1 Спектральный анализ линейных операторов

1.1 Инвариантные пространства линейного оператора

$\lhd \varphi : X \to X$ — автоморфизм

Определение. Подпространство L линейного пространства X называется **инвариантным подпространством** φ, если

$$\forall x \in L \quad \varphi x \in L$$

Пример.

1. $\varphi : X \to X$, тогда инвариантные подпрострнаства:
   - X
   - $\{0\}$
2. $\varphi = \mathfrak{I}, \quad \forall x \;\; \mathfrak{I}x = x \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное
3. $\varphi = \Theta, \quad \forall x \;\; \Theta x = 0 \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное
4. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \triangleq diag\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$

   $\lhd \{e_j\}$ — базис $X \Rightarrow \forall j \quad A_\varphi e_j = \lambda_j e_j \quad e_j \to \mathcal{L}\{e_j\}$ — инв.

   Всего 2^n инвариантных подпространств
5. $]X = L_1 \dot{+} L_2$

   $$\forall x! = x_1 + x_2 \quad \varphi x = \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = x_1 \in L_1$$

   L_1 — инв., $\forall x \in L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = x \quad \forall$ подпространство L_1 инвариантно

   L_2 — инв., $\forall x \in L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = 0 \quad \forall$ подпространство L_2 инвариантно

Определение. Инвариантном линейного оператора φ называется его числовая функция значений, которая не зависит от выбора базиса

Пример. $\det \varphi$ — инвариант

$$\varphi^{\Lambda_n} z = \det \varphi \cdot z \quad \forall z \in \Lambda_n$$

$$\det \varphi = \det A_\varphi \text{ — в некотором фиксированном базисе}$$

$$\tilde{A}_\varphi = T^{-1} A_\varphi T \quad \det \tilde{A}_\varphi = \det T^{-1} \det A_\varphi \det T = \det A_\varphi$$

Определение. **Характеристическим полиномом** линейного оператора φ называется определитель следующего вида:

$$\chi_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\mathfrak{I}) \overset{\{e_j\}}{=} \det\{A_\varphi - \lambda E\}$$

$$\chi_\varphi(\lambda) \overset{def\,\det}{=} \sum_{(j_1 \ldots j_n)} (-1)^{[j_1 \ldots j_n]} \prod_{i=1}^{n} (a_{ij_i} - \delta_{i,j_i}\lambda) = \det A_\varphi - \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ji} \right) (-1)^i + \ldots + \lambda^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda^n (-1)^n$$

$$= (-\lambda)^n Z^{(0)} + (-\lambda)^{n-1} Z^{(1)} + \ldots + (-\lambda) Z^{(n-1)} + Z^{(n)}$$

$$Z^{(K)} = \sum_{(1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n)} M_{\vec{i}}^{\vec{i}}$$

Лемма 1.

$$\chi_\varphi(\lambda) = inv$$

Доказательство.

$$\det\left(\tilde{A}_\varphi - \lambda E\right) = \det\left(T^{-1} A_\varphi T - \lambda T^{-1} T\right) = \det[S(A_\varphi - \lambda E) T] = \det T^{-1} \det(A_\varphi - \lambda E) \det T = \det(A_\varphi$$

$\square$