Практика 8

Равномерная сходимость последовательности функций

Определение. $f_n \rightrightarrows f$ на E, если $\rho(f_n, f) \to 0$, где $\rho(f_n, f) := \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$

Примечание. Есть более простой признак: $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \implies \forall x \in E \;\; f_n(x) \to f(x)$

Упражнение (Демидович, 2749). $f_n(x) = \frac{1}{x+n}, E = (0, +\infty)$. Есть ли равномерная сходимость?

1. Ищем кандидата на роль f.

   При фиксированном x посчитаем $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$:

   $$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x+n} = 0$$

   Таким образом, $f(x) \equiv 0$

2. Проверяем равномерную сходимость.

   $$\rho(f_n, f) = \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| \frac{1}{x+n} - 0 \right| = \sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} \to 0$$

Ответ: равномерная сходимость есть.

Упражнение.

$$f_n(x) = \frac{n^2 x + x^2 n + 20}{n + nx + n^2 x^2 + 1} \quad x \in (0, +\infty)$$

1. Ищем f.

   $$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$$

   Этот предел нашелся заменой на эквивалентную в числителе и знаменателе

2. $\rho(f_n, f)$

   $$f_n - f = \frac{n^2x^2 + x^3 n + 20x - n - nx - n^2 x^2 - 1}{x(n + nx + n^2 x^2 + 1)}$$

   $$\sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{|x^3 n + 20x - n - nx - 1|}{x(n + nx + n^2x^2 + 1)} = ?$$

   Такой супремум сложно берется, если вообще берется. Но можно попробовать его оценить сверху. Заметим, что у нас n фиксировано, а x мы двигаем. Если двигать $x \to 0$, то числитель ненулевая константа, а знаменатель произвольно мал. Таким образом, $\sup = +\infty$ и равномерной сходимости нет.

Что произойдет, если в условии $x \in [1, +\infty)$? Подставим $x = 1$, тогда получается $\dfrac{1}{n^2}$. Если $x = n$, то дробь $\dfrac{\approx n^4}{n \cdot n^4} \approx \dfrac{1}{n}$. Пока что никакие x не дают большие значения. Если взять $x = n^2$, получается $\frac{n^7}{n^8}$.

Пусть $n > 20$. Тогда

$$\sup \dots \le \frac{5x^3 n}{x^3 n^2} \le \frac{5}{n} \to 0$$

Практика 9

Когда оцениваем sup, можно говорить, что $\sup \ge \lim_{x \to A}$, где A — произвольная константа *(к которой можно стремиться в E (предельная точка)).*

$$\operatorname{ctg} x \overset{x \to 0}{\approx} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{arctg} x \overset{x \to +\infty}{\approx} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$$

Таким образом, $\operatorname{arctg} x \sim_{x \to +\infty} \frac{\pi}{2} - x$, это проверяется вычислением предела $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}$ по правилу Лопиталя.

Равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x) \quad S_N \rightrightarrows S \text{ на } E$$

Рассмотрим простой случай, где сходимость доказывается по определению.

Упражнение (2769).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n (1 - x) \quad x \in [0, 1]$$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n - x^{n+1} \overset{\text{телескоп}}{=} 1 - x^{N+1} \xrightarrow{N \to +\infty} \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |S_N - S| = \sup_{x \in [0,1)} x^{N+1} = 1 \not\to 0$$

Мы игнорируем $x = 1$, т.к. там $\sup = 0$

Упражнение (2771).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x + 1)(nx + 1)} \quad x \in (0, +\infty)$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} = \sum_{n=1}^{N} -\frac{1}{nx+1} + \frac{1}{(n-1)x+1} \overset{\text{телескоп}}{=} 1 - \frac{1}{Nx+1}$$

$$\lim S_N = 1$$

$$\sup_x |S_N - S| = \sup_x \frac{1}{Nx+1} \geq 1 \not\to 0$$

Критерий Больцано-Коши обычно доказывает отсутствие равномерной сходимости, хотя его можно использовать и для обратного.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n > N, \exists m \in \mathbb{N}, \exists x \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| > \varepsilon$$

Тогда равномерной сходимости нет.

Докажем предыдущий номер по критерию Больцано-Коши.

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{100} \ \ \forall N \ \ \exists n > N, \exists m = n, \exists x = \frac{1}{n} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n} \frac{1}{(\frac{k}{n}+1)(\frac{k+1}{n}+1)} \geq \frac{n}{n} \frac{1}{3 \cdot 4} > \frac{1}{100}$$

Признак Вейерштрасса

$\sum u_n(x), x \in E$:

1. $\forall x \in E : |u_n(x)| \leq C_n$
2. $\sum C_n$ — сходится

Тогда ряд равномерно сходится.

Пример. $x \in [0, \frac{1}{2}], \sum x^n(1-x)$

$$|x^n(1-x)| \leq \frac{1}{2^n}, \sum \frac{1}{2^n} \text{ сходится}$$

Упражнение (2774).

(a)

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{1}{x^2+n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

Ответ: сходится равномерно

(a')

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2} \quad E = \mathbb{R}$$
$$\left(\frac{x}{x^2+n^2}\right)' = \frac{x^2+n^2-2x^2}{(x^2+n^2)^2}$$

Таким образом, максимум достигается при $x = n$.

$$C_n := \max f_n = \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n} \qquad \sum \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

Применим критерий Коши.

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{100} \;\; \forall N \;\; \exists n > N, \exists m = n, \exists x = n$$

$$\frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{n^2+(2n)^2} \geq \frac{n}{5n} = \frac{1}{5} > \varepsilon$$

(в)

$$\sum \frac{x}{1+n^4x^2} \quad x \in (0, +\infty)$$
$$C_n := \sup_{x\in E} \frac{x}{1+n^4x^2} \overset{\frac{1}{n^2}}{=} \frac{\frac{1}{n}}{1+n^4\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2n^2}$$

Практика 10

Признак Дирихле для $\sum a_n(x)b_n(x)$:

1. Частичные суммы $\sum a_n$ равномерно ограничены:

$$\exists C_a \;\; \forall N \;\; \forall x \in E \quad \left|\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\right| \leq C_a$$

2. (a) При фиксированном x функция $b_n(x)$ монотонна по n

   (b) $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на E при $n \to +\infty$

Признак Абеля для $\sum a_n(x)b_n(x)$:

1. $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на E
2. (a) $b_n(x)$ монотонно по n

   (b) $b_n(x)$ равномерно ограничено:

$$\exists C_b \;\; \forall N \;\; \forall x \in E \;\; |b_n(x)| \leq C_b$$

Упражнение.

$$\sum \frac{\sin \frac{\pi n}{6}}{n + \sin x} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a_n(x) := \sin \frac{\pi n}{6} \quad b_n(x) := \frac{1}{n + \sin x}$$

$a_n(x)$ ограничена, т.к. за 12 шагов мы обходим всю окружность и приходим назад в 0. Таким образом, $\left|\sum_{n=1}^N a_n\right| \leq 11$

Монотонность b_n тривиальна, равномерная сходимость к нулю тоже.

Упражнение.

$$\sum \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}} \quad |x| \leq 10$$

$$a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}}$$

a_n имеет вид $1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1 \ldots$. Тогда $|\sum a_n| \leq 4$

b_n очевидно.

Упражнение.

$$\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n} + \cos nx} \quad x \in \mathbb{R}$$

1. $x \in [1, 2]$

   Заметим, что $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ — равномерно сходится по Дирихле, при $a_n = \sin nx$. Рассмотрим разность исходного ряда и этого ряда:

   $$\frac{1}{2} \sum \frac{\sin 2nx}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \cos nx)}$$

   Аналогично рассмотрим $\sum \frac{\sin 2nx}{n}$. Так можно продолжить несколько итераций и мы получим сходимость или расходимость.

2. $x \in \mathbb{R}$

   Равномерной сходимости нет по критерию Коши:

   $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N, \exists m = n, \exists x = \frac{1}{n} \quad \left| \frac{\sin \frac{n+1}{n}}{\sqrt{n+1} + \cos \frac{n+1}{n}} + \cdots + \frac{\sin 2}{\sqrt{2n} + \cos 2} \right| > \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot n > \varepsilon$$

Упражнение (Кудрявцев, том 2, параграф 18, задача 13).

1.
$$\sum \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4} \quad E=[0,+\infty)$$

Найдём экстремум члена суммы:

$$\left(\frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4}\right)'_x = \frac{(1+n^3x^4)(2x\sin(n\sqrt{x}) + x^2\cos(n\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}) - x^2\sin(n\sqrt{x})\cdot 4n^3x^3}{(1+n^3x^4)^2}$$

Не находится.

Найдём экстремум следующего:

$$\left|\frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4}\right| \le \frac{x^2}{1+n^3x^4}$$

$$\left(\frac{x^2}{1+n^3x^4}\right)' = \frac{2x(1+n^3x^4) - x^2n^3\cdot 4x}{\ldots}$$

$$2x(1+n^3x^4) - x^2n^3\cdot 4x = 0$$

$$x = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$$

Таким образом:

$$\left|\frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4}\right| \le \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \text{ сходится}$$

Ответ: равномерно сходится по Вейерштрассу

2.
$$\sum \frac{n^2x}{(n^2+1)(1+n^4x^2)\operatorname{arctg}(1+x)} \quad E=(0,+\infty)$$

Вспомним волшебное школьное неравенство:

$$\frac{t}{1+t^2} \le \frac{1}{2}$$

Пусть $t = n^2x$

$$\left|\frac{n^2x}{(n^2+1)(1+n^4x^2)\operatorname{arctg}(1+x)}\right| \le \frac{1}{2(n^2+1)\operatorname{arctg}1} \sim \frac{C}{n^2}$$

Ответ: равномерно сходится по Вейерштрассу

3.
$$\sum \frac{x\sin(x+n)}{n^2x^2+n+1} \quad E=[0,+\infty)$$

$$\left|\frac{x\sin(x+n)}{n^2x^2+n+1}\right| \le \frac{x}{n^2x^2+n+1}$$

Экстремум $x = \sqrt{\frac{n+1}{2n^2}}$

$$\frac{x}{n^2x^2+n+1} \le \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2n^2}}}{1.5(n+1)} \le \frac{\frac{10}{\sqrt{n}}}{n+1} \text{ сходится}$$

Ответ: равномерно сходится по Вейерштрассу

4.

$$\sum \frac{xe^{-x^2n}}{\sqrt{n\ln^3(n+1)}} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left|xe^{-x^2n}\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}$$

$$\left|\frac{xe^{-x^2n}}{\sqrt{n\ln^3(n+1)}}\right| \le \frac{C}{n\ln^{\frac{3}{2}}(n+1)} \text{ сходится}$$

Ответ: равномерно сходится по Вейерштрассу

5.

$$\sum \left(\frac{x^2}{1+nx^3}\right)^3 \quad E = [0, +\infty)$$

Экстремум: $x = \frac{2}{n^{\frac{1}{3}}}$

Аналогично решается.

6.

$$\sum \frac{\sin\frac{n}{x}\sin\frac{x}{n}}{1+nx^2} \quad E = [0, +\infty)$$

$$\left|\frac{\sin\frac{n}{x}\sin\frac{x}{n}}{1+nx^2}\right| \le \frac{1\frac{x}{n}}{1+nx^2} = \frac{x}{n+n^2x^2} \overset{a+b\ge2\sqrt{ab}}{\le} \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$$

7.

$$\sum e^{-nx} \quad E = (0, +\infty)$$

По признаку Коши при $x = \frac{1}{n}$ члены суммы $\approx \frac{1}{e} \Rightarrow$ расходится.

Также можно было сказать, что $\sup e^{-nx} = 1 \Rightarrow$ члены суммы не $\rightrightarrows 0 \Rightarrow$ расходится.

8.

$$\sum \frac{e^{-\frac{x}{n}}\cos nx}{x^2+n^2x}$$

(a) $E = [\frac{1}{10}, +\infty)$ – очевиден, т.к. $|u_n(x)| \le \frac{1\cdot1}{\frac{1}{10}n^2} = \frac{C}{n^2}$ сходится.

(b) $E = (0, +\infty)$ — не сходится, т.к. $\sup |u_n(x)| = +\infty, u_n(x) \not\rightrightarrows 0$

9.
$$\sum \frac{\sin(nx)}{(1+nx)\sqrt{nx}}$$

(a) $(2, 3)$

(b) $(0, \pi)$

Аналогично.

10.
$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} x^n \quad E = [1, +\infty)$$

$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ — сходится и называется ряд Лейбница

$$b_n = \operatorname{arctg} x^n \quad |b_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \text{ и монотонно}$$

11.
$$\sum \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1} \quad E = [1, +\infty)$$
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$
$$b_n = \frac{x^n}{x^n+1} < 1 \text{ и монотонно}$$

Практика 11

Важные правила

1. • $\sum u_n(x) = f(x)$
   • $u_n(x)$ непр. в x_0
   • Ряд равномерно сходится в $U(x_0)$

   Тогда f **непр.** в x_0

2. • $\sum u_n'(x) = \varphi(x)$
   • $\sum u_n'(x)$ равномерно сходится в $U(x_0)$

   Тогда f — **дифф.** в x_0, $f'(x) = \varphi(x)$

3. • $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$
   • u_n непр. на $[a, b]$

   Тогда $\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b u_n(x)dx$

Упражнение.

1. $$\sum \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}} \text{ непр. при } x \in \mathbb{R}$$

   Непрерывность слагаемых $\forall x_0$ очевидна.

   $$\left| \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^{\frac{4}{3}}} \text{ равномерно сходится по Вейерштрассу } \Rightarrow \text{ ряд сходится равномерно на } \mathbb{R}$$

2. $$\sum \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}} \text{ непр. при } x \in [2, 5]$$

   $$\left| \sum_{n \geq N} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{x^2 + \sqrt{N}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   Тогда ряд равномерно сходится по определению (остатки ряда $\rightrightarrows S = 0$).

3. $$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \left(\sum n e^{-nx} \right) dx = ?$$

   Докажем равномерную сходимость $\sum n e^{-nx}, x \in [\ln 2, \ln 5]$

   $$|n e^{-nx}| \leq n e^{-n \ln 3} \leq \frac{n}{2^n} \text{ сходится}$$

   Таким образом ряд равномерно сходится, поэтому:

   $$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \left(\sum n e^{-nx} \right) dx = \sum \int_{\ln 2}^{\ln 5} n e^{-nx} dx = \sum -e^{-nx} \Big|_{\ln 2}^{\ln 5}$$

4. $$\sum \frac{\sin nx}{n^2 \ln^2(n+1)} \text{ дифф. при } x \in \mathbb{R}$$

   $$\sum \left(\frac{\sin nx}{n^2 \ln^2(n+1)} \right)' = \sum \frac{\cos nx}{n \ln^2(n+1)}$$

   Надо доказать равномерную сходимость этого ряда:

   (a) Либо на $\mathbb{R}$

   (b) Либо $\forall x_0$ в $U(x_0)$

   Ряд очевидно равн. сходится на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса.

5. $\sum \frac{\cos nx}{n^2}$ имеет непрерывную производную на $(0, 2\pi)$ Докажем равномерную сходимость $-\sum \frac{\sin nx}{n}$ в $\mathbb{R}$ или в любой окрестности.

   По критерию Коши в $\mathbb{R}$ её нет ($x = \frac{1}{n}, m = n$), поэтому докажем в любой окрестности. Пусть эта окрестность (α, β):

   $$a_n := \sin nx$$

   Частичные суммы a_n равномерно ограничены, это записано в трюках.

   $$b_n = \frac{1}{n} \rightrightarrows 0$$

6. $\zeta(x) = \sum \frac{1}{n^x}, x \in (1, +\infty)$. Доказать: $\zeta \in C^{+\infty}(1, +\infty)$ Равномерной сходимости на $(1, +\infty)$ нет, потому что по критерию Коши при $x = 1 + \frac{1}{n}$. Докажем для окрестности (α, β).

   По Вейерштрассу сходится:

   $$\left|\frac{1}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \text{ сходится}$$

7. Где $f(x) = \sum e^{-n^2x^2} \cos nx$ непрерывна? При $x \neq 0$ равномерная сходимость доказывается аналогично предыдущему пункту. При $x = 0$ ряд расходится, т.к. это ряд $\sum 1$.

8. $$\lim_{x \to 0} \sum \frac{x^2}{1 + n^2x^2} =?$$

   Если есть равномерная сходимость ряда в $U(0)$, то $\sum u_n(x) \xrightarrow{x \to 0} \sum u_n(0)$. Докажем равн. сходимость по Вейерштрассу:

   $$\left|\frac{x^2}{1 + n^2x^2}\right| \leq \left|\frac{1}{\frac{1}{x^2} + n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Практика 12

Степенные ряды

Степенной ряд — ряд вида $\sum a_n(x - x_0)^n$. Он сходится при $|x - x_0| < R, R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Иногда ответ выдает $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, но не всегда.

И ещё возможно сходится при $x = x_0 \pm R$. Сходимость при таком x находится путём подстановки соответствующего x в ряд. Но этот ряд не простой, в нем не будет работать признак Даламбера и Коши.

Можно решать заменой на эквивалентное (возможно по модулю), если это не помогает, то применяется Лейбниц или Дирихле.

Упражнение (2812-...).

1. $$\sum \frac{x^n}{n^e}$$
$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n^p} = \lim e^{\frac{1}{n} p \ln n} = 1$$
Таким образом, ряд сходится при $x \in (-1, 1)$. Проверим $x = \pm 1$ При $x = 1$ $\sum \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

   При $x = -1$ $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leq 0$.

2. $$\sum \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$
Несложно угадать, что $R = \frac{1}{3}$. Проверим это вычислением:
$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}}} = \frac{1}{3}$$
Таким образом, ряд сходится при $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Проверим $x = \pm\frac{1}{3}$
$$\sphericalangle x = \frac{1}{3} \quad \frac{3^n + (-2)^n}{3^n \cdot n} \sim \frac{1}{n} \text{ расходится}$$
$$\sphericalangle x = -\frac{1}{3} \quad (-1)^n \frac{3^n + (-2)^n}{3^n \cdot n} = \sum \frac{(-3)^n}{3^n \cdot n} + \frac{2^n}{3^n \cdot} \text{ сходится}$$

3. $$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$
$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n!^2 (2n+2)!}{(n+1)!^2 (2n)!} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$$
Таким образом, ряд сходится при $x \in (-4, 4)$. Проверим $x = \pm 4$
$$\sphericalangle x = 4 \quad \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \sim \frac{n^{2n} e^{-2n} (2\pi n)}{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}} 4^n = \sqrt{\pi n} \text{ расходится}$$
$$\sphericalangle x = -4 \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n (-1)^n$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2 + 8n + 4}{4n^2 + 6n + 2} > 1$$
Итого при $x = \pm 4$ расходится, при $x \in (-4, 4)$ сходится.

4.

$$\sum \alpha^{n^2} x^n \quad \alpha \in (0,1)$$
$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\alpha^{n^2}}} = \frac{1}{\lim \alpha^n} = +\infty$$

Разложение функции в ряд *(Тейлора)*

Мы знаем, что если $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$, то это ряд Тейлора, т.е. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

У нас есть пять основных разложений:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} + \dots \quad x \in (-1,1)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1,1]$$

Упражнение (2851-...). Разложить в степенной ряд функцию:

- e^{-x^2}
$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

- $\cos^2 x$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

- $\dfrac{x^{10}}{1-x}$
$$\frac{x^{10}}{1-x} = x^{10}\frac{1}{1-x} = x^{10} + x^{11} + \dots \quad x \in (-1,1)$$

- $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$
$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x(1-2x)^{-\frac{1}{2}} = x\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) + \frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}}{2}(-2x)^2 + \dots + \underbrace{\frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-2n-1}{2}}{n!}(-2)^n}_{\frac{(2n-1)!!}{n!!}x^n}\right)$$

- $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$

  $$\frac{x}{1+x-2x^2} = x(1-(x-2x)^2+(x-2x^2)^2+\dots) \quad x-2x^2 \in (-1,1)$$

  Из такого вида неудобно получать коэффициенты при x^n.

  $$\frac{x}{(1-x)(1+2x)} = -\frac{\frac{1}{3}}{1+2x}+\frac{\frac{1}{3}}{1-x} = -\frac{1}{3}\left(1-2x+(2x)^2-(2x)^3+\dots-(1+x+x^2\dots)\right)$$

  $|2x|<1$

- $f(x) = \arcsin x$

  $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+x^2-\frac{3}{8}x^4+\dots$$

  Дальше интегрируем и получаем ответ.

Упражнение. Проверить, что $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ через ряды, “в лоб”

Упражнение (2873). $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ Можно не думать и действовать так:

$$f' = \ln(1+x)+1 = 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$$

$$f = x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}-\dots+x^n\frac{(-1)^n}{(n-1)n}+\dots$$

Но у нас ещё есть несовпадение на константу. Это очевидно проверяется подстановкой $x=0: f(0)=0$, ряд тоже 0, поэтому этой константы нет.

Можно подумать и сказать следующее:

$$f = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+x^2-x^3+\frac{x^4}{3}+\dots$$

Упражнение.

$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$$

Разложение $\operatorname{arctg} x$ получается дифференцированием и потом интегрированием.

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots, \text{const} = 0$$

Упражнение.

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)^2}\frac{-2(1+4x)-4(2-2x)}{(1+4x)^2} = \frac{1}{(1+4x)^2+(2-2x)^2}\cdot(-10)$$

$$= \frac{-10}{5+20x} = -\frac{2}{1+4x^2} = -2(1-4x^2+16x^4-\dots+(-1)^n(4x^2)^n+\dots)$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} 2 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1}$$

Таким образом:

$$\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x} = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 2x$$

На контрольной работе будут вопросы, похожие на:

- Сходится ли равномерно последовательность функций?
- Сходится ли равномерно функциональный ряд?
- Задает ли ряд непрерывную функцию на множестве?
- Задает ли ряд дифференцируемую функцию на множестве?
- Разложить функцию в ряд
- Найти множество сходимости ряда
- Найти сумму числового/степенного ряда

Практика 13

Получение функции по ряду

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}x^n$$

Задача: найти f не в виде ряда.

$$f' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$$

$$xf' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$\begin{aligned}(xf')' &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \\ &= \frac{1}{1-x} \\ xf' &= -\ln(1-x) + C\end{aligned}$$

Путём подстановки $x = 0$ находим, что $C = 0$

$$\begin{aligned}xf' &= -\ln(1-x) \\ f' &= -\frac{\ln(1-x)}{x} \\ f &= -\int \frac{\ln(1-x)}{x} dx \\ f &= -\int \frac{\ln(1-x)}{x} dx\end{aligned}$$

Такой интеграл не берется. Но мы можем записать ответ в виде определенного интеграла:

$$f = -\int_0^x \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

Тогда мы можем подставить $x = 0$ и найти следующий факт:

$$\sum \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \frac{\pi}{6}$$

Упражнение (2906).

$$\begin{aligned}f &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \\ f &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\ f' &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}\end{aligned}$$

$$f' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f = \operatorname{arctg} x + C$$

$C = 0$ получается подстановкой.

Упражнение.

$$\begin{aligned}
g &= x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots \\
g &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^2 x^n \\
\frac{g(x)}{x} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^2 x^{n-1} \\
\int \frac{g(x)}{x} dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^n \\
\frac{1}{x} \int \frac{g(x)}{x} dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1} \\
\int \frac{1}{x} \int \frac{g(x)}{x} dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \\
&= \frac{x}{1+x} \\
\int \frac{g(x)}{x} dx &= \left(\frac{x}{1+x}\right)' x \\
&= \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)' x \\
&= \frac{x}{(1+x)^2} \\
g(x) &= \left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)' x \\
&= \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{2x^2}{(1+x)^3}
\end{aligned}$$

Вычисление сумм рядов

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
2. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

3. $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$
4. Телескопические $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Упражнение (2968).

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \lim \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Решим по-другому:

$$f(x) := \sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$\left(\frac{f'}{x}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

$$f' = \frac{x}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$$

$$f = \int \frac{x}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))dx = \frac{x^2}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{\frac{x^2}{2}}{1-x^2}$$

Упражнение (2993).

$$\sum \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$$

$$f(x) := \sum \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} x^n$$

Идея решения: разложить дробь на простейшие, дальше очевидно. В разложении можно использовать тот факт, что $f(n) \underset{n\to 0}{\sim} -\frac{1}{n^2}$ и получить, что коэффициент при $\frac{1}{n^2}$ это -1, аналогично можно было получить коэффициент при $\frac{1}{(n+1)^2}$.

Упражнение (2996).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = \sum \frac{2^n}{(n-1)!} + \sum \frac{2^n}{n!} = 3\sum \frac{2^n}{n!} = 3e^2$$

Упражнение (3014).

$$f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$$

$$f'(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots = \frac{1}{1+x^3}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$$

Упражнение.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \\ f' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \\ f'' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} \\ f''' &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \\ &= f \end{aligned}$$

Это дифференциальное уравнение решается тривиально.