

Для последовательности x_n : $y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \dots)$, $z_n = \inf(x_n, x_{n+1} \dots)$. Тогда $z_n \leq x_n \leq y_n$ $y_n \downarrow, z_n \uparrow$

$$\overline{\lim} x_n := \lim y_n \quad \underline{\lim} x_n := \lim z_n$$

Теорема 1. Техническое описание верхнего предела.

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр. сверху

2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$

3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ а и б:

(а) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$

(б) $\forall \varepsilon > 0$ для бесконечного множества номеров $n : l - \varepsilon < x_n$

Доказательство. 1. Очевидно, т.к. $y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \dots) = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр. сверху

2. “ \Rightarrow ” $x_n \leq y_n \rightarrow -\infty$

“ \Leftarrow ” $\forall A \exists N \forall n > N \quad y_n \leq A, x_n < A$

3. “ \Rightarrow ” (а) $y_n \rightarrow l \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad x_n \leq y_n < l + \varepsilon$

(б) Берём $\varepsilon > 0$, предположим противное : \exists конечное мн-во $n : l - \varepsilon < x_n$

$]n_0$ — максимальный номер, такой что $l - \varepsilon < x_{n_0}$, тогда $y_{n_0} \leq l - \varepsilon$, но $y_n \downarrow \Rightarrow \lim y_n \leq l - \varepsilon$

“ \Leftarrow ” $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \leq l + \varepsilon$, но в $x_n, x_{n+1} \dots \exists x_i : l - \varepsilon < x_i \Rightarrow y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \dots) > l - \varepsilon$. Итого $l + \varepsilon \geq y_n > l - \varepsilon \Rightarrow l = \lim y_n = \overline{\lim} x_n$

□

Теорема 2.

$$\exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$$

Доказательство. “ \Rightarrow ” 1. $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \lim y_n \geq \lim x_n = +\infty$

2. $\lim x_n = -\infty$ аналогично

3. $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$ очевидно из технического описания предела, пункт 3.

“ \Leftarrow ” $\underline{\lim} x_n \leftarrow z_n \leq x_n \leq y_n \rightarrow \overline{\lim} x_n$, по теореме о городских $\exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n$

□

Определение. $n_k : n_1 < n_2 < n_3 < \dots \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k}$ — частичный предел

Теорема 3. О характеристизации верхнего предела как частичного.

1. $\forall l$ — частичный пр. $x_n \quad \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$

$$2. \exists (n_k) : x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n \quad \exists m_k : x_{m_k} \rightarrow \underline{\lim} x_n$$

Доказательство. 1. $x_{n_k} \rightarrow l \quad \underline{\lim} x_n \leftarrow z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$

$$2. \quad (a) \quad \overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n - \text{неогр сверху} \Rightarrow \text{можно выбрать } x_{n_1} < x_{n_2} < \dots x_n \rightarrow +\infty$$

$$(b) \quad \overline{\lim} x_n = -\infty \text{ тривиально.}$$

$$(c) \quad \overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \quad \exists x_{n_k} : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$$

□

Пример. 1. $\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$

$$2. \quad \forall l \in [-1, 1] - \text{частичный предел последовательности } \sin n$$

Доказательство. 1. Тривиально

$$2. \quad n_k := \arcsin l + 2\pi k$$

Кроме того, можно составить $n_k \in \mathbb{N}$.

□

1 Простейшие свойства рядов

Определение. $a_1 + a_2 + \dots, \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ — **числовой ряд** ($a_i \in \mathbb{R}$)

Определение. $\forall N \in \mathbb{N} \quad S_n := \sum_{i=1}^n a_i$ — **частичная сумма**

Определение. Если $\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, ряд **сходится**, иначе ряд **расходится**.

Пример. $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\Theta}{(N+1)!} x^{N+1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}, k \in \mathbb{N}, p = -k$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^p = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^N (x^p)'' \{x\} (1 - \{x\}) dx = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\max(1, N^{p-1}))$$

- $p > -1$ расходится
- $p = -1$ расходится
- $p < -1$ сходится

Определение. $\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$ — N -й остаток ряда

Свойства:

1. $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся, $c_n := a_n + b_n$. Тогда $\sum c_n$ сходится
2. $\sum a_n$ — сходится, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\sum \lambda a_n$ сходится и $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$
3. (a) $\sum a_n$ — сходится \Rightarrow любой остаток сходится
 (b) остаток сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
 (c) $r_N = \sum_{n \geq N} a_n, \sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow r_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Доказательство. (a) ? m -й остаток, $N \geq m$: $\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^N a_n$

(b) Аналогично.

(c) “ \Leftarrow ” Тривиально.

$$\text{“}\Rightarrow\text{”} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + r_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + r_{+\infty} \Rightarrow r_N \rightarrow 0$$

□

Лемма 1. Необходимое условие сходимости:

$$\sum a_n \text{ сходится} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Доказательство. Тривиально. $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$

□

Обратное неверно, например $\sum \frac{1}{n^p}$ расходится, $p \in (0, 1]$

Теорема 4. Критерий сходимости ряда Больцано-Коши:

$$\sum a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k > N \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально. □

Докажем расходимость $\sum \frac{1}{n}$ по критерию Больцано-Коши.

$$m := k \quad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > k \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N \quad \exists k > N \quad \exists m := k \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+k}| \geq \varepsilon$$

Теорема 5. Признак сравнения.

$$a_k, b_k \geq 0$$

1. $\forall k \quad a_k \leq b_k$, или $\exists c > 0 \quad \forall k \quad a_k \leq cb_k$. Тогда $\sum b_k$ сх. $\Rightarrow \sum a_k$ сх., $\sum a_k$ расх. $\Rightarrow \sum b_k$ расх.

2. $\exists \lim \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$. Тогда при

$$0 < l < +\infty : \sum a_k \text{ сх.} \Leftrightarrow \sum b_k \text{ сх.}$$

$$l = 0 : \sum b_k \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_k \text{ сх.}, \sum a_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum b_k \text{ расх.}$$

$$l = +\infty : \sum a_k \text{ сх.} \Rightarrow \sum b_k \text{ сх.}, \sum b_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum a_k \text{ расх.}$$

Доказательство.

Лемма 2. $a_n \geq 0 \quad \sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow S_n$ ограничено сверху.

Доказательство. \exists кон. $\lim S_n \Leftrightarrow S_n$ ограничено сверху. □

1. $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$; $S_n^{(b)}$ огр. $\Rightarrow S_n^{(a)}$ огр., по лемме a_n сходится. Аналогично расходимость.

2. (а) $0 < l < +\infty$: Для $\varepsilon = \frac{l}{2} \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \frac{1}{2}lb_n < a_n < \frac{3}{2}lb_n$, дальше по 1 пункту.

(б) $l = 0$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon b_n \Rightarrow$ по 1 пункту.

(с) $l = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \frac{a_n}{b_n} > \varepsilon \Rightarrow a_n > b_n \varepsilon \Rightarrow$ по 1 пункту. □

Пример. 1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 14n + 1}{n^5 + n^4 + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$$a_n \sim \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, 2 > 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$