

Математическая логика

Михайлов Максим

15 февраля 2021 г.

Оглавление

Лекция 1	12 февраля	2
0.	Мотивация	2
0.1.	Математикам	2
0.2.	Программистам	3
1.	Исчисление высказываний	3
1.1.	Язык	3
1.2.	Метаязык и предметный язык	3
1.3.	Сокращения записи	4
1.4.	Теория моделей	4
1.5.	Теория доказательств	5
1.6.	Правило Modus Ponens и доказательство	5

Лекция 1

12 февраля

0. Мотивация

0.1. Математикам

Аксиома 1 (Архимеда). Для любого $k > 0$ найдётся n , такое что $kn > 1$.

Под эту аксиому не подходят бесконечно малые числа и это является проблемой. Например, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$, но мы хотим уметь различать эти два числа. Ньютон предложил идею бесконечно малых чисел, откуда пошли последовательности. Возникает вопрос — что такое последовательность и что такое число?

Общепринятое определение целых чисел \mathbb{N} происходит из теории множеств. Однако эта теория содержит в себе множество фундаментальных парадоксов, от которых нельзя избавиться.

Возникает вопрос — а что такое множество? Посмотрим на некоторое множество $A = \{x \mid x \notin x\}$. Содержит ли оно себя, $A \in A$? На этот вопрос нельзя ответить, это называется парадокс Рассела. Есть простой способ его разрешить — запретить ставить такой вопрос. Нет вопроса — нет парадокса. Существование такого парадокса ставит под вопрос существование любого множества — а существует ли \mathbb{N} ? Может быть его существование парадоксально, просто мы не нашли этот парадокс. Пришло чуть более умное решение парадокса — запретим множества, содержащие себя. Таким образом вывели аксиоматику теории множеств (Цермело — Френкеля).

Пример. Рассмотрим множество всех чисел, которые можно задать в ≤ 1000 слов русского языка. Фраза “наименьшее число, которое нельзя задать в ≤ 1000 слов” содержит ≤ 1000 слов, т.е. такое число принадлежит искомому множеству — парадокс.

Возникает идея — человеческий язык порождает парадоксы, поэтому нужно задать новый язык, который их не порождает. Этот язык и является математической логикой.

0.2. Программистам

Математическая логика применяется в двух областях (*для программистов*):

1. Языки программирования
2. Формальные доказательства

Для языков программирования матлогика применима как теория типов (*переменных*).

Формальные доказательства нужны например для smart-контрактов, где корректность программы критически важна, т.к. если в нём есть ошибка, у вас злоумышленник заберет все деньги, а вы не сможете этот контракт откатить.

1. Исчисление высказываний

1.1. Язык

Определение. Язык содержит в себе:

1. Пропозициональные переменные

A'_i — большая буква начала латинского алфавита, возможно с индексом и/или штрихом.

2. Связки

Пусть α, β — высказывания. Тогда $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg \alpha)$ — высказывания.

α, β называются **метапеременными**.

Примечание. Математическая логика алгеброподобна (*а не анализоподобна*), т.к. в ней много определений и мало доказательств.

1.2. Метаязык и предметный язык

У нас есть два различных языка — **предметный язык** и **метаязык**. Метаязык — русский, предметный язык мы определили выше.

Пример. $\alpha \rightarrow \beta$ — метавыражение; $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ — предметное выражение.

Обозначение. Метапеременные обозначаются различными способами в зависимости от того, что они обозначают:

- Буквы греческого алфавита ($\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi$) — выражения
- Заглавные буквы конца латинского алфавита (X, Y, Z) — произвольные переменные

Пример. $X \rightarrow Y \Rightarrow A \rightarrow B$ — подстановка переменных. Этот синтаксис не формален, мы будем записывать так:

$$(X \rightarrow Y)[X := A, Y := B] \equiv A \rightarrow B$$

Соглашение. символы логических операций не пишутся в метаязыке.

Пример.

$$\begin{aligned} (\alpha \rightarrow (A \rightarrow X))[\alpha := A, X := B] &\equiv A \rightarrow (A \rightarrow B) \\ (\alpha \rightarrow (A \rightarrow X))[\alpha := (A \rightarrow P), X := B] &\equiv (A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow B) \end{aligned}$$

1.3. Сокращения записи

- $\vee, \&, \neg$ — скобки слева направо (*лево-ассоциативные операции*) (не коммутативные)
- \rightarrow — правоассоциативная.

Примечание. Здесь операторы записаны в порядке их приоритета

Пример. Расставим скобки в следующем выражении:

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \& C \rightarrow D \\ A \rightarrow ((B \& C) \rightarrow D) \end{aligned}$$

1.4. Теория моделей

Модель состоит из:

Обозначение.

- P — некоторое множество предметных переменных
 - τ — множество высказываний предметного языка
 - V — множество истинных значений. Классическое — $\{\text{П}, \text{Л}\}$
 - $\llbracket \cdot \rrbracket : \tau \rightarrow V$ — оценка высказывания (*высказывание ставится в скобки*).
1. $\llbracket x \rrbracket : P \rightarrow V$ — задается при оценке.
 2. $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \star \llbracket \beta \rrbracket$, где \star есть логическая операция ($\vee, \&, \neg, \rightarrow$), а \star определено естественным образом как элемент метаязыка.

1.5. Теория доказательств

Определение. Схема высказывания — строка, соответствующая определению высказывания + метапеременные.

Пример.

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (A \rightarrow \alpha)))$$

10 схем аксиом:

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
3. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \ \& \ \beta$
4. $\alpha \ \& \ \beta \rightarrow \alpha$
5. $\alpha \ \& \ \beta \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

1.6. Правило Modus Ponens и доказательство

Определение. Доказательство (*вывод*) есть конечная последовательность высказываний $\alpha_1 \dots \alpha_n$, где α_i — либо аксиома, либо $\exists k, l < i : \alpha_k \equiv \alpha_l \rightarrow \alpha_i$ (*правило Modus Ponens*)

Пример. $\vdash A \rightarrow A$

- | | |
|--|------------|
| 1. $A \rightarrow A \rightarrow A$ | сх. акс. 1 |
| 2. $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$ | сх. акс. 1 |
| 3. $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ | сх. акс. 2 |
| 4. $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ | М.Р. 1, 3 |
| 5. $A \rightarrow A$ | М.Р. 2, 4 |

Определение. Доказательство $\alpha_1 \dots \alpha_n$ доказывает выражение β , если $\alpha_n \equiv \beta$