

1. Рассмотрим табличную модель \mathfrak{M} с n истинностными значениями, и с выделенным значением T для истины. Покажите, что

$$\models \bigvee_{1 \leq i \neq j \leq n+1} (P_i \rightarrow P_j) \& (P_j \rightarrow P_i)$$

В частности, покажите, что в любой корректной модели если $\llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket$, то $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = T$; если $\llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket = T$, то $\llbracket \gamma \& \delta \rrbracket = T$; если $\llbracket \gamma \rrbracket = T$, то $\llbracket \gamma \vee \eta \rrbracket = \llbracket \eta \vee \gamma \rrbracket = T$.

(a) $\llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket \Rightarrow \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = T$

Предположим обратное, т.е. $\exists \alpha, \beta : \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = A, \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket \neq T$.

$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = f_{\rightarrow}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket) = f_{\rightarrow}(A, A) \neq T$. Но $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$, следовательно по корректности $\models \alpha \rightarrow \alpha$, следовательно $f_{\rightarrow}(A, A) = T$. Противоречие.

(b) $\llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket = T \Rightarrow \llbracket \gamma \& \delta \rrbracket = T$

$f_{\&}(T, T) = T$, т.к. $\vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \& (\alpha \rightarrow \alpha) \Rightarrow \models (\alpha \rightarrow \alpha) \& (\alpha \rightarrow \alpha) \Rightarrow T = f_{\&}(\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket, \llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket) = f_{\&}(T, T)$

(c) $T = f_{\vee}(\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket) = f_{\vee}(T, A)$, т.к. $\vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \vee \beta$. Аналогично для симметричного случая.

По принципу Дирихле $\exists i \neq j : \llbracket P_i \rrbracket = \llbracket P_j \rrbracket \Rightarrow \llbracket P_i \rightarrow P_j \rrbracket = T \Rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket = T$

2. Покажите, что какая бы ни была формула α и модель Крипке, если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$.

Докажем это по индукции по количеству операторов в α

База: $n = 0$, т.е. $\alpha = P_i$ — переменная. Искомое верно по определению W .

Переход: 4 случая:

(a) $\alpha = \neg \beta$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow \forall W_k : W_i \leq W_k \quad W_k \nVdash \beta \Rightarrow \forall W_k : W_j \leq W_k \quad W_k \nVdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$$

(b) $\alpha = \beta \& \gamma$

$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow W_i \Vdash \beta, W_i \Vdash \gamma$, по индукционному предположению $W_j \Vdash \beta, W_j \Vdash \gamma \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$

(c) $\alpha = \beta \vee \gamma$

$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow W_i \Vdash \beta$ или $W_i \Vdash \gamma$, пусть это β (иначе переименуем). Тогда $W_j \Vdash \beta$ по индукционному предположению $W_j \Vdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$

(d) $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$

$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow \forall W_j : W_i \leq W_j \quad W_j \Vdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \gamma$, по транзитивности \leq выполняется $W_j \Vdash \alpha$

3. Общеизвестны ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.

(a) $P \vee \neg P$;

Пусть P — одна переменная и модель Крипке $W_1 \not\models P$, а $W_2 \models P$ и $W_1 \leq W_2$. Тогда несложно заметить, что $W_1 \not\models \neg P$, т.к. $\exists W_2 : W_1 \leq W_2, W_2 \models P$. Т.к. $W_1 \not\models P, W_1 \not\models \neg P$, получаем, что $W_1 \not\models P \vee \neg P$

(b) $\neg\neg P \rightarrow P$;

$$W_1 \not\models \neg\neg P \rightarrow P \Leftrightarrow \begin{cases} W_1 \models \neg\neg P \\ W_1 \not\models P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_1 \not\models \neg P \\ W_1 \not\models P \end{cases}$$

Пусть $W_2 \models P$ и $W_1 \leq W_2$, тогда искомое выполнено.

(c) $P \vee \neg P \vee \neg\neg P \vee \neg\neg\neg P$;

$W_1 \not\models P, W_2 \models P, W_3 \models \neg P, W_4 \models \neg\neg P$, все упорядочены

(d) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$;

$W_1 \models (P \rightarrow Q) \rightarrow P, W_1 \not\models P$. Второе выполнено по построению; придумаем, как выполнить первое.

$$W_1 \not\models P \rightarrow Q \Leftrightarrow \begin{cases} W_2 \models P \\ W_2 \not\models Q \end{cases}. \text{ Противоречий не возникло.}$$

Ответ: $W = \{W_1, W_2\}, \leq = \{(W_1, W_2)\}$ (плюс рефлексивность), $W_2 \models P$

(e) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$;

$W_1 \not\models (A \rightarrow B), W_1 \not\models (B \rightarrow C), W_1 \not\models (C \rightarrow A) \Rightarrow \exists W_2, W_3, W_4 : W_2 \models A, W_2 \not\models B, W_3 \models B, W_3 \not\models C, W_4 \models C, W_4 \not\models A$. Если $\leq = \{(W_1, W_2), (W_1, W_3), (W_1, W_4)\}$ (плюс рефлексивность), то противоречий нет.

(f) $\neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$;

$W_1 \models \neg(\neg A \& \neg B), W_1 \not\models A \vee B \Rightarrow W_1 \not\models A, W_1 \not\models B$

Попробуем выполнить первое утверждение. $W_1 \not\models \neg A \& \neg B \Rightarrow W_1 \not\models \neg A$ или $W_1 \not\models \neg B$. Пусть $W_1 \not\models \neg A$ без потери общности. $W_1 \not\models \neg A \Leftrightarrow \exists W_2 : W_2 \models A$ и $W_1 \leq W_2$

Ответ: $W = \{W_1, W_2\}, \leq = \{(W_1, W_2)\}$ (плюс рефлексивность), $W_1 \not\models A, W_1 \not\models B, W_2 \models A$.

(g) $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$;

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash A \rightarrow \perp} \quad \frac{}{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash A} \\
\hline
\frac{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash \perp}{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash B} \text{ (удаление } \perp) \quad \frac{}{\neg A \vee B, A, B \vdash B} \quad \frac{}{\neg A \vee B, A \vdash \neg A \vee B} \\
\hline
\frac{}{\neg A \vee B, A \vdash B} \text{ (введение } \rightarrow) \\
\frac{}{\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B} \text{ (введение } \rightarrow) \\
\hline
\neg A \vee B \rightarrow A \rightarrow B
\end{array}$$

(h) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$;

$$W_1 \Vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow \begin{cases} W_1 \Vdash A \rightarrow B \\ W_1 \Vdash \neg A \vee B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_1 \Vdash A \\ W_1 \Vdash \neg A \\ W_1 \Vdash B \end{cases}$$

Пусть $W_2 \Vdash A, W_2 \Vdash B$ и $W_1 \leq W_2$, тогда $W_2 \Vdash A \rightarrow B, W_1 \Vdash A \rightarrow B$ пусто и исконое выполнено.

(i) $\neg \perp$.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\perp \vdash \perp} \\
\hline
\vdash \perp \rightarrow \perp \\
\hline
\vdash \neg \perp
\end{array}$$

4. Рассмотрим некоторую модель Крипке $\langle \mathfrak{W}, \leq, \Vdash \rangle$. Пусть $\Omega = \{W \subseteq \mathfrak{W} \mid \text{если } W_i \in W \text{ и } W_i \leq W_j, \text{ то } W_j \in W\}$. Пусть $\mathcal{W}_\alpha := \{W_i \in \mathfrak{W} \mid W_i \Vdash \alpha\}$ (множество миров, где вынуждена формула α).

(a) На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара $\langle \mathfrak{W}, \Omega \rangle$ — топологическое пространство. Докажите её.

Покажем, что выполняются три аксиомы топологии:

i. $W = \bigcup_\alpha \mathcal{W}_\alpha \in \Omega$, где $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$

$\triangleleft W_i \in W$ и при этом $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$. Если $W_i \leq W_j$, то т.к. $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$, то $W_j \in \mathcal{W}_\alpha$, а следовательно $W_j \in W$.

ii. $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i \in \Omega$, где $\mathcal{W}_i \in \Omega$

$\triangleleft W_i \in W \Rightarrow W_i \in \mathcal{W}_\alpha \ \forall \alpha$. Если $W_i \leq W_j$, то $W_j \in \mathcal{W}_\alpha \ \forall \alpha$ и следовательно $W_j \in W$.

iii. $\emptyset \in \Omega, \mathfrak{W} \in \Omega$

Первое выполнено в силу пустотности утверждения (*vacuous*, не знаю, как по-русски). Второе очевидно выполнено.

- (b) Пусть \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$ и $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta}$ через \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β и покажите, что они также открыты.

$$\mathcal{W}_{\alpha \& \beta} = \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \alpha \& \beta\} = \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \alpha\} \cap \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \beta\} = \mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{W}_\beta.$$

$$\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta} = \mathcal{W}_\alpha \cup \mathcal{W}_\beta$$

Открытость тривиальна из того, что (\mathfrak{W}, Ω) — топологическое пространство.

- (c) Пусть \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta}$ через них и покажите, что оно также открыто.

$$\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta} = (\mathfrak{W} \setminus (\mathcal{W}_\alpha \setminus \mathcal{W}_\beta))^\circ$$

- (d) Покажите, что Ω — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы α множество миров \mathcal{W}_α , где она вынуждена, всегда открыто ($\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для $Q \in \Omega$ существует формула α , что $\mathcal{W}_\alpha = Q$).

Покажем, что $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega \ \forall \alpha$ по индукции.

База: α есть одна переменная. Искомое выполнено по монотонности вынужденности.

Переход: 4 случая, разобранных в пунктах а, б, с.

Покажем, что $\forall Q \in \Omega \ Q = \mathcal{W}_\alpha$

Не покажем :(

5. Постройте топологическое пространство, соответствующее (в смысле предыдущего задания) модели Крипке, опровергающей высказывание $\neg \neg P \rightarrow P$. Постройте соответствующую ему табличную модель.

$$\mathfrak{W} = \{W_1\}, \Omega = \{\emptyset, \{W_1\}\}$$

6. Назовём *древовидной* моделью Крипке модель, в которой множество миров \mathfrak{W} упорядочено как дерево: (а) существует наименьший мир W_0 ; (б) для любого $W_i \neq W_0$ существует единственный предшествующий мир $W_k : W_k \prec W_i$.

- (а) Докажите, что любое высказывание, опровергаемое моделью Крипке, может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке.
- (б) Найдите высказывание, которое не может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке высотой менее 2.
- (с) Покажите, что для любого натурального n найдётся опровержимое в моделях Крипке высказывание, неопровергаемое никакой моделью с n мирами.

7. Будем говорить, что топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$ *связно*, если нет таких открытых множеств A и B , что $X = A \cup B$, но $A \cap B = \emptyset$. Пусть задана некоторая модель Крипке. Докажите, что соответствующее модели Крипке топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда её граф миров связан в смысле теории графов.

Если граф не связан, то выберем одну КС, все миры в ней будут A , а остальные миры B . Несложно заметить, что $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$.

Если пространство не связно, то рассмотрим A и B из условия. Предположим, что граф связан, в частности есть ребро $a \rightarrow b$, где $a \in A$, $b \in B$ (или наоборот). Т.к. $a \leq b$, то $b \in A$, что противоречит $A \cap B = \emptyset$.

8. Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в КИВ высказывания).

9. Пусть заданы алгебры Гейтинга \mathcal{A}, \mathcal{B} , гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и согласованные оценки $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$ и $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$: $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$.

(a) Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если $a_1 \preceq a_2$, то $\varphi(a_1) \preceq \varphi(a_2)$.

(b) Покажите, что если $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, то $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$.

$$\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = \varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$$

10. Пусть заданы алгебры Гейтинга \mathcal{A}, \mathcal{B} . Всегда ли можно построить гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$?

11. Пусть \mathcal{A} — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.

12. Пусть \mathcal{A} — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что) $\Gamma(\mathcal{A})$ будет булевой алгеброй?

Не всегда, например в алгебре $\Gamma(1 \rightarrow 0)$ выполняется следующее: $1 + (1 \rightarrow 0) = 1$, а должно быть 1_{Γ}