

## Потенциальные векторные поля

**Определение.** Интеграл векторного поля  $V$  не зависит от пути в области  $O$ :

$\forall A, B \in O \quad \forall \gamma_1, \gamma_2$  — кусочно-гладкие из  $A$  в  $B$ :

$$\int_{\gamma_1} \sum v_i dx_i = \int_{\gamma_2} \sum v_i dx_i$$

**Теорема 1** (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов).

$V$  — векторное поле в области  $O$ . Тогда эквивалентны следующие:

1.  $V$  — потенциально
2.  $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i$  не зависит от пути в  $O$
3.  $\forall \gamma$  — кусочно-гладкий, замкнутый в  $O$   $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i = 0$

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$  Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

$2 \Rightarrow 3$   $\gamma$  — петля:  $[a, b] \rightarrow O$ .  $\gamma(a) = \gamma(b) = A$

Рассмотрим постоянный путь  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O, t \mapsto A$ . По свойству 2:  $\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}} \langle V, \gamma' \rangle dt = 0$

$3 \Rightarrow 2$   $\gamma_1, \gamma_2$  — пути с общим началом и концом. Тогда  $\gamma := \gamma_2^{-1} \gamma_1$  — петля.  $\gamma$  — кусочно гладкий  $\Rightarrow 0 = \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2^{-1}} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$



$2 \Rightarrow 1$  Фиксируем  $A \in O$ .

$\forall x \in O$  выберем кусочно-гладкий путь  $\gamma_x$  из  $A$  в  $x$ . Проверим, что  $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i$  — потенциал.

Достаточно проверить, что  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$  в  $O$ .

Фиксируем  $x \in O$ .  $\gamma_0(t) = x + t h e_1, t \in [0, 1], \gamma'_0(t) = (h, 0 \dots 0) = h e_1$



$$\begin{aligned}
 f(x + h e_1) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+h e_1}} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0} \\
 &= \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) h dt \\
 &= h V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n)
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{f(x + h e_1) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n) \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x)$$

□

## Локально-потенциальные векторные поля

**Лемма 1.**  $V$  — гладкое, потенциальное в  $O$

Тогда

$$\forall x \in O \quad \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x) \quad (1)$$

*Доказательство.* Непрерывные производные не изменяются при порядке дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x)$$

□

*Упражнение.* Даны 4 векторных поля в  $\mathbb{R}^2$ :  $(x, y)$ ,  $(x, -y)$ ,  $(y, x)$ ,  $(-y, x)$ . Вычеркните лишнее.

Ответ:  $(-y, x)$ , т.к.  $\frac{\partial V_1}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial V_2}{\partial x} = 1$

**Теорема 2** (лемма Пуанкаре).

- $O \subset \mathbb{R}^m$  — **выпуклая область**
- $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$  — **векторное поле**
- $V$  удовлетворяет 1, в т.ч.  $V$  — гладкое.

Тогда  $V$  — потенциальное.

*Доказательство.* Фиксируем  $A \in O$

$$\forall x \in O \quad \gamma_x(t) := A + t(x - A), t \in [0, 1]$$

$$\gamma'_x(t) = x - A$$

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))(x_k - A_k) dt$$

Проверим, что  $f$  — потенциал.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \text{правило Лейбница} \\ &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\dots) t(x_k - A_k) dt \\ &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\dots) t(x_k - A_k) dt \\ &= \int_0^1 (tV_j(A + t(x - A)))'_t dt \\ &= tV_j(A + t(x - A)) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= V_j(x) \end{aligned} \tag{2}$$

(2): по (1).

□

*Примечание.* Это же доказательство проходит для “звёздных” областей — областей  $O$ , таких что  $\exists A \in O$  : любая точка  $O$  видна из  $A$ .

**Определение.**  $V$  — локально потенциальное векторное поле в  $O$ , если  $\forall x \in O \exists U(x) : V$  — потенциально в  $U(x)$

*Следствие 2.1* (лемма Пуанкаре).

- $O \subset \mathbb{R}^m$  — любая область
- $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$  — векторное поле
- $V$  удовлетворяет 1.

Тогда  $V$  — локально потенциально.

## Равномерная сходимость функциональных рядов (продолжение)

*Теорема 3'* (о дифференцировании ряда по параметру).

- $u_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$  (поточечная сходимость)
- $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$  (равномерная сходимость)

Тогда:

1.  $S(x) \in C^1\langle a, b \rangle$
2.  $S' = \varphi$  на  $\langle a, b \rangle$

То есть  $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$

*Доказательство.* Следует из теоремы 3.

$S_n \rightarrow S$  поточечно,  $S'_n \rightrightarrows \varphi$

□

*Пример.* Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, x > 0$$

$\gamma$  — постоянная Эйлера.

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)}_{u_k(x)}$$

Зафиксируем  $x_0$ .

$$u'_k(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{k}} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$$

Пусть  $M > x_0$ . Тогда

$$\left| \frac{-x}{(x+k)k} \right| \leq \frac{M}{k^2}$$

при  $x \in (0, M)$ .

Тогда  $\sum \frac{-x}{(x+k)k}$  равномерно сходится на  $(0, M)$ , значит  $\ln \Gamma(x) \in C^1(0, M)$ ,  $\frac{-x}{(x+k)k} -$  непр.  $\Rightarrow \sum \frac{-x}{(x+k)k} -$  непр.  $\Rightarrow \ln \Gamma(x) \in C^1(0, +\infty) \Rightarrow \Gamma(x) \in C^1(0, +\infty)$

*Примечание.* Фактически, теорема 3' устанавливает, что  $\sum u'_n(x) -$  непр.

*Примечание.*

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k}$$

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x) \left( \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k} \right)$$

Изучив равномерную сходимость  $\left( \frac{x}{(x+k)k} \right)'$ , получаем, что  $\Gamma \in C^2(0, +\infty)$  и т.д.  $\Rightarrow \Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$

*Теорема 4'* (о почленном предельном переходе в суммах).

- $u_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- $X$  — метрическое пространство
- $x_0$  — предельная точка  $E$
- $\forall n \quad \exists$  конечный  $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ .

Тогда:

1.  $\sum a_n -$  сходится
2.  $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$$

*Доказательство.*

1.  $\sum a_n$  — сходится

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x), S_n^a = \sum_{k=1}^n a_k$$

Проверим, что  $S_n^a$  — фундаментальная:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

Из равномерной сходимости  $\sum u_n(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad |S_{n+p} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Это критерий Больцано-Коши для равномерной сходимости)

Зададим  $\varepsilon$  по  $N$ , выберем  $n, n+p$  и возьмём  $x$  близко к  $x_0$ :  $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|S_n^a - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выполнено 1, т.е.  $|S_{n+p} - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

2.  $\sum a_n \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x)$

Сведём к теореме Стокса-Зайдля.

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n, & x = x_0 \end{cases} \text{ — задано на } E \cup \{x_0\}, \text{ непрерывно в } x_0.$$

$\sum \tilde{u}_n(x)$  — равномерно сходится на  $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$  сумма ряда непрерывна в  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n$$

$\sum \tilde{u}_n(x)$  — равномерно сходится, т.к.:

$$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right|}_{\rightarrow 0}$$

□

*Примечание.* Теорема 4' верна для случая  $u_n : E \subset X \rightarrow Y$ , где  $Y$  — полное нормированное пространство.

*Теорема 4* (о перестановке двух предельных переходов).

- $f_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- $x_0$  — предельная точка  $E$
- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} S(x)$
- $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n$

Тогда:

1.  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2.  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$

То есть пунктирные преобразования верны:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} & S(x) \\ x \rightarrow x_0 \downarrow & & \downarrow x \rightarrow x_0 \\ A_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} & A \end{array}$$

*Доказательство.*  $u_1 = f_1, \dots, u_k = f_k - f_{k-1} \dots$

$$a_1 = A_1, \dots, a_k = A_k - A_{k-1}$$

Тогда  $f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ,  $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

В эти обозначениях  $\sum u_k(x)$  равномерно сходится к сумме  $S(x)$ .

$$u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_k$$

Тогда по т. 4'  $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$  имеет конечный предел при  $n \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum a_k = A$$

□

*Примечание.* Здесь можно было бы вместо  $n$  рассматривать “непрерывный параметр”  $t$ .

$$f_n(x) \leftrightarrow f(x, t)$$

$$n \rightarrow +\infty \leftrightarrow t \rightarrow t_0$$

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} S \leftrightarrow f(x, t) \underset{E}{\overset{t \rightarrow t_0}{\rightrightarrows}} S(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t : 0 < |t - t_0| < \delta \quad \forall x \in E \quad |f(x, t) - S(x)| < \varepsilon$$