Теорема 1 (Общее решение уравнения 1-го пордяка). $\lhd p, q \in C(a, b)$

$$y = \left(C + \int q(x)e^{-\int p(x)dx}\right)e^{\int p(x)dx}, \ \ x \in (a, b), C \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$q(x)e^{-\int p(x)dx}e^{\int p(x)dx} + \underbrace{\left(C + \int q(x)e^{-\int p(x)dx}\right)e^{\int p(x)dx}}_{y}p(x) \equiv p(x)y + q \quad \forall x \in (a, b)$$

Докажем, что других решений нет.

$\lhd \varphi$ — решение на $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Пусть это решение проходит через (x_0, y_0). Через эту точку также проходит решение f, описываемой теоремой.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = p(x) \in C((a, b) \times \mathbb{R}) \Rightarrow$ по теореме Пикара $y \equiv \varphi$ на (α, β). □

Метод Лагранжа

1. Записываем решение однородного: $y = Ce^{\int p(x)dx}$
2. Подставим $y = C(x)e^{\int p(x)dx}$ в линейное уравнение первого порядка:
$$C^1e^{\int p(x)dx} + Ce^{\int p(x)dx}p(x) = pCe^{\int p(x)dx} + q$$
3. Подставим $C(x)$ вместо постоянной C.

2.5 Уравнение Бернулли и Риккати

Определение (уравнение Бернулли). $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \alpha \notin \{0, 1\}$

Замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит это уравнение к линейному:

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}$$
$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x)$$
$$\frac{z'}{1-\alpha} = p(x)z + q(x)$$

Определение (уравнение Риккати). $y' = \underbrace{p(x)y^2 + q(x)y + r(x)}_{\text{квадратичное по } y}$

Частный случай уравнения Риккати $y' = y^2 + x^\alpha$ интегрируется в квадратурах только при определенных α.

Если φ — решение уравнения Риккати, то замена $y = \varphi + z$ сводит искомое к уравнению Бернулли. φ необходимо угадывать.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
(\varphi + z)' &= p(\varphi + z)^2 + q(\varphi + z) + r(x) \\
\varphi' + z' &= p\varphi^2 + q\varphi + 2p\varphi z + qz + r + pz^2 \\
z' &= 2p\varphi z + qz + pz^2
\end{aligned}
$$

□

2.6 Уравнение в полных дифференциалах

Определение. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ — **уравнение в полных дифференциалах**, если $\exists u(x, y) : du = Pdx + Qdy$

Теорема 2 (Общее решение УПД). $\lhd P, Q \in C(G)$

1. y — решение на (a, b)

   Тогда $\exists C \in \mathbb{R} : u(x, y) = C$ неявно задает y.

2. $u(x, y) = C$ определяет $y \in C^1(a, b)$

   Тогда y — решение.

Доказательство. 1. $\lhd y$ — решение на $(a, b) \Rightarrow$

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x)), y'(x) \equiv 0$$

Левая часть $= \dfrac{d}{dx} u(x, y(x))$

$$\frac{du(x, y)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow u(x, y(x)) \equiv C$$

2. $\lhd y' : u(x, y(x)) \equiv C$

   Продифференцируем.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' &\equiv 0 \\
P + Qy' &\equiv 0
\end{aligned}
$$

□

$u(x,y)$ находится следующим образом:

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Найдем необходимое условие для $\exists du$:

$$\begin{gathered} \lhd du = Pdx + Qdy,\ P,Q \in C^1(G) \\ \Rightarrow P = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{gathered}$$

Это условие и достаточно для $\exists du$, если G — односвязная область.

Пример. $\underbrace{e^{-y}}_{P} dx \underbrace{-(2y + xe^{-y})}_{Q} dy = 0$

Решение.

$$\begin{gathered} \frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y} \end{gathered}$$

Частные производные совпали, область односвязна $\Rightarrow$ УПД.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = e^{-y} \Rightarrow U(x,y) = \int e^{-y} dy + C(y) = xe{-}y + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{-y}(-1) + C'(y) = -(2y + xe^{-y})$$

$$C'(y) = -2y$$

$$C = -y^2 + A$$

$$u(x,y) = xe^{-y} - y^2 + A$$

Ответ: $xe^{-y} - y^2 = C$

Геометрический смысл

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

$\lhd \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ — интегральная кривая.

$$(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$$
$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' = 0$$
$$P(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + Q(x_0, y_0)\psi'(t_0) = 0$$

Таким образом, (φ', ψ') перпендикулярно (P, Q) при $t = t_0$, т.е. мы ищем перпендикуляры к данному векторному полю.

Определение. $\mu(x, y)$ — **интегрирующий множитель** для уравнения $Pdx + Qdy = 0$, если $\mu \neq 0$ и $\mu P dx + \mu Q dy = 0$

Домножая на μ, можно свести диффур к УПД.

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$
$$y' = p(x)y + q(x)$$
$$dy - (p(x)y + q(x))dx = 0$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(-p(x)y - q(x)) + \mu(-\varphi) = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Предположим, что μ зависит только от x.

$$\mu(-\varphi) = \mu' \Rightarrow \mu = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$\mu(dy - (p(x)y + q(x))dx) = 0$$
$$e^{-\int p(x)dx}dy - (p(x)y + q(x))e^{-\int p(x)dx}dx = 0$$
$$e^{-\int p(x)dx}dy - p(x)ye^{-\int p(x)dx}dx = q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$$

Дорешать — упражнение