Для последовательности x_n: $y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \ldots)$, $z_n = \inf(x_n, x_{n+1} \ldots)$. Тогда $z_n \le x_n \le y_n$ $y_n \downarrow, z_n \uparrow$

$$\overline{\lim} x_n := \lim y_n \quad \underline{\lim} x_n := \lim z_n$$

Теорема 1. Техническое описание верхнего предела.

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр. сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$
3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ a и b:
   (a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \ x_n < l + \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0$ для бесконечного множества номеров $n : l - \varepsilon < x_n$

Доказательство.

1. Очевидно, т.к. $y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \ldots) = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр. сверху
2. "$\Rightarrow$" $x_n \le y_n \to -\infty$
   "$\Leftarrow$" $\forall A \ \exists N \ \forall n > N \ \ y_n \le A, x_n < A$
3. "$\Rightarrow$" (a) $y_n \to l \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad x_n \le y_n < l + \varepsilon$
   (b) Берём $\varepsilon > 0$, предположим противное : $\exists$ конечное мн-во $n : l - \varepsilon < x_n$
   $]n_0$ — максимальный номер, такой что $l - \varepsilon < x_{n_0}$, тогда $y_{n_0} \le l - \varepsilon$, но $y_n \downarrow \Rightarrow \lim y_n \le l - \varepsilon$
   "$\Leftarrow$" $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \le l + \varepsilon$, но в $x_n, x_{n+1} \ldots \exists x_i : l - \varepsilon < x_i \Rightarrow y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \ldots) > l - \varepsilon$. Итого $l + \varepsilon \ge y_n > l - \varepsilon \Rightarrow l = \lim y_n = \overline{\lim} x_n$

□

Теорема 2.

$$\exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$$

Доказательство. "$\Rightarrow$"

1. $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \lim y_n \ge \lim x_n = +\infty$
2. $\lim x_n = -\infty$ аналогично
3. $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$ очевидно из технического описания предела, пункт 3.

"$\Leftarrow$" $\underline{\lim} x_n \leftarrow z_n \le x_n \le y_n \to \overline{\lim} x_n$, по теореме о городовых $\exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n$

□

Определение. $n_k : n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \quad \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}$ — **частичный предел**

Теорема 3. О характеризации верхнего предела как частичного.

1. $\forall l$ — частичный пр. x_n $\underline{\lim} x_n \le l \le \overline{\lim} x_n$

2. $\exists (n_k) : x_{n_k} \to \overline{\lim} x_n \ \ \exists m_k : x_{m_k} \to \underline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $x_{n_k} \to l \quad \underline{\lim} x_n \leftarrow z_{n_k} \le x_{n_k} \le y_{n_k} \to \overline{\lim} x_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \le l \le \overline{\lim} x_n$

2. (a) $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр сверху $\Rightarrow$ можно выбрать $x_{n_1} < x_{n_2} < \dots x_n \to +\infty$

   (b) $\overline{\lim} x_n = -\infty$ тривиально.

   (c) $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \ \exists x_{n_k} : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$

□

Пример. 1. $\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$

2. $\forall l \in [-1, 1]$ — частичный передел последовательности $\sin n$

Доказательство. 1. Тривиально

2. $n_k := \arcsin l + 2\pi k$

Кроме того, можно составить $n_k \in \mathbb{N}$.

□

1 Простейшие свойства рядов

Определение. $a_1 + a_2 + \dots, \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ — **числовой ряд** ($a_i \in \mathbb{R}$)

Определение. $\forall N \in \mathbb{N} \quad S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — **частичная сумма**

Определение. Если $\exists \lim_{N \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, ряд **сходится**, иначе ряд **расходится**.

Пример. $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\Theta}{(N+1)!} x^{N+1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}, k \in N, p = -k$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^p = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^N (x^p)''\{x\}(1-\{x\}) = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\max(1, N^{p-1}))$$

- $p > -1$ расходится
- $p = -1$ расходится
- $p < -1$ сходится

Определение. $\sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ – N**-й остаток ряда**

Свойства:

1. $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся, $c_n := a_n + b_n$. Тогда $\sum c_n$ сходится
2. $\sum a_n$ – сходится, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\sum \lambda a_n$ сходится и $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$
3. (a) $\sum a_n$ – сходится $\Rightarrow$ любой остаток сходится
   (b) остаток сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится
   (c) $r_N = \sum\limits_{n \geq N} a_n, \sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow r_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Доказательство. (a) $?m$-й остаток, $N \geq m : \sum\limits_{n=1}^{N} a_n = \sum\limits_{n=1}^{m-1} a_n + \sum\limits_{n=m}^{N} a_n$

(b) Аналогично.

(c) "$\Leftarrow$" Тривиально.

"$\Rightarrow$" $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{m-1} a_n + r_m \xRightarrow{m \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + r_{+\infty} \Rightarrow r_N \to 0$

□

Лемма 1. Необходимое условие сходимости:

$\sum a_n$ сходится $\Rightarrow a_n \to 0$

Доказательство. Тривиально. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$ □

Обратное неверно, например $\sum \frac{1}{n^p}$ расходится, $p \in (0, 1]$

Теорема 4. Критерий сходимости ряда Больцано-Коши:

$$\sum a_n \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall k > N \;\; \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально. □

Докажем расходимость $\sum \frac{1}{n}$ по критерию Больцано-Коши.

$$m := k \quad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > k\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \ \forall N \ \exists k > N \ \exists m := k \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+k}| \geq \varepsilon$$

Теорема 5. Признак сравнения.

$a_k, b_k \geq 0$

1. $\forall k \ \ a_k \leq b_k$, или $\exists c > 0 \ \ \forall k \ \ a_k \leq cb_k$. Тогда $\sum b_k$ сх. $\Rightarrow \sum a_k$ сх., $\sum a_k$ расх. $\Rightarrow \sum b_k$ расх.

2. $\exists \lim \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$. Тогда при

$0 < l < +\infty: \ \sum a_k$ сх. $\Leftrightarrow \sum b_k$ сх.

$l = 0: \ \sum b_k$ сх. $\Rightarrow \sum a_k$ сх., $\sum a_k$ расх. $\Rightarrow \sum b_k$ расх.

$l = +\infty: \ \sum a_k$ сх. $\Rightarrow \sum b_k$ сх., $\sum b_k$ расх. $\Rightarrow \sum a_k$ расх.

Доказательство.

Лемма 2. $a_n \geq 0 \quad \sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow S_n$ ограничено сверху.

Доказательство. $\exists$ кон. $\lim S_n \Leftrightarrow S_n$ ограничено сверху. □

1. $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$; $S_n^{(b)}$ огр. $\Rightarrow S_n^{(a)}$ огр., по леммме a_n сходится. Аналогично расходимость.

2. (a) $0 < l < +\infty$: Для $\varepsilon = \frac{l}{2} \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \frac{1}{2}lb_n < a_n < \frac{3}{2}lb_n$, дальше по 1 пункту.

   (b) $l = 0 : \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon b_n \Rightarrow$ по 1 пункту.

   (c) $l = +\infty : \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \frac{a_n}{b_n} > \varepsilon \Rightarrow a_n > b_n\varepsilon \Rightarrow$ по 1 пункту.

□

Пример. 1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 14n + 1}{n^5 + n^4 + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$a_n \sim \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, 2 > 1 \Rightarrow$ ряд сходится.