

## Ряды Тейлора

Пример.

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad x \in \mathbb{R} \\
 \sin x &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
 \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
 \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1) \\
 \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1)
 \end{aligned}$$

**Теорема 1.**  $\forall \sigma \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\sigma}{n} x^n + \dots$$

*Доказательство.* При  $|x| < 1$  ряд сходится по признаку Даламбера:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{\sigma!}{(n+1)!(n+1-\sigma)!} x^{n+1}}{\frac{\sigma!}{n!(n-\sigma)!} x^n} \right| = \left| \frac{(\sigma-n)x}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x| < 1$$

Обозначим сумму ряда через  $S(x)$ .

Наблюдение:  $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n)}{n!} x^n + \dots$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$\begin{aligned}
 (1+x)S' &= \dots + \left( \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n+1)}{n!} n \right) x^n + \dots \\
 &= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n+1)}{n!} \sigma x^n + \dots
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} \quad f'(x) = \frac{S'(1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1}S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0$$

$$\Rightarrow f = \text{const}, f(0) = 1 \Rightarrow f \equiv 1 \Rightarrow S(x) = (1+x)^\sigma$$

□

Следствие 1.

$$\arcsin x = \sum^{**} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} (-x^2)^n \Big|_{\sigma=-\frac{1}{2}} = \sum^* \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

При  $n=0$   $*$  это 1, и тогда  $**$ :  $\arcsin x = x + \dots$

Следствие 2.

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}}, \quad |t| < 1$$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

Дифференцируем  $m$  раз, получим искомое. Слагаемые с  $n < m$  пропадут, т.к. они = 0 □

**Теорема 2.**  $f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$

Тогда  $f$  — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности  $x_0 \iff$

$$\exists \delta, C, A > 0 \quad \forall n \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$$

*Примечание.* В “Кошмарном сне” (см. лекцию 12)  $f^{(n)} \approx n!2n! \Rightarrow f$  не раскладывается.

Доказательство.

$$\Leftarrow \text{ формула Тейлора в } x_0 : f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$$

Если

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

, то  $f$  раскладывается в ряд Тейлора. Из условия мы знаем:

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq C |A(x - x_0)|^n$$

Тогда при  $C|A(x - x_0)|^n \rightarrow 0$   $f$  раскладывается в ряд Тейлора.

$$C|A(x - x_0)|^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$$

Таким образом,  $f$  раскладывается в ряд Тейлора в области  $(x_0 - \min(\delta, \frac{1}{A}), x_0 + \min(\delta, \frac{1}{A}))$

$$\Rightarrow f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Возьмём  $x_1 \neq x_0$ , для которого разложение верно.

(а) при  $x = x_1$ , ряд сходится  $\Rightarrow$  слагаемые  $\rightarrow 0 \Rightarrow$  слагаемые ограничены:

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n \right| \leq C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \leq C_1 n! B^n$$

, где  $B = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$

Таким образом, мы оценили производную в  $x_0$ , но нужно уметь оценивать и производную в окрестности  $x_0$ .

(b)

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1) \dots (n-m+1) (x - x_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} (x - x_0)^{n-m} \end{aligned}$$

Пусть  $|x - x_0| < \frac{1}{2B}$

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &\leq \sum \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} |x - x_0|^{n-m} \right| \\ &\leq \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!} |x - x_0|^{n-m} \\ &= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!} \underbrace{(B|x - x_0|)^{n-m}}_{< \frac{1}{2}} \\ &= \frac{C_1 B^m m!}{\underbrace{(1 - B|x - x_0|)^{m+1}}_{> \frac{1}{2}}} \\ &< C_1 2^{m+1} B^m m! \end{aligned} \tag{1}$$

$$= \underbrace{(2C_1)}_C \underbrace{(2B)}_A^m m!$$

(1): по следствию 2.

Эта оценка выполняется при  $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{2B}$

□

## Теория меры

Продолжим доказательство с прошлой лекции.

*Доказательство.*

2.

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \quad A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k$$

Сделаем это множество дизъюнктным.

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) \quad A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k$$

Но эти  $C_k$  вообще говоря  $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) = \bigsqcup_j D_{kj} \in \mathcal{P}$$

Тогда  $A = \bigsqcup_{k,j} D_{kj} \quad \mu A = \sum \mu D_{kj}$

При этом  $\forall k \quad \sum_j \mu D_{kj} = \mu C_k \stackrel{\text{монот.}\mu}{\leq} \mu A_k$

Итого  $\mu A = \sum_k \sum_j \mu D_{kj} = \sum \mu C_k \leq \sum \mu A_k$

□

*Упражнение.*

1.  $X = \{1, 2, 3\}, \mathcal{P} = 2^X$ . Задайте объем  $\mu$  на  $\mathcal{P}$ :  $\mu\{1\} = 10, \mu\{1, 2, 3\} = 2021$

2.  $\mu$  — объем на алгебре  $\mathfrak{A}$ ,  $\mu X < +\infty \quad \forall X$ .

Доказать:  $\forall A, B, C \in \mathfrak{A} : \mu(A \cup B \cup C) = \mu A + \mu B + \mu C - \mu(A \cap B) - \mu(B \cap C) - \mu(A \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$

**Определение.**  $\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера, если  $\mu$  — объем и  $\mu$  счётно-аддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad \mu A = \sum_i \mu A_i$$

*Примечание.*  $(a_\omega)_{\omega \in \Omega}$  — счётное семейство чисел ( $\Omega$  — счётно),  $\forall \omega \quad a_\omega \geq 0$

Тогда определена  $\sum_{\omega \in \Omega} a_\omega = \sup \sum_{\text{кон.}} a_\omega$

Значит, можно счётную аддитивность понимать обобщенно:

$$A = \bigsqcup_{\text{кон.}} A_\omega \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_\omega$$

*Примечание.* Счётная аддитивность не следует из конечной аддитивности.

*Пример* (не меры).  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{P}$  — ограниченные множества и их дополнения.

$$\mu A = \begin{cases} 0 & , A - \text{огр.} \\ 1 & , A - \text{имеет огр. дополнение} \end{cases}$$

Пусть  $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{\text{счётное}} \text{клеток} = \bigsqcup_{\text{счётное}} \text{ячеек} = \bigsqcup A_i$

$\mu(\mathbb{R}^2) = 1, \sum \mu A_i = 0 \Rightarrow \mu$  — не счётно аддитивная и не мера.

*Пример* (меры).  $X$  — (бесконечное) множество.

$a_1, a_2, a_3 \dots$  — набор попарно различных точек.

$h_1, h_2, h_3 \dots$  — положительные числа.

Для  $A \subset X \quad \mu A := \sum_{k: a_k \in A} h_k$ .

Физический смысл  $\mu$ : каждой точке  $a_i$  сопоставляется “масса”  $h_i$ . Мера множества точек есть сумма “масс” точек.

Счётная аддитивность  $\mu \Leftrightarrow$  теореме о группировке слагаемых (в ряду можно ставить скобки).

Эта мера называется дискретной.

**Теорема 3.**  $\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} - \text{объем.}$

Тогда эквивалентно:

1.  $\mu$  — мера, т.е.  $\mu$  — счётно-аддитивна.
2.  $\mu$  — счётно-полуаддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$$

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$  как в предыдущей теореме, пункт 2, но вместо конечного объединения по  $k$  используется счётное.

$$2 \Rightarrow 1 \quad A = \bigsqcup A_i \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum \mu A_i$$

$$\forall N \quad A \supset \bigsqcup_{i=1}^N A_i \quad \mu A \geq \sum_{i=1}^N \mu A_i$$

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup A_i \text{ (на самом деле } A = \bigsqcup A_i) &\Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i \\ &\Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i \end{aligned}$$

□

*Следствие 3.*  $A \in \mathcal{P}, A_n \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup A_n, \mu A_n = 0, \mu$  — мера. Тогда  $\mu A = 0$

Это очевидно, т.к.  $\mu A \leq \sum \mu A_i = 0$

**Теорема 4.**

- $\mathfrak{A}$  — алгебра
- $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} - \text{объем.}$

Тогда эквивалентно:

1.  $\mu$  — мера
2.  $\mu$  — непрерывна снизу:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu A_i$$

**Теорема 5.**

- $\mathfrak{A}$  — алгебра

- $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$  — объем.
- $\mu$  — конечный объем.

Тогда эквивалентно:

1.  $\mu$  — мера, т.е.  $\mu$  счётно-аддитивная.
2.  $\mu$  — непрерывна сверху:

$$A, A_1, A_2 \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \supset A_2 \supset \dots, A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu A_i$$

*Доказательство.*

$$1 \Rightarrow 2 \quad B_k = A_k \setminus A_{k+1}, A_1 = \bigsqcup B_k \cup A$$

$$\mu A_1 = \sum \mu B_k + \mu A$$

$$A_n = \bigsqcup_{k \geq n} B_k \cup A \quad \mu A_n = \sum_{k \geq n} \mu B_k + \mu A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu A$$

2  $\Rightarrow$  1 Дана непрерывность сверху. Воспользуемся ей для случая  $A = \emptyset$

Проверим, что  $C = \bigsqcup C_i \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum \mu C_i$ .

Пусть  $A_k := \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} C_i$ . Тогда  $A_k \in \mathfrak{A}$ , т.к.  $A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^k C_i$  — конечное объединение.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad \bigcap A_k = \emptyset \Rightarrow \mu A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu \emptyset = 0$$

$$C = \bigsqcup_{i=1}^k C_i \sqcup A_k \quad \mu C = \sum_{i=1}^k \mu C_i + \mu A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sum \mu C_i$$

□

## Теорема о продолжении меры

**Определение.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера,  $\mathcal{P} \subset 2^X$

$\mu$  —  $\sigma$ -конечна, если  $\exists A_1, A_2 \dots \in \mathcal{P} : X = \bigcup A_i, \mu A_i < +\infty$

*Пример.*  $X = \mathbb{R}^m, \mathcal{P} = \mathcal{P}^m$  — полукольцо ячеек,  $\mu$  — классический объем,  $\mu$  —  $\sigma$ -конечный объем.

$$\mathbb{R}^m = \bigcup \text{Куб}(0, 2R)$$

$$= \bigcup \text{целочисл. ед. ячеек}$$

**Определение.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера.

$\mu$  — **полная** в  $\mathcal{P}$ , если  $\forall A \in \mathcal{P} \quad \mu A = 0 \quad \forall B \subset A$  выполняется:  $B \in \mathcal{P}$  и (тогда автоматически)  $\mu B = 0$  (по монотонности)

Это совместное свойство  $\mu$  и  $\mathcal{P}$ .

Должок. **Пространство с мерой** — тройка  $(\underbrace{X}_{\text{множество}}, \underbrace{\mathfrak{A}}_{\sigma\text{-алгебра}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера на } \mathfrak{A}})$