

Оглавление

Лекция 1	8 февраля	2
1	Интеграл	4
1.1	Измеримые функции	4
1.2	Меры Лебега-Стилтьеса	8
Лекция 2	15 февраля	9
1.3	Сходимость почти везде и по мере	12
2	Интеграл	16
Лекция 3	22 февраля	18
2.1	Предельный переход под знаком интеграла	22
Лекция 4	1 марта	26
3	Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле.	31
Лекция 5	15 марта	34
4	Возвращаемся в \mathbb{R}^m	36
Лекция 6	22 марта	41
4.1	Сферические координаты в \mathbb{R}^m	41
5	Произведение мер	43

Лекция 1

8 февраля

Лемма 1 (о структуре компактного оператора).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда \exists ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

Примечание. Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

Доказательство. $W := V^*V$ — самосопряженный оператор (матрица симметрична относительно диагонали).

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные (возможно с повторениями)
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

Примечание. Пока мы в \mathbb{R}^m (а не в \mathbb{C}^m), * есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- (1): т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i .

- (2): из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^m V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \stackrel{\text{def } h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \stackrel{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \stackrel{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- (3): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- (4): т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i .
- (5): при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i} \sqrt{c_i}} = 1$

Примечание. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \stackrel{\text{def } x}{=} V \left(\sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i \right) \stackrel{(6)}{=} \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) \stackrel{\text{def } h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \stackrel{(7)}{=} \det(V^* V) \stackrel{\text{def } W}{=} \det W \stackrel{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

Теорема 1 (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

(6): в силу линейности V

(7): в силу мультипликативности \det и инвариантности относительно транспонирования.

(8): т.к. \det инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \dots c_m$.

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

1. Если $\det V = 0$ $\text{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E \quad V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если $\det V \neq 0$ $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти k , для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ — единичный куб на векторах g_i .

$V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$.

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом, $k = |\det V|$

□

1 Интеграл

1.1 Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i$ — разбиение множества.
2. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \quad f|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$

2. $f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

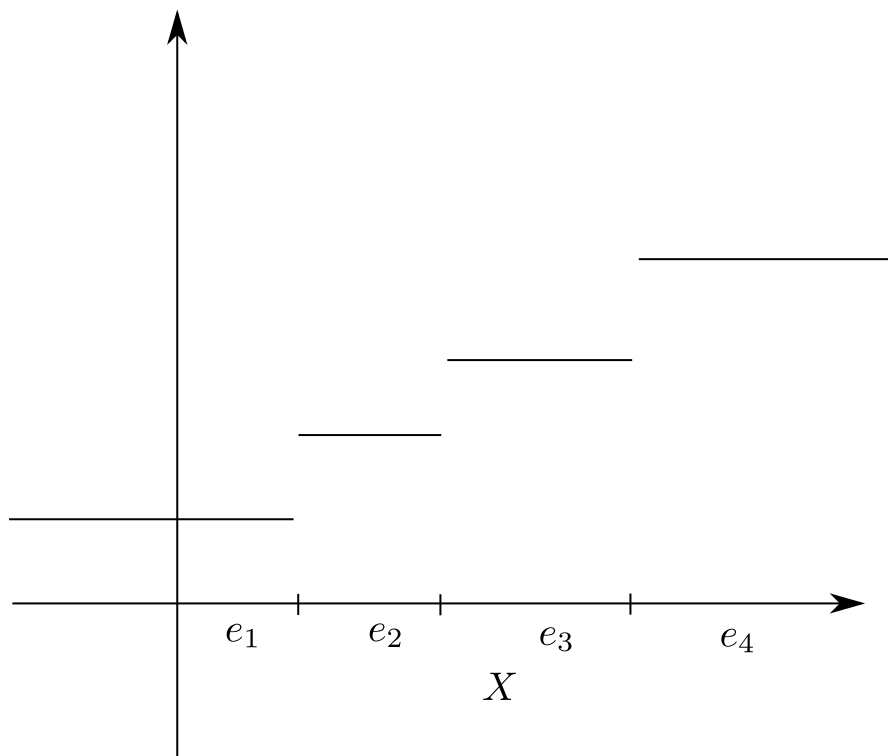


Рис. 1.1: Ступенчатая функция

Свойства.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые:

\exists разбиение X , допустимое и для f , и для g :

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} \quad g = \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k}$$

$$f = \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} \quad g = \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k}$$

2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$ — ступенчатые.

Определение. $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — лебегово множество функции f

Аналогично можно использовать $E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a)$

Примечание.

$$E(f \geq a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \geq a)^c$$

$$E(f \leq a) = \bigcap_{b>a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f **измерима** на множестве E , если $\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

Вместо “ f измерима на X ” говорят просто “измерима”.

Если $X = \mathbb{R}^m$, мера — мера Лебега, тогда f — измеримо по Лебегу.

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \quad E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \quad E(f \leq a)$ — измеримо
3. $\forall a \quad E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \quad E(f \geq a)$ — измеримо

Доказательство. Тривиально по соображениям выше. □

Пример.

1. $E \subset X, E$ — измеримо $\Rightarrow \chi_E$ — измеримо.

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \emptyset, & a < 0 \\ X \setminus E, & 0 \leq a \leq 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно. Тогда f — измеримо по Лебегу.

Доказательство. $f^{-1}((-\infty, a))$ открыто по топологическому определению открытости, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

Свойства.

1. f измеримо на $E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \quad E(f = a)$ измеримо.

В обратную сторону неверно, пример — $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$.

2. f — измеримо $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha f$ — измеримо.

Доказательство. $E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \geq 0 \\ \emptyset, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases} \quad \square$

3. f — измеримо на $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ измеримо на $E = \bigcup E_k$

4. f — измеримо на $E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f$ измеримо на E'

Доказательство. $E'(f < a) = E(f < a) \cap E' \quad \square$

5. $f \neq 0$, измеримо на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ измеримо на E .

6. $f \geq 0$, измеримо на $E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$ измеримо на E .

Это неверно, т.к. при $f \equiv 0, \alpha = -1 \nexists f^\alpha$

Теорема 2. f_n — измеримо на X . Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.

2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.

3. Если $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \stackrel{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

(9):

• $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.

$$\sup_n f_n(x) = g(x) > a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

• $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. \sup и \inf измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

\square

1.2 Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b] := g(b) - g(a)$ — σ -конечный объем (и даже σ -конечная мера на \mathcal{P}^1)

Также можно определить для монотонной, но непрерывной g . Тогда в точках разрыва $\exists g(a+0), g(a-0)$. Пусть $\mu[a, b] = g(b-0) - g(a-0)$. Такое изменение нужно, потому что исходное μ не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру μ_g на некоторой σ -алгебре. Это мера Лебега-Стилтьеса.

Пример. $g(x) = [x]$, тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если μ_g определена на Борелевской σ -алгебре, то она называется мерой Бореля-Стилтьеса.

Лекция 2

15 февраля

Теорема 3 (о характеристике измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- f измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые:

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2. $\forall x \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Доказательство.

$$e_k^{(n)} = X \left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n} \right) \quad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

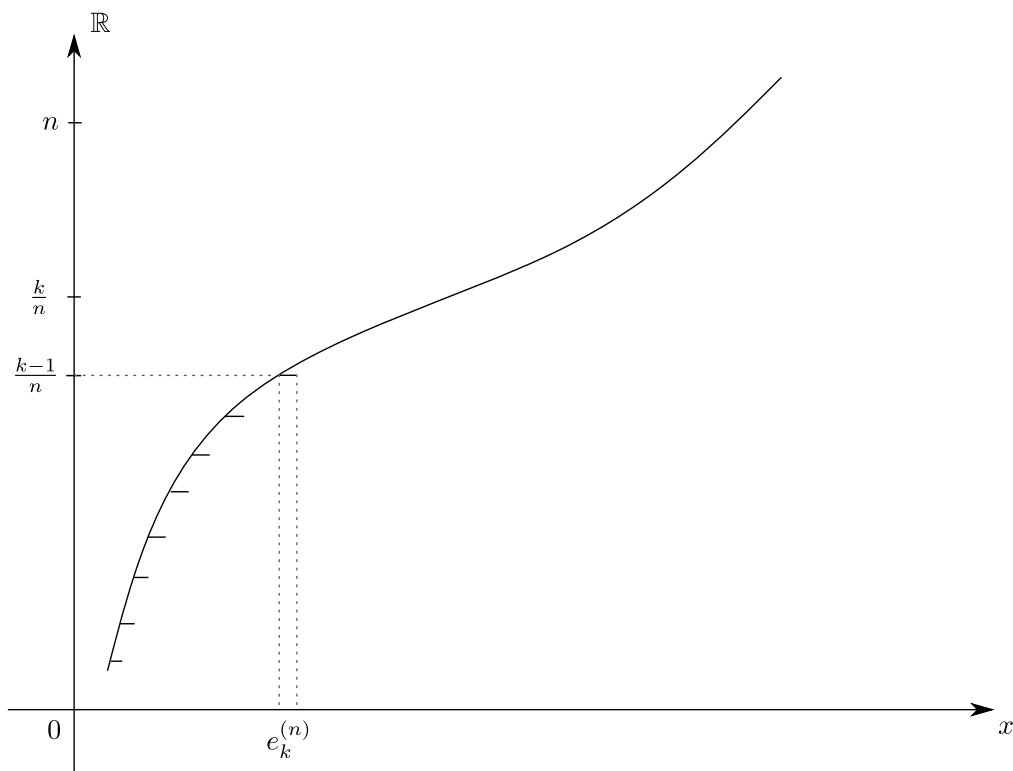
$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

Не дописано.

□

Следствие 3.1.



- f — измеримо

Тогда $\exists f_n$ — измеримые : $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ всюду и $|f_n| \leq |f|$

Доказательство. Рассмотрим срезки f^+, f^- , дальше очевидно. □

Следствие 3.2.

- f, g — измеримо

Тогда fg — измеримо, если $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство.

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \rightarrow fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела. □

Следствие 3.3.

- f, g — измеримо

Тогда $f + g$ измеримо.

Примечание. Считаем, что $\forall x$ не может быть одновременно $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$.

Доказательство.

$$f_n + g_n \rightarrow f + g$$

□

Теорема 4 (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры).

Примечание. $A \subset X$ — **полной меры**, если $\mu(X \setminus A) = 0$.

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывно на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измеримо.

Доказательство. f — измеримо на E' , т.к. $E'(f < a)$ открыто в E' по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e, \lambda_m$ — полная $\Rightarrow e(f < a)$ — измеримо в E .

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, объединение измеримых множеств измеримо. □

Пример. $E = \mathbb{R}, f = \chi_{\text{Irr}}$, где Irr — множество иррациональных чисел. f непр. на Irr и разрывно на \mathbb{R} .

Следствие 4.1.

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- f измеримо на E'

Тогда можно так переопределить f на e , что полученная функция \tilde{f} будет измерима.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E' \\ \text{const}, & x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f < a)} \cup \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\emptyset \text{ или } e}$$

□

Следствие 4.2. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонна.

Тогда f измерима.

Доказательство. f — непрерывно на $\langle a, b \rangle$ за исключением, возможно, счётного множества точек. □

Упражнение. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна.

Доказать: $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$ — измеримо.

Упражнение. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримо.

Доказать: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ — измеримо.

Упражнение. Доказать, что \exists измеримая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \lambda e = 0$, если f непрерывно на e , то полученная \tilde{f} разрывна всюду.

1.3 Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верно при почти всех из E = почти всюду на E = почти везде на E = п.в. E , если:

$\exists e \in E : \mu e = 0$ $W(x)$ — истинно при $x \in E \setminus e$

Пример. $X = \mathbb{R}$, W = иррационально.

Пример. $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(x)$ при п.в. $x \in E$

Свойства.

1.
 - μ — полная
 - $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ п.в. X
 - f_n измеримо

Тогда f измеримо.

Доказательство. $f_n \rightarrow f$ на X' , где $e = X \setminus X'$, $\mu e = 0$

f — измеримо на X

μ — полная $\Rightarrow f$ измеримо на X , т.к. $X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subset e}$ □

2. ???

3. Пусть $\forall n \ W_n(x)$ истинно при почти всех x .

Тогда утверждение “ $\forall n \ W_n$ истинно” — верно при почти всех X

Доказательство. $\langle e_n : \mu(e_n) = 0$. Искомое высказывание верно при $x \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right)$, $\mu(\bigcup e_i) = 0$ □

Определение. $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечны.

f_n сходится к f по мере μ , обозначается $f_n \xrightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0, т.е. предел не задан однозначно.

Упражнение. $f_n \xrightarrow[\mu]{} f; f_n \xrightarrow[\mu]{} g$. Тогда f и g эквивалентны.

Пример.

1. $f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$

$f_n \rightarrow f$ всюду на $(0, +\infty)$

$f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \geq \varepsilon\right) = X\left(x \leq \frac{1}{\varepsilon n}\right)$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \rightarrow 0$$

2. $f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$

$f_n(x) \rightarrow 0$ при всех x

$f_n(x) \xrightarrow[\mu]{} 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\rightarrow 0$$

3. $n = 2^k + l, 0 \leq l < 2^k, X = [0, 1], \lambda$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

$\lim f_n(x)$ не существует ни при каком x !

$$X(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[\lambda]{} 0$$

Теорема 5 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- μX конечно
- f_n, f — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \rightarrow f$ п.в.

Тогда $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0, то есть $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon)$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху, $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

Рассмотрим общий случай: $f_n \rightarrow f, \varphi(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда $\varphi_n \rightarrow 0, \varphi_n \geq 0$ и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon) \\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

□

Теорема 6 (Рисс).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

Доказательство.

$$\forall k \quad \mu X \left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \rightarrow 0$$

$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \quad \mu X \left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что $f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X \left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \stackrel{(10)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X \left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\mu E_k \rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при $x \notin E$ $f_{n_k} \rightarrow f$.

$$x \notin E \quad \exists N \quad x \notin E_k \text{ при } k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$.

Т.к. $\mu E = 0$, искомое выполнено. □

Следствие 6.1. $f_n \xrightarrow[\mu]{} f \quad |f_n| \leq g$ почти всюду. Тогда $|f| \leq g$ почти всюду.

Доказательство. $\exists n_k \quad f_{n_k} \rightarrow f$ почти всюду. □

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \Rightarrow f_n \xrightarrow[\mu]{} f$$

Теорема 7 (Егорова).

- X, \mathfrak{A}, μ
- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечно, измеримо

(10): по счётной полуаддитивности меры.

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \xrightarrow[X \setminus e]{} f$$

Доказательство. Упражнение. □

2 Интеграл

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — зафиксировали.

Определение (1).

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- E_k — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu(x) := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

Свойства.

1. Не зависит от представления f в виде суммы, т.е.:

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

Примечание. При $E_k \cap E'_j \neq \emptyset$ $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow$ можно писать любое из них.

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu (E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

$$2. \underbrace{f}_{\text{ст.}} \leq \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$$

Определение (2).

- $f \geq 0$
- f измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g - \text{ст.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Свойства.

- Если f ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$
- $g \leq f, f - \text{измеримая}, g - \text{измеримая} \Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение (3).

- f измеримо
- $\int f^+$ или $\int f^-$ конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

Теорема 8 (Тонелли).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f измерима
- Записывается как $f(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{m+n} \quad E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ измерима на \mathbb{R}^n
2. Функция $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$, измерима и корректно задана.
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Примечание. Неформально говоря, можно разбить \mathbb{R}^{m+n} на \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.

Лекция 3

22 февраля

Определение. Если оказалось, что $\int_X f^+, \int_X f^-$ оба конечны, то f называется суммируемой.

Примечание.

1. Если f измеримо и \geq , то интеграл определения 3 = интегралу определения 2.

Определение (4).

- $E \subset X$ — измеримо
- f измеримо на X

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E$$

Примечание.

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \Rightarrow \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$
- $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g : 0 \leq g \leq f \text{ на } E, g - \text{степ.}\}$ и мы считаем, что $g \equiv 0$ вне E .
- $\int_E f$ не зависит от значений f вне множества E .

Свойства. (X, \mathcal{A}, μ) — пространство с мерой, $E \subset X$ — измеримо, g, f — измеримо.

1. Монотонность $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

Доказательство.

- (а) При $f, g \geq 0$ — очевидно из определения.
- (б) При произвольных f, g $f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$ (очевидно из определения). Из предыдущего случая $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$.

□

$$2. \int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$$

$$3. \mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$$

Доказательство.

(a) f — ступ. Тривиально.

(b) f — измеримо, $f \geq 0$. $\sup 0 = 0$, поэтому искомое выполнено.

$$(c) \int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$$

□

Примечание. f — измерима. Тогда f суммируема $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

Доказательство.

$$\Leftarrow \text{ следует из } f^+, f^- \leq |f|$$

\Rightarrow будет доказано позже на этой лекции.

□

$$4. \int_E (-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$$

Доказательство.

(a) $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$, тогда искомое очевидно.

(b) Можно считать $c > 0$ без потери общности, тогда для $f \geq 0$ тривиально.

□

$$5. \exists \int_E f d\mu. \text{ Тогда } \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} -|f| &\leq f \leq |f| \\ -\int |f| &\leq \int f \leq \int |f| \\ \left| \int f \right| &\leq \int |f| \end{aligned}$$

□

$$6. \mu E < +\infty, a \leq f \leq b. \text{ Тогда}$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

Следствие 8.1. f — измеримо на E , f — ограничено на E , $\mu E < +\infty$. Тогда f суммируемо на E

7. f суммируема на E . Тогда f почти везде конечна.

Доказательство.

(a) $f \geq 0$ и $f = +\infty$ на $A \subset E$. Тогда $\int_E f \geq n\mu A \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

(b) В произвольном случае аналогично со срезками.

□

Лемма 2.

- $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ — измеримо
- g — ступенчато
- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\stackrel{(11)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu \end{aligned}$$

□

Теорема 9.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на A
- $f \geq 0$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

(11): переставлять можно, т.к. члены суммы ≥ 0 .

Доказательство. Докажем, что части равенства \leq и \geq , тогда равенство выполнено.

$$\leq \quad \text{и} \quad g : 0 \leq g \leq f$$

$$\int_A g \stackrel{(12)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$$\geq \quad 1. \quad A = A_1 \sqcup A_2$$

$0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f\chi_{A_2}$. Пусть E_k — совместное разбиение, у g_1 коэффициенты α_k , у g_2 : β_k .

$$\begin{aligned} 0 \leq g_1 + g_2 &\leq f\chi_A \\ \int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 &= \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 &\leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} f &\leq \int_A f \end{aligned}$$

2. $A = \bigsqcup A_i$ тривиально по индукции.

3. $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

□

Следствие 9.1. $f \geq 0$ — измеримо. Пусть $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\nu E := \int_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

Следствие 9.2 (Счётная аддитивность интеграла). f суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. Очевидно, если рассмотреть срезки. □

Следствие 9.3. $A \subset B, f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

(12): по лемме об интеграле.

2.1 Пределный переход под знаком интеграла

Пусть $f_n \rightarrow f$. Можно ли утверждать, что $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$?

Пример (контр).

$$f_n := \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \quad f \equiv 0 \quad f_n \rightarrow f \quad (\text{даже } f_n \rightrightarrows f)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n} \lambda[0, n] = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 10 (Леви).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n измеримо
- $\forall n \quad 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде.
- $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Примечание. f задано везде, кроме множества e меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e . Тогда f измеримо на X .

Доказательство.

\leq очевидно, т.к. $\int f_n \leq \int f$ почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_0 = \int_{X \setminus e} f_n \leq \int_{X \setminus e} f \leq \int_X f$$

\geq достаточно проверить, что \forall ступенчатой $g : 0 \leq g < f$ выполняется следующее

$$\lim \int_X f_n \geq \int_X g$$

Сильный трюк: достаточно проверить, что $\forall c \in (0, 1) \quad \lim \int_X f_n \geq c \int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \stackrel{(13)}{=} c \int_X g$

□

Теорема 11.

- $f, g \geq 0$
- f, g измеримо на E

Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые, т.е. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$, измеримо. \exists ступ. $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \lim f_n = f$

$$g \geq 0, \text{ измеримо. } \exists \text{ ступ. } g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \lim g_n = g$$

$$\begin{aligned} f_n + g_n &\rightarrow f + g \\ \int_E f_n + g_n &\xrightarrow{\text{т. Леви}} \int_E f + g \\ \int_E f_n + \int_E g_n &\rightarrow \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

□

Следствие 11.1. f, g суммируемы на E . Тогда $f + g$ суммируемо и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$. Таким образом, доказано 3.

Доказательство суммируемости. $|f + g| \leq |f| + |g|$. Пусть $h = f + g$. Тогда

$$\begin{aligned} h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ h^+ + f^- + g^- &= f^+ + g^+ + h^- \\ \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^- \\ \int_E h^+ - \int_E f^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^- \end{aligned}$$

□

(13): по непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

Определение. $\mathcal{L}(X)$ — множество суммируемых функций на X

Следствие 11.2 (следствия). $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ это линейный функционал¹ на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1 \dots f_n \in \mathcal{L}(X) \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

???

Теорема 12 (об интегрировании положительных рядов).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$ почти везде
- u_n измеримо

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_k \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

Пусть $S_n \rightarrow S$. Тогда $\int_E S_n \rightarrow \int_E S$

□

Следствие 12.1. u_n измеримо и $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда ряд $\sum u_n(x)$ абсолютно сходится при почти всех x .

Доказательство.

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произвольная последовательность, $\sum a_n$ абсолютно сходится.

Тогда $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ абсолютно сходится при почти всех x .

¹ т.е. функция функций

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде.

$$\begin{aligned}\int_{[-N, N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &= \int_{-N}^N \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} dx \\ &= |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &\leq |a_n| \int_{-N}^N \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &= 4\sqrt{N}|a_n|\end{aligned}$$

□

Лекция 4

1 марта

Теорема 13 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- f суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E - \text{изм.}, \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

Следствие 13.1. f суммируемо на X , $E_n \subset X$, тогда $\mu E_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \rightarrow 0$

Доказательство. ¹

$$\begin{aligned}
 X_n &:= X(|f| \geq n) \\
 X_n \supset X_{n+1} \supset \dots &\Rightarrow \mu \left(\bigcap X_n \right) \stackrel{(14)}{=} 0 \\
 \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| &< \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| \stackrel{(16)}{=} \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{\delta} \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

¹ Теоремы, не следствия

(14): Т.к. f на $\bigcap X_n$ бесконечна и f почти везде конечна.

(15): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$

(16): Т.к. $|f|$ на $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$ не превосходит n_ε по построению X_{n_ε}

Примечание. Следующие два свойства не эквивалентны:

1. $f_n \xRightarrow[\mu]{} f \stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

Из 1 не следует 2: пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$, $f_n = \frac{1}{nx}$. Тогда $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$, но $\int |f_n - f| = +\infty$ при всех n .

Из 2 следует 1, т.к.

$$\underbrace{\mu X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Теорема 14 (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:

1. $\forall n \quad |f_n| \stackrel{(17)}{\leq} g$ почти везде
2. g — суммируемо на X

Тогда: f_n, f — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Примечание. Почти везде конечность f_n и f следует из (17), поэтому в условии этого можно не требовать.

Доказательство. f_n — суммируемы в силу неравенства (17), f суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1. $\mu X < +\infty$

Зафиксируем ε . $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

$f_n \xRightarrow{\mu} f$, т.е. $\mu X_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq 2g \\ \int_X |f_n - f| &= \int_{X_n} + \int_{X_n^c} = \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{сл. т. об абс. непр.}} 0} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X \end{aligned} \tag{18}$$

2. $\mu X = +\infty$

Утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset X$, изм., конечной меры, μA конечно : $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$.
Докажем его.

$$\begin{aligned} \int_X g &= \sup \left\{ \int g_n, 0 \leq g_n \leq g, g_n - \text{ступ.} \right\} \\ A &:= \{x : g_n(x) > 0\} \\ 0 &\leq \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon \\ \int_X |f_n - f| d\mu &= \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{< 2\varepsilon} < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема 15 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо
- $f_n \xrightarrow{(19)} f$ почти везде
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:
 1. $\forall n \ |f_n| \leq g$ почти везде
 2. g — суммируемо на X

Тогда f_n, f — суммируемы, $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$, и тем более $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$

Доказательство. Суммируемость f_n, f , а также утверждение “и тем более” доказываются так же, как в теореме [Лебега о предельном переходе под знаком интеграла](#).

$$\begin{aligned} h_n &:= \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \dots) \\ 0 &\stackrel{(20)}{\leq} h_n \stackrel{(21)}{\leq} 2g \end{aligned}$$

h_n монотонно убывает, что очевидно по определению \sup .

$$\lim h_n \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim} |f_n - f| \stackrel{(22)}{=} 0 \text{ почти везде}$$

(20): по построению

(21): по (18)

(22): по (19)

$2g - h_n \geq 0$ и возрастает как последовательность функций, $2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде. Тогда по теореме [Левы](#):

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

□

Пример. $x > 0, x_0 > 0$

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} e^{-t} dt$$

Равенство выполнено, т.к. $t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} t^{x_0-1} e^{-t}$ при $t > 0$ и суммируемая мажоранта $t^{\alpha-1} e^{-t} + t^{\beta-1} e^{-t}$, где $0 < \alpha < x_0, 0 < \beta$

Теорема 16 (Фату).

- X, \mathfrak{A}, μ — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$
- f_n измеримо
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- $\exists C > 0 \forall n \int_X f_n \leq C$

Тогда $\int_X f \leq C$

Примечание. Странность: здесь не требуется, чтобы $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ и это может быть неверно.

Пример.

$$f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \rightarrow 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \leq 1$$

По теореме [Фату](#) $\int_{\mathbb{R}} f \leq 1$, что верно, т.к. $\int_{\mathbb{R}} f = 0 \leq 1$

Пример. Условие $f_n \geq 0$ важно:

$$f_n = -\frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \rightarrow 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = -1 \leq -1, \text{ но } \int_{\mathbb{R}} f = 0 \not\leq -1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 g_n &:= \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \\
 0 &\leq g_n \leq g_{n+1} \\
 \lim g_n &\stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim} f_n = f \text{ п.в.} \\
 \int_X g_n &\leq \int_X f_n \leq C \\
 \int_X g_n &\stackrel{(24)}{\rightarrow} \int_X f
 \end{aligned} \tag{23}$$

Значит $\int_X f \leq C$ по предельному переходу в (23)

□

Следствие 16.1.

- $f_n, f \geq 0$
- f_n, f измеримы
- f_n, f почти везде конечны
- $f_n \Rightarrow f$
- $\exists C > 0 \ \forall n \ \int_X f_n \leq C$

Тогда $\int_X f \leq C$

Доказательство.

$$f_n \Rightarrow f \implies \exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f \text{ п.в.}$$

По теореме [Фату](#) получим искомое.

□

Следствие 16.2.

- $f_n \geq 0$
- f_n измеримо

Тогда $\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$

Доказательство. Возьмём (23) как в теореме. Выберем $n_k : \int_X f_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$

$$\begin{aligned}
 \int_X g_{n_k} &\leq \int_X f_{n_k} \\
 \downarrow \\
 \int_X \underline{\lim} f_n &\leq \underline{\lim} \int_X f_n
 \end{aligned}$$

□

3 Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле.

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, (Y, \mathfrak{B}, ν) , $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть Φ — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

Упражнение. Проверить, что Φ^{-1} — σ -алгебра.

Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$. Тогда ν — мера:

$$\nu\left(\bigcup E_n\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigcup E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup \Phi^{-1}(E_n)\right) = \sum \mu\Phi^{-1}E_n = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется **образом** μ при отображении Φ и $\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

Наблюдение 1. $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо относительно \mathfrak{B} . Тогда $f \circ \Phi$ — измеримо относительно \mathfrak{A} .

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \stackrel{(25)}{\in} \mathfrak{A}$$

Определение. $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$, измеримо на X .

$$\forall B \in \mathfrak{B} \quad \nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

Тогда ν называется “**взвешенный образ меры μ** ”, ω называется **весом**.

Теорема 17 (о вычислении интеграла по взвешенному образу меры).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- (Y, \mathfrak{B}, ν) — пространство с мерой
- $\Phi : X \rightarrow Y$
- $\omega \geq 0$
- ω измеримо на X
- ν взвешенный образ μ при отображении Φ с весом ω

Тогда \forall измеримой относительно \mathfrak{B} f на Y , $f \geq 0$ выполнено следующее:

(25): т.к. $Y(f < a) \in \mathfrak{B}$

1. $f \circ \Phi$ измеримо на X относительно \mathfrak{A}

2.

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \quad (26)$$

То же самое верно для суммируемой f .

Доказательство. Измеримость $f \circ \Phi$ выполнена по наблюдению 1.

0. Пусть $f = \chi_B, B \in \mathfrak{B}$

$$(f \circ \Phi)(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

Тогда (26) это:

$$\mu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Это выполнено по определению μB

1. Пусть f — ступенчатая

(26) следует из линейности интеграла.

2. Пусть $f \geq 0$, измеримая

По теореме о характеристизации измеримых функций с помощью ступенчатых и теореме Леви $\exists \{h_i\} : 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ — ступенчатые, $h_i \leq f, h_i \rightarrow f$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \quad (26)$$

3. Пусть f измерима.

Тогда для $|f|$ выполнено (26); $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ суммируемы одновременно.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega \quad (f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega$$

Таким образом, искомое выполнено для f_+ и f_- , а следовательно и для f .

□

Следствие 17.1 (об интегрировании по подмножеству). В условиях теоремы пусть:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f суммируемо на Y

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega d\mu$$

Доказательство. В условие теоремы подставим $f \cdot \chi_B$

□

Определение. Рассмотрим частный случай: $X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \text{id}$. Кажется, что мы убили всю содержательность, но это не так — есть ещё ω .

$$\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$$

В этой ситуации ω называется **плотностью** меры ν относительно меры μ и тогда по теореме [о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#):

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x) \omega(x) d\mu$$

Лекция 5

15 марта

Определение.

- X, \mathfrak{A}, μ — пространство с мерой
- $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — мера

Плотность меры ν относительно μ есть положительная измеримая функция $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, такая что:

$$\forall B \in \mathfrak{A} \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$$

Теорема 18 (критерий плотности).

- X, \mathfrak{A}, μ — пространство с мерой
- ν — мера
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $\omega \geq 0$
- ω измеримо

Тогда ω — плотность ν относительно $\mu \Leftrightarrow$:

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \sup_A \omega$$

При этом $0 \cdot \infty$ считается $= 0$.

Пример (отсутствие плотности). $X = \mathbb{R}, \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^1, \mu = \lambda_1$

ν — одноточечная мера: $\nu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$

Необходимое условие существования плотности — $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Это и достаточное условие по теореме Радона-Никодима¹.

Доказательство теоремы *критерий плотности*.

“ \Rightarrow ” Очевидно.

“ \Leftarrow ” Рассмотрим $\omega > 0$. Общность не умаляется, т.к. пусть $e = X(\omega = 0)$, тогда $\nu(e) \stackrel{\text{def}}{=} \int_e \omega d\mu = 0$, поэтому в случае $A \cap e \neq \emptyset$ всё ещё только лучше.

Фиксируем число $q \in (0, 1)$.

$$A_j := A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(27)}{\leq} \nu A_j \stackrel{(28)}{\leq} \mu A_j \sup_{A_j} q^{j-1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(29)}{\leq} \int_{A_j} \omega d\mu \stackrel{(30)}{\leq} \mu A_j q^{j-1}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} q \cdot \int_A \omega d\mu &\leq q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &\stackrel{(31)}{\leq} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(32)}{\leq} \underbrace{\sum \nu A_j}_{\nu A} \\ &\stackrel{(33)}{\leq} \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(34)}{\leq} \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &= \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu \end{aligned}$$

То есть:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

¹ Возможно, мы разберём её в конце семестра.

(32): по (27)

(33): по (28)

(34): по (29)

(31): по (30)

Тогда предельный переход при $q \rightarrow 1 - 0$ дает искомое.

□

Лемма 3.

- f, g суммируемы
- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде.

Доказательство. $h := f - g$. Дано: $\forall A \quad \int_A h = 0$; доказать — $h = 0$ почти везде.

$$A_+ := X(h \geq 0) \quad A_- := X(h < 0) \quad X = A_+ \sqcup A_-$$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0 \quad \int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0 \implies \int_X |h| = 0 \implies h = 0 \text{ п.в.}$$

□

Примечание. Если $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, отображение $l_A : f \mapsto \int_A f$ есть линейный функционал. Таким образом, множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ разделяет точки, т.е. $\forall f \neq g \in \mathcal{L}(X) \quad \exists A : l_A(f) \neq l_A(g)$

Примечание. В \mathbb{R}^m $a = (a_1 \dots a_m)$, $l_a : x \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$. Тогда $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \exists a : l_a(x) \neq l_a(y)$.

4 Возвращаемся в \mathbb{R}^m

Лемма 4 (о мере образа малых кубических ячеек).

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- O открыто
- $a \in O$
- $\Phi \in C^1$
- $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \quad \forall$ куба $Q \subset B(a, \delta)$, $a \in Q$ выполняется неравенство $\lambda \Phi(Q) < c \lambda Q$

Примечание. Здесь можно считать, что Q — замкнутые кубы.

² Кажется, здесь должно быть “ \neq ”

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо³

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a) \\ \underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} &= x + o^4(x - a)\end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар } B_{\varepsilon^5}(a) \forall x \in B_{\varepsilon}(a) |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$$

Пусть $Q \subset B_{\varepsilon}(a)$, $a \in Q$, Q — куб со стороной h .

При $x \in Q$:

$$\begin{aligned}|x - a| &\leq \sqrt{m}h \\ |\Psi(x) - x| &\stackrel{(35)}{<} \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a| \leq \varepsilon h\end{aligned}$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ куб со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$, т.к. при $x, y \in Q$

$$\begin{aligned}|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| &\leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \\ &\leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \\ &\leq (1 + 2\varepsilon)h\end{aligned}$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением.

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L|(1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Выбираем ε такое, чтобы $|\det L|(1 + 2\varepsilon)^m < c$, потом берём $\delta = \text{радиус } B_{\varepsilon}(a)$ □

Лемма 5.

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- O открыто
- f непрерывна

³ т.к. $\det \Phi'(a) \neq 0$

⁴ Это не то же самое o , что строчкой выше.

⁵ Это не радиус шара, а параметр.

(35): т.к. $x \in B_{\varepsilon}(a)$

- A измеримо
- $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$
- Q — кубическая ячейка

Тогда:

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ откр. } \subset O}} \lambda(G) \cdot \sup_G f = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство. Упражнение. □

Теорема 19.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Φ диффеоморфизм

Тогда

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \quad \lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Доказательство.

Обозначение.

- $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
- $\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера

Надо доказать, что J_Φ — плотность ν относительно λ .

Достаточно проверить условие теоремы **критерий плотности**, что \forall измеримого A :

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu(A) \stackrel{(36)}{\leq} \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$$

Достаточно проверить только правое неравенство, т.к. левое неравенство — правое неравенство для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1}

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \leq \lambda A$$

1. Проверяем (36) для случая A — кубическая ячейка, $A \subset \overline{A} \subset O$

От противного: $\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$

Возьмём $C > \sup_Q J_\Phi : C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$.

Запускаем половинное деление: режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем “мелкую” ячейку $Q_1 \subset Q : C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берём $Q_2 \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и т.д.

$$a \in \bigcap \overline{Q_i}$$

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n \quad C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \quad (37)$$

$C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi$, в частности $c > |\det \Phi'(a)|$. Мы получили противоречие с леммой [о мере образа малых кубических ячеек](#): в сколько угодно малой окрестности a имеются кубы $\overline{Q_n}$, где выполнено (37)

2. Проверяем (36) для случая A открыто.

Это очевидно, т.к. $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \overline{Q_j} \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \cdot \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \quad (38)$$

3. По лемме [5](#) неравенство (36) выполнено для всех измеримых A :

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — кубы } Q_j \subset \overline{Q_j} \subset O, A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j}$$

$$\nu A_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \inf_G (\sup_G J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

Аналогично формуле (38) получаем $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$

□

Теорема 20.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Φ дифференцируемо

Тогда \forall измеримой $f \geq 0$, заданной на $O' = \Phi(O)$:

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda, \quad J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$$

То же самое верно для суммируемой f .

Доказательство. Применяем теорему [о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#) при $X = Y = \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$, $\mu = \lambda$, $\nu(A) = \lambda(\Phi(A))$:

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}B} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

По теореме 19 $\lambda(B) = \int_{\Phi^{-1}(O)} J_{\Phi} d\lambda$, т.е. λ — взвешенный образ исходной меры по отношению к Φ \square

Пример.

1. Полярные координаты в \mathbb{R}^2 :

$$\Phi = \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \Phi : \{(r, \varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det \Phi' = r \quad J_{\Phi} = r$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d\lambda_2$$

2. Сферические координаты в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi) \\ \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix} \quad J_{\Phi} = r^2 \cos \psi$$

$$\det \Phi' = r^2 (\sin^2 \psi \cos \psi + \cos^3 \psi) = r^2 \cos \psi$$

Лекция 6

22 марта

4.1 Сферические координаты в \mathbb{R}^m

Координаты задаются $r, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}$. Зададим их по индукции:

- φ_1 — угол между \bar{e}_1 и $\overline{OX} \in [0, \pi]$
- φ_2 — угол между \bar{e}_2 и $P_{2(e_2 \dots e_n)}(x) \in [0, \pi]$
- \vdots
- φ_{m-1} — полярный угол в \mathbb{R}^2

$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$$

$$J = r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$$

Примечание. В \mathbb{R}^3 “географические” координаты имеют якобиан $J = r^2 \cos \psi$

Поймём, почему якобиан именно такой. Можно его посчитать руками, но это трудно.

1 шаг

$$x_m = \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-1} = \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1}$$

$$(x_1 \dots x_m) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1})$$

$$J = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & J_2 \end{vmatrix} = \rho_{m-1}$$

2 шаг

$$\rho_{m-1} = \rho_{m-2} \sin \varphi_{m-2}$$

$$x_{m-2} = \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2}$$

$$(x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-3}, \rho_{m-2}, \varphi_{m-2}, \varphi_{m-1})$$

последний шаг

$$(x_1 \rho_2, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r, \varphi_1 \dots \varphi_{m-1})$$

$$\rho_2 = r \sin \varphi_1$$

$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \lambda_m(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 d\lambda_m \\ &\stackrel{1 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_1} \rho_{m-1} \\ &\stackrel{2 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_2} \rho_{m-2}^2 \sin \varphi_{m-2} \\ &\stackrel{3 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_3} \rho_{m-3}^3 \sin^2 \varphi_{m-3} \sin \varphi_{m-2} \\ &= \dots \\ &= \int_{\Omega_{m-1}} r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} d\lambda \end{aligned}$$

Тогда по теореме о единственности плотности искомое верно.

5 Произведение мер

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu) — пространства с мерой$

Лемма 6. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} — полукольца \Rightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\} — полукольцо.$

Доказательство. Тривиально. □

Обозначение. $\mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} — называем измеримыми прямоугольниками.$

$m_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, при этом $0 \cdot \infty$ принимаем за 0.

Теорема 21.

1. $m_0 — мера на \mathcal{P}$
2. $\mu, \nu — \sigma\text{-конечны} \Rightarrow m_0 \text{ тоже } \sigma\text{-конечно.}$

Доказательство.

1. Проверим счётную аддитивность m_0 , т.е. $m_0 P = \sum_{k=1}^{+\infty} m_0 P_k^1$, если $A \times B = P = \bigsqcup P_k$, где $P_k = A_k \times B_k$

Заметим, что $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$.

Тогда $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$, где $\forall x \in X, y \in Y \quad \chi_A(x) \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$

Проинтегрируем по y по мере ν по пространству Y :

$$\chi_A(x) \nu B = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

Проинтегрируем по x по мере μ по пространству X :

$$\mu A \nu B = \sum \mu A_k \nu B_k$$

Это и есть искомое.

2. Очевидно, т.к.:

- $\mu \sigma\text{-конечно} \Rightarrow X = \bigcup X_k, \mu X_k — конечно \forall k$
- $\nu \sigma\text{-конечно} \Rightarrow Y = \bigcup Y_n, \nu Y_n — конечно \forall k$

Тогда $X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n, m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n$. Конечное произведение конечных конечно, поэтому $m_0 \sigma\text{-конечно.}$

□

¹ Прочие суммы/объединения также счётны в рамках данного доказательства.

Определение.

- $\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν σ -конечны

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 на σ -алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ²

Обозначение. $m = \mu \times \nu$

$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ — **произведение пространств с мерой** (X, \mathfrak{A}, μ) и (Y, \mathfrak{B}, ν)

Примечание.

- Это произведение ассоциативно.
- σ -конечность нужна для единственности произведения.

Теорема 22. $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$

Доказательство. Не будет. □

Определение. X, Y — множества, $C \subset X \times Y$

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad C_x &:= \{y \in Y : (x, y) \in C\} \\ \forall y \in Y \quad C^y &:= \{x \in X : (x, y) \in C\} \end{aligned}$$

C_x, C^y называется **сечением**.

Примечание.

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcup (C_{\alpha})_x \quad \left(\bigcap C_{\alpha} \right)_x = \bigcap (C_{\alpha})_x \quad (C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

Теорема 23 (принцип Кавальери³).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- μ, ν — σ -конечны.
- μ, ν — полные.
- $m = \mu \times \nu$

² \otimes — не тензорное произведение

³ Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.

$$\bullet C \in A \otimes B$$

Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая⁴ функция на X
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y .

Пример. ???

Доказательство. Пусть \mathfrak{D} — система множеств, для которых выполнено 1.-3.

1. $C = A \times B \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$

$$(a) C_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin A \\ B, x \in A \end{cases}$$

$$(b) x \mapsto \nu(C_x) — функция \nu B \cdot \chi_A$$

$$(c) \int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$$

2. $E_i \in \mathfrak{D}$, дизъюнкты $\Rightarrow \bigsqcup E_i \in \mathfrak{D}$. Обозначим $E = \bigsqcup E_i$

$E_i \in \mathfrak{D} \Rightarrow (E_i)_x$ измеримо почти везде \Rightarrow при почти всех x все $(E_i)_x$ измеримы.

Тогда при $\clubsuit\clubsuit$ -тих x $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$ — это 1.

$$\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\substack{\text{измеримая} \\ \text{функция}}} \Rightarrow \text{Функция } x \mapsto \nu E_x \text{ измеримо — это 2.}$$

$$\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x = \sum_i mE_i = mE — это 3.$$

3. $E_i \in \mathfrak{D}, E_1 \supset E_2 \supset \dots, E = \bigcap_i E_i, \mu E_i < +\infty$. Тогда $E \in \mathfrak{D}$.

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x — конечно при почти всех x .$$

$$\forall x \text{ верно } (E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots, E_x = \bigcap (E_i)_x$$

Тогда E_x измеримо (это 1.) и $\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$ при п.в. x .

Таким образом, $x \mapsto \nu E_x$ измерима — это 2.

$$\int_x \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE — это 3.$$

По теореме Лебега $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_i)_x$ суммируемо.

Итого: Если $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathfrak{D}$

⁴ функция задана при почти всех X ; она равна п.в. некоторой измеримой функции, заданной всюду

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{D}$

$mE = \inf \{ \sum m_0 P_k : E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P} \}$ — из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

\exists множество H вида $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$, т.е. $H \in \mathfrak{D}$.

$$E \subset H, mH = mE = 0$$

$$0 = mH = \int_X \underbrace{\nu H_x}_{\geq 0} d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ про почти всех } x.$$

$E_x \subset H_x, \nu$ — полная $\Rightarrow E_x$ — измеримо при почти всех x — это 1 и $\nu E_x = 0$ почти везде, это 2.

$$\int \nu E_x d\mu = 0 = mE \text{ — это 3.}$$

5. C — измеримо, $mC < +\infty$. Тогда $C \in \mathfrak{D}$.

$$C = H \setminus e, \text{ где } H \text{ имеет вид } \bigcap \bigcup P_{kl}, me = 0$$

$$mC = mH$$

(a) $C_x = H_x \setminus e_x$ — измеримо при почти всех x

(b) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x \Rightarrow$ измеримо.

$$(c) \int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$$

6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$

$$X = \bigcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$$

$$C = \bigcup \underbrace{(C \cap (X_k \times Y_j))}_{\text{???} < +\infty} \text{ ???}$$

□

Следствие 23.1. C измеримо в $X \times Y$. Пусть $P_1(C) = \{x \in X, C_x \neq \emptyset\}$ — проекция C на X .

Если $P_1(C)$ измеримо, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Доказательство. При $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$

□

Примечание.

1. C измеримо $\nRightarrow P_1(C)$ измеримо.

2. C измеримо $\nRightarrow \forall x$ C_x измеримо.

3. $\forall x, \forall y \ C_x, C_y$ измеримо $\nRightarrow C$ измеримо.

Пример Серпинского.