**Теорема 1.**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$$

*Доказательство.*

$$\exp z \cdot \exp w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum C_n$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} n! \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} z^k w^{n-k} C_n^k \\ &= \frac{(z+w)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w)$$

□

*Следствие* 1. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp z \neq 0$

$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, потому что коэффициенты вещественные и

$$\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!}$$

*Примечание* (о тригонометрических функциях). Пусть $\exp(ix) = \text{Cos}(x) + i\text{Sin}(x), x \in \mathbb{R}$

Тогда $\exp(-ix) = \text{Cos}(x) - i\text{Sin}(x)$

$$\text{Cos}(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \text{Sin}(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

Следовательно:

$$\text{Cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{Sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Пусть $T(x) = \exp(ix)$. Тогда $T(x+y) = T(x)T(y)$.

$$\text{Cos}(x+y) + i\text{Sin}(x+y) = (\text{Cos}(x) + i\text{Sin}(x))(\text{Cos}(y) + i\text{Sin}(y))$$

$$\mathrm{Cos}(x+y) = \mathrm{Cos}x\mathrm{Cos}y - \mathrm{Sin}x\mathrm{Sin}y$$
$$\mathrm{Sin}(x+y) = \mathrm{Cos}x\mathrm{Sin}y + \mathrm{Sin}x\mathrm{Cos}y$$
$$|T(x)|^2 = T(x)\overline{T(x)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1$$

То есть $(\mathrm{Cos}x, \mathrm{Sin}x)$ — точка на единичной окружности. $T' = iT$, то есть $x \mapsto T(x)$ — движение по единичной окружности с единичным вектором скорости, перпендикулярным радиус-вектору.

Мы неформально показали, что $\mathrm{Cos} = \cos, \mathrm{Sin} = \sin$. Для более строго доказательства см. Рудин "Основы математического анализа".

# Ряды Тейлора

В этом параграфе все вещественно.

**Определение**. $f$ — **разлагается в степенной ряд** в окрестности $x_0$, если:

$$\exists \varepsilon > 0\ \ \exists C_n - \text{вещ. посл.}\ \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

*Примечание.* Тогда $f \in C^\infty(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

**Теорема 2** (о единственности). $f$ разлагается в степенной ряд в окрестности $x_0$. Тогда разложение единственно.

*Доказательство.* Выполняется (1).

База:

$$C_0 = f(x_0) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nC_n(x - x_0)^{n-1}$$

Переход:

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)C_n(x-x_0)^{n-k} \Rightarrow C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

□

**Определение**. Ряд Тейлора функции $f$ в точке $x_0$ — формальный ряд $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

*Примечание.*

1. Ряд Тейлора может оказаться сходящимся только при $x = x_0$
2. Ряд Тейлора может сходиться **не туда**.

*Пример* (2).

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}, f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

При $x = 0$ $\forall n$ $f^{(n)}(0) = 0$ — мы это доказывали в прошлом семестре.

Ряд Тейлора в $x_0 = 0$ тождественно равен нулю. Очевидно в других точках ряд не сходится к $f$.

*Пример* (1, Кошмарный сон КПК).

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+t^2x} dx, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x}(-1)^n t^{2n} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n t^{2n} x^n e^{-x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \Gamma(n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} n! \end{aligned}$$

Этот ряд расходится при $t \neq 0$, поэтому все равенства неверные.

$f(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ по обобщенному правилу Лейбница, $s = \frac{t^2}{t^2x+1}$, $f(t) = \dots \int^{t^2} \frac{1}{s} e^{-1/s} ds$

$$\frac{1}{1+t^2x} = 1 - t^2x + \dots + (-1)^n (t^2x)^n + \frac{(-1)^{n+1}(t^2x)^{n+1}}{1+t^2x}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-x}(-1)^k t^{2k} x^k dx + \int_0^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(t^2x)^{n+1} e^{-x}}{1+t^2x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} e^{-x} (-1)^k t^{2k} x^k dx + (-1)^{n+1} t^{2n+2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1} e^{-x}}{1+t^2x} dx}_{\text{огр.}, \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n+1} = (n+1)!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! t^{2n} + O(t^{2n+2})$$

Это формула Тейлора для $f$ в точке $t_0 = 0.1$, т.е. $f^{(2n)}(0) = (-1)^n n! 2n!$

**Определение.** $\sigma$-алгебра $\mathfrak{A} \subset 2^X$:

1. $\mathfrak{A}$ — алгебра
2. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

*Примечание.* $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

*Доказательство.*

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X \setminus A_i \in \mathfrak{A}$$

□

*Примечание.* $E \in \mathfrak{A}, \mathfrak{A}$ — $\sigma$-алгебра

Тогда $\mathfrak{A}_E := \{A \in \mathfrak{A} : A \subset E\}$ — $\sigma$-алгебра подмножеств $E$

*Пример.*

1. $2^X$
2. $X$ — бесконечное множество. $\mathfrak{A}$ — не более чем счётные множества и их дополнения
3. $X = \mathbb{R}^2, \mathfrak{A}$ — ограниченные множества и их дополнения — не $\sigma$-алгебра

*Упражнение.*

1. $A_1, A_2, \dots \subset X$

   $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1 \dots B_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$, тогда $B_k$ — дизъюнктны. $\bigsqcup B_k \stackrel{?}{=} \bigcup A_i$
2. $\mathcal{P}$ — полукольцо. $\mathfrak{A}_0$ := конечные объединения множеств в $\mathcal{P}$ и их дополнений. Доказать: $\mathfrak{A}_0$ — алгебра.
3. $\mathcal{P}$ — полукольцо. $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}$ — алгебра. Доказать: $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_0$

**Определение.** $\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **аддитивная функция множества**, если:

1. $\mu$ не должна принимать значения $\pm\infty$ одновременно
2. $\mu(\varnothing) = 0$

3. $\forall A_1 \dots A_n \in \mathcal{P}$, дизъюнктны. Если $A = \bigsqcup A_i \in \mathcal{P}$, то $\mu A = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu A_i$

**Определение**. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **объем**, если $\mu \geq 0$ и $\mu$ — аддитивная.

*Примечание.* 1. Если $X \in \mathcal{P}, \mu X < +\infty$, то говорят, что $\mu$ — конечный объем

2. $\mu$ — задано на $\mathfrak{A} : 3 \leftrightarrow 3$':

3' $\forall A, B \in \mathfrak{A}, A \cap B = \varnothing \ \ \mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$

*Пример.*

1. $\mathcal{P}^1$ — ячейки в $\mathbb{R}^1$. $\mu[a, b) = b - a, b \geq a$

$$\lhd x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$
$$[a, b) = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k)$$
$$\mu[a, b) = b - a = x_n - x_0 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_k \mu[x_{k-1}, x_k)$$

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастает, непрерывно

   $\forall [\alpha, \beta) \ \ \vartheta : \mathcal{P}^1 \to \mathbb{R}, \vartheta[\alpha, \beta) = g(\beta) - g(\alpha)$ — тоже объем.

3. Классический объем в $\mathbb{R}^m$ $\mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$$

   Этот объем не конечный.

4. Наглый пример. $\lhd \mathbb{R}^2$

   $\mathfrak{A}$ — алгебра ограниченных множеств и их дополнений.

$$\mu A = \begin{cases} 0 & , A \text{ — огр.} \\ 1 & , A \text{ — имеет огр. дополнение} \end{cases}$$

   Наглость заключается в том, что $\mu$ принимает значение 1, аддитивно, но не принимает значение 2. Это происходит, потому что нет двух дизъюнктных множеств, которые имеют ограниченное дополнение.

   Этот объем конечный.

**Определение**. Свойство $A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$ называется **монотонностью объема**.

**Теорема 3.** $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем. Тогда $\mu$ имеет свойства:

1. Усиленная монотонность

$$\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots A_n}_{\text{дизъюнктны}} \in \mathcal{P} \ \ \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \ \ \sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A$$

2. Конечная полуаддитивность

$$\forall A, A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{P} \ \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \ \mu A \leq \sum_{i=1}^{n} \mu A_i$$

3. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ пусть ещё известно $A \backslash B \in \mathcal{P}, \mu(B)$ — конечно. Тогда $\mu(A \backslash B) \geq \mu A - \mu B$

*Примечание.* 1. В пунтах 1 и 2 не предполагается, что $\bigcup A_i \in \mathcal{P}$

2. В пункте 3 если $\mathcal{P}$ — алгебра, условие $A \setminus B \in \mathcal{P}$ можно убрать.

*Доказательство.*

1. Усиление аксиомы 3 из определения полукольца:

$$A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigsqcup_{l=1}^{s} B_l$$

Это было доказано ранее, т.к. по теореме $A = (\bigsqcup A_i) \cup (\bigsqcup B_l)$ — дизъюнктное объединение конечного числа множеств.

$$\mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_l \geq \sum \mu A_i$$

2.

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \ \ A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k$$

Сделаем это множество дизъюнктным.

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) \ \ A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k$$

Но эти $C_k$ вообще говоря $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) = \bigsqcup_{j} D_{k_j} \in \mathcal{P}$$

Тогда $A = \bigsqcup\limits_{k,j} D_{k_j} \quad \mu A = \sum \mu D_{k_j}$

При этом $\forall k \quad \sum\limits_j \mu D_{k_j} = \mu C_k \overset{\text{монот.}\mu}{\leq} \mu A_k$

Итого $\mu A = \sum\limits_k \sum\limits_j \mu D_{k_j} = \sum \mu C_k \leq \sum \mu A_k$

3. (a) $B \subset A \quad A = B \cup (A \setminus B) \quad \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B)$

   (b) $B \not\subset A \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \quad \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu(A \cap B) \geq \mu A - \mu B$

$\square$