

**Лемма 1** (о структуре компактного оператора).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда  $\exists$  ортонормированные базисы  $g_1 \dots g_m$  и  $h_1 \dots h_m$ , а также  $\exists s_1 \dots s_m > 0$ , такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И  $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$ .

*Примечание.* Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

*Доказательство.*  $W := V^*V$  — самосопряженный оператор (матрица симметрична относительно диагонали).

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа:  $c_1 \dots c_m$  — вещественные (возможно с повторениями)
- Собственные векторы:  $g_1 \dots g_m$  — ортонормированные

*Примечание.* Пока мы в  $\mathbb{R}^m$  (а не в  $\mathbb{C}^m$ ),  $*$  есть транспонирование. В комплексном случае ещё берётся сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- 1: т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .
- 2: из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^m V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом,  $c_i > 0$ .

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \stackrel{\text{def } h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \stackrel{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \stackrel{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- 3: из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- 4: т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .
- 5: при  $i \neq j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 0$  в силу ортогональности, а при  $i = j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 1$  в силу ортонормированности и  $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i} \sqrt{c_i}} = 1$

Примечание.  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  — символ Кронекера.

Таким образом,  $\{h_i\}$  ортонормирован.

$$V(x) \stackrel{\text{def}}{=} V \left( \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i \right) \stackrel{(6)}{=} \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

- 6: в силу линейности  $V$

$$(\det V)^2 \stackrel{(7)}{=} \det(V^* V) \stackrel{\text{def}}{=} \det W \stackrel{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

- 7: в силу мультипликативности  $\det$  и инвариантности относительно транспонирования.
- 8: т.к.  $\det$  инвариантен по базису и в базисе собственных векторов  $\det W = c_1 \dots c_m$ .

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

**Теорема 1** (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение

Тогда  $\forall E \in \mathfrak{M}^m$   $V(E) \in \mathfrak{M}^m$  и  $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

*Доказательство.*

1. Если  $\det V = 0$   $\text{Im}(V)$  — подпространство в  $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$  по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда  $\forall E$   $V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если  $\det V \neq 0$   $\mu E := \lambda(V(E))$  — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$  по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти  $k$ , для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например  $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$  — единичный куб на векторах  $g_i$ .

$V(g_i) = s_i h_i$ . Таким образом,  $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ .

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом,  $k = |\det V|$

□

## Интеграл

### Измеримые функции

**Определение.**

1.  $E$  — множество,  $E = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i$  — разбиение множества.

2.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \quad f|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

*Пример.*

1. Характеристическая функция множества  $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$
2.  $f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$ , где  $X = \bigsqcup e_i$

*Свойства.*

1.  $\forall f, g$  — ступенчатые:

$\exists$  разбиение  $X$ , допустимое и для  $f$ , и для  $g$ :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} & g &= \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k} \\ f &= \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} & g &= \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k} \end{aligned}$$



Рис. 1: Ступенчатая функция

2.  $f, g$  — ступенчатые,  $\alpha \in \mathbb{R}$

Тогда  $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$  — ступенчатые.

**Определение.**  $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$  — лебегово множество функции  $f$

Аналогично можно использовать  $E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a)$

*Примечание.*

$$E(f \geq a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \geq a)^c$$

$$E(f \leq a) = \bigcap_{b > a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

**Определение.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

$f$  измерима на множестве  $E$ , если  $\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$  измеримо, т.е.  $\in \mathfrak{A}$

Вместо “ $f$  измерима на  $X$ ” говорят просто “измерима”.

Если  $X = \mathbb{R}^m$ , мера — мера Лебега, тогда  $f$  — измеримо по Лебегу.

*Примечание.* Эквивалентны:

1.  $\forall a \ E(f < a) - \text{измеримо}$
2.  $\forall a \ E(f \leq a) - \text{измеримо}$
3.  $\forall a \ E(f > a) - \text{измеримо}$
4.  $\forall a \ E(f \geq a) - \text{измеримо}$

*Доказательство.* Тривиально по соображениям выше. □

*Пример.*

1.  $E \subset X, E - \text{измеримо} \Rightarrow \chi_E - \text{измеримо}.$

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \emptyset, & a < 0 \\ X \setminus E, & 0 \leq a \leq 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2.  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} - \text{непрерывно. Тогда } f - \text{измеримо по Лебегу}.$

*Доказательство.*  $f^{-1}((-\infty, a))$  открыто по топологическому определению открытости, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

*Свойства.*

1.  $f \text{ измеримо на } E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \ E(f = a) \text{ измеримо}.$

В обратную сторону неверно, пример —  $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$

2.  $f - \text{измеримо} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha f - \text{измеримо}.$

$$\text{Доказательство. } E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \geq 0 \\ \emptyset, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases}$$

□

3.  $f - \text{измеримо на } E_1, E_2, \dots \Rightarrow f \text{ измеримо на } E = \bigcup E_k$

4.  $f - \text{измеримо на } E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f \text{ измеримо на } E'$

*Доказательство.*  $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$

□

5.  $f \neq 0, \text{ измеримо на } E \Rightarrow \frac{1}{f} \text{ измеримо на } E.$

6.  $f \geq 0$ , измеримо на  $E$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$  измеримо на  $E$ .

**Это неверно**, т.к. при  $f \equiv 0$ ,  $\alpha = -1 \nexists f^\alpha$

**Теорема 2.**  $f_n$  — измеримо на  $X$ . Тогда:

1.  $\sup f_n, \inf f_n$  измеримо.
2.  $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$  измеримо.
3. Если  $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$ , то  $h(x)$  измеримо.

*Доказательство.*

1.  $g = \sup f_n \quad X(g > a) \stackrel{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$  и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

9:

- $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(g > a)$ , то  $g(x) > a$ .

$$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

- $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(f_n > a)$ , то  $f_n(x) > a$ , следовательно  $g(x) > a$ .

2.  $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$ . Т.к.  $\sup$  и  $\inf$  измерим,  $\overline{\lim} f_n$  тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если  $\exists \lim$ , то  $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

□

## Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b] := g(b) - g(a)$  —  $\sigma$ -конечный объем (и даже  $\sigma$ -конечная мера на  $\mathcal{P}^1$ )

Также можно определить для монотонной, но непрерывной  $g$ . Тогда в точках разрыва  $\exists g(a+0), g(a-0)$ . Пусть  $\mu[a, b] = g(b-0) - g(a-0)$ . Такое изменение нужно, потому что исходное  $\mu$  не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру  $\mu_g$  на некоторой  $\sigma$ -алгебре. Это мера Лебега-Стилтьеса.

*Пример.*  $g(x) = [x]$ , тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если  $\mu_g$  определена на Борелевской  $\sigma$ -алгебре, то она называется мерой Бореля-Стилтьеса.