

**Теорема 1** (характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

Тогда  $\exists f_n$  – ступенчатые:

1.  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2.  $\forall x \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

*Доказательство.*

$$e_k^{(n)} = X \left( \frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n} \right) \quad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$



$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

Не дописано.

□

Следствие 1.

- $f$  — измеримо

Тогда  $\exists f_n$  — измеримые :  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  всюду и  $|f_n| \leq |f|$

Доказательство. Рассмотрим срезки  $f^+, f^-$ , дальше очевидно.

□

Следствие 2.

- $f, g$  — измеримо

Тогда  $fg$  — измеримо, если  $0 \cdot \infty = 0$ .

Доказательство.

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \rightarrow fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела.

□

Следствие 3.

- $f, g$  — измеримо

Тогда  $f + g$  измеримо.

Примечание. Считаем, что  $\forall x$  не может быть одновременно  $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$ .

Доказательство.

$$f_n + g_n \rightarrow f + g$$

□

**Теорема 2** (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры).

Примечание.  $A \subset X$  — **полной меры**, если  $\mu(X \setminus A) = 0$ .

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$

- $f$  — непрерывно на  $E' = E \setminus e$

Тогда  $f$  — измеримо.

*Доказательство.*  $f$  — измеримо на  $E'$ , т.к.  $E'(f < a)$  открыто в  $E'$  по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e$ ,  $\lambda_m$  — полная  $\Rightarrow e(f < a)$  — измеримо в  $E$ .

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$ , объединение измеримых множеств измеримо.  $\square$

*Пример.*  $E = \mathbb{R}$ ,  $f = \chi_{\text{Irr}}$ , где  $\text{Irr}$  — множество иррациональных чисел.  $f$  непр. на  $\text{Irr}$  и разрывно на  $\mathbb{R}$ .

*Следствие 4.*

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- $f$  измеримо на  $E'$

Тогда можно так переопределить  $f$  на  $e$ , что полученная функция  $\tilde{f}$  будет измерима.

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E' \\ \text{const}, & x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f < a)} \subset \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\emptyset \text{ или } e}$$

$\square$

*Следствие 5.*  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — монотонна.

Тогда  $f$  измерима.

*Доказательство.*  $f$  — непрерывно на  $\langle a, b \rangle$  за исключением, возможно, счётного множества точек.  $\square$

*Упражнение.*  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывна.

Доказать:  $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$  — измеримо.

Упражнение.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримо.

Доказать:  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$  — измеримо.

Упражнение. Доказать, что  $\exists$  измеримая функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \lambda e = 0$ , если  $f$  непрерывно на  $e$ , то полученная  $\tilde{f}$  разрывна всюду.

## Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$  — высказывание  $(x \in X)$

$W(x)$  — верно при почти всех из  $E =$  почти всюду на  $E =$  почти везде на  $E =$  п.в.  $E$ , если:

$\exists e \in E : \mu e = 0$   $W(x)$  — истинно при  $x \in E \setminus e$

Пример.  $X = \mathbb{R}$ ,  $W =$  иррационально.

Пример.  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(x)$  при п.в.  $x \in E$

Свойства.

1.
  - $\mu$  — полная
  - $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  п.в.  $X$
  - $f_n$  измеримо

Тогда  $f$  измеримо.

Доказательство.  $f_n \rightarrow f$  на  $X'$ , где  $e = X \setminus X', \mu e = 0$

$f$  — измеримо на  $X'$

$\mu$  — полная  $\Rightarrow f$  измеримо на  $X$ , т.к.  $X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subseteq e}$  □

2. ???

3. Пусть  $\forall n$   $W_n(x)$  истинно при почти всех  $x$ .

Тогда утверждение “ $\forall n$   $W_n$  истинно” — верно при почти всех  $X$

Доказательство.  $\triangleleft e_n : \mu(e_n) = 0$ . Искомое высказывание верно при  $x \in X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right), \mu(\bigcup e_i) = 0$  □

**Определение.**  $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — почти везде конечны.

$f_n$  сходится к  $f$  по мере  $\mu$ , обозначается  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

*Примечание.*  $f_n$  и  $f$  можно изменить на множестве меры 0, т.е. предел не задан однозначно.

*Упражнение.*  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f; f_n \xrightarrow[\mu]{} g$ . Тогда  $f$  и  $g$  эквивалентны.

*Пример.*

$$1. f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$$

$$f_n \rightarrow f \text{ всюду на } (0, +\infty)$$

$$f_n \xrightarrow[\mu]{} f$$

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \geq \varepsilon\right) = X\left(x \leq \frac{1}{\varepsilon n}\right)$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \rightarrow 0$$

$$2. f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ при всех } x$$

$$f_n(x) \xrightarrow{\quad} 0$$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\rightarrow 0$$

$$3. n = 2^k + l, 0 \leq l < 2^k, X = [0, 1], \lambda$$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

$\lim f_n(x)$  не существует ни при каком  $x$ !

$$X(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[\lambda]{} 0$$

**Теорема 3 (Лебега).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\mu X$  конечно
- $f_n, f$  — измеримо, п.в. конечно

- $f_n \rightarrow f$  п.в.

Тогда  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

*Доказательство.* Переопределим  $f_n, f$  на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай:  $\forall x$  последовательность  $f_n(x)$  монотонно убывает к 0, то есть  $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon)$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху,  $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

Рассмотрим общий случай:  $f_n \rightarrow f$ ,  $\varphi(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда  $\varphi_n \rightarrow 0$ ,  $\varphi_n \geq 0$  и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon) \\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

□

**Теорема 4 (Рисс).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ .

Тогда  $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

*Доказательство.*

$$\forall k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \rightarrow 0 \\ \exists n_k : \text{при } n \geq n_k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что  $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\mu E_k \rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

1: по счётной полуаддитивности меры.

Покажем, что при  $x \notin E$   $f_{n_k} \rightarrow f$ .

$$x \notin E \quad \exists N \quad x \notin E_k \text{ при } k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ .

Т.к.  $\mu E = 0$ , искомое выполнено. □

Следствие 6.  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$   $|f_n| \leq g$  почти всюду. Тогда  $|f| \leq g$  почти всюду.

Доказательство.  $\exists n_k \quad f_{n_k} \rightarrow f$  почти всюду. □

$$f_n \Rightarrow f \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$$

**Теорема 5 (Егорова).**

- $X, \mathfrak{A}, \mu$
- $\mu X < +\infty$
- $f_n, f$  — почти везде конечно, измеримо

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \xrightarrow[X \setminus e]{} f$$

Доказательство. Упражнение. □

## Интеграл

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$  — зафиксировали.

**Определение (1).**

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- $E_k$  — допустимое разбиение

- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu(x) := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть  $0 \cdot \infty = 0$

*Свойства.*

1. Не зависит от представления  $f$  в виде суммы, т.е.:

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

*Примечание.* При  $E_k \cap E'_j \neq \emptyset$   $\alpha_k = \alpha'_j \Rightarrow$  можно писать любое из них.

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu (E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

$$2. \underbrace{f}_{\text{ст.}} \leq \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$$

**Определение (2).**

- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g - \text{ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

*Свойства.*

- Если  $f$  ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$
- $g \leq f, f - \text{измеримая}, g - \text{измеримая} \Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

**Определение (3).**

- $f$  измеримо
- $\int f^+$  или  $\int f^-$  конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$



Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

**Теорема 6 (Тонелли).**

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- $f$  измерима
- Записывается как  $f(x, y)$ , где  $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

*Обозначение.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{m+n} \quad E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех  $x \in \mathbb{R}^m$  функция  $y \mapsto f(x, y)$  измерима на  $\mathbb{R}^n$
2. Функция  $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$ , измерима и корректно задана.
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

*Примечание.* Неформально говоря, можно разбить  $\mathbb{R}^{m+n}$  на  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.