

1. Рассмотрим табличную модель  $\mathfrak{M}$  с  $n$  истинностными значениями, и с выделенным значением  $T$  для истины. Покажите, что

$$\models \bigvee_{1 \leq i \neq j \leq n+1} (P_i \rightarrow P_j) \ \& \ (P_j \rightarrow P_i)$$

В частности, покажите, что в любой корректной модели если  $\llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket$ , то  $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = T$ ; если  $\llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket = T$ , то  $\llbracket \gamma \ \& \ \delta \rrbracket = T$ ; если  $\llbracket \gamma \rrbracket = T$ , то  $\llbracket \gamma \vee \eta \rrbracket = \llbracket \eta \vee \gamma \rrbracket = T$ .

(a)  $\llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket \Rightarrow \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = T$

Предположим обратное, т.е.  $\exists \alpha, \beta : \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = A, \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket \neq T$ .

$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = f_{\rightarrow}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket) = f_{\rightarrow}(A, A) \neq T$ . Но  $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$ , следовательно по корректности  $\models \alpha \rightarrow \alpha$ , следовательно  $f_{\rightarrow}(A, A) = T$ . Противоречие.

(b)  $\llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket = T \Rightarrow \llbracket \gamma \ \& \ \delta \rrbracket = T$

$f_{\&}(T, T) = T$ , т.к.  $\vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \ \& \ (\alpha \rightarrow \alpha) \Rightarrow \models (\alpha \rightarrow \alpha) \ \& \ (\alpha \rightarrow \alpha) \Rightarrow T = f_{\&}(\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket, \llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket) = f_{\&}(T, T)$

(c)  $T = f_{\vee}(\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket) = f_{\vee}(T, A)$ , т.к.  $\vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \vee \beta$ . Аналогично для симметричного случая.

По принципу Дирихле  $\exists i \neq j : \llbracket P_i \rrbracket = \llbracket P_j \rrbracket \Rightarrow \llbracket P_i \rightarrow P_j \rrbracket = T \Rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket = T$

2. Покажите, что какая бы ни была формула  $\alpha$  и модель Крипке, если  $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \preceq W_j$ , то  $W_j \Vdash \alpha$ .

Докажем это по индукции по количеству операторов в  $\alpha$

База:  $n = 0$ , т.е.  $\alpha = P_i$  — переменная. Искомое верно по определению  $W$ .

Переход: 4 случая:

(a)  $\alpha = \neg \beta$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow \forall W_k : W_i \leq W_k \ W_k \nVdash \beta \Rightarrow \forall W_k : W_j \leq W_k \ W_k \nVdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$$

(b)  $\alpha = \beta \ \& \ \gamma$

$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow W_i \Vdash \beta, W_i \Vdash \gamma$ , по индукционному предположению  $W_j \Vdash \beta, W_j \Vdash \gamma \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$

(c)  $\alpha = \beta \vee \gamma$

$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow W_i \Vdash \beta$  или  $W_i \Vdash \gamma$ , пусть это  $\beta$  (иначе переименуем). Тогда  $W_j \Vdash \beta$  по индукционному предположению  $W_j \Vdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$

(d)  $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$

$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow \forall W_j : W_i \leq W_j \ W_j \Vdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \gamma$ , по транзитивности  $\leq$  выполняется  $W_j \Vdash \alpha$

3. Общеизвестны ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.

(a)  $P \vee \neg P$ ;

Пусть  $P$  — одна переменная и модель Крипке  $W_1 \not\models P$ , а  $W_2 \models P$  и  $W_1 \leq W_2$ . Тогда несложно заметить, что  $W_1 \not\models \neg P$ , т.к.  $\exists W_2 : W_1 \leq W_2, W_2 \models P$ . Т.к.  $W_1 \not\models P, W_1 \not\models \neg P$ , получаем, что  $W_1 \not\models P \vee \neg P$

(b)  $\neg\neg P \rightarrow P$ ;

$$W_1 \not\models \neg\neg P \rightarrow P \Leftrightarrow \begin{cases} W_1 \models \neg\neg P \\ W_1 \not\models P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_1 \not\models \neg P \\ W_1 \not\models P \end{cases}$$

Пусть  $W_2 \models P$  и  $W_1 \leq W_2$ , тогда искомое выполнено.

(c)  $P \vee \neg P \vee \neg\neg P \vee \neg\neg\neg P$ ;

$W_1 \not\models P, W_2 \models P, W_3 \models \neg P, W_4 \models \neg\neg P$ , все упорядочены

(d)  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ ;

$W_1 \models (P \rightarrow Q) \rightarrow P, W_1 \not\models P$ . Второе выполнено по построению; придумаем, как выполнить первое.

$$W_1 \not\models P \rightarrow Q \Leftrightarrow \begin{cases} W_2 \models P \\ W_2 \not\models Q \end{cases}. \text{ Противоречий не возникло.}$$

Ответ:  $W = \{W_1, W_2\}, \leq = \{(W_1, W_2)\}$  (плюс рефлексивность),  $W_2 \models P$

(e)  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$ ;

$W_1 \not\models (A \rightarrow B), W_1 \not\models (B \rightarrow C), W_1 \not\models (C \rightarrow A) \Rightarrow \exists W_2, W_3, W_4 : W_2 \models A, W_2 \not\models B, W_3 \models B, W_3 \not\models C, W_4 \models C, W_4 \not\models A$ . Если  $\leq = \{(W_1, W_2), (W_1, W_3), (W_1, W_4)\}$  (плюс рефлексивность), то противоречий нет.

(f)  $\neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$ ;

$W_1 \models \neg(\neg A \& \neg B), W_1 \not\models A \vee B \Rightarrow W_1 \not\models A, W_1 \not\models B$

Попробуем выполнить первое утверждение.  $W_1 \not\models \neg A \& \neg B \Rightarrow W_1 \not\models \neg A$  или  $W_1 \not\models \neg B$ . Пусть  $W_1 \not\models \neg A$  без потери общности.  $W_1 \not\models \neg A \Leftrightarrow \exists W_2 : W_2 \models A$  и  $W_1 \leq W_2$

Ответ:  $W = \{W_1, W_2\}, \leq = \{(W_1, W_2)\}$  (плюс рефлексивность),  $W_1 \not\models A, W_1 \not\models B, W_2 \models A$ .

(g)  $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ ;

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash A \rightarrow \perp} \quad \frac{}{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash A} \\
\hline
\frac{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash \perp}{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash B} \text{ (удаление } \perp) \quad \frac{}{\neg A \vee B, A, B \vdash B} \quad \frac{}{\neg A \vee B, A \vdash \neg A \vee B} \\
\hline
\frac{}{\neg A \vee B, A \vdash B} \text{ (введение } \rightarrow) \\
\frac{}{\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B} \text{ (введение } \rightarrow) \\
\hline
\neg A \vee B \rightarrow A \rightarrow B
\end{array}$$

(h)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$ ;

$$W_1 \Vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow \begin{cases} W_1 \Vdash A \rightarrow B \\ W_1 \Vdash \neg A \vee B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_1 \Vdash A \\ W_1 \Vdash \neg A \\ W_1 \Vdash B \end{cases}$$

Пусть  $W_2 \Vdash A, W_2 \Vdash B$  и  $W_1 \leq W_2$ , тогда  $W_2 \Vdash A \rightarrow B, W_1 \Vdash A \rightarrow B$  пустотно и искомое выполнено.

(i)  $\neg \perp$ .

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\perp \vdash \perp} \\
\hline
\vdash \perp \rightarrow \perp \\
\hline
\vdash \neg \perp
\end{array}$$

4. Рассмотрим некоторую модель Крипке  $\langle \mathfrak{W}, \preceq, \Vdash \rangle$ . Пусть  $\Omega = \{W \subseteq \mathfrak{W} \mid \text{если } W_i \in W \text{ и } W_i \preceq W_j, \text{ то } W_j \in W\}$ . Пусть  $\mathcal{W}_\alpha := \{W_i \in \mathfrak{W} \mid W_i \Vdash \alpha\}$  (множество миров, где вынуждена формула  $\alpha$ ).

(a) На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара  $\langle \mathfrak{W}, \Omega \rangle$  — топологическое пространство. Докажите её.

Покажем, что выполняются три аксиомы топологии:

i.  $W = \bigcup_\alpha \mathcal{W}_\alpha \in \Omega$ , где  $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$

$\triangleleft W_i \in W$  и при этом  $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$ . Если  $W_i \leq W_j$ , то т.к.  $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$ , то  $W_j \in \mathcal{W}_\alpha$ , а следовательно  $W_j \in W$ .

ii.  $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i \in \Omega$ , где  $\mathcal{W}_i \in \Omega$

$\triangleleft W_i \in W \Rightarrow W_i \in \mathcal{W}_\alpha \quad \forall \alpha$ . Если  $W_i \leq W_j$ , то  $W_j \in \mathcal{W}_\alpha \quad \forall \alpha$  и следовательно  $W_j \in W$ .

iii.  $\emptyset \in \Omega, \mathfrak{W} \in \Omega$

Первое выполнено в силу пустотности утверждения (*vacuous*, не знаю, как по-русски). Второе очевидно выполнено.

- (b) Пусть  $\mathcal{W}_\alpha$  и  $\mathcal{W}_\beta$  — открытые множества. Выразите  $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$  и  $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta}$  через  $\mathcal{W}_\alpha$  и  $\mathcal{W}_\beta$  и покажите, что они также открыты.

$$\mathcal{W}_{\alpha \& \beta} = \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \alpha \& \beta\} = \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \alpha\} \cap \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \beta\} = \mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{W}_\beta.$$

$$\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta} = \mathcal{W}_\alpha \cup \mathcal{W}_\beta$$

Открытость тривиальна из того, что  $(\mathfrak{W}, \Omega)$  — топологическое пространство.

- (c) Пусть  $\mathcal{W}_\alpha$  и  $\mathcal{W}_\beta$  — открытые множества. Выразите  $\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta}$  через них и покажите, что оно также открыто.

$$\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta} = (\mathfrak{W} \setminus (\mathcal{W}_\alpha \setminus \mathcal{W}_\beta))^\circ$$

- (d) Покажите, что  $\Omega$  — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы  $\alpha$  множество миров  $\mathcal{W}_\alpha$ , где она вынуждена, всегда открыто ( $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$ ) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для  $Q \in \Omega$  существует формула  $\alpha$ , что  $\mathcal{W}_\alpha = Q$ ).

Покажем, что  $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega \ \forall \alpha$  по индукции.

База:  $\alpha$  есть одна переменная. Искомое выполнено по монотонности вынужденности.

Переход: 4 случая, разобранных в пунктах а, б, с.

Покажем, что  $\forall Q \in \Omega \ Q = \mathcal{W}_\alpha$

Не покажем :(

5. Постройте топологическое пространство, соответствующее (в смысле предыдущего задания) модели Крипке, опровергающей высказывание  $\neg \neg P \rightarrow P$ . Постройте соответствующую ему табличную модель.

$$\mathfrak{W} = \{W_1\}, \Omega = \{\emptyset, \{W_1\}\}$$

6. Назовём *древовидной* моделью Крипке модель, в которой множество миров  $\mathfrak{W}$  упорядочено как дерево: (а) существует наименьший мир  $W_0$ ; (б) для любого  $W_i \neq W_0$  существует единственный предшествующий мир  $W_k : W_k \prec W_i$ .

- (а) Докажите, что любое высказывание, опровергаемое моделью Крипке, может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке.
- (б) Найдите высказывание, которое не может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке высотой менее 2.
- (с) Покажите, что для любого натурального  $n$  найдётся опровержимое в моделях Крипке высказывание, неопровергаемое никакой моделью с  $n$  мирами.

7. Будем говорить, что топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$  *связно*, если нет таких открытых множеств  $A$  и  $B$ , что  $X = A \cup B$ , но  $A \cap B = \emptyset$ . Пусть задана некоторая модель Крипке. Докажите, что соответствующее модели Крипке топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда её граф миров связан в смысле теории графов.

Если граф не связан, то выберем одну КС, все миры в ней будут  $A$ , а остальные миры  $B$ . Несложно заметить, что  $X = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ .

Если пространство не связно, то рассмотрим  $A$  и  $B$  из условия. Предположим, что граф связан, в частности есть ребро  $a \rightarrow b$ , где  $a \in A$ ,  $b \in B$  (или наоборот). Т.к.  $a \leq b$ , то  $b \in A$ , что противоречит  $A \cap B = \emptyset$ .

8. Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в КИВ высказывания).

9. Пусть заданы алгебры Гейтинга  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , гомоморфизм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  и согласованные оценки  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$  и  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$ :  $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$ .

(a) Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если  $a_1 \preceq a_2$ , то  $\varphi(a_1) \preceq \varphi(a_2)$ .

(b) Покажите, что если  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$ , то  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$ .

$$\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = \varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$$

10. Пусть заданы алгебры Гейтинга  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ . Всегда ли можно построить гомоморфизм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ?

11. Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра Гейтинга. Покажите, что  $\Gamma(\mathcal{A})$  — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.

12. Пусть  $\mathcal{A}$  — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что)  $\Gamma(\mathcal{A})$  будет булевой алгеброй?

Не всегда, например в алгебре  $\Gamma(1 \rightarrow 0)$  выполняется следующее:  $1 + (1 \rightarrow 0) = 1$ , а должно быть  $1_{\Gamma}$