

**Теорема 1** (Лагранжа для отображений).

- $E$  открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F$  дифф. на  $E$
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда  $\exists c \in [a, b]$  ( $c = a + \Theta(b - a)$ ),  $\Theta \in (0, 1)$  :

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| |b - a|$$

*Доказательство.*  $f(t) := F(a + t(b - a))$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

Тогда по теореме Лагранжа для векторнозначных функций

$$|f(1) - f(0)| \leq \|f'(c)\| |1 - 0|$$

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(a + c(b - a))(b - a)\| \leq \|F'(a + c(b - a))\| |b - a|$$

□

*Примечание.* Особенно удобная оценка происходит, когда  $E$  выпукло, тогда

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in E} \|F'(x)\| |b - a|$$

$$\Omega_m := \{L \in \mathcal{L}_{m,m} : \exists L^{-1}\}$$

**Лемма 1.**

- $B \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $\exists c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Bx| \geq c|x|$

Тогда  $B \in \Omega_m$  и  $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

*Доказательство.*  $B$  — биекция, т.к. его ядро  $\{0_m\} \Rightarrow \exists B^{-1}$ .

$$|B^{-1}y| \leq \|B^{-1}\| \cdot |y|$$

$$x := B^{-1}y$$

$$|y| \geq c \cdot |B^{-1}y|$$

$$|B^{-1}y| \leq \frac{1}{c}|y| \Rightarrow \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$$

□

*Примечание.* Есть геометрическое доказательство, отталкивающее от того, что  $B$  сжимает пространство на  $c$ .

*Примечание.*  $A \in \Omega_m$ . Тогда  $\exists c : |Ax| \geq c|x|$

*Доказательство.*

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ax| \quad c := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

□

**Теорема 2** (об обратимости оператора, близкого к обратимому).

- $L \in \Omega_m$  — обратимый
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $\|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$ , т.е.  $M$  “близкий” к  $L$

Тогда:

1.  $M \in \Omega_m$ , т.е.  $\Omega_m$  открыто в  $\mathcal{L}_{m,m}$
2.  $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
3.  $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$

*Доказательство.* По неравенству треугольника  $|a + b| \geq |a| - |b|$ :

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M - L)x| \\ &\geq |Lx| - |(M - L)x| \\ &\geq \frac{1}{\|L\|^{-1}}|x| - \|M - L\| \cdot |x| \\ &\geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 ( $M$  — биекция, т.к.  $\text{Ker } M = \{0\}$ ) и 2, докажем 3:

Аналогично равенству  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$  в  $\mathbb{R}$  выполняется следующее равенство в  $\Omega_m$ :

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на  $M$  слева и на  $L$  справа:

Доказательство.

$$M^{-1} - L^{-1} \stackrel{?}{=} M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

$$E - L^{-1} \stackrel{?}{=} (L - M)L^{-1}$$

$$L - M = L - M$$

□

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1}(L - M)L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

□

**Теорема 3** (о непрерывно дифференцируемом отображении).

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F$  дифф. на  $E$

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1.  $F \in C^1(E)$ , т.е.  $\exists$  все  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  и они непрерывны на  $E$
2.  $F' : E \rightarrow \mathcal{L}_{m,l}$  — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \quad \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq \varepsilon$$

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$ :

Берем  $x, \varepsilon$ .  $\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$  для всех  $i, j$ .

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

$$\triangleleft h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \leq \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot |h| < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

## 1 Экстремумы

**Определение.**  $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$  — локальный максимум, если

$$\exists U(a) \subset E \quad \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

**Теорема 4 (Ферма).**

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- $a$  — точка локального экстремума
- $f$  — дифф. в точке  $a$

Тогда  $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

*Доказательство.* Для  $f|_{\text{прямая}(a,u)}$   $a$  остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. □

**Следствие 4.1** (необходимое условие экстремума).  $a$  — локальный экстремум  $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

**Следствие 4.2** (теорема Ролля).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $K \subset E$  компакт
- $f$  дифф. в  $\text{Int}K$
- $f$  непрерывно на  $K$

$$\bullet \quad f \Big|_{\text{граница } K} = \text{const}$$

Тогда  $\exists a \in \text{Int} K : f'(a) = \vec{0}$

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо  $f$  на  $K$  const, либо  $\exists a \in \text{Int} K$  — точка экстремума. В первом случае  $f' \equiv 0$ , во втором по т. Ферма  $f'(a) = 0$   $\square$

**Определение.** Квадратичная форма  $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} h_i h_j$$

**Определение.** Положительно определенная кв. форма:  $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$

**Определение.** Отрицательно определенная кв. форма:  $\forall h \neq 0 \quad Q(h) < 0$

**Определение.** Незнакоопределенная кв. форма:  $\exists \bar{h} : Q(\bar{h}) < 0, \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) > 0$

**Определение.** Полуопределенная (положительно определенная вырожденная) кв. форма:  $Q(h) \geq 0 \quad \exists \bar{h} \neq 0 : Q(\bar{h}) = 0$

**Лемма 2** (об оценке формы).

- $Q$  — положительно определенная

Тогда  $\exists \gamma_Q > 0 \quad \forall h \quad Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$

*Доказательство.*  $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ , поэтому min и max достигается по т. Вейерштрасса.

$$\gamma_Q := \min_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$$

$$Q(h) = Q\left(|h| \frac{h}{|h|}\right) \stackrel{(*)}{=} |h|^2 \underbrace{Q\left(\frac{h}{|h|}\right)}_{\text{ед. вектор}} \geq \gamma_Q |h|^2$$

Переход  $(*)$  работает, т.к.  $Q$  - квадратичная форма, поэтому:

$$\sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j} a_{ij} |h| \frac{h_i}{|h|} |h| \frac{h_j}{|h|} = |h|^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{h_i}{|h|} \frac{h_j}{|h|}$$

$\square$

**Лемма 3** (об эквивалентных нормах).

- $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — норма

Тогда  $\exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall x \quad C_2|x| \leq p(x) \leq C_1|x|$

*Доказательство.*

$$C_1 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x| p\left(\frac{x}{|x|}\right) \begin{cases} \geq C_2|x| \\ \leq C_1|x| \end{cases}$$

Существование  $C_1$  и  $C_2$  гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности  $p(x)$ .

Докажем, что  $p$  непрерывна.

Введем базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$ . Тогда

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p\left(\sum (x_k - y_k)e_k\right) \\ &\leq \sum p((x_k - y_k)e_k) \\ &= \sum |x_k - y_k| p(e_k) \\ &\leq |x - y| \sqrt{\sum p(e_k)^2} \\ &\leq |x - y| M \end{aligned}$$

□

## Напоминание

$$d^2 f(a, h) = f''_{x_1 x_1}(a) h_1^2 + \dots + f''_{x_m x_m}(a) h_m^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} f''_{x_i x_j} h_i h_j$$

Формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = f(a) + df(a, x - a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a, x - a) + o(|x - a|^2)$$

Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$f(a + h) = f(a) + df(a, h) + \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \quad 0 \leq \Theta \leq 1$$

**Теорема 5** (достаточное условие экстремума).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

- $a \in \text{Int}E$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если  $Q(h)$  положительно определена,  $a$  — локальный минимум
- Если  $Q(h)$  отрицательно определена,  $a$  — локальный максимум
- Если  $Q(h)$  не знакоопределена,  $a$  — не экстремум
- Если  $Q(h)$  положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

*Доказательство.* Для положительно определенной формы:

$$\begin{aligned}
 f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \\
 &= \frac{1}{2} (Q(h) + (d^2 f(a + \Theta h, h) - Q(h))) \\
 &= \frac{1}{2} \left( Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2} + 2 \sum_{i < j} \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i h_j}_{\substack{\leq |h|^2 \\ \text{по модулю}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \left( \gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2 \right) \geq \frac{1}{4} \gamma_Q |h|^2 > 0$$

Аналогично для отрицательно определенной формы.

Для не знакоопределенной формы:

$$\begin{aligned}
 \angle \bar{h} : Q(\bar{h}) > 0 &\Rightarrow f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{t^2 Q(\bar{h})}_{Q(t\bar{h})} + t^2 \underbrace{\left( \sum (f''_{x_i x_i}(a + \Theta t\bar{h}) - f''_{x_i x_i}(a)) \bar{h}_i^2 + 2 \sum_{i < j} \dots \right)}_{\text{б.м. при } t \rightarrow 0} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} t^2 (Q(h) - \frac{1}{2} Q(h)) > 0
 \end{aligned}$$

Т.е.  $f(a + t\bar{h}) > f(a)$  при  $t$ , близких к 0.

Аналогично  $f(a + t\bar{h}) < f(a)$  при  $t$ , близких к 0.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$$f(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 \dots$$

$$\bar{f}(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 \dots$$

$$a = (0, 0, \dots)$$

$$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots$$

$$d^2 f(a, h) = 2h_1^2$$

$$d^2 \bar{f}(a, h) = 2h_1^2$$

Итого  $f$  не имеет экстремума в  $a$ , но для  $\bar{f}$   $a$  — локальный минимум. □

*Примечание.* Если  $f$  подходит под условие теоремы и  $d^2 f(a, h)$  — положительно определенный вырожденный  $\Rightarrow a$  — не точка максимума.