Потенциальные векторные поля

Определение. Интеграл векторного поля V **не зависит от пути** в области O:

$\forall A, B \in O\ \ \forall \gamma_1, \gamma_2$ — кусочно-гладкие из A в B:

$$\int_{\gamma_1} \sum v_i dx_i = \int_{\gamma_2} \sum v_i dx_i$$

Теорема 1 (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов). V — векторное поле в области O. Тогда эквивалентны следующие:

1. V — потенциально
2. $\int_\gamma \sum v_i dx_i$ не зависит от пути в O
3. $\forall \gamma$ — кусочно-гладкий, замкнутый в O $\int_\gamma \sum v_i dx_i = 0$

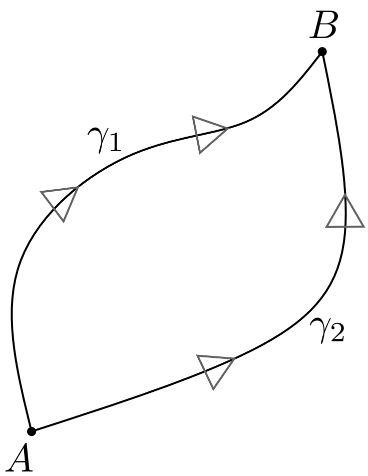
Доказательство.

1⇒2 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

2⇒3 γ — петля: $[a, b] \to O$. $\gamma(a) = \gamma(b) = A$

Рассмотрим постоянный путь $\tilde{\gamma} : [a, b] \to O, t \mapsto A$. По свойству 2: $\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} \langle V, \gamma' \rangle dt = 0$

3⇒2 γ_1, γ_2 — пути с общим началом и концом. Тогда $\gamma := \gamma_2^- \gamma_1$ — петля. γ — кусочно гладкий $\Rightarrow 0 = \int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2^-} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$

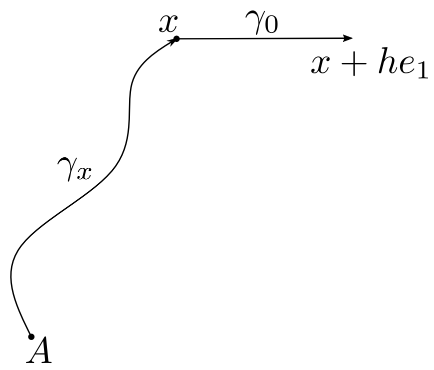


2⇒1 Фиксируем $A \in O$.

$\forall x \in O$ выберем кусочно-гладкий путь γ_x из A в x. Проверим, что $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i$ — потенциал.

Достаточно проверить, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$ в O.

Фиксируем $x \in O$. $\gamma_0(t) = x + the_1, t \in [0, 1]$, $\gamma_0'(t) = (h, 0 \dots 0) = he_1$



$$
\begin{aligned}
f(x + he_1) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+he_1}} - \int_{\gamma_x} \\
&= \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} \\
&= \int_{\gamma_0} \\
&= \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) h dt \\
&= hV_1(x_1 + ch_1, x_2 \dots x_n)
\end{aligned}
$$

Таким образом:

$$\frac{f(x + he_1) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} V_1(x_1 + ch_1, x_2 \dots x_n) \xrightarrow{h \to 0} V_1(x)$$

$\square$

Локально-потенциальные векторные поля

Лемма 1. V — гладкое, потенциальное в O

Тогда

$$\forall x \in O \;\; \forall k, j \;\; \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x) \tag{1}$$

Доказательство. Непрерывные производные не изменяются при порядке дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x)$$

□

Упражнение. Даны 4 векторных поля в $\mathbb{R}^2$: $(x, y), (x, -y), (y, x), (-y, x)$. Вычеркните лишнее.

Ответ: $(-y, x)$, т.к. $\frac{\partial V_1}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial V_2}{\partial x} = 1$

Теорема 2 (лемма Пуанкаре).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — **выпуклая** область
- $V : O \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- V удовлетворяет 1, в т.ч. V — гладкое.

Тогда V — потенциальное.

Доказательство. Фиксируем $A \in O$

$$\forall x \in O \;\; \gamma_x(t) := A + t(x - A), t \in [0, 1]$$

$$\gamma_x'(t) = x - A$$

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))(x_k - A_k)dt$$

Проверим, что f — потенциал.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \text{правило Лейбница} \\
&= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\ldots)t(x_k - A_k)dt \\
&= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\ldots)t(x_k - A_k)dt \qquad (2) \\
&= \int_0^1 (tV_j(A + t(x - A)))_t' dt \\
&= tV_j(A + t(x - A))\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= V_j(x)
\end{aligned}$$

(2): по (1). □

Примечание. Это же доказательство проходит для “звёздных” областей — областей O, таких что $\exists A \in O$: любая точка O видна из A.

Определение. V — **локально потенциальное** векторное поле в O, если $\forall x \in O\ \exists U(x)$: V — потенциально в $U(x)$

Следствие 2.1 (лемма Пуанкаре).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — **любая** область
- $V : O \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- V удовлетворяет 1.

Тогда V — локально потенциально.

Равномерная сходимость функциональных рядов *(продолжение)*

Теорема 3’ (о дифференцировании ряда по параметру).

- $u_n \in C^1\langle a, b\rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$ (поточечная сходимость)
- $\sum u_n'(x) = \varphi(x)$ (равномерная сходимость)

Тогда:

1. $S(x) \in C^1\langle a, b\rangle$
2. $S' = \varphi$ на $\langle a, b\rangle$

То есть $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$

Доказательство. Следует из теоремы 3.

$S_n \to S$ поточечно, $S_n' \rightrightarrows \varphi$ □

Пример. Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, x > 0$$

γ — постоянная Эйлера.

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)}_{u_k(x)}$$

Зафиксируем x_0.

$$u_k'(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{k}}\frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$$

Пусть $M > x_0$. Тогда

$$\left|\frac{-x}{(x+k)k}\right| \le \frac{M}{k^2}$$

при $x \in (0, M)$.

Тогда $\sum \frac{-x}{(x+k)k}$ равномерно сходится на $(0, M)$, значит $\ln\Gamma(x) \in C^1(0, M)$, $\frac{-x}{(x+k)k}$ — непр. $\Rightarrow \sum \frac{-x}{(x+k)k}$ — непр. $\Rightarrow \ln\Gamma(x) \in C^1(0, +\infty) \Rightarrow \Gamma(x) \in C^1(0, +\infty)$

Примечание. Фактически, теорема 3' устанавливает, что $\sum u_n'(x)$ — непр.

Примечание.

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{(x+k)k}$$

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x)\left(\frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{(x+k)k}\right)$$

Изучив равномерную сходимость $\left(\frac{x}{(x+k)k}\right)'$, получаем, что $\Gamma \in C^2(0, +\infty)$ и т.д. $\Rightarrow$ $\Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$

Теорема 4' (о почленном предельном переходе в суммах).

- $u_n : E \subset X \to \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- x_0 — предельная точка E
- $\forall n \ \exists$конечный $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E.

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum a_n = \lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

Доказательство.

1. $? \sum a_n$ — сходится

   $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x), S_n^a = \sum_{k=1}^{n} a_k$

   Проверим, что S_n^a — фундаментальная:

   $$|S_{n+p}^a - S_n^a| \le |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

   Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ |S_{n+p} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

   (Это критерий Больцано-Коши для равномерной сходимости)

   Зададим ε по N, выберем $n, n+p$ и возьмём x близко к x_0 : $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
   $|S_n^a - S_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   Тогда выполнено 1, т.е. $|S_{n+p} - S_n^a| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

2. $\sum a_n \stackrel{?}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \sum u_n(x)$

   Сведём к теореме Стокса-Зайдля.

   $\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$ — задано на $E \cup \{x_0\}$, непрерывно в x_0.

   $\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится на $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна в x_0.

   $$\lim_{x \to x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x \to x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n$$

   $\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится, т.к.:

   $$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \le \underbrace{\sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|}_{\to 0} + \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right|}_{\to 0}$$

□

Примечание. Теорема 4' верна для случая $u_n : E \subset X \to Y$, где Y — полное нормированное пространство.

Теорема 4 (о перестановке двух предельных переходов).

- $f_n : E \subset X \to \mathbb{R}$
- x_0 — предельная точка E
- $f_n \overset{E}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} S(x)$
- $f_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A_n$

Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$

То есть пунктирные преобразования верны:

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "n\to+\infty", shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "x\to x_0"'] & S(x) \arrow[d, dashed, "x\to x_0"] \\ A_n \arrow[r, dashed, "n\to+\infty"'] & A \end{tikzcd}$$

Доказательство. $u_1 = f_1, \dots u_k = f_k - f_{k-1} \dots$

$a_1 = A_1, \dots a_k = A_k - A_{k-1}$

Тогда $f_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

В эти обозначениях $\sum u_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$.

$u_k(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a_k$

Тогда по т. 4' $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ имеет конечный предел при $n \to +\infty$.

$$\lim_{x\to x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = \sum a_k = A$$

□

Примечание. Здесь можно было бы вместо n рассматривать "непрерывный параметр" t.

$$f_n(x) \leftrightarrow f(x,t)$$

$$n \to +\infty \leftrightarrow t \to t_0$$

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} S \leftrightarrow f(x,t) \xrightarrow[E]{t \to t_0} S(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall t : 0 < |t - t_0| < \delta \ \ \forall x \in E \ \ |f(x,t) - S(x)| < \varepsilon$$