1 Векторная алгебра

1.1 Системы координат на плоскости и в пространстве.

Определение. **Координатной осью** называется ориентируемая прямая, имеющая начало отсчета 0 и снабженная масштабом E.

Определение. **Система координат** — прямоугольная, если угол между осями координат прямой.

Определение. **Декартова прямоугольная система координат** — система координат с одинаковым масштабом по всем осям.

Определение. Система координат на плоскости называется **полярной**, если положение каждой точки задаётся полярным углом φ и полярным радиусом ρ.

Связь прямоугольной и полярной систем:

$$x = \rho \cos \varphi, \;\; y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; \cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \;\; \sin \varphi = \frac{y}{\rho}$$

Определение. Система координат в пространстве называется **цилиндрической**, если положение каждой точки задаётся полярным углом φ, полярным радиусом ρ и высотой над плоскостью z.

Связь прямоугольной и цилиндрической систем такая же, как прямоугольной и полярной.

Определение. Система координат называется **сферической**, если положение каждой точки определяется радиальным расстоянием ρ, азимутальным φ и зенитным Θ углами.

Связь прямоугольной и сферической систем:

$$x = \rho \cos \varphi \cos \Theta, \;\; y = \rho \sin \varphi \cos \Theta, \;\; z = \rho \sin \Theta$$

1.2 Векторы и основные действия с ними *(сложение, умножение на число)*.

Определение. Направленные отрезки **эквивалентны**, если они:

1. Лежат на параллельных прямых
2. Сонаправлены
3. Имеют одинаковые длины

Определение. **Вектор** — класс эквивалентности направленных отрезков

Определение. **Сумма** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, полученный по правилу треугольника или параллелограмма

Определение. **Произведением** вектора $\vec{a}$ на число λ является вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, такой что:

1. $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$
2. $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{a} \upuparrows \vec{b}$
3. $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
4. $\lambda = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$

1.3 Векторное введение координат. Координаты вектора.

Для любого вектора $\vec{a}$, заданного на оси l существует единственное представление $\vec{a} = x_a \cdot \vec{e}$, где $x_a \in \mathbb{R}$ и $|\vec{e}| = 1$. Тогда $\vec{e}$ — **базис** и x_a — **координата** вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}\}$

1.4 Свойства основных действий над векторами.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — коммутативность
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ — ассоциативность
3. $\exists\vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ — нейтральный элемент
4. $\forall\vec{a}\ \ \exists(-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ — наличие обратного элемента
5. $\alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ — ассоциативность
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ — дистрибутивность
7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ — дистрибутивность

1.5 Скалярное произведение векторов и его свойства.

Определение. **Угол** между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — угол $\leq 180°$, заключенный между представителями соответствующих классов эквивалентности, отложенных от одной точки.

Определение. **Скалярное произведение** — число, равное: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$

Свойства скалярного произведения:

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
2. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq 0$
3. $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}^{\perp}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Пр}^{\perp}_{\vec{b}}\vec{a}$
4. $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c}) = (\lambda\vec{a}, \vec{c}) + (\mu\vec{b}, \vec{c})$

1.6 Векторное произведение и его свойства.

Определение. Тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — **правая**, если если располагаясь по направлению вектора $\vec{c}$ наблюдатель видит, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит по часовой стрелке.

Определение. **Векторное произведение** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — вектор $\vec{c}$, такой что:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$
2. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
3. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — правая тройка

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
2. $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

1.7 Смешанное произведение векторов и его свойства.

Определение. **Смешанное произведение**: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Свойства смешанного произведения:

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

1.8 Двойное векторное произведение и его свойства.

$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$

Свойства:

1. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — можно запомнить как *“бац минус цаб”*
2. Тождество Якоби:
$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

1.9 Замена координат при переходе к новой системе отсчета. Матрица перехода.

Переход от одного базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ к другому базису $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = t_1^1\vec{e}_1 + t_1^2\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = t_2^1\vec{e}_1 + t_2^2\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

Определение. T называется **матрица перехода**

С учётом переноса начала координат:

$$X = A + T \cdot X'$$

Парралельный перенос: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$

Сжатие-растяжение: $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, A = \vec{0}$

Поворот на угол $\varphi : T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, A = \vec{0}$

2 Аналитическая геометрия

2.1 Уравнения линий и поверхностей.

Определение. **Уравнение линии** — такое равенство, что координаты любой точки на линии удовлетворяют этому равенству и координаты любой точки не на линии не удовлетворяют.

Способы задания линий в $\mathbb{R}^2$:

1. В явном виде: $y = f(x), x = g(y)$
2. В неявном виде: $F(x, y) = 0$
3. Параметрически: $x = x(t), y = y(t)$

Способы задания линий в $\mathbb{R}^3$:

1. В неявном виде: $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$
2. Параметрически: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

Способы задания поверхностей в $\mathbb{R}^3$:

1. В явном виде: $x = f(y, z);\ \ y = g(x, z);\ \ z = h(x, y)$
2. В неявном виде: $F(x, y, z) = 0$
3. Параметрически: $x = x(u, v);\ \ y = y(u, v);\ \ z = z(u, v)$

Эти способы задают не только линии и поверхности. *(Также могут быть точки, множества линий/поверхностей и т.д.)*

Определение. **Целый алгебраический полином** — уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{m_i} y^{n_i},\ \ m_i, n_i \in \mathbb{N}$$

Порядок такого полинома $p = \max_i\{m_i + n_i\}$

2.2 Уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Взаимное расположение прямых.

2.2.1 Уравнения прямой на плоскости и в пространстве

Возьмём произвольную прямую линию l в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Пусть $\vec{s} = \begin{pmatrix} m\ n\ p \end{pmatrix}^T$ — направляющий вектор этой прямой. Зафиксируем точку M_0 на l с радиус-вектором $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0\ y_0\ z_0 \end{pmatrix}^T$ и выразим точку M на l с радиус-вектором $\vec{r} = \begin{pmatrix} x\ y\ z \end{pmatrix}^T$.

$\overrightarrow{M_0M} || \vec{s}$, т.к. они параллельны $l \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$

$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}$ *(по определению)* $\Rightarrow \vec{r} - \vec{r_0} = t \cdot \vec{s} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{s}$

Определение. Это **векторное уравнение прямой**.

Домножим обе части векторно на $\vec{s}$.

$$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{r_0} \times \vec{s} + t \cdot \vec{s} \times \vec{s}$$

$$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{r_0} \times \vec{s}$$
$$\vec{b} := \vec{r_0} \times \vec{s}, \quad \vec{r} \times \vec{s} = \vec{b}$$

Спроектируем векторное уравнение прямой на каждую из осей, получим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases}$$

Выразим из каждого уравнения t и приравняем:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Если даны две точки на прямой M_0 и M_1 с радиус-вектором $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}^T$, можем получить направляющий вектор для l, который равен $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$. Подставим это в векторное уравнение прямой:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t$$

Сделаем переход, аналогичный предыдущему:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0) \cdot t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0) \cdot t \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

2.2.2 Взаимное расположение прямых

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, а также равен углу между нормалями к этим векторам:

$$\cos\varphi = \left|\frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}\right| = \left|\frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right|$$

Парралельность прямых:

$$L_1 || L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 || \vec{s}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_2 = \alpha\vec{s}_1 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

Перпендикулярность:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow (\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

2.3 Частные виды уравнений прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

2.3.1 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0)$$

Этот переход можно делать, только если $m \neq 0$

$$k := \frac{m}{n} = \operatorname{tg}\alpha \quad \alpha\text{— угол между прямой и осью } x$$

$$b := y_0 - kx_0, \quad y = kx + b$$

Геометрический смысл b — длина отрезка между началом координат и точкой пересечения прямой с осью y.

2.3.2 Уравнение прямой в отрезках на осях

Возьмем a — длина отрезка между началом координат и точкой пересечения прямой с осью x. Тогда:

$$a := \frac{-b}{k}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

2.3.3 Нормальное уравнение прямой

Возьмём нормаль к $\vec{s}$ — это будет $\vec{n}$, при этом его возьмём таким, что:

$$|\vec{n}| = 1, \quad \angle(\vec{n}, \vec{r_0}) < \frac{\pi}{2}$$

Домножим векторное уравнение на $\vec{n}$:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = (\vec{s}, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) - (\vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

$$\vec{n} := (\cos\alpha, \cos\beta), \quad p := (\vec{r}_0, \vec{n})$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

p — **прицельный параметр**, его геометрический смысл - расстояние от начала отсчета до прямой.

Возьмём произвольную нормаль к $\vec{s}$ — вектор $\vec{N} = (A, B)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$C := Ax_0 + By_0, \quad Ax + By + C = 0$$

2.3.4 Расстояние от точки до прямой

Найдём расстояние между точкой M и прямой L, заданной уравнением с прицельным параметром.

$$L : x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

Проведем $L_1||L$ через M:

$$L_1 : x\cos\alpha + y\cos\beta - p_1 = 0, \quad p_1 = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta$$

$$\rho(L, M) = \rho(L, L_1) = |p_1 - p| = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta - p|$$

2.4 Уравнения плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей.

2.4.1 Векторное параметрическое уравнение плоскости

Зададим плоскость двумя непараллельными векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Выразим произвольную точку M из плоскости с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2$$

Определение. Это **векторное параметрическое уравнение плоскости**.

Спроектируем на каждую ось:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1m_1 + t_2m_2 \\ y = y_0 + t_1n_1 + t_2n_2 \\ z = z_0 + t_1p_1 + t_2p_2 \end{cases}$$

2.4.2 Общее уравнение плоскости

Умножим векторное уравнение на $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ скалярно:

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0 + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = (t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

В проекции:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0, \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

2.4.3 Уравнение плоскости, проходящей через три точки

По аналогии с $\mathbb{R}^2$:

$$(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{r}_2-\vec{r}_1, \vec{r}_3-\vec{r}-1)=0$$

2.4.4 Нормальное уравнение плоскости

По аналогии с $\mathbb{R}^2$:

$$p := (\vec{r}_0, \vec{n}) = \text{Пр}^{\perp}_{\vec{n}}, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

2.4.5 Угол между плоскостями

Это угол между нормалями плоскостей.

2.4.6 Парралельность плоскостей

$$\mathcal{L}_1 || \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = \alpha\vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

2.4.7 Перпендикулярность плоскостей

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

2.5 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

2.5.1 Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \left|\frac{(\vec{s}, \vec{n})}{|\vec{s}||\vec{n}|}\right|$$

2.5.2 Парралельность прямой и плоскости

$$\mathcal{L} || L \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow (\vec{s}, \vec{n}) = 0$$

2.5.3 Перпендикулярность прямой и плоскости

$$\mathcal{L} \perp L \Leftrightarrow \vec{s} \,||\, \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} = \alpha\vec{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

2.6 Эллипс: геометрическое определение, каноническое уравнение, симметрия и форма эллипса.

Определение. Эллипс — множество точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек *(фокусов)* — постоянная величина.

Пусть фокусы — точки F_1, F_2, $|F_1F_2| = 2$ — фокусное расстояние, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ — векторы от точки эллипса до фокусов. Тогда по определению:

$$|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = 2a = const$$

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ — **эксцентриситет** эллипса.

$$0 \leq c \leq a \Rightarrow 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

При $c = 0$ эллипс — окружность, при $c = a$ — отрезок.

Каноническое уравнение эллипса:

$$b^2 := a^2 - c^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a — длина **большой полуоси** эллипса, b — длина **малой полуоси**.

Очевидны предельные значения координат эллипса:

$$|x| \leq a, \ \ |y| \leq b$$

Кроме того, эллипс симметричен относительно обеих осей и относительно начала отсчета.

2.7 Эллипс: полярное уравнение, параметрические уравнения, директрисы, уравнение касательной к эллипсу.

2.7.1 Полярное уравнение

2.7.2 Параметрическое уравнение эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Это уравнение можно проверить подстановкой в каноническое.

2.7.3 Уравнение касательной к эллипсу

Касательная к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ задается следующим уравнением:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

2.7.4 Директрисы

Определение. Директрисами эллипса называются прямые, параллельные малой оси эллипса и проходящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$.

$$d_1 := \frac{a}{\varepsilon} + x, \quad d_2 := \frac{a}{\varepsilon} - x$$
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

2.8 Окружность.

Определение. Окружность — частный случай эллипса при $c = 0, \;\; r_1 = r_2 = r$

Свойства:

1. $r_1 + r_2 = 2a = 2r, \;\; a = b = r, \;\; \varepsilon = 0$
2. Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

3. $|x| \leq r, \;\; |y| \leq r$
4. $\rho = r$
5. $x = r\cos t, \;\; y = r\sin t$
6. Касательная в точке $M_0(x_0, y_0): \;\; \frac{xx_0}{r^2} + \frac{yy_0}{r^2} = 1$

3 Алгебраические структуры. СЛАУ

3.1 Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле

Определение. Полугруппа — множество G с заданной на нём бинарной ассоциативной замкнутой операцией $\circ$, т.е.

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$$

Определение. Группа — полугруппа, где выбран нейтральный элемент и для каждого элемента есть обратный:

1. Нейтральный элемент $e : e \circ g = g \circ e = g$
2. Обратный элемент: $\forall g \in G \;\; \exists g^{-1} \;\; g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

Определение. Абелева группа — группа с коммутативной операцией, т.е.

$$\forall g_1, g_2 \in G \;\; g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

Определение. Кольцо — множество с двумя бинарными операциями $\{R, `+', `\cdot'\}$, которое является абелевой группой относительно сложения, полугруппой относительно умножения и эти операции согласованны *(дистрибутивны)*:

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3; \quad (r_2 + r_3) \cdot r_1 = r_2 \cdot r_1 + r_3 \cdot r_1$$

Определение. Поле — множество с двумя бинарными операциями $\{R, `+', `\cdot'\}$, где эти операции согласованны и:

1. $\{K, `+'\}$ — абелева группа
2. $\{K \setminus \{0\}, `\cdot'\}$ — абелева группа

3.2 Алгебраические структуры: линейное пространство, алгебра

Определение. Модуль над кольцом R — абелева группа $\{G, `+'\}$ с операцией $R \times G \to G$, записываемой как rg и для которой выполняется следующее:

1. $(r_1 + r_2)g = r_1 g + r_2 g$
2. $r(g_1 + g_2) = rg_1 + rg_2$
3. $(r_1 r_2)g = r_1(r_2 g)$

Определение. Линейное пространство — модуль над кольцом, которое также является полем.

Определение. Вектор — элемент линейного пространства.

Определение. Алгебра — модуль над кольцом, где сам модуль также является кольцом.

3.3 Поле комплексных чисел

$i^2 := -1$

$\mathbb{C} = \{a + bi : \forall a, b \in \mathbb{R}\}$

Модуль комплексного числа c: $|c| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$, если $c = a + bi$

Аргумент комплексного числа c: $\varphi = \arg(c) = \arg(a + bi) = 2 \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}+a}\right)$

Тогда $c = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Дополнение комплексного числа c записывается как $\bar{c} = \overline{a + bi} = a - bi$

3.4 Линейное пространство. Примеры линейных пространств.

Дано выше. *(3.2, стр. 12)*

Примеры:

1. $X = \{x = \begin{pmatrix}\xi^1 & \dots & \xi^n\end{pmatrix}^T, \xi^i \in \mathbb{R}\}$ *(или $\mathbb{C}$)*
2. $\mathcal{P}_n = \{\text{многочлены } p(t) : \deg p(t) \leq n, n \in \mathbb{N}\}$

3.5 Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.

Определение. **Линейной комбинацией** называется следующее выражение:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

где $\{x_i\}_{i=1}^n$ — вектора, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ — коэффициенты.

Определение. Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **линейнонезависимым**, если не существует его линейной комбинации, где не все коэффициенты равны 0, а сама комбинация равна 0_X:

$$\nexists \{\alpha_i\}_{i=1}^n : \exists i : \alpha_i \neq 0 \quad \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_X$$

Иначе набор называется **линейно зависимым**

Лемма 1. Любой набор, содержащий нулевой вектор, является линейнозависимым.

Лемма 2. Набор, содержащий линейнозависимый поднабор, является линейнозависимым.

Лемма 3. Любой поднабор линейнонезависимого набора также является линенйнонезависимым.

Лемма 4. Набор векторов линейнозависим тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов набора выражается линейной комбинацией остальных.

$$\exists k \in \{1 \ldots n\} : x_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} \alpha^i x_i \Leftrightarrow \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ}$$

3.6 Базис и размерность линейного пространства.

Определение. Набор векторов называется **полным** в линейном пространстве X, если любой вектор этого пространства можно выразить как линейную комбинацию этого набора:

$$\forall x \in X \quad \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i x_i$$

Определение. Набор векторов называется **базисом** пространства X, если он является полным и ЛНЗ.

Определение. Линейное пространство называется **конечномерным**, если в нём существует конечный полный набор векторов

Определение. **Размерность пространства** $\dim X$ — количество векторов в его базисе.

3.7 Изоморфизм линейных пространств.

Определение. Изоморфизм — биекция, сохраняющая линейность, установленная между двумя линейными пространствами над одним и тем же полем:

$$\begin{cases} x_1 \leftrightarrow y_1 \\ x_2 \leftrightarrow y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2 \\ \alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1 \end{cases}$$

3.8 Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.

Определение. Подпространство линейного пространства X — замкнутое множество $L \subset X$

Пример.

1. X и $\{0\}$ называются тривиальными подпространствами
2. Прямая и плоскость, содержащие начало координат — подпространство E_3
3. $\mathbb{R}^{m<n}$ — подпространство $\mathbb{R}^n$
4. Множество симметричных $n \times n$ матриц — подпространство $\mathbb{R}^n_n$
5. Множество полиномов с членами только чётных степеней — подпространство $\mathcal{P}_n$

Определение. Линейная оболочка набора векторов — множество всех линейных комбинаций этих векторов:

$$\mathcal{L}(x_1 \dots x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha^i x_i \;\middle|\; \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \right\}$$

Определение. Линейное многообразие, параллельное подпространству L линейного пространства X — множество M:

$$M = \{y \in X : y = x_0 + x \quad \forall x \in L\},\ x_0 \in X$$

3.9 Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.

Определение. Пересечение подпространств L_1 и L_2 — множество L', такое что:

$$L' = \{x \in X : x \in L_1 \text{ и } x \in L_2\}$$

Определение. Сумма подпространств L_1 и L_2 — множество L'', такое что:

$$L' = \{x \in X : x = x_1 + x_2 \ \forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

Определение. **Прямая сумма подпространств** L_1 и L_2 — множество $L = L_1 \dot{+} L_2$, такое что:

$$L = \{x \in X : x! = x_1 + x_2 \ \forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

Определение. Если $X = L_1 \dot{+} L_2$, L_1 — **дополнение** L_2 до X

3.10 Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера *(геометрическая формулировка)*.

Определение.

$$\begin{cases} \alpha_1^1\xi^1 + \alpha_2^1\xi^2 + \ldots + \alpha_n^1\xi^n = \beta^1 \\ \alpha_1^2\xi^1 + \alpha_2^2\xi^2 + \ldots + \alpha_n^2\xi^n = \beta^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^m\xi^1 + \alpha_2^m\xi^2 + \ldots + \alpha_n^m\xi^n = \beta^m \end{cases}$$

— **линейная алгебраическая система**, α — коэффициенты, β — свободные члены, ξ — неизвестные

Определение. **Решение системы** — такой набор, при подстановке которого равенства становятся верными.

Определение. **Совместная система** — система, у которой есть решение.

Определение. **Определенная система** — совместная система, которая имеет единственное решение.

Определение. **Однородная система** — система, у которой все свободные члены равны 0.

Запишем в векторной форме: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\xi^i = b$

Теорема 1. Если $m = n$ и $\{a_i\}_{i=1}^n$ — ЛНЗ, система совместна и определена, т.е. есть единственное решение.

3.11 Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли *(геометрическая формулировка)* и ее следствия.

Рассмторим случай, когда $\dim \mathcal{L}\{a_1 \ldots a_n\} = r \leq n$. Тогда можно занумеровать a так, что $\{a_i\}_{i=1}^r$ — ЛНЗ и переписать систему как:

$$a_1\xi^1 + \ldots + a_r\xi^r = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - \ldots - a_n\xi^n$$

Теорема 2. $b \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$ система совместна *(можно все ξ справа занулить и представить b через левую часть)*. Если $r = m$, система определена, иначе — нет.

Следствие 1. Однородная система:

1. Всегда совместна, т.к. существует тривиальное решение
2. Имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $r < m$
3. Является неопределенной тогда и только тогда, когда $m < n$

3.12 Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.

Теорема 3. Если $m = n$, то:

1. Или однородная система имеет только тривиальное решение, и неоднородная система совместна и определена для любого b
2. Или существуют нетривиальные решения однородной системы и неоднородная система совместна не при любых b

Пояснение: в первом случае $\{a_i\}$ ЛНЗ $\Rightarrow \forall b$ можно выразить как линейную комбинацию $\{a_i\}$ единственным образом. Во втором случае $\{a_i\}$ ЛЗ $\Rightarrow$ не любой b можно выразить как линейную комбинацию $\{a_i\}$.

3.13 Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.

Определение. Фундаментальной системой решений линейной однородной системы уравнений называется любая система из $n-r$ линейнонезависимых решений этой системы, то есть базис пространтва решений однородной системы.

Любое решение можно представить в виде общего решения:

$$z = z' + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

где $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ — ФСР.

4 Полилинейные формы. ~~Определители~~

4.1 Перестановки.

Определение. Перестановкой из $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из первых n чисел натурального ряда называется расположение их в некотором фиксированном порядке.

Определение. Перестановка $1, 2, \ldots, n$ — **базовая**.

Определение. Транспозиция перестановки t_q^p — обмен местами двух элементов этой перестановки.

Определение. Беспорядок*(инверсия)* в перестановке — когда большее число стоит перед меньшим.

Определение. Чётность числа беспорядков в перестановке $\Leftrightarrow$ чётность перестановки

4.2 Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.

Определение. **Отображение** из X в Y ($f : X \to Y$) сопоставляет каждому $x \in X$ элемент $y \in Y$

Определение. **Линейная форма** — линейное отображение из линейного пространства X в линейное пространство Y:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Определение. $f = g \Leftrightarrow (f, x) = (g, x)\ \ \forall x \in X$

Определение. θ — **нуль-форма**, если $(\theta, x) = 0\ \ \forall x \in X$

Определение. $h = f + g \Leftrightarrow (h, x) = (f, x) + (g, x)\ \ \forall x \in X$

Определение. $l = \alpha f \Leftrightarrow (l, x) = \alpha(f, x)\ \ \forall x \in X$

Определение. **Пространство, сопряженное с** X — пространство линейных форм, заданных на X и обозначаемое X^*

4.3 Полилинейные формы (ПЛФ): основные определения, тензор, эквивалентное задание ПЛФ.

Примечание. Т.к. в этом разделе много сумм, не будем их писать:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \xi^j \equiv \varphi_j \xi^j$$

Примечание. (от автора) Я буду втыкать ⚠ везде, где есть скрытые суммы.

Определение. **Полилинейная форма** — функция от p векторов и q линейных форм, принимающая значения из поля K:

$$U : X^p \times X^{*q} \to K,$$

линейная по всем аргументам:

$$U(x_1 \dots \alpha x_i' + x_i'' \dots x_n, y^1 \dots y^n) = \alpha U(x_1 \dots x_i' \dots x_n, y^1 \dots y^n) + U(x_1 \dots x_i'' \dots x_n, y^1 \dots y^n),$$

такая ПЛФ имеет **валентность** (p, q)

Определение. **Тензор** ПЛФ W валентности (p, q) — набор из n^{p+q} чисел:

$$w_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q} = W(e_{i_1} \dots e_{i_p}, f^{j_1} \dots f^{j_q})$$

$$\forall t \in \{1 \dots p\}\ \ i_t \in \{1 \dots n\}; \quad \forall t \in \{1 \dots q\}\ \ j_t \in \{1 \dots n\},$$

ранг этого тензора (p, q).

Примечание. Для удобства можно писать так: $w_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q} = w_{\vec{i}}^{\vec{j}}$

Теорема 4. Задание ПЛФ эквивалентно заданию ее тензора в паре базисов пространств X и X^*

4.4 Базис линейного пространства ПЛФ валентности (p, q).

Определение. $U + V$ и λU заданы так же, как для линейных форм.

Теорема 5. Множество всех ПЛФ валентности (p, q) — линейное пространство Ω_q^p над полем K.

Рассмотрим набор ПЛФ $\{{}^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_p} W\}$, такой что:

$$ {}^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_p} W(x_1 \dots x_p, y^1 \dots y^q) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \cdots \xi_p^{s_p} \eta_{t_1}^1 \eta_{t_2}^2 \cdots \eta_{t_q}^q, $$

т.е. ${}^{\vec{s}}_{\vec{t}} W$ — произведение s_i-ой координаты i-того вектора и t_i-ой координаты i-той формы. Запишем в виде тензора:

$$ {}^{\vec{s}}_{\vec{t}} w_{\vec{i}}^{\vec{j}} = \delta_{i_1}^{s_1} \delta_{i_2}^{s_2} \cdots \delta_{i_p}^{s_p} \delta_{t_1}^{j_1} \delta_{t_2}^{j_2} \cdots \delta_{t_q}^{j_q}, $$

т.е. ${}^{\vec{s}}_{\vec{t}} w_{\vec{i}}^{\vec{j}} = 1$ только если $\vec{s} = \vec{i}$ и $\vec{t} = \vec{j}$, иначе 0.

Теорема 6. $\{{}^{\vec{s}}_{\vec{t}} W\}$ — базис Ω_q^p

$\dim \Omega_q^p = n^{p+q}$

4.5 Произведение полилинейных форм и его свойства.

$W = U \cdot V \Leftrightarrow W(x_1 \dots x_{p_1+p_2}, y^1 \dots y^{q_1+q_2}) = U(x_1 \dots x_{p_1}, y^1 \dots y^{q_1}) \cdot V(x_1 \dots x_{p_2}, y^1 \dots y^{q_2})$

Свойства:

1. $U \cdot V \neq V \cdot U$
2. $U \cdot (V \cdot W) = (U \cdot V) \cdot W = U \cdot V \cdot W$
3. $U \cdot \Theta_{\Omega_{q_2}^{p_2}} = \Theta_{\Omega_{q_1}^{p_1}} \cdot V = \Theta_{\Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}}$
4. $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$
5. $(\alpha \cdot U) \cdot V = U \cdot (\alpha \cdot V)$
6. Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ — базис X^*. Тогда набор
$$ {}^{s_1 \dots s_p} W = f^{s_1} \cdots f^{s_p} $$
образует базис в Ω_0^p:
$$ {}^{s_1 \dots s_p} W = f^{s_1}(x_1) \cdots f^{s_p}(x_p) = \xi_1^{s_1} \cdots \xi_p^{s_p} $$
7. Более общий случай: $\{f^i\}_{i=1}^n$ — базис X^*, $\{\hat{x}^i\}_{i=1}^n$ — базис X^{**}, тогда в Ω_q^p базис:
$$ {}^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_q} W = f^{s_1} \cdots f^{s_p} \cdot \hat{x}_{t_1} \cdots \hat{x}_{t_q} $$

4.6 Симметричные и антисимметричные ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации.

Определение. ПЛФ $U \in \Omega_0^p$ **симметричная**, если порядок аргументов не влияет на значение U:

$$\forall (j_1 \dots j_p) - \text{перестановки} \quad U(x_1 \dots x_p) = U(x_{j_1} \dots x_{j_p})$$

Определение. ПЛФ $U \in \Omega_0^p$ **антисимметричная**, если любая транспозиция её аргументов меняет знак значения U, т.е. произвольная перестановка меняет знак столько раз, сколько в ней транспозиций:

$$\forall (j_1 \dots j_p) - \text{перестановки} \quad U(x_1 \dots x_p) = (-1)^{[j_1 \dots j_p] U(x_{j_1} \dots x_{j_p})},$$

где $[j_1 \dots j_p]$ — чётность перестановки.

Примечание. Пространство симметричных ПЛФ — подпространство Ω_0^p и обозначается Σ^p

Примечание. Пространство антисимметричных ПЛФ — подпространство Ω_0^p и обозначается Λ^p

Определение. **Симметризация** — операция получения симметричной ПЛФ из произвольной ПЛФ, называется Sym и выполняется следующим образом:

$$\operatorname{Sym} W = U, \quad U(x_1 \dots x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j_1 \dots j_p)} W(x_{j_1} \dots x_{j_p})$$

Определение. **Антисимметризация** — операция получения антисимметричной ПЛФ из произвольной ПЛФ, называется Asym и выполняется следующим образом:

$$\operatorname{Asym} W = V, \quad V(x_1 \dots x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j_1 \dots j_p)} (-1)^{[j_1 \dots j_p]} W(x_{j_1} \dots x_{j_p})$$

Свойства Sym и Asym:

1. Линейность
2. Дистрибутивность
3. Композиция:

$$\operatorname{Sym} \operatorname{Sym} = \operatorname{Sym}, \quad \operatorname{Asym} \operatorname{Asym} = \operatorname{Asym}, \quad \operatorname{Sym} \operatorname{Asym} = 0, \quad \operatorname{Asym} \operatorname{Sym} = 0$$

4.7 Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$. Доказательство полноты.

Базис Λ^p — набор ПЛФ $\{{}^{s_1 \dots s_p}F\}$, такой что:

$$ {}^{s_1 \dots s_p}F = p! \operatorname{Asym}({}^{s_1 \dots s_p}W) \text{ и } 1 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_p \le n, $$

где $\{{}^{s_1 \dots s_p}W\}$ — базис Ω_0^p

Доказательство. Докажем полноту.

Рассмотрим произвольную форму $U \in \Lambda^p$ и разложим её по базису Ω_0^p

$$ U = {}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p} $$

$$ U = \operatorname{Asym} U = \operatorname{Asym}({}^{s_1 \dots s_p}W u_{s_1 \dots s_p}) = u_{s_1 \dots s_p} \operatorname{Asym} {}^{s_1 \dots s_p}W = $$

$$ u_{s_1 \dots s_p} \frac{1}{p!} p! \operatorname{Asym} {}^{s_1 \dots s_p}W = u_{s_1 \dots s_p} \frac{1}{p!} ({}^{s_1 \dots s_p}F) = $$

$$ \frac{1}{p!} \sum_{1 \le s_1 \le \ldots \le s_p \le n} \sum_{(\sigma_1 \dots \sigma_p)} (-1)^{[\sigma_{s_1} \dots \sigma_{s_p}]} ({}^{s_1 \dots s_p}F)(-1)^{[\sigma_{s_1} \dots \sigma_{s_p}]} u_{s_1 \dots s_p} = $$

$$ \frac{1}{p!} \sum_{1 \le s_1 \le \ldots \le s_p \le n} p! ({}^{s_1 \dots s_p}F) u_{s_1 \dots s_p} = \sum_{1 \le s_1 \le \ldots \le s_p \le n} ({}^{s_1 \dots s_p}F) u_{s_1 \dots s_p} $$

Таким образом, мы разложили произвольную $U \in \Lambda^p$ по $\{F\}$. □

$\dim \Lambda^p = C_n^p$

4.8 Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$. Доказательство линейной независимости.

Читайте в конспекте Александра Игоревича, я на такое не готов.

4.9 Внешнее умножение ПЛФ и его свойства.

Определение. Внешнее произведение $U \in \Lambda^p$ **на** $V \in \Lambda^r$ — ПЛФ следующего вида:

$$ U \wedge V = \frac{(p+r)!}{p!r!} \operatorname{Asym}(U \cdot V) $$

$U \wedge V \in \Lambda^{p+q}$

Свойства:

1. $p + q > n \Rightarrow U \wedge V = \Theta$
2. $U \wedge V = (-1)^{pr} V \wedge U$
3. $U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W = U \wedge V \wedge W = \frac{(p+r+s)!}{p!r!s!} \operatorname{Asym}(U \cdot V \cdot W)$
4. $U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$
5. $(\alpha U) \wedge V = U \wedge (\alpha V) = \alpha(U \wedge V)$
6. $U \wedge \Theta = \Theta \wedge V = \Theta$
7. $\{f^i\}_{i=1}^n$ — базис X^*. Тогда:

$$\forall 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_p \leq n : \quad {}^{i_1 \ldots i_p}F = f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}$$