

Теорема 1 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- f суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E - \text{изм.}, \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

Следствие 1. f суммируемо на X , $E_n \subset X$, тогда $\mu E_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \rightarrow 0$

Доказательство. ¹

$$\begin{aligned} X_n &:= X(|f| \geq n) \\ X_n \supset X_{n+1} \supset \dots &\Rightarrow \mu \left(\bigcap X_n \right) \stackrel{(1)}{=} 0 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| \stackrel{(3)}{=} \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{\delta} \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

- (1): Т.к. f на $\bigcap X_n$ бесконечна и f почти везде конечна.
- (2): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
- (3): Т.к. $|f|$ на $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$ не превосходит n_ε по построению X_{n_ε}

□

Примечание. Следующие два свойства не эквивалентны:

1. $f_n \xRightarrow[\mu]{} f \iff \forall \varepsilon > 0 \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

Из 1 не следует 2: пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$, $f_n = \frac{1}{nx}$. Тогда $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$, но $\int |f_n - f| = +\infty$ при всех n .

Из 2 следует 1, т.к.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

¹ Теоремы, не следствия

Теорема 2 (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:

1. $\forall n \quad |f_n| \stackrel{(4)}{\leq} g$ почти везде
2. g — суммируемо на X

Тогда: f_n, f — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Примечание. Почти везде конечность f_n и f следует из (4), поэтому в условии этого можно не требовать.

Доказательство. f_n — суммируемы в силу неравенства (4), f суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1. $\mu X < +\infty$

Зафиксируем ε . $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

$f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq 2g \\ \int_X |f_n - f| &= \int_{X_n} + \int_{X_n^c} = \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \text{сл. т. об абс. непр.}}} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X \xrightarrow{\quad} 0 \end{aligned}$$

2. $\mu X = +\infty$

Утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \subset X$, изм., конечной меры, μA конечно : $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$.
Докажем его.

$$\begin{aligned} \int_X g &= \sup \left\{ \int g_n, 0 \leq g_n \leq g, g_n - \text{ступ.} \right\} \\ A &:= \{x : g_n(x) > 0\} \\ 0 &\leq \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{< 2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

Теорема 3 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:

1. $\forall n \quad |f_n| \leq g$ почти везде

2. g — суммируемо на X

Тогда f_n, f — суммируемы, $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

Не дописано