

## Тензоры в евклидовом пространстве

### 1. Естественный изоморфизм $X$ и $X^*$

$X$  — линейное пространство,  $X^*$  сопряжено  $X$

В  $X$  введена евклидова структура  $\forall x, y \in X \quad \langle x, y \rangle \in K$ , удовлетворяющая свойствам (см. прошлые лекции)

$\langle x, y \rangle = \tilde{x}(y)$ ,  $\tilde{x} \in X^*$ , т.е. для фиксированного  $x$  отображение  $\langle x, y \rangle$  это форма  $\tilde{x} \in X^*$

**Лемма 1.** Скалярное произведение устанавливает естественный изоморфизм пространств  $X$  и  $X^*$ :

$$x \in X \leftrightarrow \tilde{x} \in X^*$$

*Доказательство.* Необходимо и достаточно показать, что это биекция, сохраняющая линейную структуру (по определению изоморфизма)

#### 1. Биективность: (от противного)

##### (a) Слева направо

$$\exists \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in X^* : x \leftrightarrow \tilde{x}_1, x \leftrightarrow \tilde{x}_2$$

$$\tilde{x}_1(y) - \tilde{x}_2(y) = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \Theta \Rightarrow \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$$

##### (b) Справа налево

$$\tilde{x} \leftrightarrow x_1, \tilde{x} \leftrightarrow x_2$$

$$0 = \tilde{x}(y) - \tilde{x}(y) = \langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle = \langle x_1 - x_2, y \rangle$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

#### 2. Линейность: **скипнуто**

□

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $X$ ,  $\{f^k\}$  — базис  $X^*$ , сопряженный базису  $\{e_j\}$

$$f^k(e_j) = \langle e^k, e_j \rangle = \delta_j^k$$

**Определение.**  $\{e_j\}_{j=1}^n, \{e^k\}_{k=1}^n$  — биортогональные базисы  $X$ , если:

$$\langle e^k, e_j \rangle = \delta_j^k$$

Разложим  $\{e_i\}$  по  $\{e^k\}$ :

$$e_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} e^k$$

Домножим скалярно на  $e_j$ :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} e^k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \langle e^k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \delta_j^i = \alpha_{ij}$$

Таким образом, метрический тензор можно получить из разложения  $\{e_i\}$  по  $\{e^k\}$

**Лемма 2.**

$$e_i = \sum_{k=1}^n g_{ik} e^k \quad e^k = \sum_{i=1}^n g^{ki} e_i$$

*Доказательство.* выше □

**Лемма 3.** О переходе в базис, биортогональный исходному.

$$x \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j, x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$$

Тогда:

$$\xi^j = \sum_{k=1}^n \xi_k g^{kj}, \xi_k = \sum_{j=1}^n \xi^j g_{jk}$$

*Доказательство.*

$$x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j = \sum_{j=1}^n \xi^j \sum_{k=1}^n g_{jk} e^k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \xi^j g_{jk} \right) e^k$$

□

**Лемма 4.**

$$x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \Rightarrow \xi^j = \langle e^j, x \rangle$$

*Доказательство.*

$$\langle e^i, x \rangle = \langle e^i, \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \rangle = \sum_{j=1}^n \langle e^i, e_j \rangle \xi^j = \xi^i$$

□

*Примечание.*

$$x = \sum_{j=1}^n \langle e^j, x \rangle e_j = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e^k$$

**Лемма 5.** Явный вид изоморфизма  $X \simeq X^*$ :

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e^k \mapsto \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle f^k$$

*Примечание.* Биортогональный базис к нормированному базису — он сам:

$$\{e_j\}_{j=1}^n - \text{ортономированный} \Rightarrow g_{ij} = \delta_j^i \Rightarrow g^{ij} = \delta_j^i \Rightarrow e_j = \sum_{k=1}^n g_{jk} e^k = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} e^k = e^j$$

## 2. Сопряженные и эрмитовские операторы

**Определение.** Оператор  $\varphi^* : X \rightarrow X$  называется **сопряженным оператору**  $\varphi : X \rightarrow X$ , если:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \langle \varphi^* x, y \rangle$$

**Теорема 1.** В конечномерном евклидовом пространстве  $\forall \varphi \exists! \varphi^*$

*Доказательство.* Рассматриваем  $\mathbb{C}$ , поэтому черта — комплексное сопряжение.

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $X$

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j$$

$$x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k \quad \langle x, \varphi y \rangle \stackrel{?}{=} \langle \varphi^* x, y \rangle$$

$$\langle x, \varphi y \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \xi^j e_j, \varphi \left( \sum_{k=1}^n \eta^k e_k \right) \right\rangle = \sum_{j,k=1}^n \bar{\xi}^j \eta^k \langle e_j, \varphi e_k \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \bar{\xi}^j \eta^k a_k^i \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{\delta_{ji}} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^n \bar{\xi}^j \eta^k a_k^j = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \overline{a_k^j} \xi^j \right) \eta^k = \sum_{k=1}^n \bar{\zeta}_k \eta^k$$

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^n \overline{a_k^i} \xi^i = \zeta^k$$

$$x \leftrightarrow \xi \Rightarrow \varphi^* x \leftrightarrow \zeta \quad \zeta = \overline{A}^T \xi$$

$$\varphi \leftrightarrow A \Rightarrow \varphi^* = \overline{A}^T \stackrel{\text{def}}{=} A^+$$

□

Свойства операции сопряжения оператора:

1.  $(\varphi^*)^* = \varphi$
2.  $(\varphi \pm \psi)^* = \varphi^* \pm \psi^*$
3.  $(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*$
4.  $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$  — порядок важен, умножение операторов не коммутативно

**Определение.** Оператор, обладающий свойством  $\varphi^* = \varphi$  называется эрмитовским или самосопряженным

Пример.  $\varphi \leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{bmatrix}$      $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 5 \end{bmatrix}$      $A^+ = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{bmatrix} = A$

**Лемма 6.**  $\varphi$  эрмитов  $\Rightarrow \sigma_\varphi \subset \mathbb{R}$

*Доказательство.*  $x \in \text{CV} \Rightarrow \varphi x = \lambda x$ :

$$\langle \varphi x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

$$\langle x, \varphi x \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

□

**Лемма 7.**  $\varphi$  эрмитов,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_\varphi : \lambda_1 \neq \lambda_2$

**Скipped**

**Определение.**  $\varphi : X \rightarrow X$ ,  $L$  — инвариантное подпространство  $\varphi$

$L$  называется **приводящим подпространством**  $\varphi$ , если  $L^\perp$  — тоже инвариантное подпространство  $\varphi$

**Лемма 8.** Любое инвариантное подпространство  $L$  эрмитова оператора является приводящим.

*Доказательство.*  $x \in L, y \in L^\perp$

$$0 = \langle \varphi x, y \rangle = \langle x, \varphi y \rangle = 0 \Rightarrow L^\perp \text{ inv}$$

□

**Теорема 2.** Эрмитов оператор — скалярного типа.

*Доказательство.* От противного.

$\{x_j\}_{j=1}^m$  — набор собственных векторов эрмитова оператора  $\varphi$ ,  $m < \dim X$

$L = \mathcal{L}\{x_1 \dots x_m\}$ ,  $\dim L = m$

$L$  — инвариантное подпространство  $X \Rightarrow L$  приводящее для  $X$

$\Rightarrow L^\perp$  инвариантное подпространство  $\varphi \Rightarrow \exists$  хотя бы 1 собственный вектор оператора  $\varphi, ]y - \text{СВ } \varphi$

$y \perp L \Rightarrow \{x_1 \dots x_m y\} - \text{ЛНЗ, противоречие.}$  □

**Следствие 2.1.** 1. Эрмитов оператор имеет скалярный тип

2.  $\forall \lambda : r_\lambda = n_\lambda$

3. Из собственных векторов эрмитова оператора можно построить ортономированный базис.

**Скipped**

**Теорема 3.** Спектральная теорема для эрмитова оператора

$\varphi : X \rightarrow X, \varphi e_j = \lambda_j e_j, \{e_j\} - \text{ортономированный базис СВ}$

$$\Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, \cdot \rangle e_i$$