

$]x = (\xi^1 \ \xi^2 \ \xi^3) \quad \varphi(x) = (\xi^1 + \xi^2, \xi^2, \xi^3)$ – линейный оператор.

Определение. Ядро ЛОп φ называется множество

$$\text{Ker}\varphi = \{x \in X : \varphi x = O_Y\}$$

Примечание. $\text{Ker}\varphi$ – подпространство ЛП X

Определение. Образом ЛОп φ называется множество:

$$\text{Im}\varphi = \{y \in Y : \exists x \quad \varphi x = y\} = \varphi(X)$$

Примечание. $\text{Im}\varphi$ – подпространство ЛП Y

Доказательство. $y_1, y_2 \in \text{Im}\varphi \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X : \varphi x_1 = y_1 \quad \varphi x_2 = y_2$

$$\varphi(y_1 + y_2) = \varphi(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)) = \varphi(\varphi(x_1 + x_2)) \Rightarrow y_1 + y_2 \in \text{Im}\varphi$$

□

Пример. E_3 – евклидово пространство

$$\varphi E_3 \rightarrow E_3$$

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x}\vec{n})}{(\vec{n}\vec{n})}\vec{n} \quad \vec{n} \neq \vec{0}$$

1. $\text{Ker}\varphi$

2. $\text{Im}\varphi$

3. Геометрический смысл

$\text{Ker}\varphi :$

$$\vec{x} - \frac{(\vec{x}\vec{n})}{(\vec{n}\vec{n})}\vec{n} = 0$$

$$\vec{x} = \frac{(\vec{x}\vec{n})}{(\vec{n}\vec{n})}\vec{n} \Rightarrow \text{Ker}\varphi = \mathcal{L}(\vec{n})$$

$\text{Im}\varphi :$

$$\varphi(\vec{y}) = \vec{y} - \frac{(\vec{y}\vec{n})}{(\vec{n}\vec{n})}\vec{n}$$

$$y \in \mathcal{L}^\perp(\vec{n}) \Rightarrow \varphi(y) = y \Rightarrow \text{Im}\varphi = \mathcal{L}^\perp(\vec{n})$$

$$\mathcal{L}(\vec{n}) \cap \mathcal{L}^\perp(\vec{n}) = 0 \Rightarrow E_3 = \mathcal{L}(\vec{n}) + \mathcal{L}^\perp(\vec{n})$$

Пример. E_3

$$\varphi : E_3 \rightarrow E_3$$

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x}\vec{n})}{(\vec{a}\vec{n})}\vec{a} \quad (\vec{a}, \vec{n}) \neq 0$$

$$\text{Ker}\varphi = \mathcal{L}(\vec{a})$$

$$\vec{x} \stackrel{!}{=} \vec{y} + \alpha \vec{a}$$

$$[\{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X, \{h_k\}_{k=1}^m - \text{базис } Y \Rightarrow \varphi(e_j) = \sum_{k=1}^m a_j^k h_k$$

$$\triangleleft A_\varphi = \|a_j^k\| - \text{матрица оператора } \varphi \text{ в паре выбранных базисов}$$

Пример. Найти матрицу оператора φ в стандартном базисе E_3

$$\vec{n} = (1 \ 2 \ 3)^T$$

$$\varphi(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{14} \\ -\frac{2}{14} \\ -\frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{w}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{14} \\ \frac{14}{10} \\ -\frac{6}{14} \end{bmatrix}$$

То же самое для e_3 и собрать все в матрицу.

Пример. φ_θ — оператор поворота вокруг \vec{S} на θ

$$]y = \beta \vec{a} + \gamma \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$$

$$]\vec{x} = \alpha \vec{s} + \vec{y} = \alpha \vec{s} + \beta \vec{a} + \gamma \vec{b}$$

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha \vec{s} + \beta \vec{a} + \gamma \vec{b}) = \alpha \vec{s} + (\beta \cos \theta - \gamma \sin \theta) \vec{a} + (\beta \sin \theta + \gamma \cos \theta) \vec{b}$$

$$\varphi(e_1) = \dots \text{ и так далее}$$

$$]\varphi : X \rightarrow X$$

$$\{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X \Rightarrow A_\varphi$$

$$\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n - \text{базис } X \Rightarrow \tilde{A}_\varphi$$

$$\{e\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}\}$$

$$\triangleleft \varphi(\tilde{e}_j) = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_j^k \tilde{e}_k = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_j^k \sum_{l=1}^n t_k^l e_l$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\tilde{e}_j) &= \varphi\left(\sum_{l=1}^n \tilde{a}_j^l e_l\right) = \sum_{l=1}^n \tilde{a}_j^l \varphi(e_l) = \sum_{l=1}^n t_j^l \sum_{k=1}^n a_l^k e_k \\
\sum_{k=1}^n \tilde{a}_j^k t_k^l &= \sum_{k=1}^n t_j^k a_k^l \\
(T\tilde{A}_\varphi)_j^l &= (A_\varphi T)_j^l \quad \forall l, j \\
T\tilde{A}_\varphi &= A_\varphi T \\
\tilde{A}_\varphi &= T^{-1}A_\varphi T
\end{aligned}$$