Пример. $\langle a, b \rangle$ $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

 $\forall n \in \mathbb{N} x^n$ — непрерывно

Любой многочлен непрерывен, выражение вида

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

тоже непрерывно на области определения.

Теорема 1. О непрерывности композиции $f:D\subset X o Y$ $g:E\subset Y o Z$ $f(D)\subset E$

$$f$$
 — непр. в $x_0 \in D$, g — непр. в $f(x_0)$

Тогда $g \circ f$ непр. в x_0

Доказательство. По Гейне.

Проверяем, что $\forall (x_n): x_n \in D, x_n \to x_0 \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} g(f(x_0))$

$$y_n := f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$$

$$y_n \in E$$

$$\Rightarrow g(y_n) \to g(y_0)$$

Примечание. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$$q(x) = |siqn(x)|$$

$$x \to 0$$
 $f(x) \to 0$

$$y \to 0 \ g(y) \to 1$$

$$x \to 0 \ g(f(x)) \to 1$$
? — неверно

Ho:
$$x_n = \frac{1}{\pi n} \to 0$$
 $f(x_n) = 0$ $g(f(x_n)) \to 0$

Теорема 2. О пределе композиции

$$f: D \subset X \to Y \quad g: E \subset Y \to Z \quad f(D) \subset E$$

$$a$$
 — предельн. точка $D - f(x) \xrightarrow[r
ightarrow a]{} A$

$$A$$
 — предельн. точка $E \quad g(y) \xrightarrow[y \to A]{} B$

$$\exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$$

Тогда
$$g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} B$$

Доказательство. По Гейне.

Проверяем, что
$$\forall (x_n): \substack{x_n \in D \\ x_n \to a \\ x_n \neq a} \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} B$$

$$y_n := f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} A$$

 $y_n \in E$

При больших N $y_n \in V(a) \Rightarrow y_n \neq A$

$$\Rightarrow g(y_n) \to B$$

Примечание. Вместо (*) можно рассмотреть условие $A \in E - g$ — непр. в A.

Теорема 3. Топологическое определение непрерывности

$$f:X o Y$$
 — непр. на $X\Leftrightarrow \forall G\subset Y$, откр. $f^{-1}(G)$ — откр. в X .

Доказательство. " \Rightarrow " $x_0 \in f^{-1}(G)$? $\exists V(x_0) \subset f^{-1}(G)$

$$f$$
 — непр. в x_0 $\forall U(f(x_0))$ $W(x_0)$ $\forall x \in W$ $f(x) \in U$

$$f(x_0) \in G$$
 — откр. $\Rightarrow \exists U_1(f(x_0)) \subset G$

Для
$$U_1$$
 $\exists W(x_0): x \in W$ $f(x) \in U_1 \subset G$

$$W(x_0) \subset f^{-1}(G)$$

" \Leftarrow " $x_0 \in X$? непр. f в x_0

$$orall U(f(x_0)) \quad \exists W(x_0) \quad orall x \in W \quad orall f(x) \in U$$
 — надо проверить

$$U(f(x_0))$$
 — откр. $\Rightarrow f^{-1}(U(f(x_0)))$ — откр., а $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0)))$, значит $\exists W(x_0) \subset f^{-1}(U(f(x_0)))$

Для любого
$$x \in W(x_0)$$
 будет выполняться $f(x) \in U(f(x_0))$

Примечание. $f:[0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x$$

$$f^{-1}((1,+\infty))=(1,2]$$
 — открыто в $[0,2]$

Теорема 4. Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. $f: X \to Y$ — непр. на X

Если X — комп., то f(X) — комп.

Лемма 1. $A\subset \mathbb{R}, A$ — ограничено и замкнуто $\Rightarrow \sup A\in A$

Доказательство. По техническому описанию $\sup A \in A \Rightarrow \sup A -$ предельная точка A.

Для
$$\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in A : \sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A$$
, т.е. $x_n \to \sup A$

M3137y2019 November 25, 2019

Доказательство. ?f(X) — комп.

$$f(X)\subset\bigcup G_{\alpha}\quad G_{\alpha}$$
 – откр. в Y .

$$X\subset\bigcup f^{-1}(G_lpha)$$
 — откр. т.к. f — непр. \Longrightarrow

$$\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i}) \Rightarrow f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

Следствие 4.1. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие 4.2. (1-я теорема Вейерштрасса)

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$
 — непр.

Тогда f — огр.

Следствие 4.3. $f: X \to \mathbb{R}$

$$X$$
 — комп., f — непр. на X

Тогда
$$\exists \max_{\mathbf{Y}} f, \min_{\mathbf{Y}} f$$

$$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$$

Следствие 4.4. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ — непр.

 $\exists \max f, \min f$

1 О-символика

Определение. $f,g:D\subset X \to \mathbb{R} \ x_0$ — пр. точка D

Если $\exists V(x_0) \ \exists \varphi: V(x_0) \cap D \to \mathbb{R} \quad f(x) = g(x) \varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят f=O(g) при $x\to x_0$

"f ограничена по сравнению с g при $x \to x_0$ "

2. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ f — беск. малая по отношению к g при $x \to x_0$, f = o(g)

3.
$$\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$$
 f и g экв. при $x \to x_0$ $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$

$$g, f: D \subset X \to \mathbb{R}$$

Определение. $\exists c>0 \ \, \forall x\in D \ \, f=O(g) \ \, |f(x)|< c|g(x)|-f$ ограничена по сравнению с g на множестве D.

Определение. В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ – асимптотически сравнимы на множестве D, "величины одного порядка".

 $\mbox{Примечание}.$ Первое определение $\Leftrightarrow f=O(g)$ на $V(x_0)\cap D$ в смысле второго определения $\Leftrightarrow \frac{f}{g}$ — orp. на $V(x_0)\cap D$ (если $g\neq 0)$

Второе определение $\Longleftrightarrow_{g\neq 0} \frac{f}{g} \to 0$

Третье определение $\frac{f}{g} \to 1$ (если $g \neq 0$)

Спедствие 4.5. 1. $f \sim g, x \to x_0 \Leftrightarrow f = g + o(g), x \to x_0 \Leftrightarrow f = g + o(f), x \to x_0$

Доказательство.

$$\frac{f}{g} \to 1, x \to x_0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$$

$$\alpha(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x) = g(x) + o(x)$$

Аналогично для $\frac{g}{f}=1$.

2. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

Доказательство. $f(x) = \alpha(x)g(x)$ $\alpha(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x) - \text{orp.}$

3. $\alpha \neq 0$ $f \underset{x \to x_0}{\sim} \alpha g$. Тогда $f \asymp g, x \to x_0$

Доказательство.

$$\varepsilon := \frac{\alpha}{2} \quad \exists V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \frac{\alpha}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}\alpha$$

Пример. 1.

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \quad \sin x = x + o(x), x \to 0$$

2.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(\frac{1}{2}), x \to 0$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2o(\frac{1}{2})$$

M3137y2019

November 25, 2019

3.
$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \quad e^x = 1 + x + o(x)$$

4.
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \quad \ln(1+x) = x + o(x)$$

5.
$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha o(x), x \to 0$$

Пример. Таблица эквивалентных для $x \to 0$:

$$\sin x \sim x$$

$$\sinh x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a$$

Теорема 5. $f, \tilde{f}, g, \tilde{g}: D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$

 x_0 — предельная точка D

$$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$$
 при $x \to x_0$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

, т.е. если \exists один из пределов, то \exists и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если x_0 лежит в области определения $\frac{f}{g}$

Доказательство.

$$f(x)g(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\frac{f}{\tilde{f}}\frac{g}{\tilde{g}} \to \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\cdot 1\cdot 1$$

Примечание. В условиях теоремы $\lim_{x \to x_0} f + g \neq \lim_{x \to x_0} (\tilde{f} + \tilde{g})$

1.1 Асимптотическое разложение

Определение. $g_n:D\subset X\to\mathbb{R}$ x_0 — пред. точка D

$$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \to x_0$$

Пример.
$$g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2 \dots x \to 0$$
 $g_{n+1} = xg_n, x \to 0$

 (g_n) называется шкала асимптотического разложения.

$$f:D\to\mathbb{R}$$

Если $f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

Теорема 6. О единственности асимптотического разложения

 $f,g_n:D\subset X\to\mathbb{R}$ x_0 — предельная точка D

$$\forall n \ g_{n+1} = o(g_n), x \to x_0$$

$$\exists U(x_0) \ \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap D \ \forall i \ g_i(x) \neq 0$$

Если
$$f(x) = c_0 g_0(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$$

$$f(x) = d_0 g_0(x) + \ldots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$$

 $|n \le m|$

Тогда $\forall i \ c_i = d_i$

Доказательство. $k := min\{i : c_i \neq d_i\}$

$$f(x) = c_0 g_0 + \ldots + c_{k-1} g_{k-1} + c_k g_k + o(g_k)$$

$$f(x) = c_0 g_0 + \ldots + c_{k-1} g_{k-1} + d_k g_k + o(g_k)$$

$$0 = (c_k - d_k)g_k + o(g_k)$$

M3137y2019

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k)}{g_k(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Пример. Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \to +\infty$

Прямая y = Ax + B — наклонная асимптота к графику f при $x \to +\infty$

M3137y2019 November 25, 2019