

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0$$

$$f'(0) = ?$$

Следствие из теоремы Лагранжа:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \text{ тогда } f'(x_0) = A$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim 2 \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{4 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5} = \text{больно, не надо так}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim \frac{-\frac{6}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{\frac{3}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim \frac{-\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{\frac{3}{x}}{2 e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n \left(\frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что многочлен Тейлора этой функции при $x \rightarrow 0$ не становится точнее при увеличении числа слагаемых, т.к. они все = 0. Таким образом, эта функция по определению неаналитическая.

Будем складывать дроби неправильно:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Это работает в неравенствах, если $a, b, c, d > 0$

Это неверно, т.к. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}$, но верно следующее:

Лемма 1. “Неправильное” сложение дробей:

$$a, b, c, d > 0$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Доказательство.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ba - ba + bc - ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d} \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} = \frac{b}{b+d} \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0$$

□

Теорема 1. Теорема Штольца.

Это дискретная версия правила Лопиталя.

$y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$

Примечание. Аналогичное верно, если $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty$

Доказательство. 1. $a > 0$ ($a \neq +\infty$)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad [\varepsilon < a] \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению: (оно применимо, т.к. все дроби положительные)

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \rightarrow +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же

3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же

4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

$$\text{Для } a = +0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$$

□

$$x_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \stackrel{?}{\sim}_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{y_n - y_{n-1}} = \left[y_n := \frac{n^2}{2} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n - \frac{1}{2}} = 1$$

$$x_n \sim \frac{n^2}{2}$$

$$x_n = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sim z_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{z_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha - \left(\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)}{z_n - z_{n-1}}$$

$$n^\alpha - \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\alpha+1} \right) =$$

$$= n^\alpha - \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \left((\alpha+1) \frac{1}{n} - \frac{(\alpha+1)\alpha}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1}) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{z_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1}}{z_n - z_{n-1}}$$

Функциональные свойства определенного интеграла:

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in C[a, b]$

$$\int_a^b \alpha f + \beta g dx = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница $f \leftrightarrow F \quad g \leftrightarrow G \quad \alpha f + \beta g \leftrightarrow \alpha F + \beta G$ □

2. Замена переменных: $f \in C[a, b]$ $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow [a, b], \varphi \in C^1$

$$[p, q] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$$

Тогда

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

Доказательство. $f \leftrightarrow F \quad f(\varphi(t))\varphi'(t) \leftrightarrow F(\varphi(t))$ □

Примечание. (а) $\varphi([p, q])$ может быть шире, чем $[\varphi(p), \varphi(q)]$

(б) $\varphi(p)$ может быть $> \varphi(q)$

3. Интегрирование по частям

$$f|_a^b \stackrel{\text{def}}{=} f(b) - f(a)$$

$$f, g \in C^1[a, b]$$

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Доказательство.

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg' = (fg)' - f'g$$

Проинтегрируем по $[a, b]$

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

□

Пример. Неравенство Чебышева

$f, g \in C[a, b]$ монот. возр.

$$I_f := \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int_a^b f \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a, b] : x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y), g(x) \geq g(y)$

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a, b]$ и делим на $b - a$:

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a, b]$ и делим на $b - a$:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Пример.

$$\begin{aligned} H_n &:= \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt = \left[\begin{array}{ll} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n & g = \sin t \\ df = -2n \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t dt & dg = \cos t dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t \sin t dt = \\ &= \left[\begin{array}{ll} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t & g = -\cos t \\ df = \left(-2(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} t^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} \right) dt & dg = \sin t dt \end{array} \right] = \\ &= \left[df = \left(-2(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} t^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(n-1) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} - 2(n-1) \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \right] = \\ &= \left[df = \left((2n-2) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - (n-1) \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \right] = \\ &= \left[df = \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - (n-1) \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \right] = \\ &= 0 + \frac{2}{(n-1)!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t (-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2} (n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) \cos t dt = \\
& = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}
\end{aligned}$$

Теорема 2. Число π — иррационально

Доказательство. Пусть $\pi = \frac{p}{q}$; H_n задано выше

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right) \cos t = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2t(-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t = 4$$

$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2)$ — многочлен с целыми коэффициентами, степень $\leq n$

$$q^{2n} P_n \left(\frac{p^2}{q^2} \right) = \text{целое число} = q^{2n} H_n > 0 \Rightarrow q^{2n} H_n \geq 1$$

$$1 \leq \frac{q^{2n}}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt \leq \frac{q^{2n} 4^n}{n!} \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Противоречие. □

$f \leftrightarrow F$

$$\int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (t - x_0)^n dt = \frac{F^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\arcsin t = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{40}t^5 + o(t^5)$$

Определение. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, кусочно непрерывна

f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

Определение. $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — почти первообразная кусочно непрерывной функции f :

F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$

$$F := |x|$$

f — кус. непр.

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\int_a^b f := \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

Утверждение: Верна формула Ньютона-Лейбница f — кус. непр. на $[a, b]$, F — почти первообразная

Доказательство.

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum_{k=1}^n F(t) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$$

□

Пример. Дискретное неравенство Чебышева

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \dots n \text{ — задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \dots b_i$$

$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

□

1 Приложение определенного интеграла

$Segm\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a, b \rangle$

Определение. Функция промежутка $\Phi : Segm\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Определение. Аддитивная функция промежутка: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in Segm\langle a, b \rangle \quad \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

Пример. • Цена куска колбасы от p до q .

• Цена билета от станции p до станции q .

Эти две функции обычно не аддитивны.

• $[p, q] \rightarrow \int_p^q f$

Определение. Плотность аддитивной функции промежутка: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — плотность Φ , если:

$$\forall \delta \in Segm\langle a, b \rangle \quad \inf_{x \in \delta} f(x) \cdot len_\delta \leq \Phi(\delta) \leq \sup f \cdot len_\delta$$

Теорема 3. О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр. $\Phi : Segm\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

f — плотность Φ

Тогда $\Phi([p, q]) = \int_p^q f, \quad \forall [p, q] \in Segm\langle a, b \rangle$

Доказательство.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , x = a \\ \Phi([a, x]) & , x > a \end{cases} \text{ — первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p, q]) = \Phi[a, q] - \Phi[a, p] = F(q) - F(p) = \int_p^q f$$

Докажем утверждение:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a, x+h] - \Phi[a, x]}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} = [0 \leq \Theta \leq 1] = f(x+\Theta h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

□

Тут последовал пример про нахождение площади круга, но мне лень.