Теория меры

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ — **продолжает** $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$, если $\mu\big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$

Теорема 1 (о Лебеговском продолжении меры).

- $\mathcal{P}_0 \subset X$ — полукольцо
- $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \mathbb{R}$ — σ-конечная мера

Тогда $\exists \sigma$-алгебра $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}_0$, $\exists \mu$ — мера на $\mathfrak{A}$:

1. μ — продолжение μ_0 на $\mathfrak{A}$
2. μ — полная мера
3. Если $\tilde{\mu}$ — полная мера на σ-алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}$ и $\tilde{\mu}$ — продолжение μ_0, то $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$ и при этом $\tilde{\mu}$ продолжает $\mu : \tilde{\mu}\big|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. Если $\mathcal{P}$ — полукольцо, такое что $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathfrak{A}$ и мера υ — продолжение μ_0 на $\mathcal{P}$, то $\forall A \in \mathcal{P} \;\; \upsilon(A) = \mu(A)$
5. $\forall A \in \mathfrak{A} \;\; \mu A = \inf\{\sum \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} P_k\}$

Доказательство. Не будет, это слишком сложно.

Общая идея следующая: $\forall A \subset X$ положим $\mu^*(A) = \inf\{\dots\}$ — не аддитивна. $A \subset \bigcup A_k \;\; \mu^* A = \sum \mu^* A_k$ □

Следствие 1.1.

- $A \in \mathfrak{A}$
- $\mu A < +\infty$
- $\varepsilon > 0$

Тогда $\exists P_k \in \mathcal{P}_0 : A \subset \bigcup P_k \;\; \mu A < \sum \mu P_k < \mu A + \varepsilon$

Мера Лебега

Теорема 2.

- $\mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$ — классический объем в $\mathbb{R}^m$

Тогда μ это σ-конечная мера

Доказательство. σ-конечность очевидна, т.к. можно дизъюнктно разбить $\mathbb{R}^m$ на ячейки.

Докажем счётную аддитивность μ.

Для этого достаточно проверить счётную полуаддитивность:

$$P = [a,b), P_n = [a_n, b_n) \;\; P \subset \bigcup P_n \;\; \mu P \overset{?}{\leq} \sum \mu P_n$$

Если $P = \varnothing$, то утверждение тривиально. Пусть P непустое.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Чуть уменьшим координаты вектора b, так что $[a, b'] \subset [a, b)$ и $\mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$. Последняя формула некорректна, т.к. $P \setminus [a, b')$ не обязательно ячейка. Но оно представимо в виде $\bigsqcup D_j$, поэтому под $\mu(P \setminus [a, b'))$ подразумевается $\sum \mu D_j$. Также можно было записать $\mu P - \mu[a, b') < \varepsilon$ вместо этих трюков.

Уменьшим слегка координаты векторов a_n, так что $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n), \mu([a'_n, b_n) \setminus [a_n, b_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Эта запись также некорректна, поэтому напишем $\mu[a'_n, b_n) - \mu[a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\underbrace{[a, b']}_{\text{комп.}} \subset \bigcup (a'_n, b_n) \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие: $[a, b'] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} (a'_n, b_n) \Rightarrow [a, b') \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} [a'_n, b_n)$

Тогда $\mu[a, b') \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \mu[a'_n, b_n)$

$$\mu P - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{N} \left(\mu P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$
$$\mu P - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu P_n + \varepsilon$$

$\square$

Определение. **Мера Лебега** в $\mathbb{R}^m$ — лебеговское продолжение классического объема.

$\mathfrak{M}^m$ — σ-алгебра, на которой задана мера Лебега. Тогда множество называется **измеримым по Лебегу**

Свойства меры Лебега:

1. (a) $A_1, A_2 \ldots$ — измеримы $\Rightarrow A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots, A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots$ — измеримы.

   (b) $\forall n \;\; \lambda A_n = 0 \Rightarrow \lambda(\bigcup A_n) = 0$

   (c) $\lambda A_n = 0, B \subset A \Rightarrow B$ — измеримо, $\lambda B = 0$

   Пример. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ — измеримо, $\lambda_1 \mathbb{Q} = 0$

   Доказательство. $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \{x\} = \bigcap_n [x, x + \frac{1}{n})$

$$0 \leq \lambda\{x\} \leq \lambda[x, x + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda\{x\} = 0$$

$\mathbb{Q}$ — объединение одноточечных множеств. □

2. $\mathfrak{M}^m$ содержит все открытые и замкнутые множества.

Лемма 1.

(a) $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое. Тогда $O = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — ячейки с рациональными координатами. Можно считать, что ячейки кубические.

(b) Можно считать, что $\overline{Q}_i \subset O$

(c) E — измеримо, $\lambda E = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \ E \subset \bigcup Q_i : Q_i$ — кубические ячейки и $\sum \lambda Q_i < \varepsilon$

Примечание. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists (B_i)$ — шары: $E \subset \bigcup B_i, \sum \lambda B_i < \varepsilon$

$$Q\left(x, \frac{R}{\sqrt{m}}\right) \subset B(x, R) \subset Q(x, R)$$
$$\left(\frac{2R}{\sqrt{m}}\right)^m \le \lambda B \le \lambda Q(x, R) = (2R)^m$$

Доказательство.

(a, b) $\forall x \in O$ пусть $Q(x)$ — какая угодно ячейка с рациональными координатами, $Q(x) \subset O$ *(можно потребовать $\overline{Q(x)} \subset O, Q$ — куб, координаты двоично-рациональны для второго пункта).*

$O = \bigcup\limits_{x \in O} Q(x)$ — здесь не более чем счётное множество различных ячеек.

$\Rightarrow \ O = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q(x_i)$. Сделаем ячейки дизъюнктными: $Q_1 := Q(x_1), Q(x_2) \setminus Q(x_1) = \bigcup D_j$. Переобозначим D_j как $Q_2, Q_3 \dots Q_k$. Аналогично для всех $Q(x_i)$.

Можно считать, что координаты всех ячеек двоично рациональны.

Ячейки можно подразбить, чтобы они стали кубическими: пусть 2^l — самый крупный знаменатель. Тогда $[a_i, b_i]$ — конечное объединение кубических ячеек со стороной $\frac{1}{2^l}$

(c) Следует из пункта 5 теоремы о продолжении Лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \text{ ячейки } P_k \ \ E \subset \bigcup P_k \ \ 0 = \lambda E \le \sum \lambda P_k \le \varepsilon$$

$\exists \tilde{P}_k$ — двоично-рациональные ячейки:

$$P_k \subset \tilde{P}_k \ \ 0 = \lambda E \le \sum \lambda_k \tilde{P}_k \le 2\varepsilon$$

Можно разбить $\tilde{P}_k$ на конечное число кубов.

$\square$

Определение. $\mathfrak{B}$ — **борелевская σ-алгебра** (в $\mathbb{R}^m$ или в метрическом пространстве) — минимальная σ-алгебра, которая содержит все открытые множества.

$\mathfrak{M}^m \supset \mathfrak{B}$

Пример. Канторово множество в $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &K_0 = [0, 1] \\ &K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ &K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

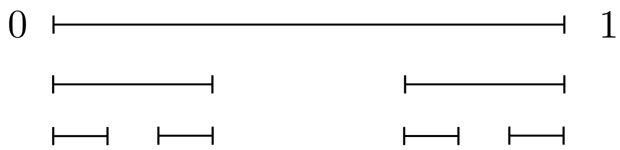

Рис. 1: Множество Кантора

$\mathcal{K} = \bigcup K_i$ — измеримо, $\lambda\mathcal{K} = 0, \lambda(K_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^i$

Также можно задать множество Кантора следующим образом:

$$\mathcal{K} = \{x \in [0, 1] : \text{ троичная запись } x \text{ содержит только цифр 0 и 2}\}$$

3. $\exists$ неизмеримые по Лебегу множества, т.е. не принадлежащие $\mathfrak{M}$

   Зададим отношение $\sim$ на $\mathbb{R}$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

   $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = A$ — из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Можно считать, что $A \subset [0, 1]$

   Очевидно, что $\bigsqcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R}$

   $$[0, 1] \overset{(1)}{\subset} \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + q) \overset{(2)}{\subset} [-1, 2]$$

   Измеримо ли A? Предпололжим, что да.

   Очевидно $\forall q \;\; \lambda A = \lambda(A + q)$ по пункту 5 теоремы о продолжении меры.

Из (1):

$$\lambda[0,1] = 1 \le \sum_q \lambda(A+q) = \sum_q \lambda(A) \Rightarrow \lambda A > 0$$

Из (2):

$$\lambda\left(\bigcup(A+q)\right) = \sum_q \lambda A \le \lambda[-1,2] = 3 \Rightarrow \lambda A = 0$$

Противоречие $\Rightarrow A$ неизмеримо.

4. $A \in \mathfrak{M}$
   - A — ограничено $\Rightarrow \lambda A < +\infty$
   - A — открыто $\Rightarrow \lambda A > 0$ — из леммы.
   - $\lambda A = 0 \Rightarrow A$ не имеет внутренних точек.
5. $A \in \mathfrak{M}^m$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$
   - $\exists$ открытое $G_\varepsilon \supset A : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
   - $\exists$ замкнутое $F_\varepsilon \subset A : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

   Доказательство.

   (a) λA — кон.

   $$\lambda A = \inf\left\{\sum_i \lambda P_i : A \subset \bigcup P_i, P_i \in \mathcal{P}\right\}$$

   Чуть "раздуем" эти $P_i = [a_i, b_i) \rightsquigarrow (a'_i, b_i) \subset [a'_i, b_i)$

   $$\lambda[a'_i, b_i) \le \lambda P_i + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

   $$A \subset \underbrace{\bigcup(a'_i, b_i)}_{G_{2\varepsilon}} \subset [a'_i, b_i]$$

   $$\lambda A \le \lambda G_{2\varepsilon} \le \sum \lambda[a'_i, b_i) \le \sum\left(\lambda P_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \le \lambda A + 2\varepsilon$$

   (b) $\lambda A = +\infty$. Используем σ-конечность: $\mathbb{R}^m = \bigsqcup\limits_{j=1}^{+\infty} Q_j$

   $$\exists G_{\varepsilon,j} - \text{откр.} \quad (A \cap Q)j \subset G_{\varepsilon,j} \quad \lambda(G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cap Q_j)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$$

   $$A = \bigsqcup(A \cap Q_j) \subset \bigcup G_{\varepsilon,j} =: G_\varepsilon$$

   $$\lambda(G_\varepsilon \setminus A) \le \sum \lambda(G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cap Q_j)) \le \varepsilon$$

   Очевидно: $G_\varepsilon \setminus A \subset \bigcup\limits_j (G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cap Q_j))$

(c) Для F_ε — переходим к дополнению:

Для A^c подбираем G_ε, $A^c \subset G_\varepsilon$

$$A \supset (G_\varepsilon)^c =: F_\varepsilon$$

$$G_\varepsilon \setminus A^C = A \setminus (G_\varepsilon)^c$$

$$\lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon \Rightarrow \lambda(A \setminus F) < \varepsilon$$

$\square$