## Конспект по дискретной математике

October 15, 2019

## 1 Оценка числа элементов в схеме

**Теорема 1**.  $B_1$  и  $B_2$   $\exists c \ \forall f \ size_{B_1}(f) \leq c \cdot size_{B_2}$ 

Доказывалась ранее.

**Теорема 2**. О нижней оценке. Почти все функции требуют  $\Omega(\frac{2^n}{n})$  элементов в своей записи. Альтернативная формулировка:

$$f(n)=rac{2^n}{n}\quad g(n):rac{g}{f} o 0\quad F_g=\{$$
булевы функции,  $size\leq g(n)\}$ 

Тогда

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \to 0$$

Теорема 3. О верхней оценке.

$$\forall f$$
 — бул. ф.  $\exists$ схема из ф.э., содержащая  $O\left(\frac{2^n}{n}\right)$  элементов

## 2 Линейная программа

Пример для  $x_1 \oplus x_2$ :

$$y_1 = \neg x_1$$

$$y_2 = \neg x_2$$

$$y_3 = x_1 \wedge y_2$$

$$y_4 = x_2 \wedge y_1$$

$$y_5 = y_3 \vee y_4$$

Линейная программа — нумерованное множество строк вида

$$(a,[i_1\dots i_k])$$
, где  $a\in B$ (базис),  $i_j$  — индексы переменных,  $a:\mathbb{B}^k o\mathbb{B}$ 

**Теорема** 4. Для  $f \exists$  линейная программа длины  $r \Leftrightarrow \exists$  схема из r функциональных элементов.

Оценка: сколько линейных программ над  $\{\downarrow\}$  длины r?

Первая строка:  $n^2$  вариантов (выбор 2 объектов из n)

Вторая строка:  $(n+1)^2$  варинатов (выбор 2 объектов из n и  $y_1$ )

 $(n+r-1)^2$ 

$$K_{n,r} = \prod_{i=0}^{r-1} (n+i)^2 \le (n+r)^{2r}$$
$$\log_2 K_{n,r} \le \log_2 (n+r)^{2r} = 2r \log_2 (n+r)$$

Лемма 1.

$$\exists$$
 функция:  $size_B(f) \geq rac{2^n}{2n}$ 

Доказательство. Предположим противное:

$$r < \frac{2^n}{2n}$$

$$\log_2 K_{n,r} \le 2r \log_2(n+r) < \frac{2 \cdot 2^n}{2n} \log_2(n+\frac{2^n}{2n}) \le \frac{2^n}{n} \log_2 2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow K_{n,r} < 2^{2^n}!!!$$

Обощим для произвольного c:

$$\begin{split} r < \frac{2^n}{2cn} \\ \log_2 K_{n,r} & \leq 2r \log_2(n+r) < \frac{2 \cdot 2^n}{2cn} \log_2(n+\frac{2^n}{2cn}) \leq \frac{2^n}{cn} \log_2 2^n = \frac{2^n}{c} \\ \Rightarrow K_{n,r} & < 2^{\frac{2^n}{c}} !!! \end{split}$$

Вернемся к доказательству теоремы 2.

Доказательство.

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \to 0$$

$$\frac{2^{\frac{2^n}{c}}}{2^{2^n}} = 2^{2^n \cdot (\frac{1}{n} - 1)} \to 0$$

**Теорема 5**.  $\forall f \;\; \exists \mathsf{cxema} \; \mathsf{us} \; \mathsf{функ.эл.} O(\frac{2^n}{n})$