

# 1 Равномерная сходимость последовательности

Практически все задачи решаются следующим образом:

1. Находим кандидата на роль  $f$  по формуле  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ . Предел берется при фиксированном  $x$ .  $f$  может зависеть от  $x$  и может быть разрывным (например, 2751.6)
2. Проверяем, что  $\rho(f, f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , где  $\rho(f, f_n) = \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)|$

Методы нахождения супремума:

(a) Прямой:  $\sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

(b) Оценка сверху (доказывает равн. сходимость):  $\sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x+x^2}{1+n+x} \right| \leq \frac{2}{1+n} \rightarrow 0$

(c) Оценка снизу (доказывает отсутствие равн. сходимости) — обычно подстановка конкретного  $x$  (он может зависеть от  $n$ ):

$$\sup_x \left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right| \stackrel{x:=n}{\geq} \sin(1) \not\rightarrow 0$$

(d) Оценка снизу пределом:  $\sup_{g \in E} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow A} g(x)$ , где  $A$  — предельная точка  $E$ .

Есть более простой признак отсутствия равн. сходимости:

$$f_n(x) \rightrightarrows f \implies \forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$$

## 2 Равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x) \quad S_N \rightrightarrows S \text{ на } E$$

Методы доказательства:

1. По определению (см. равн. сходимость последовательностей) — самый простой вариант, для него нужен способ посчитать частную сумму. Это либо телескоп, либо прогрессия. Иногда из дроби можно получить телескоп разложением на простые дроби.
2. По абсурдности если  $u_n(x) \not\rightarrow 0$ , то сумма не сходится.
3. Признак Вейерштрасса

$$\sum u_n(x), x \in E:$$

$$(a) \forall x \in E : |u_n(x)| \leq C_n$$

$$(b) \sum C_n - \text{сходится}$$

Тогда ряд равномерно сходится.

Обычно берут  $C_n = \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha > 1$ , но иногда нужно думать про сходимость ряда  $C_n$ , т.к. она не очевидна. Вольфрам в помощь.

При придумывании  $C_n$  можно найти точку экстремума максимума  $|u_n(x)|$  ( $x = \dots$ ) через  $u_n(x)'_x$  и подставить такой  $x$ .

4. Критерий Больцано-Коши обычно доказывает отсутствие равномерной сходимости, хотя его можно использовать и для обратного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N, \exists m \in \mathbb{N}, \exists x \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| > \varepsilon$$

Тогда равномерной сходимости нет.

Идея в том, чтобы иметь большие ( $\geq \frac{\varepsilon}{n}$ ) слагаемые, для этого надо придумать соответствующий  $x$ . Часто используется оценка суммы  $|\sum_{i=n+1}^{n+m} u_i(x)| \geq \min u_i(x) \cdot m$ .

Для обратного нужно построить отрицание критерия.

5. Признак Дирихле для  $\sum a_n(x)b_n(x)$ :

- (a) Частичные суммы  $\sum a_n$  равномерно ограничены:

$$\exists C_a \quad \forall N \quad \forall x \in E \quad \left| \sum_{k=1}^N a_k(x) \right| \leq C_a$$

- (b) i. При фиксированном  $x$  функция  $b_n(x)$  монотонна по  $n$

- ii.  $b_n(x) \Rightarrow 0$  на  $E$  при  $n \rightarrow +\infty$

6. Признак Абеля для  $\sum a_n(x)b_n(x)$ :

- (a)  $\sum a_n(x)$  равномерно сходится на  $E$

- (b) i.  $b_n(x)$  монотонно по  $n$

- ii.  $b_n(x)$  равномерно ограничено:

$$\exists C_b \quad \forall N \quad \forall x \in E \quad |b_n(x)| \leq C_b$$

### 3 Свойства через ряды

1.  $\bullet \sum u_n(x) = f(x)$

- $u_n(x)$  непр. в  $x_0$
- Ряд равномерно сходится в  $U(x_0)$

Тогда  $f$  непр. в  $x_0$

2.
  - $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$
  - $\sum u'_n(x)$  равномерно сходится в  $U(x_0)$

Тогда  $f$  — дифф. в  $x_0$ ,  $f'(x) = \varphi(x)$

3.
  - $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $[a, b]$
  - $u_n$  непр. на  $[a, b]$

Тогда  $\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b u_n(x)dx$

Когда требуют равномерную сходимость в  $U(x_0) \quad \forall x_0 \in E$ , можно пытаться доказать равномерную сходимость в  $E$ . Это проще сделать, но не всегда возможно.

## 4 Степенные ряды

Степенной ряд — ряд вида  $\sum a_n(x - x_0)^n$ . Он сходится при  $|x - x_0| < R$ ,  $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

Верхний предел — наибольший предел из пределов всех подпоследовательностей.

Иногда ответ выдает  $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ , но не всегда.

И ещё возможно сходится при  $x = x_0 \pm R$ . Сходимость при таком  $x$  находится путём подстановки соответствующего  $x$  в ряд. Но этот ряд не простой, в нем не будет работать признак Даламбера и Коши.

Можно решать заменой на эквивалентное (возможно по модулю), если это не помогает, то применяется Лейбниц или Дирихле.

## 5 Разложение функции

Мы знаем, что если  $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ , то это ряд Тейлора, т.е.  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ .

У нас есть пять основных разложений:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1, 1]$$

Функции вида  $f(x) = (x-x_0)^\alpha \cdot g(x)$ , где  $g = \sum a_n(x-x_0)^n$ , раскладываются по формуле  $f = \sum a_n(x-x_0)^{n+\alpha}$ , то есть разложение можно домножить на  $(x-x_0)^\alpha$ .

Композиция сохраняется разложением.

Можно найти разложение производной ( $f'(x)$ ), потом проинтегрировать и найти иско-  
мое. Константа находится подстановкой  $x = x_0$ , при ней ряд после интегриации = 0,  
 $f(x_0)$  может не быть 0.

## 6 Получение функции из ряда

В общем виде задача выглядит как:  $f(x) = \sum a_n x^n$ , найти  $f(x)$  в виде не ряда, но может  
быть и такой:  $\sum a_n = ?$ , тогда можно решить исходную задачу и найти ответ подстанов-  
кой  $x = 1$ . Этот метод называется методом Абеля.

Задача решается взятием производных и интегралов. При интегралах надо не забывать  
константу.

## 7 Вычисление сумм рядов

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$2. e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$3. \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$4. \text{Телескопические } \sum_{n=1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

## Трюки

1.

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$$

2.

$$\left| x e^{-x^2 n} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

3.

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

4.  $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$  сходится при  $p > 0$  и расходится при  $p \leq 0$

5.

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

6.

$$\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \sin \frac{Nx}{2} \sin \frac{(N+1)x}{2} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

7.

$$\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{x}{2}$$

8.

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{|e^{ix} - 1|}$$

9. Если  $u_n(x)$  монотонно по  $n$ , то:

$$\left| \sum_{n \geq N} (-1)^n u_n(x) \right| \leq u_N(x)$$

10. Если есть равномерная сходимость ряда в  $U(0)$ , то  $\sum u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum u_n(0)$ .