

1 Монотонные экстремумы

Теорема 1. Критерий монотонности

$f \in C(\langle a, b \rangle)$, дифф. в (a, b)

Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$

Доказательство. “ \Rightarrow ” По определению $f' \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

“ \Leftarrow ” $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие 1. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \text{дифф. на } (a, b), f' \equiv 0)$

Следствие 2. $f \in C\langle a, b \rangle$, дифф. на (a, b) . Тогда:

f строго возрастает \Leftrightarrow ① и ②

① $f' \geq 0$ на (a, b)

② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. “ \Rightarrow ” очевидно

“ \Leftarrow ” По лемме Ферма. □

Следствие 3. О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b])$, дифф. в (a, b)

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq g'(x)$

Тогда $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ □

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$ — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

Определение. Экстремум — точка минимума либо максимума.

Теорема 2. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)

Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. f — n раз дифф. в x_0

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.} : & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.} : & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x , близких к x_0 :

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

Тогда при чётном n

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign } f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном n

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

2 Интеграл

2.1 Неопределенный интеграл

Определение. $F, f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

F — первообразная f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Теорема 3. О существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.

Доказательство. Чуть позже. □

Теорема 4. F — первообразная f на $\langle a, b \rangle$. Тогда:

1. $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — тоже первообразная
2. Никаких других первообразных нет, т.е. если G — перв. f , то $\exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$

Доказательство. 1. очевидно

$$2. F' = f, G' = f \quad (G - F)' \equiv 0 \Rightarrow G - F = \text{const}$$

□

Определение. Неопределенный интеграл f на $\langle a, b \rangle$ — множество всех первообразных f :

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

Теорема 5. f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда

1. Линейность:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right) \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b \rangle$; $f'g$ — имеет первообр.

Тогда fg' имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. $(F + G)' = F' + G' \quad (\alpha F)' = \alpha F'$

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□

Примечание. Если φ обратима, то:

$$\int f(x) dx = \left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right) \Big|_{t:=\varphi^{-1}(x)}$$

$$df := f'(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= [x := \operatorname{tg} t] = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \\ &= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t} = [y := \sin t] = \int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1+y} = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} (-\ln(1-y) + \ln(1+y)) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \operatorname{arctg} x}{1-\sin \operatorname{arctg} x} \end{aligned}$$

2.2 Гиперболические тригонометрические функции

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Они полезны тем, что по ним висит нить, закрепленная в двух точках.

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 2t &= 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \\ (\operatorname{ch} t)^2 + \left(\frac{\operatorname{sh} t}{i}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [x = \operatorname{sh} t] = \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t}} \operatorname{ch} t dt = \int 1 dt = t$$

2.3 Равномерно непрерывные функции

Определение. $f : \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $\langle a, b \rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \quad \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2 .

Пример. 1. $f(x) = x$ равномерно непрерывна.

2. $f(x) = x^2$ $\langle a, b \rangle = \mathbb{R}$ $\varepsilon := 1$ $\exists? \delta$

$$x_1 := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}, x_2 := \frac{1}{\delta}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 \Rightarrow f - \text{не равномерно непрерывна.}$$

Теорема 6. $f : X \rightarrow Y$, X — секвенциальный компакт, f — непр. на X

Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon \\ \delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \bar{x}_n : \rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon \end{aligned}$$

Выберем $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$, $\bar{x}_{n_k} \rightarrow \tilde{\tilde{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x}), f(\bar{x}_{n_k}) \rightarrow f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\bar{x}_n)) \geq \varepsilon$ □

Пример. $f(x) = \sqrt{x}$ $X = [0, +\infty)$

По т. Кантора: f равномерно непрерывна на $[0, 1]$

При $x \geq \frac{1}{2}$ $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{2\sqrt{c}}|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$, т.е. тоже равномерно непрерывна.

2.4 Конфетка: т. Брауэра о неподвижной точке

Статья от Matousek, Zigler, Bjorner (arxiv: 1409.7890v1)

Игра Нех: два игрока — чёрный и белый, на своем ходе красят один шестиугольник в свой цвет. Условие выигрыша — путь искомого цвета с одной стороны в сторону нужного цвета — две противоположные стороны имеют черный цвет, две другие — белый.

Теорема 7. Дана доска для Нех — параллелограмм $k \times l$, покрашенная в 2 цвета.

Это выигрышная доска для одного из игроков.

Доказательство. Рассмотрим первый ряд (*прилегающий к чёрной стороне*). Если в нём нет черных клеток, белый выиграл. Пойдём по границе черных и белых клеток так, что справа всегда черная клетка, слева белая. В этом пути нет самопересечений, т.к. в точке самопересечения с обеих сторон черные клетки, мы так не идём.

Представим доску в виде прямоугольной сетки, где вершины соединены, если из соответствующего шестиугольника можно прийти в другой соответствующий шестиугольник. □

Теорема 8. $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, непр.

Тогда $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1. $f : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ — непр.
2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1)$ — непр.
3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow S(0, 1)$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0, 1]^2$

От противного — пусть $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x) - \text{непр., } > 0$

По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \rho(f(x), x) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для f : для этого $\varepsilon \quad \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \bar{x} : \|x - \bar{x}\| < \delta \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$$

Можно писать не $\|\cdot\|$, а ρ .

Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.

Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n})$

$$K(V) := \min\{i \in \{1, 2\} : |f_i(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$$

Продолжение на следующей лекции. □