1 Случайные величины

Определение. Случайная величина — отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$

Рассмотрим игру, где преподаватель бросает честную монетку, и если выпал 0, то он платит 1 рубль, иначе каждый ученик платит ему 1 рубль. Заметим, что игра не честная, т.к. $win(0) = -1, win(1) = 100; \quad win : \Omega \to \mathbb{R}$

Определение. **Функция распределения** случайной величины:

$$F_\xi(a) = P(\xi \le a)$$

В выше рассмотренной игре $F_{win}(a) = \begin{cases} 0 & a < -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \le a < 100 \\ 1 & a \ge 100 \end{cases}$

Определение. **Плотность распределения** случайной величины $f_\xi(a) = P(\xi = a) \quad f_\xi(a) = F'_\xi(a)$

График плотности распределения величины выигрыша для вышеуказанной игры $f_\xi(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} & a = -1 \\ \frac{1}{2} & a = 100 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Вернемся к игре преподавателя. $\Omega = \{0, 1\} \quad win(0) = -1, win(1) = 100 \quad P(win = -1) = \frac{1}{2}, P(win = 100) = \frac{1}{2}$

Определение. **Математическое ожидание** — среднее взвешенное значение случайной величины.

$$E_\xi = M_\xi = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot \xi(\omega)$$

В игре преподавателя

$$E_\xi = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}100 = 49.5$$

$$E_\xi = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot \xi(\omega) = \sum_a \sum_{\substack{w \in \Omega \\ \xi(\omega) = a}} p(\omega) \cdot a = \sum_a a \cdot P(\xi = a)$$

1.1 Действия с случайными величинами

ξ, η — случайные величины. Следующие операции возможны:

$$\xi + \eta \quad \xi \cdot \eta \quad a \in \mathbb{R} \cdot \xi \quad \xi^2 \quad \operatorname{arctg} \xi$$

$$F_{c\xi}(a) = P(c\xi \leq a) = P(\xi \leq \frac{a}{c}) = F_\xi\left(\frac{a}{c}\right)$$
$$f_{c\xi}(a) = f_\xi\left(\frac{a}{c}\right)$$
$$E(c\xi) = \sum_{\omega\in\Omega} p(w)\cdot c\cdot\xi(\omega) = c\cdot E(\xi)$$
$$E(\xi+\eta) = \sum_{\omega} p(\omega)(\xi(\omega)+\eta(\omega)) = \sum_{\Omega}(p(\omega)\xi(\omega)+p(\omega)\eta(\omega)) = E\xi + E\eta$$

Определение. **Неподвижной точкой** в перестановке называется такой индекс i, что $\pi_i = i$

Рассмотрим $\xi(\pi)$ — количество неподвижных точек в случайной перестановке.

Посчитать распределение ξ — сложная задача, в отличие от матожидания.

$$\xi_i(\pi) := \begin{cases} 1 & \pi[i] = i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Такие величины называются **индикаторными**.

$$\xi(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\pi)$$
$$P(\xi_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$
$$E_{\xi_i} = 0\cdot\frac{n-1}{n} + 1\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$
$$E_\xi = 1$$

Итого в случайной перестановке ожидается ровно 1 неподвижная точка.

Можно заметить, что ξ_i вроде как влияют друг на друга — если все, кроме одной $\xi_i = 1$, то и оставшаяся $\xi_j = 1$. Однако это не влияет на матожидание.

Определение. ξ и η — **независимые**, если $\forall a, b$ события $\xi \leq a$ и $\eta \leq b$ — независимые.

Матождиание линейно всегда, в том числе для зависимых величин.

Теорема 1. ξ и η — независимые, если $E(\xi,\eta) = E_\xi E_\eta$

Лемма 1. ξ и η — независимые $\Leftrightarrow$ $[\xi = a], [\eta = b]$ независимые $\forall a$ и b

$$E(\xi\eta) = \sum_a P(\xi\eta = a)a = \sum_a \sum_x P(\xi \cdot \eta = a | \xi = x)$$
$$P(\xi = x) \cdot a = \sum_a \sum_x P\left(\eta = \frac{a}{x}\right) P(\xi = x)\frac{a}{x} \cdot x$$
$$P(\xi\eta = a | \xi = x) = \frac{P(\xi\eta = a \cap \xi = x)}{P(\xi = x)} = \frac{P(\xi = x \cap \eta = \frac{a}{x})}{P(\xi = x)} =$$
$$\frac{P(\xi = x)P(\eta = \frac{a}{x})}{P(\xi = x)} = P(\eta = \frac{a}{x})$$

Матожидание — не единственная оценка игры. Ещё есть **дисперсия** — квадрат матожидания разности величины и её матожидания:

$$Var(x) = Dx = E(x - Ex)^2 = E(x^2 - 2xEx + (Ex)^2) = Ex^2 - 2ExEx + (Ex)^2 = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E\xi + E\eta)^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E(\xi\eta) - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi E\eta =$$
$$= D\xi + D\eta + 2(E\xi\eta - E\xi E\eta) =: D\xi + D\eta + Cov(\xi, \eta)$$