

*Доказательство.* Доказательство несчётности отрезка с помощью компактности.

Рассмотрим произвольную точку отрезка  $x_k$  и её окрестность размером  $\frac{1}{10^k}$ . Все такие окрестности образуют открытое покрытие отрезка, но их суммарная длина  $\leq \frac{1}{9}$ , что меньше длины произвольного отрезка. Почему-то это даёт противоречие.  $\square$

*Следствие 1.* (из теоремы о непрерывности монотонной функции) У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное (НБЧС) множество точек разрыва.

*Пример.*  $\Theta(x) = \text{sign}(x)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$x_k$  это  $k$ -тое рациональное число

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \Theta(x - x_k)$$

$f(x)$  имеет скачок в каждом рациональном значении аргумента.

*Доказательство.*  $f(x-0) < f(x+0)$

Создадим инъекцию  $(f(x-0), f(x+0)) \rightsquigarrow q_x \in \mathbb{Q}$ . Возьмём  $q_x \in (f(x-0), f(x+0))$ . Такая точка будет в силу плотности  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$ . Теперь докажем, что взятие  $q_x$  — инъекция. Рассмотрим другую точку разрыва —  $y$ .

$$\exists t \in (f(x), f(y))$$

$$f(x) \leq t \leq f(y)$$

$$f(x) \leq f(x+0) \leq t \leq f(y-0) \leq f(y)$$

Таким образом,  $(f(x-0), f(x+0))$  и  $(f(y-0), f(y+0))$  не имеют общих точек, тогда  $q_x$  все разные  $\Rightarrow$  взятие  $q_x$  — инъекция. Доказать инъективность достаточно, т.к. нам не нужна равномощность.  $\square$

*Упражнение.* 1. Существует ли на плоскости более, чем счётное множество непересекающихся окружностей?

2. Существует ли на плоскости более, чем счётное множество восьмёрок?

3. Можно ли в счётном множестве задать такое континуальное семейство  $(A_\alpha)$ , что:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad A_\alpha \subset A$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \neq A_{\alpha_2}$$

$$\forall \alpha, \beta : \alpha < \beta \quad A_\alpha \subset A_\beta$$

**Теорема 1.** О существовании и непрерывности обратной функции.

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непр., строго монот.

$m := \inf_{\langle a, b \rangle} f(x), M := \sup_{\langle a, b \rangle} f(x)$ . Тогда:

1.  $f$  — обратимая и  $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$
2.  $f^{-1}$  строго монотонна и того же типа (возрастает или убывает)
3.  $f^{-1}$  непрерывна

*Примечание.* Тип промежутка в  $f$  и  $f^{-1}$  совпадают.

*Доказательство.* Пусть  $f \uparrow$

$f(\langle a, b \rangle)$  — промежуток  $\langle m, M \rangle$  (типы скобок совпадают)

$f$  — строго монот.  $\Rightarrow f$  — инъекция. Тогда  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle m, M \rangle$  — биекция

$$\forall x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$$

$$\forall y_1 < y_2 \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

□

## 1 Элементарные функции

**Определение.** Всё, для чего есть кнопки на калькуляторе — элементарные функции:

$const, x^a, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \arcsin, \arctan x$

+ конечное число арифметических действий и композиций

### 1.1 $x^a$

Свойства:

1.  $x^{r+s} = x^r x^s$
2.  $(x^r)^s = x^{rs}$
3.  $(xy)^s = x^s y^s$

$$f_a(x) = x^a, a \in \mathbb{Q}$$

Докажем непрерывность:

1.  $a = 1 \quad f_1(x) = x$  — непр.
2.  $a \in \mathbb{N} \quad f_a(x) = f_1(x) \cdot f_1(x) \dots f_1(x)$  — непр.

$$3. a \in \mathbb{N} \quad f_{-a}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{f_a(x)}$$

$$4. a = 0 \quad f_0(x) \equiv 1 \text{ (при } x \neq 0, \text{ доопределим } f_0(0) = 1) - \text{непр. в } \mathbb{R}$$

$$5. a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n - \text{нечётно}$$

$f_n \uparrow$  строго  $\inf_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = -\infty \quad \sup f_n = +\infty, f_n - \text{непр.} \Rightarrow$  по теореме о непрерывности монотонной функции  $f^{-1} - \text{непр.}$

$$\exists f_n^{-1} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_{\frac{1}{n}}(x) = f_n^{-1}(x)$$

$$6. a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n - \text{чётн.}$$

$f_n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) - \text{строго монот., непр.}$

$$f(0) = 0 \quad \sup f_n = +\infty$$

$$\exists f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f_{\frac{1}{n}}(x) := f_n^{-1}(x)$$

$$7. a = \frac{p}{q} \text{ (несокр.)}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

$$f_a := f_{\frac{1}{q}} \circ f_p$$

## 2 Производная

**Определение.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b \rangle$

$f - \text{дифференцируема в точке } x_0, \text{ если } \exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

При этом  $A$  называется **производной**  $f$  в точке  $x_0$

**Определение.**  $f - \text{дифференцируема в точке } x, \text{ если}$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R}$$

$A - \text{производная } f \text{ в точке } x_0$

*Примечание.* Второе определение не обобщимо на пространство произвольной размерности, в отличие от первого.

**Теорема 2.** Определение 1  $\Leftrightarrow$  определению 2, т.е.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B \in \mathbb{R}$$

$$A = B$$

*Доказательство.* Докажем “ $\Leftarrow$ ”.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

Докажем “ $\Rightarrow$ ”.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

□

*Примечание.* 1.  $f$  — дифф. в  $x_0 \Rightarrow f$  — непр. в  $x_0$

2.  $f'(x_0)$  — обозн. для производной

Если  $x_0 \in (a, b)$  в опр. 1, 2  $x \rightarrow x_0 + 0$

$f$  — дифф. справа  $\Rightarrow A$  — правостор. производная  $f'_+(x)$

$x \rightarrow x_0 - 0$  слева  $f'_-(x_0)$

$$\exists f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f \text{ — дифф. в } x_0$$

3.  $A = \pm\infty : f'(x_0) = \pm\infty$ , но  $f$  не дифф.

*Пример.*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

**Определение.**

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

— называется **касательной** к графику  $y = f(x)$  в точке  $x_0$

**Теорема 3.**  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифф. в  $x_0$

Тогда указанные ниже в левых частях дифференцируемы в  $x_0$  и их производные равны.

$$1. (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$2. \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

$$3. (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

4. Если  $g(x_0) \neq 0$ :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

*Доказательство.* Докажем 4 по определению.

$$\frac{\frac{f}{g}(x_0 + h) - \frac{f}{g}(x_0)}{h} = \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0 + h)g(x_0)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \text{OK}$$

□

**Теорема 4.** О производной композиции.

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle \quad x \in \langle a, b \rangle \quad f - \text{дифф. в } x$

$g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad g - \text{дифф. в } y = f(x)$

Тогда  $g \circ f - \text{дифф. в } x; (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

*Доказательство.*

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h, \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$g(y + k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)k$$

$$]f'(x)h + \alpha(h)h = k; \quad k \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\begin{aligned} g(f(x + h)) &= g(f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h) = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + \alpha(h)h) + \beta(k)(f'(x)h + \alpha(h)h) = \end{aligned}$$

$$= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h \\ ]g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h = \gamma(h) \cdot h; \quad \gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

□

**Теорема 5.** О производной обратной функции.

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непр., строго монот.  $x \in \langle a, b \rangle$   $f$  — дифф. в  $x$ ;  $f'(x) \neq 0$

По определению  $f \exists f^{-1}$

Тогда  $f^{-1}$  — дифф. в  $y = f(x)$  и

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

*Примечание.*  $f^{-1}$  — дифф.  $\Rightarrow$  ф-ция очев.:  $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = (f^{-1}(f(x)))' = (x)' = 1$

*Доказательство.*  $\forall k \exists h : f(x+h) = y+k$

$$h = (x+h) - x = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$$

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+\tau(k)) - f(x)}{(x+\tau(k)) - x}} \xrightarrow[\tau(k) \rightarrow 0]{\substack{\text{по т.о непр. обр. ф.} \\ k \rightarrow 0}} \frac{1}{f'(x)}$$

□

*Пример.*

$$y = \sin x \\ \arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

*Упражнение.*  $\arctan' y = 0$

### 3 Теоремы о среднем

**Лемма 1.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — дифф. в  $x_0 \in (a, b)$ ;  $f'(x_0) > 0$

Тогда  $\exists \varepsilon > 0 \forall x : x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad f(x_0) < f(x)$

и  $\forall x : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad f(x_0) > f(x)$

*Примечание.* Это не монотонность.

*Доказательство.*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) > 0$$

$x \rightarrow x_0 + 0 \quad x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$  вблизи  $x_0$  (по теор. о стабилизации знака)

$x \rightarrow x_0 - 0 \quad x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0$  вблизи  $x_0$

□

**Теорема 6. Ферма.**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in (a, b)$  — точка максимума

$f$  — дифференцируема в  $x_0$

Тогда  $f'(x_0) = 0$

*Доказательство.* Из леммы.

Если  $f'(x_0) > 0$ , то справа от  $x_0$  есть  $x : f(x) > f(x_0)$

Если  $f'(x_0) < 0$ , то слева от  $x_0$  есть  $x : f(x) > f(x_0)$

□

**Теорема 7. Ролля.**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непр. на  $[a, b]$ , дифф. на  $(a, b)$

$f(a) = f(b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса.

$x_0 = \max f(x); x_1 = \min f(x)$

$\{x_0, x_1\} = \{a, b\} \Rightarrow f = \text{const}; f' \equiv 0$

Иначе: пусть  $x_0 \in (a, b) \xrightarrow[\text{т. Ферма}]{} f'(x_0) = 0$

□

*Примечание.*  $f(x) = (x - a)^k g(x)$ , где  $g(a) \neq 0$

$$f'(x) = k(x - a)^{k-1} g(x) + (x - a)^k g'(x) = (x - a)^{k-1} (k \cdot g(x) + (x - a) \cdot g'(x))$$

Пример.  $n \in \mathbb{N}$

$L_n(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$  — полиномы Лежандра (с точностью до умножения на константу)

$$\deg L_n = n$$

Утверждение:  $L_n$  имеет  $n$  различных вещественных корней.

Доказательство. Рассмотрим  $(x^2 - 1)^n$ . У этого многочлена 2 корня  $\{-1, 1\}$ , каждый кратности  $n$ .

Возьмём производную. По т. Ролля у этого многочлена есть корень  $\in (-1, 1)$ . Кроме того,  $\{-1, 1\}$  все ещё корни, у них кратность  $n - 1$ . Т.к.  $\deg = 2n - 1$ , кратность нового корня 1. На  $n$ -ном шаге получается  $n$  корней, каждый кратности 1.  $\square$