Гомотопия

Неформально гомотопия — непрерывная деформация объектов. У нас рассматриваемые объекты — пути.

Определение. **Гомотопия** двух (*непрерывных*) путей $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ это непрерывное отображение $\Gamma : \underbrace{[a, b]}_{t} \times \underbrace{[0, 1]}_{u} \to O$, такое что:

- $\Gamma(\circ, 0) = \gamma_0$
- $\Gamma(\circ, 1) = \gamma_1$

Гомотопия **связанная** (*не связная*), если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$
- $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1]\ \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_1(b)$

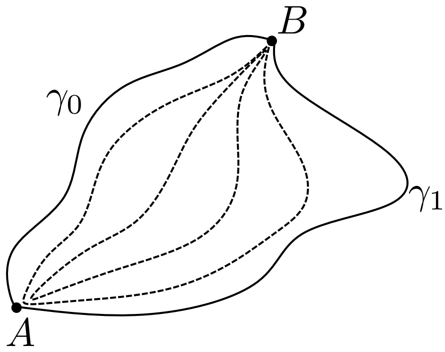


Рис. 1: Связанная гомотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных u

Гомотопия **петельная**, если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$
- $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1]\ \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$

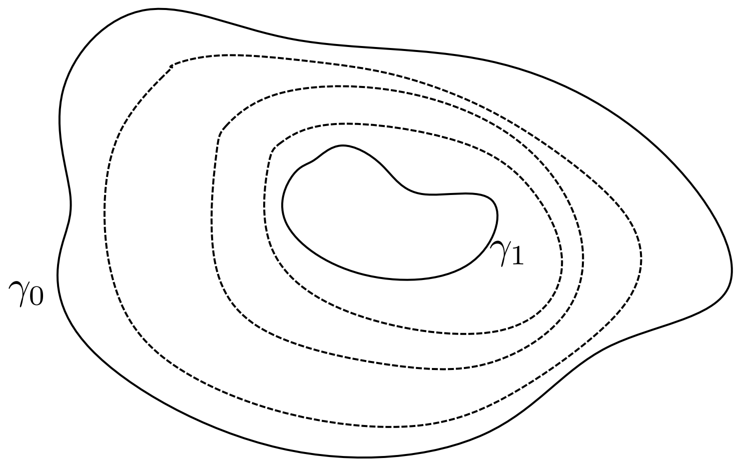


Рис. 2: Петельная гомотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных u

Теорема 1.

- V — локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- γ_0, γ_1 — связанно гомотопные пути

Тогда $\int_{\gamma_0} \sum V_i dx_i = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

Примечание. То же самое верно для петельных гомотопий.

Доказательство. Пусть Γ — гомотопия γ_0 и γ_1.

$\gamma_u(t) := \Gamma(t, u), t \in [a, b], u \in [0, 1]$

$$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$$

Мы хотим доказать, что $\Phi(u) = \text{const}$. Докажем более простой факт, что Φ — локально постоянна, тогда в силу компактности и связности отрезка Φ будет постоянна.

Определение локально постоянной функции:

$$\forall u_0 \in [0, 1] \;\; \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$$

Γ — непр. на $[a, b] \times [0, 1]$ — комп. $\Rightarrow$ Γ равномерно непрерывна:

$$\forall \delta > 0 \, \exists \sigma > 0 \, \forall t, t' : |t - t'| < \sigma \, \forall u, u' : |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$$

Возьмём δ из леммы о похожести близких путей (??) для пути γ_{u_0}.

Если $|u-u_0|<\sigma \ \ |\Gamma(t,u)-\Gamma(t,u_0)|<\frac{\delta}{2}$ при $t\in[a,b]$, т.е. γ_u и γ_{u_0} похожи по лемме о похожести близких путей. Хочется сказать, что интегралы по γ_u и γ_{u_0} таким образом равны, однако это не обосновано, для этого необходимо, чтобы пути были кусочно-гладкими.

Построим кусочно-гладкий путь $\tilde\gamma_{u_0}$, $\frac{\delta}{4}$-близкий к γ_{u_0}, т.е.

$$\forall t\in[a,b] \ \ |\gamma_{u_0}(t)-\tilde\gamma_{u_0}(t)|<\frac{\delta}{4}$$

и кусочно-гладкий путь $\tilde\gamma_u$, $\frac{\delta}{4}$-близкий к γ_u. Тогда $\tilde\gamma_{u_0}$ и $\tilde\gamma_u$ - δ-близкие к γ_{u_0} $\Rightarrow$ они V-похожи $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_u}\sum V_i dx_i \overset{\text{def}}{=} \int_{\tilde\gamma_u}\cdots = \int_{\tilde\gamma_{u_0}}\ldots \overset{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}}\ldots$$

Таким образом, $\Phi(u)=\Phi(u_0)$ при $|u-u_0|<\delta$, т.е. Φ — локально постоянна. $\square$

Определение. Область $O\subset\mathbb{R}^m$ — **односвязная**, если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному пути.

Простыми словами — в O нет дырок, иначе путь вокруг дырки нельзя было бы стянуть.

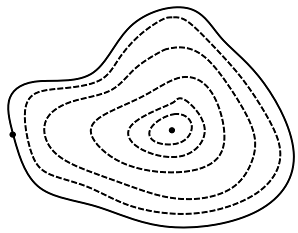


Рис. 3: Стягивание замкнутого пути (сплошной линией) к постоянному пути (точке)

Примечание.

1. Выпуклая область — односвязная.

   Это доказывается тем, что для любого пути можно применить гомотетию в качестве гомотопии: $\Gamma(t,u)=F_{1-u}(\gamma(t))$, где F_α — гомотетия с центром в произвольной точке A, лежащей внутри области, ограниченной путём γ, и коэффициентом α

   Примечание. Гомотетия — равномерное стягивание всех точек к одной.

2. Гомеоморфный образ односвязного множества — односвязен.

   $\Phi: O\to O'$ — гомеоморфизм, γ — петля в O', $\Phi^{-1}(\gamma)$ — петля в O.

   $\Gamma:[a,b]\times[0,1]\to O$ — гомотопия $\Phi^{-1}(\gamma)$ и постоянного пути $\tilde\gamma\equiv A$

   $\Phi\circ\Gamma$ — гомотопия γ с постоянным путём $\tilde{\tilde\gamma}\equiv\Phi(A)$

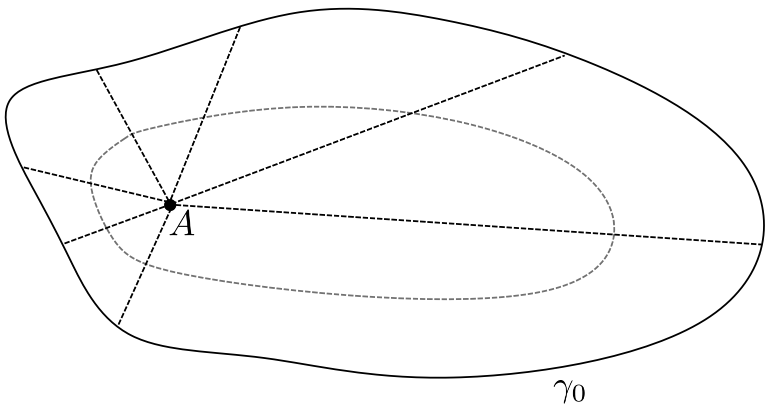


Рис. 4: Применение гомотетии с центром A

Теорема 2.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область
- V — локально потенциальное векторное поле в O

Тогда V — потенциальное в O

Доказательство. V — локально потенциально, $\triangleleft \gamma_0$ — кусочно-гладкая петля, тогда γ_0 гомотопна постоянному пути $\gamma_1 \Rightarrow$

$$\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0$$

Тогда по теореме о характеризации потенциальных векторных полей в терминах интегралов V потенциально. □

Следствие 2.1. Теорема Пуанкаре верна в односвязной области.

Пусть даны две плоскости, соединенные гвоздём, между плоскостями есть зазор. На гвоздь надета веревочка в виде петли. Можно ли снять веревочку с гвоздя?

Теорема 3 (о веревочке).

- $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- $\gamma : [0, 2\pi] \to O, t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля нестягиваема.

Неформальная формулировка: пусть даны две плоскости, соединенные гвоздём, между плоскостями есть зазор. На гвоздь надета веревочка в виде петли. Можно ли снять веревочку с гвоздя?

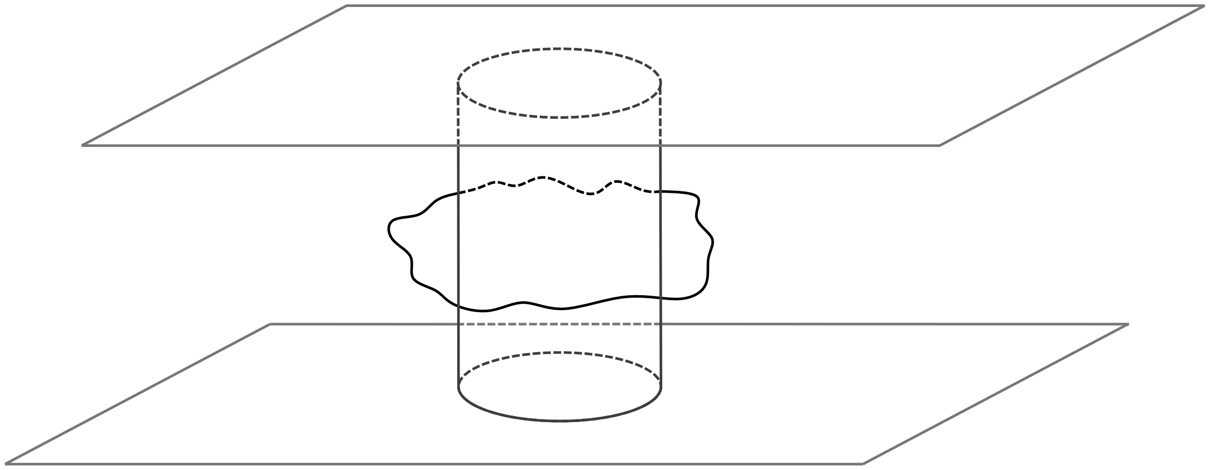


Рис. 5: Веревочка (жирным), надетая на “гвоздь” (цилиндр)

Доказательство. $V(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Таким образом, $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$ в области O. Тогда по лемме Пуанкаре V — локально потенциально.

При этом

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum V_i dx_i &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t)dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi\end{aligned}$$

Таким образом, если бы существовал постоянный путь $\tilde{\gamma}$, которому γ гомотопен, то $\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} = 0$, но это не так. $\square$

Степенные ряды

Пример. 1. $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{1}} = 1, |z| < 1$ — сходится, $|z| > 1$ — расходится, $|z| = 1$ — расходится, т.к. слагаемые $\not\to 0$

2. $\sum \dfrac{z^n}{n}, R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$
   (a) $z = 1, \sum \frac{1}{n}$ — расходится
   (b) $z = -1, \sum \frac{(-1)^n}{n}$ — сходится
   (c) $z = e^{i\varphi}, \varphi \neq 0, 2\pi \quad \sum \dfrac{e^{in\varphi}}{n} = \sum \dfrac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{n}$ — сходится по признаку Дирихле.
3. $\sum \frac{z^n}{n^2}, R = 1, |z| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ сходится.
4. $\sum n! z^n, R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n!}} \approx \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}} = \dfrac{1}{\overline{\lim} \frac{n}{e}} = 0$, в 0 сходится, в остальных точках расходится.
5. $\sum \dfrac{z^n}{n!}, R = +\infty$ — везде сходится.

Теорема 4 (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда).

- $\sum a_n (z - z_0)^n$
- $0 < R \leq +\infty$

Тогда:

1. $\forall r : 0 < r < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ — непрерывна в $B(z_0, r)$

Доказательство.

1. Если $0 < r < R$, то при $z - z_0 = r$ ряд абсолютно сходится, т.е. $\sum |a_n| r^n < +\infty$

   Признак Вейерштрасса:
   (a) При $|z - z_0| \leq r$ $|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$
   (b) $\sum |a_n| r^n < +\infty$

   $\Rightarrow$ есть сходимость на $\overline{B(z_0, r)}$
2. Следствие из пункта 1 и теоремы Стокса-Зайдля.

   Если z удовлетворяет $|z - z_0| < R$, то $\exists r_0 < R : z \in B(z_0, r_0)$

   На $B(z_0, r_0)$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow f$ непр. в точке z.

$\square$

Определение. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Тогда производная f это:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Примечание. $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|), h \in \mathbb{C}$

Лемма 1.

- $w, w_0 \in \mathbb{C}$
- $|w| < r$
- $|w_0| < r$

Тогда $|w^n - w_0^n| \leq nr^n|w - w_0|, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

$$w^n - w_0^n = (w - w_0)(w^{n-1} + \underbrace{w^{n-2}w_0}_{\text{по модулю} \leq r^{n-1}} + \dots + w_0^{n-1})$$

□

Лемма 2 (о дифференцируемости степенного ряда).

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, 0 < R < +\infty$

(A') $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$

Тогда:

1. Радиус сходимости (A') равен R
2. $\forall z \in B(z_0, R) \;\; \exists f'(z)$ и $f'(z) = \sum na_n(z - z_0)^n$

Доказательство.

1. По формуле Адамара.

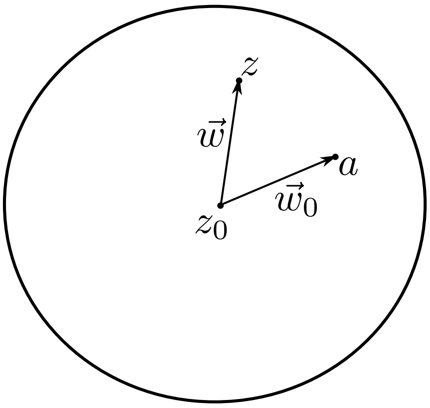
   Ряд (A') сходится при каком-то $z \Leftrightarrow \sum na_n(z - z_0)^n$ — сходится.

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{1 \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

2. $\lhd a \in B(z_0, R), \exists r < R : a \in B(z_0, r)$

   $a = z_0 + w_0, |w_0| < r$

   $z = z_0 + w$



$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{a_n \frac{w^n-w_0^n}{w-w_0}}_{\substack{\text{модуль по лемме} \\ nr^{n-1}|a_n|}} \tag{1}$$

$\sum nr^{n-1}|a_n|$ сходится по пункту 1.

То есть ряд (1) в круге $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lim \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} = \sum na_n(a-z_0)^{n-1}$$

□