

Т.к. эта практика проходит до первой лекции, то сначала будет немного теории.

Мы занимаемся исчислением высказываний. В высказываниях есть:

- Переменные A, B, C (пропозициональные)
- Битовые операции $\vee, \&, \rightarrow, \neg$

Определение. Пропозициональная формула:

1. A — переменная $\Rightarrow A$ — формула
2. a, b — переменные $\Rightarrow a \vee b, a \& b, a \rightarrow b, \neg a$

Определение. Оценка — отображение $\pi : \text{переменные} \rightarrow \{T, F\}$.

Определение. Тавтология — формула, для любой оценки истинна.

Пример.

- $A \vee \neg A$
- $A \rightarrow A$
- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Схемы аксиом:

1. $a \rightarrow (b \rightarrow a)$
2. $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$
3. $a \rightarrow b \rightarrow a \& b$
4. $a \& b \rightarrow a$
5. $a \& b \rightarrow b$
6. $a \rightarrow a \vee b$
7. $b \rightarrow a \vee b$
8. $(a \rightarrow) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow (a \vee b \rightarrow c)$
9. $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a$
10. $\neg \neg a \rightarrow a$

Примечание. $a \rightarrow b \rightarrow c \Leftrightarrow a \rightarrow (b \rightarrow c)$

Можно заметить, что все эти аксиомы — тавтологии. Это так и должно быть. Вместо a, b, c можно подставлять произвольные формулы.

Определение. Вывод формулы φ есть последовательность формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$, где φ_i — одна из аксиом или Modus Ponens из φ_a, φ_b , где $a, b < i$

Определение. Modus Ponens (правило вывода) из формул a и $a \rightarrow b$ есть формула b .

Корректность: можно вывести любую тавтологию.

Доказательство. Очевидно по индукции и определению Modus Ponens. □

Полнота: любую тавтологию можно вывести.

Доказательство. Будет на лекции. □

Пример. Выведем $a \rightarrow a$

$$a := x, b := x \rightarrow x, c := x$$

$$\varphi_1 = (x \rightarrow x \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow x)$$

$$\varphi_2 = x \rightarrow x \rightarrow x$$

$$\text{М.р. } \varphi_3 = (x \rightarrow (x \rightarrow x) \rightarrow x) \text{ ???}$$

Пусть Γ — какой-то набор формул.

Определение. Вывод в грамматике Γ формулы φ обозначается $\Gamma \vdash \varphi$, и его шаги могут иметь вид τ , где $\tau \in \Gamma$ (шаги как в нормальном выводе также разрешены).

Лемма 1 (о дедукции). $\Gamma \cup \{a\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash a \rightarrow \varphi$

Упражнение. Указать про каждое из высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

$$1. \neg A \vee \neg \neg A$$

$$\varphi_1 = \neg A \vee A$$

$$\varphi_2 = \neg A \vee \neg \neg A$$

Ответ: общезначимо, выполнимо.

$$2. (A \rightarrow \neg B) \vee (B \rightarrow \neg C) \vee (C \rightarrow \neg A)$$

При подстановке $(1, 1, 1)$ не выполнено, при $(0, 0, 0)$ выполнено.

Ответ: выполнимо, опровержимо.

3. $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$

При подстановке $(0, 1)$ не выполнено, при $(1, 1)$ выполнено.

Ответ: выполнимо, опровержимо.

4. $\neg A \ \& \ \neg\neg A$

$$\neg A \ \& \ \neg\neg A = \neg A \ \& \ A$$

Ответ: невыполнимо, опровержимо.

5. $\neg(A \ \& \ \neg A)$

Т.к. $A \ \& \ \neg A$ невыполнимо, $\neg(A \ \& \ \neg A)$ общезначимо.

Ответ: общезначимо, выполнимо.

6. A

Ответ: выполнимо ($A = 1$), опровержимо ($A = 0$).

7. $A \rightarrow A$

Ответ: общезначимо, выполнимо (подстановкой).

8. $A \rightarrow \neg A$

Ответ: выполнимо ($A = 0$), опровержимо ($A = 1$).

9. $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

Ответ: общезначимо, выполнимо.

Доказать:

1. $\vdash A \rightarrow A$

Было до этого.

2. $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

$$\varphi_1 = a \rightarrow a$$

$$\varphi_2 = (a \rightarrow a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)$$

3. $\vdash \neg(A \ \& \ \neg A)$

$$\varphi_1 = (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi$$

$$\varphi_2 = A \ \& \ \neg A \rightarrow A$$

$$\varphi_3 = A \& \neg A \rightarrow \neg A$$

$$\varphi_4 = (A \& \neg A \rightarrow A) \rightarrow (A \& \neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& \neg A)$$