В первом семестре была задача нахождения максимального по площади вписанного n-угольника. Мы выяснили, что если максимум существует, то он достигается правильным n-угольником (*суждение про сдвиг точки*). Кроме того, мы доказали, что максимум существует, сделаем это снова, но другим методом.

Доказательство. Пусть внутренние углы многоугольника $\varphi_1 \dots \varphi_n$, тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2(\sin\varphi_1 + \ldots + \sin\varphi_n) \\ &= \frac{1}{2}r^2(\sin\varphi_1 + \ldots + \sin\varphi_{n-1} - \sin(\varphi_1 - \ldots - \varphi_{n-1})) \end{aligned}$$

Очевидно $\forall i \;\; 0 < \varphi_1 < \pi \quad \pi < \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1} < 2\pi$.

Найдём максимум путём дифференцирования. Это требует существования максимума внутри области определения. Если все неравенства сделать нестрогими, то область определения становится замкнутой, очевидно ограниченной $\Rightarrow \exists \max$ по теореме Вейерштрасса. Кроме того, максимум не лежит на границе области определения из очевидных геометрических соображений.

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_i} = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi_i = \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1})$$

$$\begin{aligned} \cos\varphi_i - \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}) &= 0 \\ 2\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{\pi - 2n\varphi}{2} &= 0 \\ \varphi &= \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

$\square$

Диффеоморфизмы

Определение. **Область** — открытое связное множество.

Определение. $F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — **диффеоморфизм**, если:

- F обратимо
- F дифференцируемо
- F^{-1} дифференцируемо

Примечание. $Id = F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F$

$E = F'(F^{-1})' \Rightarrow \forall x \ \ \det F'(x) \neq 0$

Лемма 1 (о почти локальной иньективности).

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- F *дифф. в* $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists C > 0, \delta > 0 \ \ \forall h \in B(0, \delta) \ \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

Доказательство. Если F — линейное отображение:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq ||F'(x_0)|| \cdot |h| \geq \frac{1}{||(F'(x_0))^{-1}||}|h|$$

В общем случае:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б.м.}}|h|| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

□

Теорема 1 (о сохранении области).

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- F дифф.
- $\forall x \in O \ \ \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открыто.

Примечание. O — связно, F — непр. $\Rightarrow F(O)$ связно.

Доказательство. $x_0 \in O \Rightarrow y_0 = F(x_0) \in F(O)$ — внутренняя? в $F(O)$

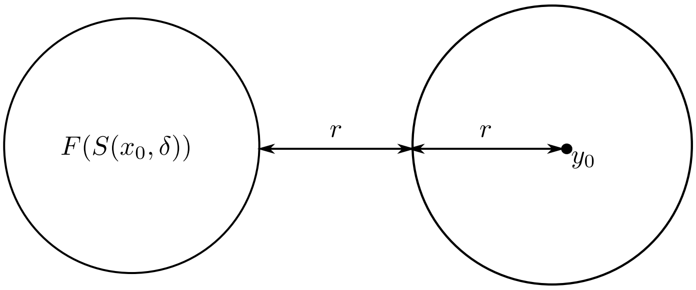
По лемме $\exists c, \delta : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} \ \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

В частности $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$ при $|h| = \delta$

$$r := \frac{1}{2}\rho(y_0, F(S(x_0, \delta))$$

При этом ρ между множествами определено следующим образом:

$$\rho(A, B) \overset{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$$



Т.к. S — компакт, $\exists \min$.

Если $y \in B(y_0, r)$, то $\rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$:

Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$, т.е. $\forall y \in B(y_0, r) \ \ \exists x \in B(x_0, \delta) \ \ F(x) = y$

Рассмотрим функцию $g(x) = |F(x) - y|^2$ при $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$.

Мы хотим показать, что $\exists x : g(x) = 0$. Найдем $\min g$.

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r^2$$

При $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2 \Rightarrow \min g$ не лежит на границе шара $\Rightarrow$ он лежит внутри шара.

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \ldots + (F_m(x) - y_m)^2$$
$$\forall i \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$
$$2(F_1(x) - y)F'_{1x_i}(x) + \ldots + 2(F_m(x) - y)F'_{mx_i}(x) = 0$$
$$F'_x 2(F(x) - y) = 0$$
$$\forall x \ \ \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$$

□

Следствие 1.

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- $F \in C^1(O)$
- $l < m$
- $\text{rg} F'(x) = l \ \ \forall x \in O$

Тогда $F(O)$ открыто.

Доказательство. Зафискируем точку x_0. Пусть ранг реализуется на столбцах $1 \dots l$, т.е. определитель матрицы из столбцов $1 \dots l \neq 0$, т.е.:

$$\underbrace{\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1\dots l} (x_0)}_{A(x_0)} \neq 0$$

И для близких точек тоже $\neq 0$

$$\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}'(x) = \left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{F'(x)} \\ \hline 0 & E_{m-l} \end{array}\right]$$

$$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \det E_{m-l} \neq 0 \quad \text{в окрестности } x_0$$

Тогда $\tilde{F}\Big|_{U(x_0)}$ удовлетворяет теореме $\Rightarrow$ $\tilde{F}(U(x_0))$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$

$F(U(x_0)) = \tilde{F}(U(x_0)) \cap \mathbb{R}^l$ □

Теорема 2 (о гладкости обратного отображения).

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $O \subset \mathbb{R}^m$
- $r = 1, 2, \dots + \infty$
- T обратимо
- $\det T'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in O$

Тогда $T^{-1} \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$ и $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$, где $y_0 = T(x_0)$

Доказательство. Докажем по индукции по r.

База: $r = 1$

$S := T^{-1}$ — непрерывно по теореме о сохранении области. Почему? По теореме о топологическом определении непрерывности:

$f : X \to Y$ непр. $\Leftrightarrow$ $\forall B$ — откр. $\subset Y$ $f^{-1}(B)$ — открыто.

$T'(x_0) = A$ — невырожденный оператор.

По лемме о почти локальной иньективности

$$\exists c, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) \;\; |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \quad (*)$$

По определению дифференцируемости $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)|x - x_0|$

$$T(x) = y \quad T(x_0) = y_0 \quad x = S(y) \quad x_0 = S(y_0)$$

В терминах y и S:

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\xrightarrow[y\to 0]{?} 0 \text{ быстрее, чем } |y - y_0|}$$

Если действительно $\to 0$, то S дифференцируемо по определению.

Пусть y близко к y_0, тогда $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$

$$\begin{aligned} |A^{-1}w(S(y))|S(y) - S(y_0)|| &= |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1}w(S(y))| \\ &\le |x - x_0| \cdot ||A^{-1}|| \cdot |w(S(y))| \\ &\overset{(*)}{\le} \frac{1}{C}|y - y_0| \cdot ||A^{-1}|| \cdot |w(S(y))| \end{aligned}$$

Мы доказали, что S дифференцируемо, теперь необходимо доказать, что S' непрерывно.

$$S'(y_0) = A^{-1}$$

“Алгоритм” получения обратного оператора:

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1}$$

Здесь все шаги непрерывны, поэтому S' непрерывно.

Переход

$$T \in C^{r+1} \quad T' : O \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad T' \in C^r \quad ?S \in C^{r+1}$$
$$y \overset{\in C^r \text{ по инд.}}{\mapsto} S(y) \overset{\in C^r}{\mapsto} T'(x) \overset{\in C^\infty}{\mapsto} (S^{-1})'$$

$\square$

Теорема 3 (о локальной обратимости).

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $x_0 \in O$
- $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : T\Big|_U$ — диффеоморфизм, т.е. $\exists T^{-1}$

Формулировака в терминах системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1 \ldots x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 \ldots x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 \ldots x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть (x^0, y^0) — решение этой системы, $F = (f_1 \ldots f_m)$

$\det F'(x^0) \neq 0$. Тогда $\exists U(y^0) : \forall y \in U(y^0)$ система имеет решение, C^r гладко зависящее от y.

Теорема 4 (о неявном отображении).

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$
- $F \in \mathbb{C}^r$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$
- $\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b)\right)_{i,j=1\ldots n} \neq 0$

Будем считать $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$, где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$ и первые m координат (x, y) — координаты x, остальные — координаты y.

Тогда $\exists P(a) \subset \mathbb{R}^m, Q(b) \subset \mathbb{R}^n$ — окрестности, $\exists \varphi : P(a) \to Q(b) \in C^r$, такие что:

$$\forall x \in P(a) \;\; F(x, \varphi(x)) = 0$$