

1. Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.

Вспомним доказательство этой теоремы без Γ , которое было на лекции. Мы фиксировали оценку и рассматривали доказательство α . По индукции мы доказывали, что каждый шаг доказательства $\llbracket \delta_n \rrbracket = \text{И}$, и в частности последний шаг, т.е. α тоже истинен в данной подстановке. С добавлением Γ у нас в индукционном переходе добавился случай $\delta_n \in \Gamma$. Но т.к. мы фиксируем оценку такую, что $\forall \gamma \in \Gamma \llbracket \gamma \rrbracket = \text{И}$, индукционный переход работает.

2. Покажите, что если $\Gamma \models \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.

(a) $\llbracket \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha \rrbracket = \text{И}$.

(b) $\models \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha$

(c) $\vdash \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha$ по теореме о полноте

(d) $\Gamma \vdash \alpha$ по теореме о дедукции

3. О законе исключённого третьего. Покажите, что в интуиционистском исчислении высказываний доказуемо следующее:

(a) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \vdash \neg \neg A \rightarrow A$

(b) $A \vee \neg A \vdash \neg \neg A \rightarrow A$

Докажем $A \vee \neg A \vdash \neg \neg A \rightarrow A$:

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 1. $(A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow A)$ | (акс. 8) |
| 2. $(A \rightarrow A)$ | (было ранее) |
| 3. $\neg A \rightarrow \neg \neg A \rightarrow A$ | (акс. 10) |
| 4. $\neg \neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg \neg A)$ | (акс. 1) |
| 5. $\neg \neg A$ | ($\in \Gamma$) |
| 6. $\neg A \rightarrow \neg \neg A$ | (М.Р. 4,5) |
| 7. $(\neg A \rightarrow \neg \neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg \neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ | (акс. 2) |
| 8. $(\neg A \rightarrow \neg \neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ | (М.Р. 6,7) |
| 9. $\neg A \rightarrow A$ | (М.Р. 3,8) |
| 10. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow A)$ | (М.Р. 1,2) |
| 11. $A \vee \neg A \rightarrow A$ | (М.Р. 9, 10) |

4. Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:

(a) $\neg A \vee \neg \neg A$

$$A = (0, +\infty) \quad \neg A = (-\infty, 0) \quad \neg \neg A = (0, +\infty) \quad \neg A \vee \neg \neg A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(b) (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$$

$$A = (1, 2) \cup (2, 3) \quad B = (3, 4)$$

$$(c) \neg\neg A \rightarrow A$$

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(d) (A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$$

$$X = (0, 10) \quad A = (1, 2) \cup (2, 3) \quad B = X \setminus \mathbb{Z}$$

$$(e) (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

5. Можно ли, имея $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$, доказать закон исключённого третьего в интуиционистской логике?
6. Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять $\neg(\alpha \& \neg\beta)$, ведь $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \& \neg\beta)$ и $\neg(\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:
 - (a) конъюнкцию?
 - (b) дизъюнкцию?
 - (c) импликацию?
 - (d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это.

7. Назовём теорию *противоречивой*, если в ней найдётся такое α , что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$. Покажите, что исчисления высказываний (классическое и интуиционистское) противоречивы тогда и только тогда, когда в них доказуема любая формула.
8. *Теорема Гливенко*. Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_{\text{и}} \alpha$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α , если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$. А именно, покажите, что:
 - (a) Если α — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.
 - (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$
 - (c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$
 - (d) Докажите утверждение теоремы ($\vdash_{\text{к}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречно тогда и только тогда, когда противоречно интуиционистское.