

# 1 Векторная алгебра

## 1.1 Системы координат на плоскости и в пространстве.

**Определение.** Координатной осью называется ориентируемая прямая, имеющая начало отсчета 0 и снабженная масштабом  $E$ .

**Определение.** Система координат — прямоугольная, если угол между осями координат прямой.

**Определение.** Декартова прямоугольная система координат — система координат с одинаковым масштабом по всем осям.

**Определение.** Система координат на плоскости называется полярной, если положение каждой точки задаётся полярным углом  $\varphi$  и полярным радиусом  $\rho$ .

Связь прямоугольной и полярной систем:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}$$

**Определение.** Система координат в пространстве называется цилиндрической, если положение каждой точки задаётся полярным углом  $\varphi$ , полярным радиусом  $\rho$  и высотой над плоскостью  $z$ .

Связь прямоугольной и цилиндрической систем такая же, как прямоугольной и полярной.

**Определение.** Система координат называется сферической, если положение каждой точки определяется радиальным расстоянием  $\rho$ , азимутальным  $\varphi$  и зенитным  $\Theta$  углами.

Связь прямоугольной и сферической систем:

$$x = \rho \cos \varphi \cos \Theta, \quad y = \rho \sin \varphi \cos \Theta, \quad z = \rho \sin \Theta$$

## 1.2 Векторы и основные действия с ними (сложение, умножение на число).

**Определение.** Направленные отрезки эквивалентны, если они:

1. Лежат на параллельных прямых
2. Сонаправлены
3. Имеют одинаковые длины

**Определение.** Вектор — класс эквивалентности направленных отрезков

**Определение.** Сумма двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , полученный по правилу треугольника или параллелограмма

**Определение.** Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  является вектор  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ , такой что:

1.  $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$
2.  $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$
3.  $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{a} \updownarrow \vec{b}$
4.  $\lambda = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$

### 1.3 Векторное введение координат. Координаты вектора.

Для любого вектора  $\vec{a}$ , заданного на оси  $l$  существует единственное представление  $\vec{a} = x_a \cdot \vec{e}$ , где  $x_a \in \mathbb{R}$  и  $|\vec{e}| = 1$ . Тогда  $\vec{e}$  — базис и  $x_a$  — координата вектора  $\vec{a}$  в базисе  $\{\vec{e}\}$

### 1.4 Свойства основных действий над векторами.

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  — коммутативность
2.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  — ассоциативность
3.  $\exists \vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  — нейтральный элемент
4.  $\forall \vec{a} \exists (-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$  — наличие обратного элемента
5.  $\alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$  — ассоциативность
6.  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$  — дистрибутивность
7.  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$  — дистрибутивность

### 1.5 Скалярное произведение векторов и его свойства.

**Определение.** Угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — угол  $\leq 180^\circ$ , заключенный между представителями соответствующих классов эквивалентности, отложенных от одной точки.

**Определение.** Скалярное произведение — число, равное:  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$

Свойства скалярного произведения:

1.  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
2.  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq 0$
3.  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}}^\perp \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Пр}_{\vec{b}}^\perp \vec{a}$
4.  $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c}) = (\lambda\vec{a}, \vec{c}) + (\mu\vec{b}, \vec{c})$

## 1.6 Векторное произведение и его свойства.

**Определение.** Тройка  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  — **правая**, если если располагаясь по направлению вектора  $\vec{c}$  наблюдатель видит, что кратчайший поворот от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  происходит по часовой стрелке.

**Определение.** Векторное произведение  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — вектор  $\vec{c}$ , такой что:

1.  $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$
2.  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
3.  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  — правая тройка

Свойства векторного произведения:

1.  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
2.  $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$
3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

## 1.7 Смешанное произведение векторов и его свойства.

**Определение.** Смешанное произведение:  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Свойства смешанного произведения:

1.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
2.  $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
3.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

## 1.8 Двойное векторное произведение и его свойства.

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$$

Свойства:

1.  $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  — можно запомнить как “бац минус цаб”
2. Тождество Якоби:

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

## 1.9 Замена координат при переходе к новой системе отсчета. Матрица перехода.

Переход от одного базиса  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  к другому базису  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ :

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = t_1^1 \vec{e}_1 + t_1^2 \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = t_2^1 \vec{e}_1 + t_2^2 \vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

**Определение.**  $T$  называется матрица перехода

С учётом переноса начала координат:

$$X = A + T \cdot X'$$

Параллельный перенос:  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$

Сжатие-растяжение:  $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $A = \vec{0}$

Поворот на угол  $\varphi$ :  $T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ ,  $A = \vec{0}$

## 2 Аналитическая геометрия

### 2.1 Уравнения линий и поверхностей.

**Определение.** Уравнение линии — такое равенство, что координаты любой точки на линии удовлетворяют этому равенству и координаты любой точки не на линии не удовлетворяют.

Способы задания линий в  $\mathbb{R}^2$ :

1. В явном виде:  $y = f(x), x = g(y)$
2. В неявном виде:  $F(x, y) = 0$
3. Параметрически:  $x = x(t), y = y(t)$

Способы задания линий в  $\mathbb{R}^3$ :

1. В неявном виде:  $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$
2. Параметрически:  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

Способы задания поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ :

1. В явном виде:  $x = f(y, z); y = g(x, z); z = h(x, y)$
2. В неявном виде:  $F(x, y, z) = 0$
3. Параметрически:  $x = x(u, v); y = y(u, v); z = z(u, v)$

Эти способы задают не только линии и поверхности. (Также могут быть точки, множества линий/поверхностей и т.д.)

**Определение.** Целый алгебраический полином — уравнение вида

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x^{m_i} y^{n_i}, \quad m_i, n_i \in \mathbb{N}$$

Порядок такого полинома  $p = \max_i \{m_i + n_i\}$

## 2.2 Уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Взаимное расположение прямых.

### 2.2.1 Уравнения прямой на плоскости и в пространстве

Возьмём произвольную прямую  $l$  в  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $\vec{s} = (m \ n \ p)^T$  — направляющий вектор этой прямой. Зафиксируем точку  $M_0$  на  $l$  с радиус-вектором  $\vec{r}_0 = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$  и выразим точку  $M$  на  $l$  с радиус-вектором  $\vec{r} = (x \ y \ z)^T$ .

$\overrightarrow{M_0 M} \parallel \vec{s}$ , т.к. они параллельны  $l \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{M_0 M} = t \cdot \vec{s}$

$\overrightarrow{M_0 M} = \vec{r} - \vec{r}_0$  (по определению)  $\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{s} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$

**Определение.** Это векторное уравнение прямой.

Домножим обе части векторно на  $\vec{s}$ .

$$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{r}_0 \times \vec{s} + t \cdot \vec{s} \times \vec{s}$$

$$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{r}_0 \times \vec{s}$$

$$\vec{b} := \vec{r}_0 \times \vec{s}, \quad \vec{r} \times \vec{s} = \vec{b}$$

Спроектируем векторное уравнение прямой на каждую из осей, получим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases}$$

Выразим из каждого уравнения  $t$  и приравняем:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Если даны две точки на прямой  $M_0$  и  $M_1$  с радиус-вектором  $\vec{r}_1 = (x_1 \ y_1 \ z_1)^T$ , можем получить направляющий вектор для  $l$ , который равен  $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ . Подставим это в векторное уравнение прямой:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t$$

Сделаем переход, аналогичный предыдущему:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0) \cdot t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0) \cdot t \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

### 2.2.2 Взаимное расположение прямых

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, а также равен углу между нормальными к этим векторам:

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

Параллельность прямых:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_2 = \alpha \vec{s}_1 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

Перпендикулярность:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow (\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

## 2.3 Частные виды уравнений прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

### 2.3.1 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0)$$

Этот переход можно делать, только если  $m \neq 0$

$$k := \frac{m}{n} = \operatorname{tg} \alpha \quad \alpha - \text{угол между прямой и осью } x$$

$$b := y_0 - kx_0, \quad y = kx + b$$

Геометрический смысл  $b$  — длина отрезка между началом координат и точкой пересечения прямой с осью  $y$ .

### 2.3.2 Уравнение прямой в отрезках на осях

Возьмем  $a$  — длина отрезка между началом координат и точкой пересечения прямой с осью  $x$ . Тогда:

$$a := \frac{-b}{k}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

### 2.3.3 Нормальное уравнение прямой

Возьмём нормаль к  $\vec{s}$  — это будет  $\vec{n}$ , при этом его возьмём таким, что:

$$|\vec{n}| = 1, \quad \angle(\vec{n}, \vec{r}_0) < \frac{\pi}{2}$$

Домножим векторное уравнение на  $\vec{n}$ :

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = (\vec{s}, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) - (\vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

$$\vec{n} := (\cos \alpha, \cos \beta), \quad p := (\vec{r}_0, \vec{n})$$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$$

$p$  — **прицельный параметр**, его геометрический смысл — расстояние от начала отсчета до прямой.

Возьмём произвольную нормаль к  $\vec{s}$  — вектор  $\vec{N} = (A, B)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$C := Ax_0 + By_0, \quad Ax + By + C = 0$$

### 2.3.4 Расстояние от точки до прямой

Найдём расстояние между точкой  $M$  и прямой  $L$ , заданной уравнением с прицельным параметром.

$$L : x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$$

Проведем  $L_1 \parallel L$  через  $M$ :

$$L_1 : x \cos \alpha + y \cos \beta - p_1 = 0, \quad p_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta$$

$$\rho(L, M) = \rho(L, L_1) = |p_1 - p| = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta - p|$$

## 2.4 Уравнения плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей.

### 2.4.1 Векторное параметрическое уравнение плоскости

Зададим плоскость двумя непараллельными векторами  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$  и точкой  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Выразим произвольную точку  $M$  из плоскости с радиус-вектором  $\vec{r} = (x, y, z)$ :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1 \vec{s}_1 + t_2 \vec{s}_2$$

**Определение.** Это векторное параметрическое уравнение плоскости.

Спроектируем на каждую ось:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 m_1 + t_2 m_2 \\ y = y_0 + t_1 n_1 + t_2 n_2 \\ z = z_0 + t_1 p_1 + t_2 p_2 \end{cases}$$

### 2.4.2 Общее уравнение плоскости

Умножим векторное уравнение на  $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$  скалярно:

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0 + t_1 \vec{s}_1 + t_2 \vec{s}_2, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = (t_1 \vec{s}_1 + t_2 \vec{s}_2, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

В проекции:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0, \quad Ax + By + Cz + D = 0$$



### 2.4.3 Уравнение плоскости, проходящей через три точки

По аналогии с  $\mathbb{R}^2$ :

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

### 2.4.4 Нормальное уравнение плоскости

По аналогии с  $\mathbb{R}^2$ :

$$p := (\vec{r}_0, \vec{n}) = \text{Pr}_{\vec{n}}^\perp, \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

### 2.4.5 Угол между плоскостями

Это угол между нормальными плоскостей.

### 2.4.6 Параллельность плоскостей

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = \alpha \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

### 2.4.7 Перпендикулярность плоскостей

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

## 2.5 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

### 2.5.1 Угол между прямой и плоскостью

$$\sin \varphi = \left| \frac{(\vec{s}, \vec{n})}{|\vec{s}| |\vec{n}|} \right|$$

### 2.5.2 Параллельность прямой и плоскости

$$\mathcal{L} \parallel L \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow (\vec{s}, \vec{n}) = 0$$

### 2.5.3 Перпендикулярность прямой и плоскости

$$\mathcal{L} \perp L \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} = \alpha \vec{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

## 2.6 Эллипс: геометрическое определение, каноническое уравнение, симметрия и форма эллипса.

**Определение.** Эллипс — множество точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек (*фокусов*) — постоянная величина.

Пусть фокусы — точки  $F_1, F_2$ ,  $|F_1F_2| = 2$  — фокусное расстояние,  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  — векторы от точки эллипса до фокусов. Тогда по определению:

$$|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = 2a = \text{const}$$

$\varepsilon = \frac{c}{a}$  — эксцентриситет эллипса.

$$0 \leq c \leq a \Rightarrow 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

При  $c = 0$  эллипс — окружность, при  $c = a$  — отрезок.

Каноническое уравнение эллипса:

$$b^2 := a^2 - c^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a$  — длина большой полуоси эллипса,  $b$  — длина малой полуоси.

Очевидны предельные значения координат эллипса:

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b$$

Кроме того, эллипс симметричен относительно обеих осей и относительно начала отсчета.

## 2.7 Эллипс: полярное уравнение, параметрические уравнения, директрисы, уравнение касательной к эллипсу.

### 2.7.1 Полярное уравнение

### 2.7.2 Параметрическое уравнение эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

Это уравнение можно проверить подстановкой в каноническое.

### 2.7.3 Уравнение касательной к эллипсу

Касательная к эллипсу в точке  $M_0(x_0, y_0)$  задается следующим уравнением:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

### 2.7.4 Директрисы

**Определение.** Директрисами эллипса называются прямые, параллельные малой оси эллипса и проходящие от нее на расстоянии  $\frac{a}{\varepsilon}$ .

$$d_1 := \frac{a}{\varepsilon} + x, \quad d_2 := \frac{a}{\varepsilon} - x$$

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

## 2.8 Окружность.

**Определение.** Окружность — частный случай эллипса при  $c = 0$ ,  $r_1 = r_2 = r$

Свойства:

1.  $r_1 + r_2 = 2a = 2r$ ,  $a = b = r$ ,  $\varepsilon = 0$

2. Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

3.  $|x| \leq r$ ,  $|y| \leq r$

4.  $\rho = r$

5.  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$

6. Касательная в точке  $M_0(x_0, y_0)$ :  $\frac{xx_0}{r^2} + \frac{yy_0}{r^2} = 1$

## 3 Алгебраические структуры. СЛАУ

### 3.1 Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле

**Определение.** Полугруппа — множество  $G$  с заданной на нём бинарной ассоциативной замкнутой операцией  $\circ$ , т.е.

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$$

**Определение.** Группа — полугруппа, где выбран нейтральный элемент и для каждого элемента есть обратный:

1. Нейтральный элемент  $e$ :  $e \circ g = g \circ e = g$

2. Обратный элемент:  $\forall g \in G \exists g^{-1} g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

**Определение.** Абелева группа — группа с коммутативной операцией, т.е.

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

**Определение.** Кольцо — множество с двумя бинарными операциями  $\{R, '+', '\cdot'\}$ , которое является абелевой группой относительно сложения, полугруппой относительно умножения и эти операции согласованны (дистрибутивны):

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3; \quad (r_2 + r_3) \cdot r_1 = r_2 \cdot r_1 + r_3 \cdot r_1$$

**Определение.** Поле — множество с двумя бинарными операциями  $\{R, '+', '\cdot'\}$ , где эти операции согласованы и:

1.  $\{K, '+\}$  — абелева группа
2.  $\{K \setminus \{0\}, '\cdot'\}$  — абелева группа

### 3.2 Алгебраические структуры: линейное пространство, алгебра

**Определение.** Модуль над кольцом  $R$  — абелева группа  $\{G, '+\}$  с операцией  $R \times G \rightarrow G$ , записываемой как  $rg$  и для которой выполняется следующее:

1.  $(r_1 + r_2)g = r_1g + r_2g$
2.  $r(g_1 + g_2) = rg_1 + rg_2$
3.  $(r_1r_2)g = r_1(r_2g)$

**Определение.** Линейное пространство — модуль над кольцом, которое также является полем.

**Определение.** Вектор — элемент линейного пространства.

**Определение.** Алгебра — модуль над кольцом, где сам модуль также является кольцом.

### 3.3 Поле комплексных чисел

$$i^2 := -1$$

$$\mathbb{C} = \{a + bi : \forall a, b \in \mathbb{R}\}$$

**Модуль** комплексного числа  $c$ :  $|c| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ , если  $c = a + bi$

**Аргумент** комплексного числа  $c$ :  $\varphi = \arg(c) = \arg(a + bi) = 2 \arctan \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} \right)$

Тогда  $c = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

**Дополнение** комплексного числа  $c$  записывается как  $\bar{c} = \overline{a + bi} = a - bi$

### 3.4 Линейное пространство. Примеры линейных пространств.

Дано выше. (3.2, стр. 12)

Примеры:

1.  $X = \{x = (\xi^1 \dots \xi^n)^T, \xi^i \in \mathbb{R}\}$  (или  $\mathbb{C}$ )
2.  $\mathcal{P}_n = \{\text{многочлены } p(t) : \deg p(t) \leq n, n \in \mathbb{N}\}$

### 3.5 Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.

**Определение.** Линейной комбинацией называется следующее выражение:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где  $\{x_i\}_{i=1}^n$  — вектора,  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  — коэффициенты.

**Определение.** Набор векторов  $\{x_i\}_{i=1}^n$  называется **линейнонезависимым**, если не существует его линейной комбинации, где не все коэффициенты равны 0, а сама комбинация равна  $0_X$ :

$$\nexists \{\alpha_i\}_{i=1}^n : \exists i : \alpha_i \neq 0 \quad \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_X$$

Иначе набор называется **линейно зависимым**

**Лемма 1.** Любой набор, содержащий нулевой вектор, является линейнозависимым.

**Лемма 2.** Набор, содержащий линейнозависимый поднабор, является линейнозависимым.

**Лемма 3.** Любой поднабор линейнонезависимого набора также является линейнонезависимым.

**Лемма 4.** Набор векторов линейнозависим тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов набора выражается линейной комбинацией остальных.

$$\exists k \in \{1 \dots n\} : x_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n \alpha^i x_i \Leftrightarrow \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ}$$

### 3.6 Базис и размерность линейного пространства.

**Определение.** Набор векторов называется **полным** в линейном пространстве  $X$ , если любой вектор этого пространства можно выразить как линейную комбинацию этого набора:

$$\forall x \in X \quad \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha^i x_i$$

**Определение.** Набор векторов называется **базисом** пространства  $X$ , если он является полным и ЛНЗ.

**Определение.** Линейное пространство называется **конечномерным**, если в нём существует конечный полный набор векторов

**Определение.** Размерность пространства  $\dim X$  — количество векторов в его базисе.

### 3.7 Изоморфизм линейных пространств.

**Определение.** Изоморфизм — биекция, сохраняющая линейность, установленная между двумя линейными пространствами над одним и тем же полем:

$$\begin{cases} x_1 \leftrightarrow y_1 \\ x_2 \leftrightarrow y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2 \\ \alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1 \end{cases}$$

### 3.8 Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.

**Определение.** Подпространство линейного пространства  $X$  — замкнутое множество  $L \subset X$

*Пример.* 1.  $X$  и  $\{0\}$  называются тривиальными подпространствами

2. Прямая и плоскость, содержащие начало координат — подпространство  $E_3$

3.  $\mathbb{R}^{m < n}$  — подпространство  $\mathbb{R}^n$

4. Множество симметричных  $n \times n$  матриц — подпространство  $\mathbb{R}_n^n$

5. Множество полиномов с членами только чётных степеней — подпространство  $\mathcal{P}_n$

**Определение.** Линейная оболочка набора векторов — множество всех линейных комбинаций этих векторов:

$$\mathcal{L}(x_1 \dots x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \mid \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \right\}$$

**Определение.** Линейное многообразие, параллельное подпространству  $L$  линейного пространства  $X$  — множество  $M$ :

$$M = \{y \in X : y = x_0 + x \quad \forall x \in L\}, \quad x_0 \in X$$

### 3.9 Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.

**Определение.** Пересечение подпространств  $L_1$  и  $L_2$  — множество  $L'$ , такое что:

$$L' = \{x \in X : x \in L_1 \text{ и } x \in L_2\}$$

**Определение.** Сумма подпространств  $L_1$  и  $L_2$  — множество  $L''$ , такое что:

$$L' = \{x \in X : x = x_1 + x_2 \quad \forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

**Определение.** Прямая сумма подпространств  $L_1$  и  $L_2$  — множество  $L = L_1 \dot{+} L_2$ , такое что:

$$L = \{x \in X : x = x_1 + x_2 \quad \forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

**Определение.** Если  $X = L_1 \dot{+} L_2$ ,  $L_1$  — дополнение  $L_2$  до  $X$

### 3.10 Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера (геометрическая формулировка).

**Определение.**

$$\begin{cases} \alpha_1^1 \xi^1 + \alpha_2^1 \xi^2 + \dots + \alpha_n^1 \xi^n = \beta^1 \\ \alpha_1^2 \xi^1 + \alpha_2^2 \xi^2 + \dots + \alpha_n^2 \xi^n = \beta^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^m \xi^1 + \alpha_2^m \xi^2 + \dots + \alpha_n^m \xi^n = \beta^m \end{cases}$$

— линейная алгебраическая система,  $\alpha$  — коэффициенты,  $\beta$  — свободные члены,  $\xi$  — неизвестные

**Определение.** Решение системы — такой набор, при подстановке которого равенства становятся верными.

**Определение.** Совместная система — система, у которой есть решение.

**Определение.** Определенная система — совместная система, которая имеет единственное решение.

**Определение.** Однородная система — система, у которой все свободные члены равны 0.

Запишем в векторной форме:  $\sum_{i=1}^n a_i \xi^i = b$

**Теорема 1.** Если  $m = n$  и  $\{a_i\}_{i=1}^n$  — ЛНЗ, система совместна и определена, т.е. есть единственное решение.

### 3.11 Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли (геометрическая формулировка) и ее следствия.

Рассмотрим случай, когда  $\dim \mathcal{L}\{a_1 \dots a_n\} = r \leq n$ . Тогда можно занумеровать  $a$  так, что  $\{a_i\}_{i=1}^r$  — ЛНЗ и переписать систему как:

$$a_1 \xi^1 + \dots + a_r \xi^r = b - a_{r+1} \xi^{r+1} - \dots - a_n \xi^n$$

**Теорема 2.**  $b \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$  система совместна (можно все  $\xi$  справа занулить и представить  $b$  через левую часть). Если  $r = m$ , система определена, иначе — нет.

**Следствие 1.** Однородная система:

1. Всегда совместна, т.к. существует тривиальное решение
2. Имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда  $r < m$
3. Является неопределенной тогда и только тогда, когда  $m < n$

### 3.12 Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.

**Теорема 3.** Если  $m = n$ , то:

1. Или однородная система имеет только тривиальное решение, и неоднородная система совместна и определена для любого  $b$
2. Или существуют нетривиальные решения однородной системы и неоднородная система совместна не при любых  $b$

Пояснение: в первом случае  $\{a_i\}$  ЛНЗ  $\Rightarrow \forall b$  можно выразить как линейную комбинацию  $\{a_i\}$  единственным образом. Во втором случае  $\{a_i\}$  ЛЗ  $\Rightarrow$  не любой  $b$  можно выразить как линейную комбинацию  $\{a_i\}$ .

### 3.13 Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.

**Определение.** Фундаментальной системой решений линейной однородной системы уравнений называется любая система из  $n-r$  линейнонезависимых решений этой системы, то есть базис пространства решений однородной системы.

Любое решение можно представить в виде общего решения:

$$z = z' + \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

где  $\{x_i\}_{i=1}^n$  — ФСР.

## 4 Полилинейные формы. Определители

### 4.1 Перестановки.

**Определение.** Перестановкой из  $a_1, a_2, \dots, a_n$  из первых  $n$  чисел натурального ряда называется расположение их в некотором фиксированном порядке.

**Определение.** Перестановка  $1, 2, \dots, n$  — базовая.

**Определение.** Транспозиция перестановки  $t_q^p$  — обмен местами двух элементов этой перестановки.

**Определение.** Беспорядок (*инверсия*) в перестановке — когда большее число стоит перед меньшим.



**Определение.** Чётность числа беспорядков в перестановке  $\Leftrightarrow$  чётность перестановки

## 4.2 Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.

**Определение.** Отображение из  $X$  в  $Y$  ( $f : X \rightarrow Y$ ) сопоставляет каждому  $x \in X$  элемент  $y \in Y$

**Определение.** Линейная форма — линейное отображение из линейного пространства  $X$  в линейное пространство  $Y$ :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

**Определение.**  $f = g \Leftrightarrow (f, x) = (g, x) \quad \forall x \in X$

**Определение.**  $\theta$  — нуль-форма, если  $(\theta, x) = 0 \quad \forall x \in X$

**Определение.**  $h = f + g \Leftrightarrow (h, x) = (f, x) + (g, x) \quad \forall x \in X$

**Определение.**  $l = \alpha f \Leftrightarrow (l, x) = \alpha(f, x) \quad \forall x \in X$

**Определение.** Пространство, сопряженное с  $X$  — пространство линейных форм, заданных на  $X$  и обозначаемое  $X^*$

## 4.3 Полилинейные формы (ПЛФ): основные определения, тензор, эквивалентное задание ПЛФ.

*Примечание.* Т.к. в этом разделе много сумм, не будем их писать:

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j \xi^j \equiv \varphi_j \xi^j$$

*Примечание.* (от автора) Я буду втыкать  $\triangle!$  везде, где есть скрытые суммы.

**Определение.** Полилинейная форма — функция от  $p$  векторов и  $q$  линейных форм, принимающая значения из поля  $K$ :

$$U : X^p \times X^{*q} \rightarrow K,$$

линейная по всем аргументам:

$$U(x_1 \dots \alpha x'_i + x''_i \dots x_n, y^1 \dots y^n) = \alpha U(x_1 \dots x'_i \dots x_n, y^1 \dots y^n) + U(x_1 \dots x''_i \dots x_n, y^1 \dots y^n),$$

такая ПЛФ имеет валентность  $(p, q)$

**Определение.** Тензор ПЛФ  $W$  валентности  $(p, q)$  — набор из  $n^{p+q}$  чисел:

$$w_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = W(e_{i_1} \dots e_{i_q}, f^{j_1} \dots f^{j_p})$$

$$\forall t \in \{1 \dots p\} \quad i_t \in \{1 \dots n\}; \quad \forall t \in \{1 \dots q\} \quad j_t \in \{1 \dots n\},$$

ранг этого тензора  $(p, q)$ .

*Примечание.* Для удобства можно писать так:  $w_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q} = w_{\vec{i}}^{\vec{j}}$

**Теорема 4.** Задание ПЛФ эквивалентно заданию ее тензора в паре базисов пространств  $X$  и  $X^*$

#### 4.4 Базис линейного пространства ПЛФ валентности $(p, q)$ .

**Определение.**  $U + V$  и  $\lambda U$  заданы так же, как для линейных форм.

**Теорема 5.** Множество всех ПЛФ валентности  $(p, q)$  — линейное пространство  $\Omega_q^p$  над полем  $K$ .

Рассмотрим набор ПЛФ  $\{w_{t_1 \dots t_p}^{s_1 \dots s_p}\}$ , такой что:

$$w_{t_1 \dots t_p}^{s_1 \dots s_p}(x_1 \dots x_p, y^1 \dots y^q) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \dots \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 \eta_{t_2}^2 \dots \eta_{t_q}^q,$$

т.е.  $\vec{s}w_{\vec{t}}^{\vec{j}}$  — произведение  $s_i$ -ой координаты  $i$ -того вектора и  $t_i$ -ой координаты  $i$ -той формы. Запишем в виде тензора:

$$\vec{s}w_{\vec{t}}^{\vec{j}} = \delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_2}^{s_2} \dots \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_2}^{j_2} \dots \delta_{t_q}^{j_q},$$

т.е.  $\vec{s}w_{\vec{t}}^{\vec{j}} = 1$  только если  $\vec{s} = \vec{i}$  и  $\vec{t} = \vec{j}$ , иначе 0.

**Теорема 6.**  $\{\vec{s}w_{\vec{t}}^{\vec{j}}\}$  — базис  $\Omega_q^p$

$$\dim \Omega_q^p = n^{p+q}$$

#### 4.5 Произведение полилинейных форм и его свойства.

$$W = U \cdot V \Leftrightarrow W(x_1 \dots x_{p_1+p_2}, y^1 \dots y^{q_1+q_2}) = U(x_1 \dots x_{p_1}, y^1 \dots y^{q_1}) \cdot V(x_1 \dots x_{p_2}, y^1 \dots y^{q_2})$$

Свойства:

1.  $U \cdot V \neq V \cdot U$
2.  $U \cdot (V \cdot W) = (U \cdot V) \cdot W = U \cdot V \cdot W$
3.  $U \cdot \Theta_{\Omega_{q_2}^{p_2}} = \Theta_{\Omega_{q_1}^{p_1}} \cdot V = \Theta_{\Omega_{q_1+p_2}^{p_1+p_2}}$
4.  $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$
5.  $(\alpha \cdot U) \cdot V = U \cdot (\alpha \cdot V)$
6. Пусть  $\{f^i\}_{i=1}^n$  — базис  $X^*$ . Тогда набор

$$w_{t_1 \dots t_p}^{s_1 \dots s_p} = f^{s_1} \dots f^{s_p}$$

образует базис в  $\Omega_0^p$ :

$$w_{t_1 \dots t_p}^{s_1 \dots s_p} = f^{s_1}(x_1) \dots f^{s_p}(x_p) = \xi_1^{s_1} \dots \xi_p^{s_p}$$

7. Более общий случай:  $\{f^i\}_{i=1}^n$  — базис  $X^*$ ,  $\{\hat{x}^i\}_{i=1}^n$  — базис  $X^{**}$ , тогда в  $\Omega_q^p$  базис:

$$w_{t_1 \dots t_q}^{s_1 \dots s_p} = f^{s_1} \dots f^{s_p} \cdot \hat{x}_{t_1} \dots \hat{x}_{t_q}$$

#### 4.6 Симметричные и антисимметричные ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации.

**Определение.** ПЛФ  $U \in \Omega_0^p$  симметричная, если порядок аргументов не влияет на значение  $U$ :

$$\forall (j_1 \dots j_p) - \text{перестановки} \quad U(x_1 \dots x_p) = U(x_{j_1} \dots x_{j_p})$$

**Определение.** ПЛФ  $U \in \Omega_0^p$  антисимметричная, если любая транспозиция её аргументов меняет знак значения  $U$ , т.е. произвольная перестановка меняет знак столько раз, сколько в ней транспозиций:

$$\forall (j_1 \dots j_p) - \text{перестановки} \quad U(x_1 \dots x_p) = (-1)^{[j_1 \dots j_p]} U(x_{j_1} \dots x_{j_p}),$$

где  $[j_1 \dots j_p]$  — чётность перестановки.

*Примечание.* Пространство симметричных ПЛФ — подпространство  $\Omega_0^p$  и обозначается  $\Sigma^p$

*Примечание.* Пространство антисимметричных ПЛФ — подпространство  $\Omega_0^p$  и обозначается  $\Lambda^p$

**Определение.** Симметризация — операция получения симметричной ПЛФ из произвольной ПЛФ, называется  $\text{Sym}$  и выполняется следующим образом:

$$\text{Sym } W = U, \quad U(x_1 \dots x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j_1 \dots j_p)} W(x_{j_1} \dots x_{j_p})$$

**Определение.** Антисимметризация — операция получения антисимметричной ПЛФ из произвольной ПЛФ, называется  $\text{Asym}$  и выполняется следующим образом:

$$\text{Asym } W = V, \quad V(x_1 \dots x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j_1 \dots j_p)} (-1)^{[j_1 \dots j_p]} W(x_{j_1} \dots x_{j_p})$$

Свойства  $\text{Sym}$  и  $\text{Asym}$ :

1. Линейность
2. Дистрибутивность
3. Композиция:

$$\text{Sym Sym} = \text{Sym}, \quad \text{Asym Asym} = \text{Asym}, \quad \text{Sym Asym} = 0, \quad \text{Asym Sym} = 0$$

#### 4.7 Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$ . Доказательство полноты.

Базис  $\Lambda^p$  — набор ПЛФ  $\{^{s_1 \dots s_p} F\}$ , такой что:

$$^{s_1 \dots s_p} F = p! \operatorname{Asym}({}^{s_1 \dots s_p} W) \text{ и } 1 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p \leq n,$$

где  $\{^{s_1 \dots s_p} W\}$  — базис  $\Omega_0^p$

*Доказательство.* Докажем полноту.

Рассмотрим произвольную форму  $U \in \Lambda^p$  и разложим её по базису  $\Omega_0^p$

$$\triangle U = {}^{s_1 \dots s_p} W u_{s_1 \dots s_p}$$

$$\triangle U = \operatorname{Asym} U = \operatorname{Asym}({}^{s_1 \dots s_p} W u_{s_1 \dots s_p}) = u_{s_1 \dots s_p} \operatorname{Asym} {}^{s_1 \dots s_p} W =$$

$$\triangle u_{s_1 \dots s_p} \frac{1}{p!} p! \operatorname{Asym} {}^{s_1 \dots s_p} W = u_{s_1 \dots s_p} \frac{1}{p!} ({}^{s_1 \dots s_p} F) =$$

$$\frac{1}{p!} \sum_{1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_p \leq n} \sum_{(\sigma_1 \dots \sigma_p)} (-1)^{[\sigma_{s_1} \dots \sigma_{s_p}]} ({}^{s_1 \dots s_p} F) (-1)^{[\sigma_{s_1} \dots \sigma_{s_p}]} u_{s_1 \dots s_p} =$$

$$\frac{1}{p!} \sum_{1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_p \leq n} p! ({}^{s_1 \dots s_p} F) u_{s_1 \dots s_p} = \sum_{1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_p \leq n} ({}^{s_1 \dots s_p} F) u_{s_1 \dots s_p}$$

Таким образом, мы разложили произвольную  $U \in \Lambda^p$  по  $\{F\}$ . □

$$\dim \Lambda^p = C_n^p$$

#### 4.8 Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$ . Доказательство линейной независимости.

Читайте в конспекте Александра Игоревича, я на такое не готов.

#### 4.9 Внешнее умножение ПЛФ и его свойства.

**Определение.** Внешнее произведение  $U \in \Lambda^p$  на  $V \in \Lambda^r$  — ПЛФ следующего вида:

$$U \wedge V = \frac{(p+r)!}{p!r!} \operatorname{Asym}(U \cdot V)$$

$$U \wedge V \in \Lambda^{p+q}$$

Свойства:

1.  $p + q > n \Rightarrow U \wedge V = \Theta$
2.  $U \wedge V = (-1)^{pr} V \wedge U$
3.  $U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W = U \wedge V \wedge W = \frac{(p+r+s)!}{p!r!s!} \text{Asym}(U \cdot V \cdot W)$
4.  $U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$
5.  $(\alpha U) \wedge V = U \wedge (\alpha V) = \alpha(U \wedge V)$
6.  $U \wedge \Theta = \Theta \wedge V = \Theta$
7.  $\{f^i\}_{i=1}^n$  – базис  $X^*$ . Тогда:

$$\forall 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n : \quad {}^{i_1 \dots i_p} F = f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p}$$