

Для последовательности  $x_n$ :  $y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \dots)$ ,  $z_n = \inf(x_n, x_{n+1} \dots)$ . Тогда  $z_n \leq x_n \leq y_n$   $y_n \downarrow, z_n \uparrow$

$$\overline{\lim} x_n := \lim y_n \quad \underline{\lim} x_n := \lim z_n$$

**Теорема 1.** Техническое описание верхнего предела.

1.  $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$  — неогр. сверху

2.  $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$

3.  $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$  а и б:

(а)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$

(б)  $\forall \varepsilon > 0$  для бесконечного множества номеров  $n : l - \varepsilon < x_n$

**Доказательство.** 1. Очевидно, т.к.  $y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \dots) = +\infty \Leftrightarrow x_n$  — неогр. сверху

2. “ $\Rightarrow$ ”  $x_n \rightarrow -\infty$

“ $\Leftarrow$ ”  $\forall A \exists N \forall n > N \quad y_n \leq A, x_n < A$

3. “ $\Rightarrow$ ” (а)  $y_n \rightarrow l \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad x_n \leq y_n < l + \varepsilon$

(б) Берём  $\varepsilon > 0$ , предположим противное :  $\exists$  конечное мн-во  $n : l - \varepsilon < x_n$

$]n_0$  — максимальный номер, такой что  $l - \varepsilon < x_{n_0}$ , тогда  $y_{n_0} \leq l - \varepsilon$ , но  $y_n \downarrow \Rightarrow \lim y_n \leq l - \varepsilon$

“ $\Leftarrow$ ”  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \leq l + \varepsilon$ , но в  $x_n, x_{n+1} \dots \exists x_i : l - \varepsilon < x_i \Rightarrow y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \dots) > l - \varepsilon$ . Итого  $l + \varepsilon \geq y_n > l - \varepsilon \Rightarrow l = \lim y_n = \overline{\lim} x_n$

□

**Теорема 2.**

$$\exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$$

**Доказательство.** “ $\Rightarrow$ ” 1.  $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \lim y_n \geq \lim x_n = +\infty$

2.  $\lim x_n = -\infty$  аналогично

3.  $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$  очевидно из технического описания предела, пункт 3.

“ $\Leftarrow$ ”  $\underline{\lim} x_n \leftarrow z_n \leq x_n \leq y_n \rightarrow \overline{\lim} x_n$ , по теореме о городских  $\exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n$

□

**Определение.**  $n_k : n_1 < n_2 < n_3 < \dots \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k}$  — частичный предел

**Теорема 3.** О характеристизации верхнего предела как частичного.

1.  $\forall l$  — частичный пр.  $x_n \quad \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$

$$2. \exists (n_k) : x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n \quad \exists m_k : x_{m_k} \rightarrow \underline{\lim} x_n$$

*Доказательство.* 1.  $x_{n_k} \rightarrow l \quad \underline{\lim} x_n \leftarrow z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$

$$2. \quad (a) \quad \overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n - \text{неогр сверху} \Rightarrow \text{можно выбрать } x_{n_1} < x_{n_2} < \dots x_n \rightarrow +\infty$$

$$(b) \quad \overline{\lim} x_n = -\infty \text{ тривиально.}$$

$$(c) \quad \overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \quad \exists x_{n_k} : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$$

□

*Пример.* 1.  $\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$

$$2. \quad \forall l \in [-1, 1] - \text{частичный предел последовательности } \sin n$$

*Доказательство.* 1. Тривиально

$$2. \quad n_k := \arcsin l + 2\pi k$$

Кроме того, можно составить  $n_k \in \mathbb{N}$ .

□

## 1 Простейшие свойства рядов

**Определение.**  $a_1 + a_2 + \dots, \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$  — **числовой ряд** ( $a_i \in \mathbb{R}$ )

**Определение.**  $\forall N \in \mathbb{N} \quad S_n := \sum_{i=1}^n a_i$  — **частичная сумма**

**Определение.** Если  $\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ , ряд **сходится**, иначе ряд **расходится**.

*Пример.*  $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\Theta}{(N+1)!} x^{N+1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}, k \in \mathbb{N}, p = -k$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^p = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^N (x^p)'' \{x\} (1 - \{x\}) dx = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\max(1, N^{p-1}))$$

- $p > -1$  расходится
- $p = -1$  расходится
- $p < -1$  сходится

**Определение.**  $\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$  —  $N$ -й остаток ряда

Свойства:

1.  $\sum a_n, \sum b_n$  сходятся,  $c_n := a_n + b_n$ . Тогда  $\sum c_n$  сходится
2.  $\sum a_n$  — сходится,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\sum \lambda a_n$  сходится и  $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$
3. (a)  $\sum a_n$  — сходится  $\Rightarrow$  любой остаток сходится  
 (b) остаток сходится  $\Rightarrow \sum a_n$  сходится  
 (c)  $r_N = \sum_{n \geq N} a_n, \sum a_n$  сходится  $\Leftrightarrow r_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

**Доказательство.** (a) ? $m$ -й остаток,  $N \geq m$  :  $\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^N a_n$

(b) Аналогично.

(c) “ $\Leftarrow$ ” Тривиально.

$$\text{“}\Rightarrow\text{”} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + r_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + r_{+\infty} \Rightarrow r_N \rightarrow 0$$

□

**Лемма 1.** Необходимое условие сходимости:

$$\sum a_n \text{ сходится} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

**Доказательство.** Тривиально.  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$

□

Обратное неверно, например  $\sum \frac{1}{n^p}$  расходится,  $p \in (0, 1]$

**Теорема 4.** Критерий сходимости ряда Больцано-Коши:

$$\sum a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k > N \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально. □

Докажем расходимость  $\sum \frac{1}{n}$  по критерию Больцано-Коши.

$$m := k \quad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > k \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N \quad \exists k > N \quad \exists m := k \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+k}| \geq \varepsilon$$

**Теорема 5. Признак сравнения.**

$$a_k, b_k \geq 0$$

1.  $\forall k \quad a_k \leq b_k$ , или  $\exists c > 0 \quad \forall k \quad a_k \leq cb_k$ . Тогда  $\sum b_k$  сх.  $\Rightarrow \sum a_k$  сх.,  $\sum a_k$  расх.  $\Rightarrow \sum b_k$  расх.

2.  $\exists \lim \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$ . Тогда при

$$0 < l < +\infty : \sum a_k \text{ сх.} \Leftrightarrow \sum b_k \text{ сх.}$$

$$l = 0 : \sum b_k \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_k \text{ сх.}, \sum a_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum b_k \text{ расх.}$$

$$l = +\infty : \sum a_k \text{ сх.} \Rightarrow \sum b_k \text{ сх.}, \sum b_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum a_k \text{ расх.}$$

Доказательство.

**Лемма 2.**  $a_n \geq 0 \quad \sum a_n$  сходится  $\Leftrightarrow S_n$  ограничено сверху.

Доказательство.  $\exists$  кон.  $\lim S_n \Leftrightarrow S_n$  ограничено сверху. □

1.  $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$ ;  $S_n^{(b)}$  огр.  $\Rightarrow S_n^{(a)}$  огр., по лемме  $a_n$  сходится. Аналогично расходимость.

2. (а)  $0 < l < +\infty$  : Для  $\varepsilon = \frac{l}{2} \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \frac{1}{2}lb_n < a_n < \frac{3}{2}lb_n$ , дальше по 1 пункту.

(б)  $l = 0$  :  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon b_n \Rightarrow$  по 1 пункту.

(с)  $l = +\infty$  :  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \frac{a_n}{b_n} > \varepsilon \Rightarrow a_n > b_n \varepsilon \Rightarrow$  по 1 пункту. □

**Пример.** 1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 14n + 1}{n^5 + n^4 + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$$a_n \sim \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, 2 > 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$