**Теорема 1** (об абсолютной непрерывности интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f$ суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall E$ — изм., $\mu E < \delta : \left|\int_E f\right| < \varepsilon$

*Следствие* 1. $f$ суммируемо на $X$, $E_n \subset X$, тогда $\mu E_n \to 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \to 0$

*Доказательство.* [1]

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \supset X_{n+1} \supset \dots \Rightarrow \mu\left(\bigcap X_n\right) \overset{(1)}{=} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_\varepsilon\ \ \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f| \overset{(2)}{=} \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X^c_{n_\varepsilon}} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X^c_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{\delta} \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

- (??): Т.к. $f$ на $\bigcap X_n$ бесконечна и $f$ почти везде конечна.
- (??): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
- (??): Т.к. $|f|$ на $E \cap X^c_{n_\varepsilon}$ не превосходит $n_\varepsilon$ по построению $X_{n_\varepsilon}$

□

*Примечание.* Следующие два свойства не эквивалентны:

1. $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \ \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$

Из 1 не следует 2: пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$, $f_n = \frac{1}{nx}$. Тогда $f_n \overset{\lambda}{\Rightarrow} 0$, но $\int |f_n - f| = +\infty$ при всех $n$.

Из 2 следует 1, т.к.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

[1] Теоремы, не следствия

**Теорема 2** (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f$ — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$, называемое "суммируемая мажоранта":
    1. $\forall n \;\; |f_n| \overset{(3)}{\leq} g$ почти везде
    2. $g$ — суммируемо на $X$

Тогда: $f_n, f$ — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

*Примечание.* Почти везде конечность $f_n$ и $f$ следует из (??), поэтому в условии этого можно не требовать.

*Доказательство.* $f_n$ — суммируемы в силу неравенства (??), $f$ суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$

   Зафиксируем $\varepsilon$. $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

   $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \to 0$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$
$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} = \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[\text{сл. т. об абс. непр.}]{n\to+\infty} 0} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$

2. $\mu X = +\infty$

   Утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A \subset X$, изм., конечной меры, $\mu A$ конечно : $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$. Докажем его.

$$\int_X g = \sup\left\{ \int g_n, 0 \leq g_n \leq g, g_n - \text{ступ.} \right\}$$
$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$
$$0 \leq \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \le \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\to 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{< 2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

$\square$

**Теорема 3** (Лебега).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f$ — измеримо
- $f_n \to f$ почти везде
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:
  1. $\forall n \ \ |f_n| \le g$ почти везде
  2. $g$ — суммируемо на $X$

Тогда $f_n, f$ — суммируемы, $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$

Не дописано