + y)}{1 - P(\xi < x)} \\ &= \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-(1-e^{-\alpha(x+y)})}{1-(1-e^{\alpha x})} \\
&= e^{-\alpha y} \\
&= 1-(1-e^{-\alpha y}) \\
&= 1-F(y) \\
&= 1-P(\xi < y) \\
&= P(\xi > y)
\end{aligned}$$

□

Пример.

1. Время работы прибора до поломки.
2. Время между появлением двух соседних редких событий в простейшем потоке событий.

6.9.3 Нормальное распределение

ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и $\sigma > 0$, если её плотность имеет вид $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$, обозначается $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ или $\xi \in N(\alpha, \sigma^2)$

Смысл параметров распределения:

$$\mathbb{E}\xi = a \quad \sigma\xi = \sigma \quad \mathbb{D}\xi = \sigma^2$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Определение. Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma = 1$.

Плотность:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Эта функция называется **функцией Гаусса**

Функция распределения:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Примечание.

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{\frac{z^2}{2}} dz = 0.5 + \Phi(x)$$

Здесь $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Примечание. Интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}d\frac{x^2}{2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} - \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx - (\mathbb{E}\xi)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx - 0 = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = xe^{-\frac{x^2}{2}}dx & v = e^{-\frac{x^2}{2}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0+\sqrt{2\pi}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

6.9.4 Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями и её следствия

1. Пусть $\xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $F_\xi(x) = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

   Доказательство.

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt = \begin{bmatrix} z = \frac{t-a}{\sigma} & t = \sigma z + a & dt = \sigma dz \\ z(-\infty) = -\infty & z(x) = \frac{x-a}{\sigma} & \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sigma dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \Phi_0 \left(\frac{x-a}{\sigma} \right)
\end{aligned}
$$

□

2. Если $\xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0,1)$

   Примечание. Эта операция называется стандартизацией.

   Доказательство.

$$F_\eta(x) = P\left(\frac{\xi - a}{\sigma} < x\right) = P(\xi < \sigma x + a) = F_\xi(\sigma x + a) = \Phi_0\left(\frac{\sigma x + a - a}{\sigma}\right) = \Phi_0(x)$$

□

3. Пусть $\xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $\mathbb{E}\xi = a, \mathbb{D}\xi = \sigma^2$.

   Доказательство.

$$
\begin{gathered}
\eta := \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0,1) \\
\mathbb{E}\xi = \sigma \mathbb{E}\xi + a = 0 + a = a \\
\mathbb{D}\xi = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2
\end{gathered}
$$

□

4. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал $P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$

   Доказательство.

$$
\begin{aligned}
P(\alpha < \xi < \beta) &= F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) \\
&= \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \\
&= 0.5 + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - 0.5 - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

□

Примечание. В этой формуле можно заменить Φ на Φ_0, т.к. они отличаются на константу и она сократится.

5. Вероятность отклонения случайной величины от её среднего значения *(попадание в интервал, симметричный относительно a).*

$$P(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(|\xi - a| < t) &= P(-t < \xi - a < t) \\ &= P(a - t < \xi < a + t) \\ &= \Phi\left(\frac{a+t-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-t-a}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

□

При замене в этой формуле Φ на Φ_0 получим $P(|\xi - a| < t) = 2\Phi_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$.

Правило трёх σ: $P(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$.

Доказательство.

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0.49865 = 0.9973$$

□

Смысл этого правила: нормальная случайная величина почти гарантировано попадает в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$

6.9.5 Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Определение. Асимметрией распределения называется число $A_s = \mathbb{E}\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \frac{M_3}{\sigma^3}$

Определение. Эксцессом распределения называется число $E_k = \mathbb{E}\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3$

Если $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $A_s = 0, E_k = 0$. Таким образом, эти коэффициенты показывают, насколько сильно данное распределение отличается от нормального.

6.10 Γ-функция и Γ-распределение

Определение. Гамма-фукнция Эйлера $G(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt$. При $\lambda \in \mathbb{N}$ $\Gamma(\lambda + 1) = \lambda!$

Свойства.

1. $\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \Gamma(\lambda - 1)$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(x) = (x-1)!, x \in \mathbb{N}$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Определение. Случайная величина ξ имеет Γ-распределение с параметрами $\alpha > 0, \lambda > 0$, если её плотность имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$, обозначается $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$

$$F_\xi(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt, \quad x \geq 0$$

Если $\lambda \in \mathbb{N}$, то:

$$F_\xi(x) = \sum_{k=\lambda}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\alpha x}$$

Свойства.

1. $\mathbb{E}\xi = \frac{\lambda}{\alpha}, \mathbb{D}\xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$
2. $\Gamma_{\alpha,1} = E_\alpha$
3. Пусть случайные величины $\xi_1 \ldots \xi_n$ независимы и имеют одинаковое показательное распределение E_α. Тогда $\sum_{i=1}^n \xi_i = \Gamma_{\alpha,n}$
4. Если $\xi \in N(0,1)$, то $\xi^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

Лекция 9

10 апреля

6.11 Сингулярное распределение

Определение. ξ имеет **сингулярное распределение**, если существует борелевское множество $B \in \mathfrak{B}$ с нулевой мерой Лебега, такое что $P(\xi \in B) = 1$, но $\forall x \in B \ \ P(\xi = x) = 0$.

Примечание. Такое борелевское множество состоит из несчётного числа точек. В противном случае по счётной

Примечание. Функция распределения $F(x)$ — непрерывная функция по свойству 7 функции распределения[1].

Пример. ξ задана функцией распределения "лестница Кантора":

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), & 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Теорема 14 (Лебега). Пусть $F_\xi(x)$ — функция распределения произвольной случайной величины ξ. Тогда $\xi(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x) + p_3F_3(x)$, где $p_1+p_2+p_3 = 1$ и $F_1(x)$ — функция дискретного распределения, $F_2(x)$ — функция абсолютно непрерывного распределения и $F_3(x)$ — функция сингулярного распределения. Другими словами, все распределения делятся на дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное и их смеси.

[1] В каждой точке функция распределения имеет скачок, равный вероятности попадания в эту точку.

6.12 Общий взгляд на математическое ожидание

Определение. **Математическим ожиданием** случайной величины ξ называется:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\Omega} \xi(w) dP(w) \tag{2}$$

При условии, что данный интеграл существует.

Примечание. Используя интеграл Стилтьеса эту формулу можно записать в виде:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi}(x) \tag{3}$$

Из определения интеграла Стилтьеса можно получить геометрическую интерпретацию математического ожидания: разность площади подграфика на $x < 0$ и площади надграфика, ограниченной $y = 1$, для $x > 0$:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{0}^{+\infty} (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^{0} F(x) dx$$

Рассмотрим две ситуации:

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — дискретное, т.е. Ω состоит из не более, чем счётного числа точек. Тогда из формулы (2) получаем:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{+\infty} \xi(w_i) P(w_i)$$

Пример (“орлянка”). $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}, P(\text{Г}) = \frac{1}{2} = P(\text{Р}), \xi(\text{Г}) = 1, \xi(\text{Р}) = -1$

$$\mathbb{E}\xi = \xi(\text{Г}) \cdot P(\text{Г}) + \xi(\text{Р}) \cdot P(\text{Р}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

2. Вероятностное пространство абсолютно непрерывное. $\Omega \subset \mathbb{R}^n, w = (x_1 \dots x_n)$. Тогда из формулы (3) получаем:

$$\mathbb{E}\xi = \int \cdots \int_{\Omega} \xi(x_1 \dots x_n) \rho(x_1 \dots p_n) dx_1 \dots dx_n$$

Пример. Круг радиуса 3, наугад бросается точка. ξ = расстояние от центра круга до выбранной точки.

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\} \quad \xi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Т.к. бросаем наугад, то плотность $\rho(x,y) = \text{const}$. Из условия нормировки:

$$\int_\Omega dP(w) = 1 \quad \iint_\Omega \rho dxdy = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{S_\Omega} = \frac{1}{9\pi}$$

$$\mathbb{E}\xi = \iint_\Omega \xi(x,y)\rho dxdy = \iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{9\pi}dxdy = \frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho\rho d\rho = 2$$

6.13 Преобразование случайных величин

Определение. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — **борелевская функция**, если $\forall B \in \mathfrak{B}\;\; g^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$.

Теорема 15. Если $g(x)$ борелевская функция и ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, то $g(\xi)$ — тоже случайная величина на этом же пространстве.

Доказательство. Очевидно из определения борелевской функции. □

Примечание. Если ξ — дискретная случайная величина, то её закон распределения находится просто из определения. Поэтому в дальнейшем будем считать, что ξ имеет абсолютно непрерывное распределение.

6.13.1 Стандартизация случайных величин

Определение. Стандартной случайной величиной, соответствующей случайной величине ξ, называется величина $\frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sigma_\xi}$

Свойства.

- $\mathbb{E}\xi = 0$
- $\mathbb{D}\xi = 1$

Доказательство. Было доказано раннее. □

Примечание. При стандартизации тип распределения не всегда сохраняется.

6.13.2 Линейное преобразование

Теорема 16. Пусть случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$. Тогда случайная величина $\eta = a\xi + b$ при $a \neq 0$ имеет плотность $f_\eta = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

Доказательство.

1. $a > 0$. Тогда

$$F_\xi(x) = P(a\xi + b < x)$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t)dt \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{y-b}{a} & dt = \frac{1}{a}dy & y = at+b \\ y(-\infty) = -\infty & y\left(\frac{x-b}{a}\right) = x & \end{bmatrix} \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) dy \Rightarrow f_\eta = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

2. $a < 0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
F_\xi(x) &= P(a\xi + b < x) \\
&= P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) \\
&= P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) \\
&= \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f_\xi(t)dt \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{y-b}{a} & dt = \frac{1}{a}dy & y = at+b \\ y(+\infty) = -\infty & y\left(\frac{x-b}{a}\right) = x & \end{bmatrix} \\
&= \int_{x}^{-\infty} \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{-a} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) dy \Rightarrow f_\eta = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

□

1. Если $\xi \in N(0,1)$, то $\eta = \sigma\xi + a \in N(a, \sigma^2)$.

   Свойства.

$$f_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_\eta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\frac{x-a}{2\sigma}}}$$

2. Если $\eta \in N(a, \sigma^2)$, то $\xi = \frac{\eta - a}{\sigma} \in N(0,1)$
3. Если $\eta \in N(a, \sigma^2)$, то $\xi = \gamma\eta + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$
4. Если $\xi \in N(0,1)$, то $\eta = a\xi + b \in N(b, a+b)$ при $a > 0$
5. Если $\xi \in E_\alpha$, то $\eta = \alpha\xi \in E_1$

Теорема 17. f_ξ — плотность случайной величины ξ и функция $g(x)$ монотонна. Тогда $\exists$ обратная функция $h(x) = g^{-1}(x)$ и случайная величина $\eta = g(\xi)$:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|h'(x)|} \cdot f_\xi(h(x))$$

Теорема 18 (квантильное преобразование). Пусть функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ непрерывна. Тогда случайная величина $\eta = F(\xi)$ имеет стандартное равномерное распределение, т.е. $U(0, 1)$

Доказательство. Ясно, что $0 \le \eta \le 1$, т.к. $0 \le F(x) \le 1$.

1. Предположим, что $F(x)$ — строго возрастающая функция. Тогда она имеет обратную функцию $F^{-1}(x)$ и:

$$F_\eta(x) = P(F(\xi) < x) = P(\xi < F^{-1}(x)) \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ F(F^{-1}(x)) = x & 0 < x < 1 \Rightarrow \eta \in U(0,1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

2. Пусть функция не является строго возрастающей, т.е. есть интервалы постоянства. В этом случае через $F^{-1}(x)$ обозначим самую левую точку такого интервала: $F^{-1}(x) = \min_t\{t \mid F(t) = x\}$[2].

$$F_\eta(x) = P(F(\xi) < x) = P(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, \quad 0 \le x \le 1$$

□

Теорема 19 (обратная). Пусть функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ, причём не обязательно непрерывная. Обозначим через $F^{-1}(x) = \inf\{t \mid F(t) \ge x\}$. Пусть случайная величина $\eta \in U(0, 1)$, $F(x)$ — произвольная функция распределения. Тогда случайная величина $\xi = F^{-1}(\beta)$ имеет функцию распределения $F(x)$

Примечание. $F^{-1}(\eta)$ называется **квантильным преобразованием** над случайной величиной η.

Примечание. Датчики случайных чисел имеют обычно стандартное равномерное распределение.

Из теоремы 19 следует, что из датчика случайных чисел и квантильного преобразования можно смоделировать любое желаемое распределение, в том числе и дискретное.

Пример.

[2] Можно писать min, а не inf, т.к. $F(x)$ непрерывна слева

1. Смоделировать E_α.
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$
$$\eta = 1 - e^{-\alpha x} \quad e^{-\alpha x} = 1 - \eta \quad x = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta)$$
Если $\eta \in U(0,1)$, то $\xi = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta) \in E_\alpha$
2. Смоделировать $N(0,1)$:
$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
$$\Phi_0(\eta) \in N(0,1)$$