

## Спектральная теорема для оператора общего вида

**Определение.** Операторный полином  $p \in \mathcal{P}_\infty[K]$  называется аннулирующим полиномом линейного оператора  $\varphi$ , если  $p(\varphi) = 0$

*Примечание.* Множество аннулирующих полиномов операторов  $\varphi$  — ядро гомоморфизма  $S_\varphi$  по определению.

**Теорема 1.** Аннулирующий полином существует.

*Доказательство.*  $\dim \mathcal{P}[\varphi] = n^2 \Rightarrow \exists n^2$  ЛНЗ элементов. Эти элементы :  $\varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}$ . Тогда  $\{\mathcal{I}, \varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}\}$  — ЛЗ

$$\Rightarrow \exists p[\varphi] = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i \varphi^i = 0 \Rightarrow \exists$$

□

$J_\varphi$  — множество аннулирующих полиномов оператора  $\varphi$

**Лемма 1.**  $J_\varphi$  — идеал в  $\mathcal{P}_\infty[K]$

*Доказательство.*  $p \in J_\varphi \Rightarrow p(\varphi) = 0$

$q \in \mathcal{P}_\infty[K]$

$\triangleleft p(\lambda)q(\lambda) \xrightarrow{S_\varphi} p(\varphi)q(\varphi) = 0 \Rightarrow p(\lambda)q(\lambda) — аннулирующий \Rightarrow p(\lambda)q(\lambda) \in J_\varphi$

□

**Определение.** Минимальным аннулирующим полиномом оператора  $\varphi$  называется минимальный полином  $J_\varphi$

*Примечание.* Обозначение минимального полинома:  $p_\varphi(\lambda) \leftrightarrow p_\varphi(\varphi) = 0$

*Пример.*  $\varphi : X \rightarrow X$  — оператор с простым спектром

$\chi_\varphi(\lambda)$  — характеристический полином  $\varphi \Rightarrow \chi_\varphi(\lambda) = p_\varphi(\lambda)$

*Доказательство.*

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{P}_i \Rightarrow \chi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^n \chi_\varphi(\lambda_i) \mathcal{P}_i = 0$$

Предположим обратное:  $p_\varphi(\lambda)$  — минимальный полином, такой что  $\deg p_\varphi < \deg \chi_\varphi$

$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_k) p_\varphi(\lambda)$

$$\triangleleft p_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^n p_\varphi(\lambda_i) \mathcal{P}_i = p_\varphi(\lambda_k) \mathcal{P}_k \Rightarrow p_\varphi(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

**Лемма 2.**  $]p(\varphi) = q(\varphi) \Leftrightarrow [p(\lambda) - q(\lambda)] \mid p_\varphi(\lambda)$

*Доказательство.*  $\triangleleft p(\lambda) - q(\lambda) = 0 \Rightarrow p(\lambda) - q(\lambda) \in J_\varphi$  □

**Лемма 3.**  $]p(\lambda) = q(\lambda)p_\varphi(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = r(\varphi)$

**Теорема 2.**  $\triangleleft p_\varphi = p_1 \dots p_k, p_1 \dots p_k$  — взаимно простые

$$\Rightarrow \dot{+} \sum_{j=1}^k \text{Ker } p_j(\varphi) = X$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \text{Ker } p_\varphi(\varphi) &= \dot{+} \sum_{j=1}^k \text{Ker } p_j(\varphi) \\ \text{Ker } p_\varphi(\varphi) &= \text{Ker } 0 = X \end{aligned}$$

□

**Теорема 3.** О ядре и образе.

$$]p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \Rightarrow \text{Ker } p_1(\varphi) = \text{Im } p_2(\varphi)$$

*Доказательство.* Покажем, что:

$$1. \text{Im } p_2(\varphi) \subset \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$2. \dim \text{Im } p_2(\varphi) = \dim \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$1. \text{Im } p_2(\varphi) \subset \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$]y \in \text{Im } p_2(\varphi) \Rightarrow \exists x \in X : y = p_2(\varphi)x$$

$$\triangleleft p_1(\varphi)y = p_1(\varphi)p_2(\varphi)x = p_\varphi(\varphi) = 0$$

$$2. \text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \text{Ker } p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker } p_2(\varphi) \Rightarrow$$

$$\dim X = \dim \text{Ker } p_1(\varphi) + \dim \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$$\dim X = \dim \text{Ker } p_2(\varphi) + \dim \text{Im } p_2(\varphi)$$

$$\dim \text{Ker } p_1(\varphi) = \dim \text{Im } p_2(\varphi)$$

□

**Теорема 4.**  $]p_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)$  — минимальный аннулирующий полином  $\varphi$ ,  $p_1 \dots p_k$  — взаимно простые делители

$\Rightarrow$

1.  $\sum_{j=1}^k p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}, \quad p'_j = \frac{p_\varphi}{p_j}$
2.  $p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{P}_{L_j} \quad L_j = \text{Ker } p_j(\varphi)$

*Доказательство.*  $\triangleleft p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \dots p_k(\lambda) \quad \exists q_1 \dots q_k :$

$$\sum_{j=1}^k p'_j(\lambda)q_j(\lambda) = 1 \xrightarrow{S_\varphi} \sum_{j=1}^n p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}$$

$$]p_1(\lambda) = p_i(\lambda), p_2(\lambda) = p'_i(\lambda) \Rightarrow \text{Im } p_1(\varphi) = \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$\triangleleft \mathcal{P}_{L_1}x = p'_i(\varphi)q(\varphi) \in \text{Ker } p_i(\varphi)$ , т.к.

$$p_i(\varphi)[p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x] = p_i(\varphi)p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x = p_\varphi(\varphi)q_i(\varphi)x = 0$$

Осталось доказать, что  $\mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = \delta_i^j \mathcal{P}_{L_i}$

$$]i \neq j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = p'_i(\varphi)q_i(\varphi)p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \frac{p_\varphi(\varphi)}{p_i(\varphi)p_j(\varphi)}q_i(\varphi)q_j(\varphi)p_\varphi(\varphi) = 0$$

$$]i = j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}(x) = \mathcal{P}_{L_i}(\mathcal{I} \cdot x) = \mathcal{P}_{L_i}\left(\sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{L_j}\right)x = \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i}x \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i} = \mathcal{P}_{L_i}$$

□

## Ультраинвариантные подпространства

$$\triangleleft \varphi : X \rightarrow X, \dim X = n$$

$L \subset X$  — инвариантное подпространство  $\varphi$ , если  $\varphi(L) \subset L$

**Определение.** Инвариантное подпространство называется **ультраинвариантным подпространством**, если существует его дополнение  $L'$ , такое что:

$$L \dot{+} L' = X \quad L' \text{ — инвариантное подпространство } \varphi$$

**Определение.** Оператор  $\varphi_L : L \rightarrow L$ , такой что:

$$\varphi_L x = \varphi x \quad \forall x \in L$$

называется **сужением** оператора  $\varphi$  на  $L$ .

Если  $L$  — ультраинвариантное подпространство, то  $\varphi_L$  называется **компонентой**  $\varphi$  в  $L$

**Лемма 4.** Дополнение  $L'$  ультраинвариантного подпространства  $L$  является ультраинвариантным подпространством.

**Лемма 5.**  $X = L \dot{+} L'$   $L, L'$  — ультраинвариантные подпространства  $\Rightarrow$

$$\varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\|L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\|L}$$

*Доказательство.*

$$X = L \dot{+} L' \Rightarrow \forall x \in X, x = x_1 + x_2 = \mathcal{P}_L^{\|L'} x + \mathcal{P}_{L'}^{\|L} x$$

$$\begin{aligned} \varphi x &= \varphi \mathcal{P}_L^{\|L'} x + \varphi \mathcal{P}_{L'}^{\|L} x \quad \forall x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\|L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\|L} \quad (*) \end{aligned}$$

□

*Примечание.* Запись  $(*)$  эквивалентна записи

$$\varphi = \varphi_L \dot{+} \varphi_{L'}$$

**Определение.** Инвариантное подпространство называется **минимальным**, если оно не содержит внутри себя нетривиальных инвариантных подпространств меньшей размерности.

**Лемма 6.**  $\exists \varphi : X \rightarrow X$  — линейный оператор  $\Rightarrow \text{Ker } p(\varphi)$  — инвариантное подпространство  $\varphi$

*Доказательство.*  $\exists x \in \text{Ker } p(\varphi) \Rightarrow p(\varphi)x = 0$

$$\varphi : p(\varphi)(\varphi x) = \varphi p(\varphi)x = 0$$

□

**Лемма 7.**  $p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$  — минимальный полином  $\varphi \Rightarrow \text{Ker } p_i(\varphi)$  — нетривиальное инвариантное подпространство  $\varphi$

*Доказательство.*

$$p_1(\lambda) : \text{Ker } p_1(\varphi) = X, \deg p_1(\lambda) < \deg p_\varphi(\lambda) \Rightarrow p_1(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \Rightarrow p_1(\lambda) \in J_\varphi, \deg p_1(\lambda) < \deg p_\varphi(\lambda)$$

Это противоречит определению минимального полинома  $p_\varphi$ . Аналогично для  $p_2$ .

$$p_1(\lambda) : \text{Ker } p_1(\varphi) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker } p_2(\varphi) \quad \dim p_1(\varphi) = 0 \Rightarrow \text{Ker } p_2(\varphi) = x$$

Это чему-то противоречит.

Итого  $p_i(\varphi) \neq 0$  и  $p_i(\varphi) \neq X \Rightarrow \text{Ker } p_i(\varphi)$  — нетривиальное подпространство.

□

*Примечание.*  $\text{Ker } p_1(\varphi) - \text{ИП}$ ,  $\text{Ker } p_2(\varphi) - \text{ИП}$ ,  $\text{Ker } p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker } p_2(\varphi) \Rightarrow p_1, p_2 - \text{ультраинвариантные подпространства}$

**Теорема 5. Обобщение.**

$p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda) \dots p_k(\lambda) - \text{взаимно простые}$

$$X = \dot{+} \sum_{j=1}^k \text{Ker } p_j(\varphi) = \dot{+} \sum_{j=1}^n L_j$$

, где  $L_j = \text{Ker } p_j(\varphi) - \text{ультраинвариантные подпространства}$ .

*Доказательство.* Тривиально. □

$\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_{L_j} = p'_j(\varphi)q_j - \text{проектора на ультраинвариантное подпространство } L_j \text{ (ультрапроектор)}$

$\triangleleft \varphi_j = \varphi / L_j : L_j \rightarrow L_j - \text{компонента } \varphi \text{ в ультраинвариантном подпространстве } L_j$

$$\varphi = \dot{+} \sum_{j=1}^k \varphi_j = \sum_{j=1}^k \varphi_j \mathcal{P}_j$$

**Лемма 8.**  $]p_\varphi = p_1 \dots p_k - \text{минимальный аннулирующий полином } \varphi$

$\Rightarrow p_j(\lambda) - \text{минимальный аннулирующий полином } \varphi_j$

*Доказательство.*  $\varphi_j : L_j \rightarrow L_j, L_j = \text{Ker } p_j(\varphi)$

$]x \in \text{Ker } p_j(\varphi) \quad p_j(\varphi)x = 0 \quad \forall x \in L_j \Rightarrow p_j \in I_{\varphi_j}$

$] \tilde{p}_j(\lambda) - \text{минимальный полином } I_{\varphi_j}$

$$p_j(\lambda) = q_j(\lambda) \tilde{p}_j(\lambda)$$

$$\triangleleft p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \dots p_j(\lambda) \dots p_k(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \dots \tilde{p}_j(\lambda) \dots p_k(\lambda)q_j(\lambda) = \tilde{p}_\varphi(\lambda)q(\lambda)$$

$\Rightarrow \deg p_\varphi(\lambda) > \deg \tilde{p}_\varphi(\lambda)$ , но  $p_\varphi(\lambda) - \text{минимальный} - \text{противоречие}$ . □

**Теорема 6. Спектральная теорема.**

$$p_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{m_j} = p_1(\lambda) \dots p_k(\lambda) \quad p_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \lambda \neq \lambda_{i \neq j}$$

$\Rightarrow L_j = \text{Ker } p_j(\varphi) = \text{Ker } (\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} - \text{ультраинвариантное подпространство}$

$$\Rightarrow X = \dot{+} \sum_{j=1}^n \text{Ker } (\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} = \dot{+} \sum_{j=1}^k L_j$$

$$\varphi = \dot{+} \sum_{j=1}^k \varphi_j \quad \varphi_j = \varphi|_{L_j}$$

**Определение.** Нильпотентным оператором порядка  $m$  называется минимальный оператор  $\tau$ , такой что:

$$\tau^m = 0 \quad \forall k < m \quad \tau^k \neq 0$$

*Примечание.*  $(\varphi_j - \lambda_j \mathcal{I}) = \tau_j$  — нильпотентный оператор порядка  $m_j$

$\varphi = \sum_{j=1}^K (\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j) \mathcal{P}_j$  — спектральная теорема (другая формулировка).

**Определение.** •  $\lambda_j$  — элементарная порция спектра

- $\mathcal{P}_j$  — спектральный ультрапроектор на  $L_j$
- $L_j$  — спектральное ультраинвариантное (*корневое*) подпространство
- $\varphi_j$  — спектральная компонента оператора  $\varphi$  в инвариантном подпространстве  $L_j$