1 Определения

1.1 Ступенчатая функция

$f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \;\; f\Big|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

1.2 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

Дано выше. (1.1, стр. 1)

1.3 ! Измеримая функция

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f **измерима** на множестве E, если $\forall a \in \mathbb{R} \;\; E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

2 Теоремы

2.1 Лемма “о структуре компактного оператора”

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда $\exists$ ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

Доказательство. $W := V^* V$ — самосопряженный оператор *(матрица симметрична относительно диагонали)*.

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные *(возможно с повторениями)*
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

Примечание. Пока мы в $\mathbb{R}^m$ *(а не в* $\mathbb{C}^m$*)*, * есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i\langle g_i, g_i\rangle \overset{(1)}{=} \langle W g_i, g_i\rangle \overset{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i\rangle > 0$$

- 1: т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.
- 2: из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^{m} V_{ik} V_{il}$$
$$\langle W g_i, g_i\rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i\rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$
$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j\rangle \overset{\text{def}\, h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j}\langle V g_i, V g_j\rangle \overset{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j}\langle W g_i, g_j\rangle \overset{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j}\langle g_i, g_j\rangle \overset{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- 3: из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- 4: т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.
- 5: при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j\rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j\rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i}\sqrt{c_i}} = 1$

Примечание. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \overset{\text{def}\, x}{=} V\left(\sum_{i=1}^{m}\langle x, g_i\rangle g_i\right) \overset{(6)}{=} \sum_{i=1}^{m}\langle x, g_i\rangle V(g_i) \overset{\text{def}\, h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i\rangle h_i$$

- 6: в силу линейности V

$$(\det V)^2 \overset{(7)}{=} \det(V^* V) \overset{\text{def}\, W}{=} \det W \overset{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

- 7: в силу мультипликативности det и инвариантности относительно транспонирования.
- 8: т.к. det инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \dots c_m$.

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

2.2 ! Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m \ \ V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

1. Если $\det V = 0 \quad \mathrm{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\mathrm{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E \ \ V(E) \subset \mathrm{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если $\det V \neq 0 \quad \mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

   $\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

   Мы хотим найти k, для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ — единичный куб на векторах g_i.

   $V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$.

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

   Таким образом, $k = |\det V|$

□

2.3 Теорема об измеримости пределов и супремумов

f_n — измеримо на X. Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.
2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.

3. Если $\forall x \ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \overset{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

   9:

   - $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.

     $$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

   - $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n(s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. sup и inf измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

$\square$