

ДЗ 8

Упражнение (2750).

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} \quad 0 \leq x \leq 1$$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup |x - \frac{nx}{1+n+x}| = \sup \left| \frac{x+x^2}{1+n+x} \right| \leq \frac{2}{1+n} \rightarrow 0$$

Ответ: сходится равномерно.

Упражнение (2751).

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

(a) $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| \leq \sup x^n \rightarrow 0$$

Ответ: сходится равномерно.

(b) $1 - \varepsilon \leq x \leq 1 + \varepsilon$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| f(x) - \frac{x^n}{1+x^n} \right|$$
$$x := 2^{-\frac{1}{n}}$$

$$\sup_x \left| f(x) - \frac{x^n}{1+x^n} \right| \leq \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \not\rightarrow 0$$

Ответ: не сходится равномерно.

(c) $1 + \varepsilon \leq x < +\infty$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| 1 - \frac{x^n}{1+x^n} \right| = \sup_x \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+(1+\varepsilon)^n} \rightarrow 0$$

Ответ: сходится равномерно.

Упражнение (2752).

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

(a) $0 \leq x \leq 1$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} \right|$$

При $x = \frac{1}{n}$ $\sup \not\rightarrow 0$ **Ответ:** не сходится равномерно.(b) $1 < x < +\infty$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} \right| \leq \sup_x \frac{2nx^2}{1+n^2x^2} = \sup_x \frac{2n}{\frac{1}{x^2} + n^2} \leq \frac{2n}{1+n^2} \rightarrow 0$$

Ответ: сходится равномерно.

Упражнение (2753).

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad E = \mathbb{R}$$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = |x|$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| |x| - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right| = \sup_x \frac{x^2 - x^2 + \frac{1}{n^2}}{|x| + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} < \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

Ответ: сходится равномерно.

Упражнение (2754).

$$f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \quad 0 < x < +\infty$$

1. Кандидат

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. ρ

$$\begin{aligned} \rho(f, f_n) &= \sup_x \left| \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \right| = \sup_x \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)} \\ &\quad x := \frac{1}{n} \\ \sup &\leq \frac{\sqrt{\frac{2}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} \right)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\frac{2}{\sqrt{n}}(1 + \sqrt{2})} \not\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ответ: не сходится равномерно.

Упражнение (2755). (a)

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \quad E = \mathbb{R}$$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Ответ: сходится равномерно.

(b)

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) \quad E = \mathbb{R}$$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right| \stackrel{x:=n}{\geq} \sin(1) \not\rightarrow 0$$

Ответ: не сходится равномерно.

Упражнение (2756). (a)

$$f_n(x) = \arctg nx \quad E = (0, +\infty)$$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| \frac{\pi}{2} - \arctg nx \right| \stackrel{x:=n}{\geq} \left| \frac{\pi}{2} - \arctg 1 \right| \not\rightarrow 0$$

Ответ: не сходится равномерно.

(b)

$$f_n(x) = x \arctg nx \quad E = (0, +\infty)$$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}x$$

2. ρ

$$\rho(f, f_n) = \sup_x \left| \frac{x\pi}{2} - x \arctg nx \right| = x \left| \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{nx} \right| \leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Ответ: сходится равномерно.

ДЗ 9

Упражнение (2767).

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

(a) $|x| < q, q < 1$

$$|x^n| \leq q^n$$

 q^n сходится**Ответ:** сходится равномерно.

(б) $|x| < 1$

$$S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

$$\lim S_N = \frac{1}{1 - x}$$

$$\rho = \sup \frac{x^{N+1}}{1 - x} = \infty$$

Можно было брать $x = 2^{-\frac{1}{n}}$. **Ответ:** не сходится равномерно.

Упражнение (2772).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad E = (0, +\infty)$$

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} < \frac{1}{n^2}, \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

Упражнение (2765). Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и

$$f_n(x) = n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right)$$

Доказать, что $f_n(x) \Rightarrow f'(x)$ на сегменте $\alpha \leq x \leq \beta$, где $a < \alpha < \beta < b$

1. Кандидат

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \stackrel{\text{def}}{=} f'(x)$$

2. ρ

$$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| f'(x) - n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) \right| \rightarrow 0$$

Упражнение (2774).

(а)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

(б)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \quad E = (-2, +\infty)$$

$$\left| \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n - 2} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ сходится}$$

(в)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2} \quad E = [0, +\infty)$$

$$\begin{aligned} (1 - n^2 x)^2 &\geq 0 \\ 1 - 2n^2 x + n^4 x^2 &\geq 0 \\ 1 + n^4 x^2 &\geq 2n^2 x \end{aligned}$$

$$\left| \frac{x}{1 + n^4 x^2} \right| \leq \frac{x}{2n^2 x} = \frac{1}{2n^2} \text{ сходится}$$

(г)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (1 - n^{2.5} x)^2 &\geq 0 \\ 1 - 2n^{2.5} x + n^5 x^2 &\geq 0 \\ 1 + n^5 x^2 &\geq 2n^{2.5} x \end{aligned}$$

$$\frac{nx}{1 + n^5 x^2} \leq \frac{nx}{2n^{2.5} x} = \frac{1}{2n^{1.5}} \text{ сходится}$$

(д)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2 \\ \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1} \end{aligned}$$

Сходится ли $\frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$? По признаку “корня”:

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}} = 2 \sqrt[n]{\underbrace{\frac{n^2}{\sqrt{n!}}}_{\rightarrow 0}} 2 \rightarrow 0$$

Итого сходится.

(е)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad |x| < a, a \in \mathbb{R}^+$$

$$\left| \frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \right| \leq \frac{a^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

Этот ряд сходится по признаку Даламбера ($\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$)

(ж)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \text{ сходится}$$

(з)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

(и)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{\sin nx}{n^{1.5}} \right| \leq \frac{1}{n^{1.5}} \text{ сходится}$$

(к)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad |x| < a, a \in \mathbb{R}^+$$

$$\left| \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \right| < \left| \ln \left(1 + \frac{a^2}{n \ln^2 n} \right) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^2}{n \ln^2 n} \text{ сходится}$$

(л)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx} \quad E = [0, +\infty)$$

$$e^{nx} \stackrel{\text{Тейлор}}{=} 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2} + \dots \Rightarrow e^{nx} > 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2}$$

$$x^2 e^{-nx} < x^2 \frac{2}{n^2 x^2} = \frac{2}{n^2} \text{ сходится}$$

(м)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\left| \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| = \left| \frac{2x}{x^2 + n^3} + o\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right) \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \text{ сходитяся}$$

(г')

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1 + n^5 x^2} \quad E = \mathbb{R}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N, \exists m = n, \exists x = n^{-2.5} \quad \left| \frac{\sqrt{n+1}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2n}}{2} \right| \geq \frac{1}{2} n \sqrt{n+1} > \frac{1}{2} n^{1.5} > \varepsilon$$

Ответ: расходится

(з')

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos nx}{n^2} \quad x \in (0, \pi)$$

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > \frac{1}{100} \quad \forall N \quad \exists n > N, \exists m = \frac{n}{2}, \exists x = \frac{1}{n} \quad \left| \frac{\cos \frac{n+1}{n}}{n+1} + \dots + \frac{\cos \frac{1.5n}{n}}{2n} \right| &> \frac{n \cos \frac{1.5n}{n}}{2} \\ &= \frac{\cos 1.5}{4} > \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Для того, чтобы все работало, надо брать чётный n .**Ответ:** расходится

(л')

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^2 e^{-nx} \quad E = [0, +\infty)$$

Аналогично исходному, но берем четвёртый элемент ряда Тейлора.

ДЗ 10

Упражнение (2776).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x} \quad E = (0, +\infty)$$

Докажем не равн. сходимость u_n по определению:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$\rho(0, u_n) = \sup_x \left| 2^n \sin \frac{1}{3^n x} \right| \stackrel{x:=3^{-n}}{\geq} 2^n \not\rightarrow 0$$

Ответ: не сходится равномерно.

Упражнение (2777).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \quad E = (0, +\infty)$$

Докажем равн. сходимость по Дирихле:

$$a_n = (-1)^n, \quad \left| \sum a_n \right| \leq 2$$

$$b_n = \frac{1}{x+n}$$

b_n очевидно монотонно, сходимость доказана в дз до этого.

Упражнение (2778).

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Докажем равн. сходимость по Дирихле:

$$a_n = (-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{n + \sin x}$$

Все очевидно.

Упражнение (2779).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}} \quad E = [-10, 10]$$

Было сделано на практике по Дирихле, $a_n = (-1)^{\dots}$

Упражнение (2780).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}} \quad E = \mathbb{R}$$

$$a_n = \cos \frac{2n\pi}{3} \quad \sum |a_n| \leq 6$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + x^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

$$\rho(0, b_n) = \sup_x \left| \frac{1}{\sqrt{n^2 + x^2}} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Ответ: сходится по Дирихле

Упражнение (2781).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}} \quad E = [0, +\infty)$$

Сначала докажем вспомогательный факт:

$$\sum_{n=1}^N \sin(nx) := S_N$$

$$\sin nx \cdot \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) x \right) - \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) \right)$$

$$A_N \cdot \sin \frac{x}{2} \stackrel{\text{телескоп}}{=} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}$$

$$|A_n| = \left| \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \right|$$

Докажем по Дирихле:

$$a_n(x) := \sin x \sin nx$$

$$\sum a_n(x) = |\sin x| |A_n| \leq \left| \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right| = |2 \cos \frac{x}{2}| \leq 2$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(x) = 0$$

$$\rho(0, b_n) = \sup_x \frac{1}{\sqrt{n+x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Ответ: сходится по Дирихле

Упражнение (2785). Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$, то обязательно ли ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$? Рассмотреть пример $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1-x)x^n$, $x \in [0, 1]$

Абсолютная сходимость ряда: при $x = 0$ или $x = 1$ очевидно сходится, т.к. 0, при $x \in (0, 1)$ тоже сходится.

Равномерная сходимость: по Дирихле

$$a_n = (-1)^n \quad \left| \sum a_n \right| \leq 2$$

$$b_n = (1 - x)x^n$$

Моноotonно по n , сходится, т.к. $x = \frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \approx \frac{1}{e} \frac{1}{n} \rightarrow 0$

Равномерная абсолютная сходимость: по Коши члены суммы при $x = \frac{n}{n+1} \approx \frac{1}{n}$, тогда при $m = n$ сумма $> \varepsilon$. Таким образом расходится.

ДЗ 11

Упражнение (2795). Определить области существования функций $f(x)$ и исследовать их на непрерывность, если:

(а)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$$

Рассмотрим обычную сходимость ряда.

При $x = 1$ ряд расходится, т.к. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1 \neq 0$

При $x > 1$ ряд расходится по признаку сравнения.

При $x \in (-1, 1)$ ряд сходится по признаку Абеля (корень).

При $x = -1$ $\nexists \lim(-1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow$ ряд расходится.

При $x < -1$ ряд очевидно расходится.

Итого $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Рассмотрим равномерную сходимость, чтобы найти, где f непрерывна.

Пусть $x \in U(x_0) = (\alpha, \beta)$

$$\left| \left(x + \frac{1}{n}\right)^n \right| \leq \left| \beta + \frac{1}{n} \right|^n \text{ сходится}$$

Таким образом, f непр. на $(-1, 1)$

(б)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2}$$

$$\frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2} = \frac{x}{x^2 + n^2} + \frac{(-1)^n n}{x^2 + n^2}$$

Первый ряд сходится:

$$x \in (-\alpha, \alpha) \quad \left| \frac{x}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{\alpha}{n^2}$$

Второй ряд сходится по Дирихле ($a_n(x) = (-1)^n$, $b_n(x) = \frac{1}{x^2+x^2}$)

Итого $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Заметим, что из приведенные соображения также доказывают равномерную сходимость, поэтому ответ — везде.

(в)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

По признаку Абеля (корня) ряд сходится при $x \neq 0$, т.к.:

$$\sqrt[n]{\frac{x}{(1+x^2)^n}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} \rightarrow \frac{1}{1+x^2} < 1$$

При $x = 0$ члены ряда 0 и f тоже 0.

Итого $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Докажем, что $\forall x_0$ ряд равномерно сходится в $U(x_0) = (a, b)$ и пусть наименьшее по модулю из этих чисел — α , наибольшее — β .

$$\left| \frac{x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{\beta}{(1+\alpha^2)^n}$$

$\sum \frac{\beta}{(1+\alpha^2)^n}$ сходится, если $\alpha \neq 0$. Если $\alpha = 0$, то не сходится.

Упражнение (2796). Пусть $r_k (k = 1, 2, \dots)$ — рациональные числа сегмента $[0, 1]$. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad x \in [0, 1]$$

обладает следующими свойствами: 1) непрерывна; 2) дифференцируема в иррациональных точках и недифференцируема в рациональных.

1. Непрерывность

$u_n(x)$ непрерывны в $x_0 \forall x_0 \in [0, 1]$.

Покажем равномерную сходимость ряда по Вейерштрассу.

$$\frac{|x - r_k|}{3^k} \leq \frac{1}{3^k} \text{ сходится}$$

2. Дифференцируемость

$$u'_n(x) = \frac{\text{sign}(x - r_k)}{3^k}$$

В рациональных точках $u'_n(x)$ разрывны, т.к. для каждого $x_0 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ есть r_k .

Покажем равномерную сходимость в окрестности иррациональных точек. Она очевидна, т.к. $\frac{\text{sign}(x-r_k)}{3^k} \leq \frac{1}{3^k}$ и по Вейерштрассу равн. сходимость есть.

Упражнение (2797). Было на практике

Упражнение (2798). Доказать, что тэта функция

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

$$\Theta(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

Покажем равномерную сходимость ряда при $x \in (\alpha, +\infty)$, $\alpha > 1$.

$$e^{-\pi n^2 x} \leq e^{-\pi n^2 \alpha} \text{ сходится}$$

При дифференцировании k раз мы получим $e^{-\pi n^2 x} (-\pi n^2)^k$, но степенная функция растет асимптотически медленнее, чем показательная \Rightarrow все ряды из производных равномерно сходятся по Вейерштрассу.

Упражнение (2799). Определить области существования функций $f(x)$ и исследовать их на дифференцируемость, если:

(a)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

$$\left(\frac{(-1)^n x}{n+x} \right)' = (-1)^n \frac{n+x-x}{(n+x)^2} = (-1)^n \frac{n}{(n+x)^2}$$

Члены суммы разрывны при $x \in \mathbb{Z}^-$, в остальных точках непрерывны.

Докажем равномерную сходимость по Дирихле $a_n(x) := (-1)^n$, $b_n(x) = \frac{n}{(n+x)^2}$

Нет, не докажем, потому что b_n не монотонно по n .

Я не знаю, как решить.

Ответ: определена и дифференцируема в $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

(б)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$$

$$\left(\frac{|x|}{n^2 + x^2} \right)' = \frac{\operatorname{sign} x (n^2 + x^2) - 2x|x|}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{\operatorname{sign} x}{n^2 + x^2} - \frac{2x|x|}{(n^2 + x^2)^2}$$

Члены суммы непрерывны во всех точках, кроме $x = 0$.

Равномерная сходимость первого очевидна. Равномерная сходимость второго очевидна по Дирихле:

$$\left| \frac{2x|x|}{(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{2a^2}{n^4}$$

Ответ: везде, кроме 0.

Упражнение (2806).

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{x^n + 1}$$

Если есть равномерная сходимость ряда в $(\alpha, 1)$, то $\sum u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} \sum u_n(1) = \frac{-\ln 2}{2}$.

Равномерная сходимость выполняется по Дирихле $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{x^n}{n(x^n + 1)}$.

Упражнение (2807).

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1})$$

Если есть равномерная сходимость ряда в (α, β) , то $\sum u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} \sum u_n(1) = 0$.

Докажем по определению:

$$S_N = \sum_{n=1}^N (x^n - x^{n+1}) \stackrel{\text{телескоп}}{=} x - x^{N+1}$$

$$\lim S_N = x$$

$$\rho(S_N, x) = \sup_x |x^{N+1}| = \beta^{N+1} \rightarrow 0$$

Упражнение (2808).

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x}$$

$$\left| \frac{1}{2^n n^x} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

Сходится равномерно по Вейерштрассу.

$$\lim = \sum \frac{1}{2^n} = 1$$

ДЗ 12

Упражнение (2873). Найти разложения в ряд следующих функций:

(г) $f(x) = \arctg \frac{2x}{2-x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{2-x^2}\right)^2} \frac{4 - 2x^2 + 4x^2}{(2-x^2)^2} \\ &= \frac{4 + 2x^2}{(2-x^2)^2 + (2x)^2} \\ &= \frac{4 + 2x^2}{4 + x^4} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2}x^2}{1 + \frac{x^4}{4}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) \left(1 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{16} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{4n}}{4^n} + \dots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{2^n} x^{2n} \end{aligned}$$

, где $\tau(n) = \begin{cases} 1 & , n \equiv 0 \pmod{4} \\ 1 & , n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & , n \equiv 2 \pmod{4} \\ -1 & , n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$. τ можно выразить как адекватную функцию,

делать я этого конечно же не буду.

Проинтегрируем:

$$f(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{2^n(2n+1)} x^{2n+1}$$

Найдём константу. $f(0) = \arctg 0 = 0$, поэтому $C = 0$.

Это выполняется при $\frac{x^4}{4} \in (-1, 1)$, т.е. $x \in [0, \sqrt{2})$

(д) $f(x) = x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2}$

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$x \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$\begin{aligned} \left(\ln \sqrt{1+x^2} \right)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} 2x \\ &= \frac{x}{1+x^2} \\ &= x \left(1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n+1} x^{2n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Проинтегрируем:

$$\ln \sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} \right)$$

Это выполняется при $x^2 \in (-1, 1)$, т.е. $x \in [0, 1)$

(e) $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{1 - (1 - 2x^2)^2}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}} \\ &= \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= 2 \operatorname{sign} x \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{\frac{1}{2} \frac{3}{2}}{2} x^2 - \dots + \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \dots \frac{1-2n}{2}}{n!} (-x^2)^n + \dots \right) \\ &= 2 \operatorname{sign} x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \dots \frac{1-2n}{2}}{n!} (-x^2)^n \end{aligned}$$

Это выполняется при $-x^2 \in (-1, 1)$, т.е. $x \in (-1, 1)$.

Проинтегрируем:

$$f(x) = 2 \operatorname{sign} x \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \dots \frac{1-2n}{2}}{n!} (-x^2)^n dx$$

$$\begin{aligned}
&= C + 2 \operatorname{sign} x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{x(-x^2)^n}{2n+1} dx \\
&= C + 2|x| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{(-x^2)^n}{2n+1} dx
\end{aligned}$$

$$f(0) = \arccos 1 = 0, \text{ поэтому } C = 0$$

$$f(x) = 2|x| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{(-x^2)^n}{2n+1} dx$$

$$(\text{ж}) \quad f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2} \frac{-1}{2}}{2!} (-x)^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2} \frac{-1}{2} \cdots \frac{3-2n}{2}}{n!} (-x^2)^n + \cdots$$

$$\text{Разложим } g(x) = \arcsin x$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + x^2 - \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{1-2n}{2}}{n!} (-x^2)^n + \cdots$$

Проинтегрируем:

$$g(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{x(-x^2)^n}{2n+1}$$

$$g(0) = \frac{\pi}{2}, \text{ поэтому } C = \frac{\pi}{2}. \text{ Соберем всё вместе:}$$

$$f(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \frac{-1}{2} \cdots \frac{3-2n}{2}}{n!} (-x^2)^n + \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{x(-x^2)^n}{2n+1}$$

$$(\text{з}) \quad f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2} \frac{-1}{2}}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2} \frac{-1}{2} \cdots \frac{3-2n}{2}}{n!} x^{2n} + \cdots$$

$$g(x) := \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{1-2n}{2}}{n!} x^{2n}$$

Проинтегрируем:

$$g(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \dots \frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$g(0) \Rightarrow C = 0$$

Соберем всё вместе:

$$f(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \dots \frac{1-2n}{2}}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \frac{-1}{2} \dots \frac{3-2n}{2}}{n!} x^{2n}$$

Упражнение (2871). $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ — уже сделано в 2873.3

Упражнение (2855). $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2(-2-1) \dots (-2-n+1)}{n!} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(x)^n$$

Это выполняется при $-x \in (-1, 1)$, т.е. $x \in (-1, 1)$.

Упражнение (2857). $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \sqrt{1+x} - \ln \sqrt{1-x}$$

$$\left(\ln \sqrt{1+x} \right)' = \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1 \cdot (-2) \dots (-n)}{n!} x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

Проинтегрируем:

$$\ln \sqrt{1+x} = C + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln \sqrt{1} = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\left(\ln \sqrt{1-x} \right)' = \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Проинтегрируем:

$$\ln \sqrt{1-x} = C + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln \sqrt{1} = 0 \Rightarrow C = 0 \text{ Соберем всё вместе:}$$

$$\ln \sqrt{1+x} - \ln \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln \sqrt{1+x} - \ln \sqrt{1-x} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Это выполняется при $x \in (-1, 1)$ и $x \in (-1, 1)$, т.е. при $x \in (-1, 1)$.

Упражнение (2861). $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{4}{(2x+\sqrt{5}+1)(-2x+\sqrt{5}-1)}$$

Разложим на простейшие:

$$\frac{A}{2x+\sqrt{5}+1} + \frac{B}{-2x+\sqrt{5}-1} = \frac{B(2x+\sqrt{5}+1) + A(-2x+\sqrt{5}-1)}{\dots}$$

$$\begin{cases} B = A \\ 2A\sqrt{5} = 4 \end{cases}$$

$$A = B = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{2}{\sqrt{5}(2x+\sqrt{5}+1)} + \frac{2}{\sqrt{5}(-2x+\sqrt{5}-1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}+1} \frac{1}{\frac{2x}{\sqrt{5}+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}-1} \frac{1}{1-\frac{2x}{\sqrt{5}-1}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}+1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! \left(\frac{2x}{\sqrt{5}+1} \right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! \left(\frac{-2x}{\sqrt{5}-1} \right)^n \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n 2^n n!}{(\sqrt{5}+1)^{n+1}} + \frac{2^n n!}{(\sqrt{5}-1)^{n+1}} \right) x^n \right) \end{aligned}$$

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

Упражнение (2816).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}$$

$$\angle x = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} \rightarrow 1$$

Таким образом, интервал сходимости $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

Упражнение (2817).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad a > 1$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{a^{n^2}}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{a^n}} = +\infty$$

Найти такой предел нетривиально, можно было проще через $\frac{a_n}{a_{n+1}}$

Упражнение (2818).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n$$

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2^n}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{1}{2^{n+1}}} \right|^p = \lim 2 \left| \frac{2n+2}{2n+1} \right|^p = 2$$

Тогда интервал сходимости $(-1, 3)$, и возможно ещё точки -1 и 3 .

$\angle x = -1$. При $p \leq 0$ ряд расходится, т.к. $\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \geq 1$. При $p > 0$ ряд сходится по признаку Лейбница.

$\angle x = 3$. При $p \leq 2$ ряд расходится, при $p > 2$ сходится.

Упражнение (2823).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad a > 0$$

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{a^{\sqrt{n+1}}}{a^{\sqrt{n}}} = 1$$

Если $x = 1$, то при $a > 1$ сходится, при $a \leq 1$ расходится. Аналогично для $x = -1$

Упражнение (2824).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{3^{-\sqrt{n}} \sqrt{n^2 + 2n + 2}}{3^{-\sqrt{n+1}} \sqrt{n^2 + 1}} = 1$$

При $x = 1$ ряд сходится по признаку Дирихле, где $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $b_n = 3^{-\sqrt{n}}$. Также он сходится, потому что $\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} < 3^{-\sqrt{n}}$.

При $x = -1$ ряд очевидно сходится по признаку сравнения (с рядом, полученным при $x = 1$).

ДЗ 13

Упражнение (2991).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} = ?$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n(2n-1)} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right)$$

$$\frac{1}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n(2n-1)} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right) &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Упражнение (2998).

Упражнение (3003).

Упражнение (3007).

Упражнение (3013).

Упражнение (3015).