Теория вероятности

Михайлов Максим

21 марта 2021 г.

Оглавление

Лекция 1

13 февраля

1 События

1.1 Статистическое определение вероятности

Определение. Пусть проводится n реальных экспериментов, событие A произошло в n_A экспериментах. Отношение $\dfrac{n_A}{n}$ называется **частотой события** A. Эксперименты показывают, что при увеличении числа n эта частота "стабилизируется" около некоторого числа, под которым понимаем **статистическую вероятность**.

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}$$

Очевидно это определение не формально, поэтому мы им пользоваться не будем.

1.2 Пространство элементарных исходов. Случайные события.

Определение.

- **Пространством элементарных исходов** Ω называется множество, содержащее все возможные результаты данного эксперимента, из которых при испытании происходит ровно один.
- Элементы данного множества называются **элементарными исходами** и обозначаются $w \in \Omega$.
- **Случайными событиями** называются подмножества $A \subset \Omega$.
- Событие A **наступило**, если в ходе эксперимента произошёл один из элементарных исходов, входящих в A.
- Такие исходы называются **благоприятными** к A.

Пример.

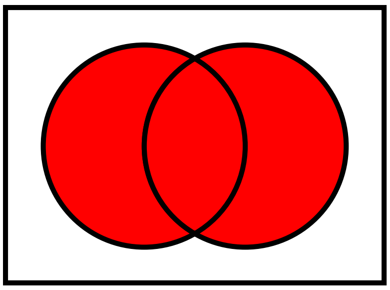
1. Бросают монетку. $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$ *(герб, решка).*
2. Бросают кубик. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A — выпало четное число очков. Тогда $A = \{2, 4, 6\}$.
3. Монета бросается дважды:
   (a) Учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ, РР, ГР, РГ}\}$
   (b) Не учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ, РР, ГР}\}$
4. Бросается дважды кубик, порядок учитывается. A — разность очков делится на 3, т.е. $A = \{(1, 4), (4, 1), (3, 3), (5, 2), (2, 5), (3, 6), (6, 3), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
5. Монета бросается до выпадения герба. $\Omega = \{\text{Г, РГ, РРГ, ...}\}$ — счётное число исходов.
6. Монета бросается на плоскость. $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ — несчётное число исходов.

1.3 Операции над событиями

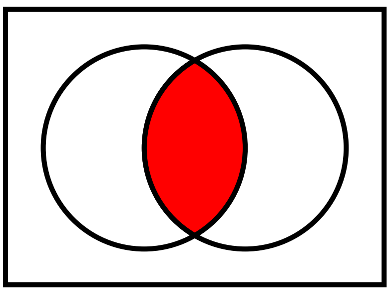
Ω — универсальное *(достоверное)* событие, т.к. содержит все элементарные исходы.

$\varnothing$ — невозможное событие.

Определение. $A + B$ это $A \cup B$



Определение. $A \cdot B$ это $A \cap B$



Определение. **Противоположным** к A называется событие $\overline{A}$, соответствующее тому, что A не произошло, т.е. $\Omega \setminus A$

Определение. Дополнение $A \setminus B$ это $A \cdot \overline{B}$

Определение. События A и B называются **несовместными**, если $A \cdot B = \varnothing$

Определение. Событие A влечет событие B, если $A \subset B$.

2 Вероятность

Определение. $0 \leq P(A) \leq 1$ — вероятность наступления события A.

2.1 Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит конечное число исходов, причем их можно считать равновозможными. Тогда применимо классическое определение вероятности.

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{m}{n}$, где n — число всех возможных элементарных исходов, m — число элементарных исходов, благоприятных A.

В частности, если $|\Omega| = n$, а A — элементарный исход, то $P(A) = \frac{1}{n}$.

Свойства.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(\Omega) = 1$
4. Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Доказательство. $|A| := m_1, |B| := m_2, |A \cup B| = m_1 + m_2$

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

□

Пример. Найти вероятность, что при бросании кости выпадет чётное число очков.

$$n = 6, m = 3, \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

Пример. В ящике лежат 3 белых и 2 чёрных шара. Вынули 3 шара. Найти вероятность того, что из них две белых и один чёрный.

$$n = \binom{5}{3} = 10$$
$$m = \binom{3}{2}\binom{2}{1} = 12$$
$$P(A) = \frac{6}{10}$$

Однако, это определение редко применимо.

2.2 Геометрическое определение вероятности

Определение.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченная область.
- μ — конечная мера множества Ω, например мера Лебега

Пусть выбирают точку наугад, т.е. вероятность попадания точки в область A зависит от меры A, но не от её положения.

Тогда $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Примечание. По этому определению мера точки равна 0 и вероятность попадания в конкретную точку тоже равна 0.

Пример. Монета диаметром 6 сантиметров бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 сантиметров. Найти вероятность того, что монета целиком окажется на одной плитке.

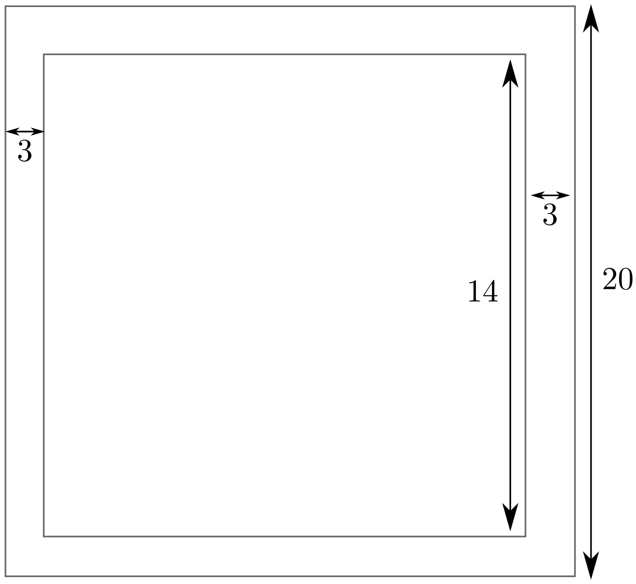
Без ущерба для общности можно рассматривать, что монета бросается на одну плитку и положение монеты определяется положением её центра.

Чтобы монета лежала полностью на одной плитке, необходимо, чтобы её центр лежал на расстоянии ≥ 3 сантиметра от каждой стороны:

$$S(\Omega) = 20^2 = 400$$
$$S(A) = 14^2 = 196$$
$$P(A) = \frac{196}{400} = 0.49$$

Пример. ???

$$A : X \leq l \sin \varphi$$



$$S(\Omega) = \pi l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l \sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^\pi = -l(\cos\pi - \cos 0) = 2l$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2}{\pi}$$

Это определение кажется хорошим — оно согласовано с классическим. Но и это определение редко применимо на практике, т.к. обычно вероятность зависит от положения в пространстве или множество исходов несчётно.

Лекция 2

20 февраля

2.3 Аксиоматическое определение вероятности

Пусть Ω — пространство элементарных исходов.

Определение. Систему $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называют σ-алгеброй событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3. $A_1 \dots A_n \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Примечание. Из 2 и 3 следует 1.

Свойства.

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$, т.к. $\overline{\Omega} = \varnothing$
2. $A_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{F}$

   Доказательство. $A_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A}_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup \overline{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup \overline{A}_i} = \bigcap A_i \in \mathcal{F}$ □
3. $A, B \in F \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

???

Определение. Пусть Ω — множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра над ним.

Вероятностью на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P(A) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $P(A) \geq 0$ — свойство неотрицательности
2. Если события $A_1 \dots A_n \dots$ — равновероятные, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, то $P(\bigcap A) = \sum P(A_i)$ — свойство счётной аддитивности
3. $P(\Omega) = 1$ — свойство нормированности

Примечание. Вероятность есть нормированная мера.

Определение. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством.

Свойства.

1. $P(\varnothing) = 0$

   Доказательство. $\underbrace{P(\varnothing + \Omega)}_{1} = P(\varnothing) + \underbrace{P(\Omega)}_{1} \Rightarrow P(\varnothing) = 0$ □

2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

   Доказательство. A и $\overline{A}$ — несовместны, $A + \overline{A} = \Omega$.

   $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$ □

3. $0 \leq P(A) \leq 1$

   Доказательство. (a) $P(A) \geq 0$

   (b) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$

   □

2.4 Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap A_i = \varnothing$. Тогда $P(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

???

Теорема 1. Эта аксиома следует из второй аксиомы.

Доказательство. $A_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i \overline{A}_{i+1} \cup \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$

???

Т.к. по условию $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = \varnothing$ и $\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$, то $P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i) = 0$.

Таким образом, $P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i \overline{A}_{i+1})$ — остаточный член сходящейся последовательности $\Rightarrow P(A_n) \to 0$ □

Примечание. Аксиома счётной аддитивности следует из аксиомы непрерывности и свойства конечной аддитивности.

2.5 Формула сложения

Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Теорема 2. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Доказательство.
$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$$

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) \\ &= (P(A\overline{B}) + P(AB)) + (P(\overline{A}B) + P(AB)) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

□

Аналогично можно доказать формулу включения-исключения:

$$P\left(\sum A_i\right) = \sum P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n)$$

Пример. Опущен.

3 Независимые события

Определение. События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Доказательство. Если A и B независимы, то A и $\overline{B}$ — независимы. □

Доказательство.

$$P(A) = P(A(B+\overline{B})) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(AB)$$

Таким образом, A и $\overline{B}$ — независимы. □

Определение. События $A_1 \dots A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора $1 \le i_1 \dots i_k \le n$ $P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$

Пример (Бернштейн). Три грани правильного тетраедра выкрашены в красный, синий, зеленый цвета, а четвертая грань — во все эти три цвета.

Бросаем тетраэдр и смотрим на грань, на которую он упал. События:

- A — красный цвет
- B — синий цвет
- C — зеленый цвет

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$
$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

Таким образом, все события попарно независимы.

$$P(AB) = \frac{1}{8}$$

Примечание. Если в условии есть “хотя бы”, т.е. требуется найти вероятность суммы совместных независимых событий, то применима формула обратной вероятности.

Пример. Найти вероятность того, что при четырёх бросаниях кости хотя бы один раз выпадет шестерка.

A_i — при i-том броске хотя бы один раз выпала шестерка.

$$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = P(\overline{4}) = \frac{5}{6}$$

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \dots \overline{A}_4$$
$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$
$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого стрелка 0.6, второго — 0.8. Найти вероятность того, что попадет ровно один стрелок.

A_1 — первый стрелок попал, A_2 — второй стрелок попал, A — ровно один попал.

$$P(A_1) = 0.8, P(\overline{A}_1) = 0.2, P(A_2) = 0.6, P(\overline{A}_2) = 0.4$$

$$A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$$
$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.44$$

Лекция 3

27 февраля

4 Условная вероятность

Обозначение. $P(A|B)$ — вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло.

Пример. Кубик подбрасывается один раз. Известно, что выпало больше 3 очков. Какова вероятность, что выпало чётное число очков?

Пусть A — чётное число очков, B — больше 3 очков.

$$n = 3 \quad (4, 5, 6) \quad m = 2 \quad (4, 6)$$
$$P(A|B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Определение. **Условной вероятностью** события A при условии, что имело место событие B, называется величина $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Теорема 3. $P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) \ldots P(A_n|A_{n-1} \ldots A_1)$

Доказательство. По индукии.

База $n = 2$ — по определению полной вероятности.

Переход

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1 \ldots A_{n-1})P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_{n-1} \ldots A_1)$$

□

Определение. События A и B независимы, если $P(A|B) = P(A)$, что равносильно $P(AB) = P(A)P(B)$ — прошлому определению.

Доказательство.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

□

4.1 Полная группа событий

Определение. События $H_1 \dots H_n \dots$ образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и содержат все элементарные исходы.

Теорема 4. Пусть $H_1 \dots H_n$ — полная группа событий. Тогда $P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\Omega A) \\ &= P((H_1 + \dots H_n + \dots)A) \\ &= P\left(\sum_{k=1}^{+\infty} H_k A\right) \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i) \end{aligned}$$

1: По лемме о счётной аддитивности и т.к. H_iA и H_jA несовместны. □

4.2 Формула Байеса

Эта формула также называется формулой проверки гипотезы.

Теорема 5. Пусть $H_1 \dots H_n$ — полная группа событий и известно, что A произошло. Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{+\infty} P(H_k)P(A|H_k)}$$

Доказательство.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

□

Лекция 4

6 марта

5 Последовательность независимых испытаний

Определение. Схемой Бернулли называется серия одинаковых независимых испытаний, каждое из которых имеет лишь два исхода — интересующее нас событие произошло *(успех)* или не произошло *(неудача)*.

Обозначение.

- n — число испытаний
- p — вероятность события A при одном испытании
- $q = 1 - p$
- v_n — число успехов при n испытаниях
- $P_n(k) = P(v_n = k)$

5.1 Формула Бернулли

Теорема 6. Вероятность того, что при n испытаниях произойдёт ровно k успехов равна:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Доказательство. Рассмотрим один из исходов, благоприятных событию A: $A_1 = \underbrace{\text{У} \ldots \text{У}}_{k} \underbrace{\text{Н} \ldots \text{Н}}_{n-k}$.

Т.к. рассматриваемые события независимы, верна следующая формула:

$$P(A_1) = \underbrace{p \ldots p}_{k} \underbrace{q \ldots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

Остальные благоприятные исходы отличаются лишь расстановкой k успехов по n местам, а их вероятности будут те же самые. $\square$

Выясним, при каком значении k вероятность предшествующего числа успехов $k-1$ будет не более, чем вероятность k успехов, т.е. $P_n(k) \geq P_n(k-1)$

$$\begin{aligned}
P_n(k-1) &\leq P_n(k) \\
\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} &\leq \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q &\leq \frac{n!}{k!(n-k)!} p \\
\frac{k!}{(k-1)!} q &\leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!} p \\
k(1-p) &\leq (n-k+1)p \\
k - kp &\leq np - kp + p \\
np + p - 1 \leq k &\leq np + p
\end{aligned}$$

1. np — целое. Тогда $np+p$ — не целое и $k = np$ — наибольшее искомое k
2. $np+p$ — не целое. Тогда $k = [np+p]$
3. $np+p$ — целое. Тогда $np+p-1$ — целое и $P_n(k-1) = P_n(k)$ и $k = np+p$ или $k = np+p-1$

5.2 Локальная формула Муавра-Лапласа

Примечание. Локальность формулы означает, что мы её применям, чтобы найти вероятность некоторого числа успехов.

$$P_n(v_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \text{ , где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

φ называется функцией Гаусса.

Свойства.

- $\varphi(-x) = \varphi(x)$
- При $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$

5.3 Интегральная формула Лапласа

Примечание. Эта формула применяется, если искомое число успехов лежит в некотором диапазоне.

$$P_n(k_1 \le v_n \le k_2) \xrightarrow{n \to +\infty} \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \text{ , где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}dt}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства.

- $\Phi(-x) = -\Phi(x)$
- При $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0.5$

Примечание. В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевается несколько иная функция, чаще всего

$$F_0(X) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}dt}$$

Несложно заметить, что $F_0(x) = 0.5 + \Phi(x)$

Мы применяем эти формулы при $n \ge 100$ и $p, q \ge 0.1$

Пример. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, что:

1. Произошло ровно 330 попаданий.
2. Произошло от 312 до 336 попаданий.

1. $k = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{10}{8} = 1.25$$

$$P_{400}(320) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1.25^2}{2}} \approx 0.0228$$

2. $k = 400, k_1 = 312, k_2 = 336, p = 0.8, q = 0.2$

$$x_1 = \frac{332 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{312 - 320}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 320}{8} = 2$$

$$P_{400}(312 \le v_n \le 336) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8285$$

5.4 Вероятность отклонения относительно частоты от вероятности события

Пусть p — вероятность события A, $\frac{n_A}{n}$ — частота A. По интегральной формуле Лапласа найдём вероятность того, что частота отклонится от p не больше, чем на ε:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right) &= P(-\varepsilon\leq\frac{n_A}{n}-p\leq\varepsilon) \\ &= P(-n\varepsilon\leq n_A-np\leq n\varepsilon) \\ &= P(np-n\varepsilon\leq n_A\leq np+n\varepsilon) \\ &\approx \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

Итого:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

5.5 Закон больших чисел Бернулли

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\xrightarrow{n\to+\infty}2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

При $n\to+\infty:\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\to+\infty$ и $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)\to 0.5$, поэтому $P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\to 2\cdot 0.5=1$, т.е.:

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=1$$

Эта формула называется законом больших чисел Бернулли.

Лекция 5

13 марта

Примечание. Конспект этой лекции написан по другому конспекту, т.к. записи лекции нет.

Определение. Отображение $k \mapsto \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$, где $0 \le k \le n$ называется **биномиальным распределением** с параметрами n и p.

Обозначение. $B(n,p)$ или $B_{n,p}$

5.6 Схема до первого успешного испытания

Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успеха. Номер такого успеха обозначается τ.

Теорема 7. $P(\tau = k) = q^{n-1}p$

Доказательство.

$$P(\tau = k) = P(\underbrace{\text{НН}\dots\text{Н}}_{k-1}\text{У}) = q^{k-1}p$$

$\square$

Определение. Отображение $k \mapsto q^{k-1}p$ при $1 \le k < +\infty$ называется **геометрическим распределением** с параметром p.

Обозначение. G_p или $G(p)$

Примечание. Это распределение обладает свойством “отсутствие последействия” или нестарения, т.е. знание о том, что у вас не было успеха в течение n испытаний, никак не влияет на распределение оставшегося числа испытаний.

Теорема 8. $p(\tau = k) = q^{k-1}p$. Тогда

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \;\; P(\tau > k + n \mid \tau > n) = p(\tau > k)$$

Доказательство.

$$P(\tau > n) = P(\underbrace{\text{НН}\ldots\text{Н}}_{m}) = q^m$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned}
P(\tau > n + k \mid \tau > n) &= \frac{P(\tau > n + k \cap \tau > n)}{P(\tau > k)} \\
&= \frac{P(\tau > n + k)}{P(\tau > n)} \\
&= \frac{q^{n+k}}{q^n} \\
&= q^k \\
&= P(\tau > k)
\end{aligned}$$

□

Примечание. Аналогично $P(\tau = n + k \mid \tau > n) = P(\tau = k)$

5.7 Испытания с несколькими исходами

Пусть мы выполняем n испытаний, и при каждом из них может произойти один из m несовместных исходов.

Обозначение. p_i — вероятность i-го исхода при одном испытании.

Теорема 9. Вероятность того, что при n испытаниях первый исход появится n_1 раз, второй n_2 раз, m-тый исход n_m раз:

$$P(n_1 \ldots n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!} \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$$

Примечание. При $m = 2$ эта теорема эквивалентна формуле Бернулли.

Доказательство. Рассмотрим следующий благоприятный исход A_1:

$$\underbrace{1\ldots1}_{n_1}\underbrace{2\ldots2}_{n_2}\ldots\underbrace{m\ldots m}_{n_m}$$

$$P(A_1) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$$

Остальные благоприятные исходы имеют ту же вероятность и равны с точностью до перестановки. Всего таких исходов

$$\binom{n}{n_1}\binom{n - n_1}{n_2}\binom{n - n_1 - n_2}{n_3}\ldots\binom{n_m}{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$$

□

5.8 Урновая схема

В урне N шаров, из них K белых и $N-K$ чёрных. Из неё выбрали n шаров без учета порядка.

1. Схема с возвратом.

   Вероятность выбрать белый шар не меняется и равна $\frac{K}{N}$. Тогда $P_n(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ — опять биноминальное распределение.

2. Схема без возврата.

   Тогда $P_{N,K}(n,k) = \dfrac{\binom{N}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Определение. Отображение $k \mapsto \dfrac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ при $k < K$ называется **гипергеометрическим распределением**.

Теорема 10. Если $N \to +\infty$ и $K \to +\infty$ так, что $\frac{K}{N} \to p \in (0,1)$, n и $0 \le k \le n$ фиксированы, то $P_{N,K}(n,k) = \dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

Лемма 1. $\binom{K}{k} \sim \frac{K^k}{k!}$, где $K \to +\infty$, $k = \text{const}$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\binom{K}{k} &= \frac{K!}{k!(K-k)!} \\
&= \frac{K\cdot(K-1)\dots(K-k+1)}{k^k}\frac{K^k}{k!} \\
&= 1\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\cdot\frac{K^k}{k!} \\
&\sim \frac{K^k}{k!}
\end{aligned}$$

□

Доказательство 10.

$$\begin{aligned}
P_{N,K}(n,k) &= \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{\substack{\text{к каждому}\\ \text{применили}\\ \text{формулу}}} \frac{K^k}{k!}\frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!}{N^n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{K^k}{N^k} \frac{(N-k)^{n-k}}{N^{n-k}} \\
&= \binom{N}{k} \left(\frac{k}{N}\right) \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k} \\
&\xrightarrow{N \to +\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

□

5.9 Теорема Пуассона для схемы Бернулли

Теорема 11 (Формула Пуассона). Пусть $n \to +\infty, p_n \to 0$ так, что $np_n \to \lambda = \text{const} > 0$. Тогда вероятность успеха при n испытаниях:

$$
P_n(k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
$$

Эта формула применима при малых *(или крупных)* p и $n \geq 100$.

Доказательство.

Обозначение. $\lambda_n = n \cdot p_n$, при этом $\lambda_n \to \lambda$.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &\to \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&\to \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \\
&\to \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right)^{-\lambda_n} \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

□

Теорема 12. Пусть v_n — число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли с вероятностью успеха p, $\lambda = np$, $A \subset \mathbb{N}_0$ — произвольное подмножество.

Тогда:

$$\left|P(v_n \in A) - \sum \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right| \leq \min(p, np^2) = \min(p, \lambda p) = \min\left(p, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$