

Математическая логика

Михайлов Максим

21 марта 2021 г.

Оглавление

Лекция 1	12 февраля	3
0	Мотивация	3
0.1	Математикам	3
0.2	Программистам	4
1	Исчисление высказываний	4
1.1	Язык	4
1.2	Метаязык и предметный язык	4
1.3	Сокращения записи	5
1.4	Теория моделей	5
1.5	Теория доказательств	6
1.6	Правило Modus Ponens и доказательство	6
Лекция 2	19 февраля	7
2	Интуиционистская логика	10
2.1	ВНК-интерпретация	10
Лекция 3	26 февраля	11
2.2	Естественный (натуральный) вывод	11
2.3	Теория решеток	12
Лекция 4	5 марта	15
2.4	Табличные модели	15
2.5	Модели Крипке	16
Лекция 5	12 марта	18
3	Изоморфизм Карри-Ховарда	18
3.1	Алгебраические типы	18
3.2	Применение восьмой аксиомы интуиционистской логики	19
4	Исчисление предикатов	20
4.1	Язык исчисления предикатов	20
4.2	Теория моделей	21
4.3	Теория доказательств	22
Лекция 6	19 марта	23
4.4	Вхождение	23
4.5	Свобода для подстановки	24

Лекция 1

12 февраля

0 Мотивация

0.1 Математикам

Аксиома 1 (Архимеда). Для любого $k > 0$ найдётся n , такое что $kn > 1$.

Под эту аксиому не подходят бесконечно малые числа и это является проблемой. Например, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$, но мы хотим уметь различать эти два числа. Ньютон предложил идею бесконечно малых чисел, откуда пошли последовательности. Возникает вопрос — что такое последовательность и что такое число?

Общепринятое определение целых чисел \mathbb{N} происходит из теории множеств. Однако эта теория содержит в себе множество фундаментальных парадоксов, от которых нельзя избавиться.

Возникает вопрос — а что такое множество? Посмотрим на некоторое множество $A = \{x \mid x \notin x\}$. Содержит ли оно себя, $A \in A$? На этот вопрос нельзя ответить, это называется парадокс Рассела. Есть простой способ его разрешить — запретить ставить такой вопрос. Нет вопроса — нет парадокса. Существование такого парадокса ставит под вопрос существование любого множества — а существует ли \mathbb{N} ? Может быть его существование парадоксально, просто мы не нашли этот парадокс. Пришло чуть более умное решение парадокса — запретим множества, содержащие себя. Таким образом вывели аксиоматику теории множеств (Цермело — Френкеля).

Пример. Рассмотрим множество всех чисел, которые можно задать в ≤ 1000 слов русского языка. Фраза “наименьшее число, которое нельзя задать в ≤ 1000 слов” содержит ≤ 1000 слов, т.е. такое число принадлежит искомому множеству — парадокс.

Возникает идея — человеческий язык порождает парадоксы, поэтому нужно задать новый язык, который их не порождает. Этот язык и является математической логикой.

0.2 Программистам

Математическая логика применяется в двух областях (*для программистов*):

1. Языки программирования
2. Формальные доказательства

Для языков программирования матлогика применима как теория типов (*переменных*).

Формальные доказательства нужны например для smart-контрактов, где корректность программы критически важна, т.к. если в нём есть ошибка, у вас злоумышленник заберет все деньги, а вы не сможете этот контракт откатить.

1 Исчисление высказываний

1.1 Язык

Определение. Язык содержит в себе:

1. Пропозициональные переменные

A'_i — большая буква начала латинского алфавита, возможно с индексом и/или штрихом.

2. Связки

Пусть α, β — высказывания. Тогда $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg \alpha)$ — высказывания.

α, β называются **метапеременными**.

Примечание. Математическая логика алгеброподобна (*а не анализоподобна*), т.к. в ней много определений и мало доказательств.

1.2 Метаязык и предметный язык

У нас есть два различных языка — **предметный язык** и **метаязык**. Метаязык — русский, предметный язык мы определили выше.

Пример. $\alpha \rightarrow \beta$ — метавыражение; $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ — предметное выражение.

Обозначение. Метапеременные обозначаются различными способами в зависимости от того, что они обозначают:

- Буквы греческого алфавита ($\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi$) — выражения
- Заглавные буквы конца латинского алфавита (X, Y, Z) — произвольные переменные

Пример. $X \rightarrow Y \Rightarrow A \rightarrow B$ — подстановка переменных. Этот синтаксис не формален, мы будем записывать так:

$$(X \rightarrow Y)[X := A, Y := B] \equiv A \rightarrow B$$

Соглашение. символы логических операций не пишутся в метаязыке.

Пример.

$$\begin{aligned} (\alpha \rightarrow (A \rightarrow X))[\alpha := A, X := B] &\equiv A \rightarrow (A \rightarrow B) \\ (\alpha \rightarrow (A \rightarrow X))[\alpha := (A \rightarrow P), X := B] &\equiv (A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow B) \end{aligned}$$

1.3 Сокращения записи

- $\vee, \&, \neg$ — скобки слева направо (*лево-ассоциативные операции*) (не коммутативные)
- \rightarrow — правоассоциативная.

Примечание. Здесь операторы записаны в порядке их приоритета

Пример. Расставим скобки в следующем выражении:

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \& C \rightarrow D \\ A \rightarrow ((B \& C) \rightarrow D) \end{aligned}$$

1.4 Теория моделей

Модель состоит из:

Обозначение.

- P — некоторое множество предметных переменных
 - τ — множество высказываний предметного языка
 - V — множество истинных значений. Классическое — $\{\text{П}, \text{Л}\}$
 - $\llbracket \cdot \rrbracket : \tau \rightarrow V$ — оценка высказывания (*высказывание ставится в скобки*).
1. $\llbracket x \rrbracket : P \rightarrow V$ — задается при оценке.
 2. $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \star \llbracket \beta \rrbracket$, где \star есть логическая операция ($\vee, \&, \neg, \rightarrow$), а \star определено естественным образом как элемент метаязыка.

1.5 Теория доказательств

Определение. Схема высказывания — строка, соответствующая определению высказывания + метапеременные.

Пример.

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (A \rightarrow \alpha)))$$

10 схем аксиом:

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
3. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
4. $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
5. $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

1.6 Правило Modus Ponens и доказательство

Определение. Доказательство (*вывод*) есть конечная последовательность высказываний $\alpha_1 \dots \alpha_n$, где α_i — либо аксиома, либо $\exists k, l < i : \alpha_k \equiv \alpha_l \rightarrow \alpha_i$ (*правило Modus Ponens*)

Пример. $\vdash A \rightarrow A$

- | | |
|--|------------|
| 1. $A \rightarrow A \rightarrow A$ | сх. акс. 1 |
| 2. $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$ | сх. акс. 1 |
| 3. $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ | сх. акс. 2 |
| 4. $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ | М.Р. 1, 3 |
| 5. $A \rightarrow A$ | М.Р. 2, 4 |

Определение. Доказательство $\alpha_1 \dots \alpha_n$ доказывает выражение β , если $\alpha_n \equiv \beta$

Лекция 2

19 февраля

Обозначение. Большая греческая буква середины греческого алфавита (Γ, Δ, Σ) — список высказываний.

Определение (следование). α следует из Γ (обозначается $\Gamma \models \alpha$), если $\Gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$ и всегда, когда все $\llbracket \gamma_i \rrbracket = \text{И}$, то $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$.

Пример. $\models \alpha \rightarrow \alpha$ общезначимо.

Определение. Теория Исчисление высказываний **корректно**, если при любом α из $\vdash \alpha$ следует $\models \alpha$.

Определение. Исчисление **полно**, если при любом α из $\models \alpha$ следует $\vdash \alpha$.

Теорема 1 (о дедукции).

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

Доказательство.

\Leftarrow Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, т.е. существует доказательство $\delta_1 \dots \delta_n$, где $\delta_n \equiv \alpha \rightarrow \beta$

Построим новое доказательство: $\delta_1 \dots \delta_n, \alpha$ (гипотеза), β (М.Р.). Эта новая последовательность — доказательство $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

\Rightarrow Рассмотрим $\delta_1 \dots \delta_n, \Gamma, \alpha \vdash \beta$. Рассмотрим последовательность $\sigma_1 = \alpha \rightarrow \delta_1 \dots \sigma_n = \alpha \rightarrow \delta_n$. Это не доказательство.

Но эту последовательность можно дополнить до доказательства, так что каждый σ_i есть аксиома, гипотеза или получается через М.Р. Докажем это.

Доказательство. База: $n = 0$ — очевидно.

Переход: пусть $\sigma_0 \dots \sigma_n$ — доказательство. Покажем, что между σ_n и σ_{n+1} можно добавить формулы так, что σ_{n+1} будет доказуемо.

У нас есть 3 варианта обоснования δ_{n+1}

1. δ_{n+1} — аксиома или гипотеза, $\not\equiv \alpha$

Будем нумеровать дробными числами, потому что нам ничто это не запрещает, т.к. нам нужна только упорядоченность.

$n + 0.2$ δ_{n+1} — верно, т.к. это аксиома или гипотеза

$n + 0.4$ $\delta_{n+1} \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$ (аксиома 1)

$n + 1$ $\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$ (М.Р. $n + 0.2, n + 0.4$)

2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$

$n + 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ — доказательство $\alpha \rightarrow \alpha$

3. $\delta_k \equiv \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}, k, l \leq n$

k $\alpha \rightarrow (\delta_l \rightarrow \delta_{n+1})$

l $\alpha \rightarrow \sigma_l$

$n + 0.2$ $(\alpha \rightarrow \sigma_l) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\sigma_l \rightarrow \sigma_{n+1})) \rightarrow (\alpha \rightarrow \sigma_{n+1})$ (аксиома 2)

$n + 0.4$ $(\alpha \rightarrow \sigma_l \rightarrow \sigma_{n+1}) \rightarrow (\sigma \rightarrow \sigma_{n+1})$ (М.Р. $n + 2, l$)

$n + 1$ $\alpha \rightarrow \sigma_{n+1}$ (М.Р. $n + 0.4, k$)

□

□

Теорема 2. Пусть $\vdash \alpha$. Тогда $\models \alpha$.

Доказательство. Индукция по длине доказательства: каждая $\llbracket \delta_i \rrbracket = \text{И}$, если $\delta_1 \dots \delta_n$ — доказательство α

Рассмотрим n и пусть $\llbracket \delta_1 \rrbracket = \text{И}, \dots, \llbracket \delta_n \rrbracket = \text{И}$.

Тогда рассмотрим основание δ_{n+1}

1. δ_{n+1} — аксиома. Это упражнение.

Пример. $\delta_{n+1} \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$

$$\triangleleft \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rrbracket^{\llbracket \alpha \rrbracket := a, \llbracket \beta \rrbracket := b} = \text{И}$$

a	b	$\beta \rightarrow \alpha$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
Л	Л	И	И
Л	И	Л	И
И	Л	И	И
И	И	И	И

Аналогично можно доказать для остальных аксиом.

2. $\delta_{n+1} - \text{М.Р. } \delta_k = \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}$

Фиксируем оценку. Тогда $\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rrbracket = \text{И}$. Тогда:

$\llbracket \delta_k \rrbracket$	$\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket$	$\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rrbracket \rightarrow \delta_{n+1} \rrbracket$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Первых трёх вариантов не может быть в силу $\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rrbracket = \text{И}$. Таким образом, $\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket = \text{И}$.

□

Теорема 3 (о полноте). Пусть $\models \alpha$. Тогда $\vdash \alpha$.

Фиксируем набор переменных из α : $P_1 \dots P_n$.

Рассмотрим $\llbracket \alpha \rrbracket^{P_1 := x_1 \dots P_n := x_n} = \text{И}$

Обозначение. ${}_{[\beta]}\alpha \equiv \begin{cases} \alpha, & \llbracket \beta \rrbracket = \text{И} \\ \neg \alpha, & \llbracket \beta \rrbracket = \text{Л} \end{cases}$ и ${}_{[x]}\alpha \equiv \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg \alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$

Докажем, что $\underbrace{{}_{[x_1]}P_1, \dots, {}_{[x_n]}P_n}_{\Pi} \vdash {}_{[\alpha]}\alpha$

Доказательство. По индукции по длине формулы:

База: $\alpha = P_i$ ${}_{[P_i]}P_i \vdash {}_{[P_i]}P_i$, значит $\Pi \vdash {}_{[P_i]}P_i$

Переход: пусть $\eta, \zeta : \Pi \vdash {}_{[\eta]}\eta, \Pi \vdash {}_{[\zeta]}\zeta$ (по индукционному предположению). Покажем, что $\Pi \vdash {}_{[\eta \star \zeta]}\eta \star \zeta$, где \star — все связки

Это упражнение.

□

Лемма 1. $\Gamma, \eta \vdash \zeta, \Gamma, \neg \eta \vdash \zeta$. Тогда $\Gamma \vdash \zeta$.

Доказательство. Было в ДЗ.

□

Доказательство теоремы о полноте. $\models \alpha$, т.е. ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_n]}P_n \vdash {}_{[\alpha]}\alpha$. Но $\llbracket \alpha \rrbracket = \Pi$ при любой оценке. Тогда ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_n]}P_n \vdash \alpha$ при все x_i .

Лемма 2 (об исключении допущения). Если ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_n]}P_n \vdash \alpha$ и ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_n]}\neg P_n \vdash \alpha$, то ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_{n-1}]}P_{n-1} \vdash \alpha$

$$\left. \begin{array}{l} {}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_{n-1}]}P_{n-1}, P_n \vdash \alpha \\ {}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_{n-1}]}P_{n-1}, \neg P_n \vdash \alpha \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{по лемме}} {}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_{n-1}]}P_{n-1} \vdash \alpha$$

□

2 Интуиционистская логика

2.1 ВНК-интерпретация

Определим выражения:

- $\alpha \& \beta$ — есть α и β
- $\alpha \vee \beta$ — есть α либо β и мы знаем, какое
- $\alpha \rightarrow \beta$ — есть способ перестроить α в β
- \perp — конструкция без построения (*bottom*)
- $\neg \alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$

Теория доказательств есть классическая логика без десятой схемы аксиомы, вместо нее $\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$

Теория моделей — теория, в которой $\llbracket \alpha \rrbracket$ — открытое множество в Ω — топологическом пространстве.

В ней определено следующее:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \& \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= ((X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket) \cup \llbracket \beta \rrbracket)^\circ \\ \llbracket \perp \rrbracket &= \emptyset \\ \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= (X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket)^\circ \end{aligned}$$

Лекция 3

26 февраля

2.2 Естественный (*натуральный*) вывод

Рассмотрим новый способ записи доказательств — в виде деревьев, называемый естественным выводом.

Тогда язык будет состоять из переменных $A \dots Z, \vee, \&, \perp, \vdash, -$

У нас используются следующие правила вывода:

1. $\frac{}{\Gamma \vdash \gamma, \gamma \in \Gamma}$ (аксиома)
2. $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$ (введение \rightarrow)
3. $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}$ (введение $\&$)
4. $\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$ (удаление \rightarrow)
5. $\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$ (удаление $\&$)
6. $\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi}$ (удаление $\&$)
7. $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi}$ (введение \vee)
8. $\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi}$ (введение \vee)
9. $\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$ (удаление \perp)

$$10. \frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho}$$

$$\text{Пример. } \frac{\overline{A \vdash A} \text{ (акс.)}}{\vdash A \rightarrow A} \text{ (введение } \rightarrow \text{)}$$

$$\text{Пример. } \frac{\overline{A \& B \vdash A \& B} \text{ (акс.)} \quad \overline{A \& B \vdash A \& B} \text{ (акс.)}}{\overline{A \& B \vdash B} \quad \overline{A \& B \vdash A}} \frac{A \& B \vdash B \& A}{\vdash A \& B \rightarrow B \& A} \text{ (введение } \rightarrow \text{)}$$

2.3 Теория решеток

Определение.

- **Частичный порядок** — рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение.
- **Линейный порядок** — сравнимы любые два элемента.
- **Наименьший элемент** S — такой $k \in S$, что если $x \in S$, то $k \leq x$
- **Минимальный элемент** S — такой $k \in S$, что нет $x \in S$, что $x \leq k$
- **Множество верхних граней** a и b : $\{x \mid a \leq x \& b \leq x\}$.
- **Множество нижних граней** a и b : $\{x \mid x \leq a \& x \leq b\}$.
- $a+b$ — наименьший элемент множества верхних граней (может не существовать).
- $a \cdot b$ — наибольший элемент множества нижних граней.
- **Решетка** — множество + отношение, где для любых a, b есть как $a+b$, так и $a \cdot b$.
- **Дистрибутивная решетка** — если всегда $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Лемма 3. В дистрибутивной решетке $a+b \cdot c = (a+b)(a+c)$

Определение.

- **Псевдодополнение** a и b обозначается $a \rightarrow b$ и равно наибольшему элементу множества $\{c \mid a \cdot c \leq b\}$
- **Импликативная решетка** — решетка, где $\forall a, b \exists a \rightarrow b$
- 0 — наименьший элемент решетки.
- 1 — наибольший элемент решетки.
- **Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга)** — импликативная решетка с нулём.
- **Булева алгебра** — псевдобулева алгебра, такая что $a + (a \rightarrow 0) = 1$

Пример.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot b = b$$

$$a \cdot b = 0$$

$$a + b = 1$$

Лемма 4. В импликативной решетке всегда есть 1.

Доказательство. Возьмём $a \rightarrow a = 1$ для некоторого a .

$$a \rightarrow a = \mathbf{n}\{x \mid a \cdot x \leq a\} = \mathbf{n}(A)$$

Таким образом, A имеет наибольший элемент и это $a \rightarrow a$

□

Теорема 4.

- Любая алгебра Гейтинга — модель интуиционистского исчисления высказываний.
- Любая булева алгебра — модель классического исчисления высказываний.

Определение (топология). Рассмотрим множество X , называемое “носитель” и $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ — подмножество подмножеств X , называемое “топология”, такое что:

1. $\bigcup_{\alpha} x_i \in \Omega$, где $x_i \in \Omega$
2. $\bigcap_{i=1}^n x_i \in \Omega$, где $x_i \in \Omega$
3. $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$

Пример. Пусть X — узлы дерева, Ω — все множества узлов, которые содержат узлы вместе со всеми потомками.

Теорема 5. Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, $a + b = a \cup b$, $a \cdot b = a \cap b$, $a \rightarrow b = ((X \setminus a) \subset b)^\circ$, $a \leq b \Leftrightarrow a \subset b$, тогда (Ω, \leq) есть алгебра Гейтинга.

Пример. Дискретная топология — $\Omega = \mathcal{P}(X)$. Тогда (Ω, \leq) — булева алгебра.

1. $X^0 = X$
2. $a \rightarrow 0 = (X \setminus a \cup \emptyset) = X \setminus a$

Таким образом, $a + (a \rightarrow 0) = a + X \setminus a = X$

Определение. Пусть X — все формулы логики. Определим отношение порядка $\alpha \leq \beta$ это $\alpha \vdash \beta$. Будем говорить, что $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$.

$(X/\approx, \leq)$ есть алгебра Гейтинга.

Определение. $(X/\approx, \leq)$ — алгебра Линденбаума, где X, \approx из интуиционистской логики.

Теорема 6. Алгебра Гейтинга — полная модель интуиционистской логики.

Доказательство. $\models \alpha$ — истинно в любой алгебре Гейтинга, в частности в $(X/\approx, \leq)$. $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$, т.е. $\llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket A \rightarrow A \rrbracket$, т.е. $\alpha \in [A \rightarrow A]_{\approx}$, т.е. $A \rightarrow A \vdash \alpha$. \square

Лекция 4

5 марта

Определение. Полный порядок — линейный, где в каждом подмножестве есть наименьший элемент. Множество с полным порядком называют **вполне упорядоченным**.

Пример. \mathbb{N} — вполне упорядоченное множество

\mathbb{R} — не вполне упорядоченное множество, т.к. (a, b) не имеет наименьшего $\forall a, b$. Кроме того, \mathbb{R} не имеет наименьшего.

Определение. Предпорядок — транзитивное, рефлексивное отношение.

Как мы знаем из домашнего задания, по предпорядку можно построить частичный порядок, сжав компоненты связности в классы эквивалентности.

2.4 Табличные модели

Определение. Табличная модель для интуиционистского исчисления высказываний:

- V — множество истинностных значений
- $f_{\rightarrow}, f_{\&}, f_{\vee} : V^2 \rightarrow V$
- Выделенное истинное значение $T \in V$
- Оценка переменных $\llbracket P_i \rrbracket \in V, f_{\mathcal{P}} : P_i \rightarrow V$

И $\llbracket P_i \rrbracket = f_{\mathcal{P}}(P_i), \llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket), \llbracket \neg \alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$

$\models \alpha$ означает, что $\llbracket \alpha \rrbracket = T$ при любой $f_{\mathcal{P}}$

Определение. Конечная табличная модель — табличная модель с конечным V .

Теорема 7. У интуиционистского исчисления высказываний не существует корректной полной табличной модели.

Неформально эта теорема говорит, что нельзя считать, что в интуиционистской логике есть три значения — истинна, ложь и “неизвестно”.

2.5 Модели Крипке

Идея моделей Крипке следующая: общезначимое утверждение истинно во всех мирах.

Определение (модели Крипке).

1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. \leq — частичный порядок на W
3. Отношение вынужденности $W_j \Vdash P_i$, где P_i — переменная, т.е. $(\Vdash) \subset W \times \mathcal{P}$

При этом, если $W_j \Vdash P_i$ и $W_j \leq W_k$, то $W_k \Vdash P_i$

Определение.

- $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, тогда (*и только тогда*) $W_i \Vdash \alpha \& \beta$
- $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, тогда (*и только тогда*) $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
- Пусть во всех $W_i \leq W_j$ всегда, когда $W_j \Vdash \alpha$, имеет место $W_j \Vdash \beta$. Тогда $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$
- $W_i \Vdash \neg \alpha$ значит, что α не вынуждено нигде, начиная с W_i : $W_i \leq W_j \Rightarrow W_j \nVdash \alpha$

Теорема 8. Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \leq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$

Определение. Если $W_i \Vdash \alpha$ при всех $W_i \in W$, то $\models \alpha$

Теорема 9. ИИВ корректно в моделях Крипке.

Доказательство. Рассмотрим (W, Ω) — топологию, где $\Omega = \{w \subset W \mid \text{если } w_i \in w, w_i \leq w_j, \text{ то } w_j \in w\}$. Это можно представить как множество подлесов, где любая вершина входит со своими потомками.

$\{W_k \mid W_k \Vdash P_j\}$ — открытое множество, что очевидно из определения Ω и \Vdash .

Примем $\llbracket P_i \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash P_i\}$ и аналогично $\llbracket \alpha \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash \alpha\}$. Корректность этого определения докажем в ДЗ.

Поскольку любая топология является корректной моделью ИИВ, искомое доказано. \square

Доказательство теоремы о нетабличности. Предположим обратное, т.е. существует конечная табличная модель, $|V| = n$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$\varphi_n = \bigvee_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} (P_i \rightarrow P_j \& P_j \rightarrow P_i)$$

1. $\not\models \varphi_n$. Почему? Рассмотрим последовательность миров, таких что $W_i \models P_i$, состоящую из $n + 1$ мира. Тогда $W_i \not\models (P_i \rightarrow P_j) \ \& \ (P_k \rightarrow P_j)$, таким образом $\not\models (P_i \rightarrow P_j) \ \& \ (P_k \rightarrow P_j)$ и $\not\models \bigvee (P_i \rightarrow P_j) \ \& \ (P_k \rightarrow P_j)$, а значит $\not\models \varphi_n$
2. $\models \varphi_n$ в V по принципу Дирихле: $\exists i \neq j : \llbracket P_i \rrbracket = \llbracket P_j \rrbracket$, а значит $\llbracket P_i \rightarrow P_j \rrbracket = \text{И}$, и соответственно $\llbracket \varphi_n \rrbracket = \text{И}$.

Т.к. $\models \varphi_n$, то $\vdash \varphi_n$, но это не так — противоречие. \square

Определение. Дизъюнктивность ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

Определение. Алгебра Гёделя — алгебра Гейтинга, в которой из $a + b = 1$ следует $a = 1$ или $b = 1$

Определение. Пусть \mathcal{A} — алгебра Гейтинга. Тогда $\Gamma(\mathcal{A})$ получается переименовыванием 1 в ω и добавлением нового элемента $1_{\Gamma(\mathcal{A})}$, являющегося единицей для новой алгебры.

Теорема 10. $\Gamma(\mathcal{A})$ есть алгебра Гейтинга и $\Gamma(\mathcal{A})$ Гёделева.

Доказательство. Очевидно. \square

Определение. Гомоморфизм алгебр Гейтинга — отображение $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, где \mathcal{A}, \mathcal{B} — алгебры Гейтинга, $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$, $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$, $\varphi(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$

Теорема 11. Если $a \leq b$, то $\varphi(a) \leq \varphi(b)$

Определение. Пусть α — формула ИИВ, f, g — оценки ИИВ, где $f : \text{ИИВ} \rightarrow \mathcal{A}$, $g : \text{ИИВ} \rightarrow \mathcal{B}$. Тогда φ согласовано с f, g , если $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

Теорема 12. Если $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ согласована с f, g и $\llbracket \alpha \rrbracket_g \neq 1_{\mathcal{B}}$, то $\llbracket \alpha \rrbracket_f \neq 1_{\mathcal{A}}$

Доказательство. Рассмотрим алгебру Линденбаума \mathcal{L} , $\Gamma(\mathcal{L})$ и $\varphi : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$ — гомоморфизм.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1_{\mathcal{L}}, & x = \omega \\ 1_{\mathcal{L}}, & x = 1_{\Gamma(\mathcal{L})} \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$. Тогда $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$, но по Гёделеваемости $\Gamma(\mathcal{L})$ $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$ или $\llbracket \beta \rrbracket = 1$.

Пусть $\not\models \alpha$ и $\not\models \beta$. Тогда $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket) \neq 1_{\mathcal{L}}$ и $\varphi(\llbracket \beta \rrbracket) \neq 1_{\mathcal{L}}$. Тогда $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\mathcal{L}}$, $\llbracket \beta \rrbracket \neq 1_{\mathcal{L}}$ — противоречие. \square

Лекция 5

12 марта

3 Изоморфизм Карри-Ховарда

Примечание. Эта тема в нашем курсе рукомахательная.

Пусть p — программа, т.е. функция, принимающая α и возвращающая β , т.е. $p : \alpha \rightarrow \beta$

Можем посмотреть на это с другой стороны: p доказательство, что из α следует β , например в Haskell `f a = a` гласит, что `f` доказывает, что $A \rightarrow A$, где подразумевается $\forall A$.

Такое сопоставление программам доказательств и высказываниям типов называется изоморфизмом Карри-Ховарда:

логическое исчисление	типизированное λ -исчисление
логическая формула	тип
доказательство	программа
доказуемая формула	обитаемый тип
\rightarrow	функция
$\&$	упорядоченная пара
\vee	алгебраический тип (<i>тип-сумма</i>)

Примечание. Обитаемый тип — тип, у которого есть хотя бы один экземпляр.

Несложно заметить, что логика, соответствующая λ -исчислению, является интуиционистской, поэтому мы её в основном изучаем.

3.1 Алгебраические типы

Рассмотрим следующее определение списка в Pascal:

```
type list : record
    nul : boolean;
```

```

    case nul of
      true: ;
      false: next ^list
    end
end;

```

Рассмотрим то же самое в C, опустив bool и скажем, что `nul = (next == null)` (это в какой-то степени костыльно):

```

struct list {
    next: *list;
}

```

Определим таким же способом дерево:

```

struct tree {
    tree* left;
    tree* right;
    int value;
}

```

Это ещё более костыльно, т.к. то, является ли вершина листом, закодировано в неявном виде.

Определение. Отмеченное (*дизъюнктивное*) объединение множеств A, B обозначается $A \sqcup B$ или $A \uplus B$ ¹ и равно $\{\langle "A", a \rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle "B", b \rangle \mid b \in B\}$.

Примечание. Это определение интуиционистское по своей сути, т.к. если дано $s \in A \sqcup B$, то мы знаем, из какого множества s .

Определение. Тип, соответствующий такому объединению множеств, называется алгебраическим

Пример. В C++ такой тип реализован как `std::variant<...>`

Пример. Список в Haskell:

```

data List a = nil | Cons a (List a)

```

3.2 Применение восьмой аксиомы интуиционистской логики

Вспомним восьмую аксиому интуиционистской² логики и запишем её как правило натурального вывода:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$$

¹ или ещё десятком других символов

² и классической

Рассмотрим программу в Haskell, которая преобразует список в строку:

```
let rec string_of_list l =
  match l with
  | Nil -> "Nil"
  | Cons(head, tail) -> head ^ ":" ^ string_of_list tail
```

Подставим в рассматриваемую аксиому соответствующие значения:

$$\frac{\Gamma \vdash Nil \rightarrow string \quad \Gamma \vdash list \rightarrow string \quad \Gamma \vdash Nil \vee list}{\Gamma \vdash string}$$

Несложно заметить, что эта аксиома описывает match в Haskell — мы даем выражения после “->”, т.е. правила $Nil \rightarrow string$, $list \rightarrow string$ и элемент Nil или list, а match возвращает string.

4 Исчисление предикатов

4.1 Язык исчисления предикатов

Выражения в этом языке бывают двух видов:

1. Логические выражения, называемые “предикаты” или “формулы”
2. Предметные выражения, называемые “термы”

θ — метaperменная для термов.

Термы бывают двух видов:

- Атомы:
 - Предметные переменные обозначаются буквами $a, b, c \dots$
 - Метaperменные обозначаются буквами x, y, z
- Применение функциональных символов:
 - Функциональные символы: f, g, h и записывается $f(\theta_1 \dots \theta_n)$
 - Метaperменная тоже обозначается f

Логические выражения:

- Применение предикатных символов $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$, где P — метaperменная для предикатных символов, а предикатный символ — $A, B, C \dots$
- Связки $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ с правилами из языка классической логики.
- Кванторы ³ $\forall x.\varphi$ или $\exists x.\varphi$, где φ — любое логическое выражение.

³ По записи кванторов нет общепринятого соглашения.

Мы используем жадность кванторов.⁴ Это значит, что квантор берет в φ все, пока не встретит конец выражения или скобку, которая оканчивает этот квантор.

Пример. $\forall x.P(x) \& \forall y.P(y) \equiv \forall x.(P(x) \& (\forall y.P(y)))$

4.2 Теория моделей

Определим оценку формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем D — предметное множество, $V = \{И, Л\}$
2. Каждому $f_i(x_1 \dots x_n)$ сопоставим функцию $f_{f_n} : D^n \rightarrow D$
3. Каждому $P_j(x_1 \dots x_n)$ сопоставим функцию⁵ $f_{p_n} : D^n \rightarrow V$
4. Каждой x_i сопоставим $f_{x_i} \in D$
 - $\llbracket x \rrbracket = f_{x_i}$
 - $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket$ — так же, как в исчислении высказываний.
 - $\llbracket P_i(\theta_1 \dots \theta_n) \rrbracket = f_{p_i}(\llbracket \theta_1 \rrbracket \dots \llbracket \theta_n \rrbracket)$
 - $\llbracket f_j(\theta_1 \dots \theta_n) \rrbracket = f_{f_j}(\llbracket \theta_1 \rrbracket \dots \llbracket \theta_n \rrbracket)$
 - $\llbracket \forall x.\varphi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \varphi \rrbracket = И \text{ при всех } k \in D \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$
 - $\llbracket \exists x.\varphi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \varphi \rrbracket = И \text{ при некотором } k \in D \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$

Пример. $\forall x.\forall y.E(x, y)$

Пусть $D = \mathbb{N}$, $E(x, y) = \begin{cases} И, & x = y \\ Л, & x \neq y \end{cases}$

$\llbracket \forall x.\forall y.E(x, y) \rrbracket_{x:=1, y:=2} = Л$, т.к. $\llbracket E(x, y) \rrbracket = Л$.

Вспомним определение предела последовательности из матанализа:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |a_n - a| < \varepsilon$$

Перепишем это определение с богомерзкого языка матанализа на православный язык исчисления предикатов.⁶

⁴ В отношении жадности кванторов также нет соглашения; встречается запись, где квантор — унарная операция, аналогичная \neg

⁵, называемую предикат

⁶ Это термины лектора, все претензии от адептов матанализа и других религий — к нему.

Пусть $(>)(a, b) = G(a, b)$, $|a| = m_+(a)$, $(-)(a, b) = m_-(a, b)$, $m_a : n \mapsto a_n$, $0() = m_0$

$$\forall \varepsilon. \varepsilon \rightarrow 0 \exists N. \forall n. (n > N) \rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon. \varepsilon \rightarrow 0 \exists N. \forall n. (n > N) \rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

$$\forall e. G(e, m_0) \exists n_0. \forall n. G(n, n_0) \rightarrow G(e, m_+(m_-(m_a(n), a))) < \varepsilon$$

4.3 Теория доказательств

Все аксиомы исчисления высказываний + Modus Ponens + две схемы аксиом + два правила:

$$1. (\forall x. \varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$$

$$2. \varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x. \varphi$$

Обе эти схемы применимы только если θ свободен для подстановки вместо x в φ , т.е. никакое свободное вхождение x в θ не станет связным.

Пример.

```
int f(int x) {
    x = y;
}
```

После замены $y := x$ код станет следующим:

```
int f(int x) {
    x = x;
}
```

И код потеряет свой смысл.

Правила следующие:

$$1. \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow (\forall x. \psi)} \text{ (правило } \forall \text{)}$$

$$2. \frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists x. \psi) \rightarrow \varphi} \text{ (правило } \exists \text{)}$$

Лекция 6

19 марта

Пример. $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x.(\varphi \rightarrow \psi)}$ — возможно доказуемо, но это не правило вывода для \exists .

Определение. $\alpha_1 \dots \alpha_n$ — доказательство, если выполняется одно из:

1. α_i — аксиома
2. Существует $j, k < i$, такие что $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$
3. Существует j , такое что $\alpha_j = \varphi \rightarrow \psi$ и $\alpha_i = (\exists x.\varphi) \rightarrow \psi$, причём x не входит свободно в ψ .
4. Существует j , такое что $\alpha_j = \psi \rightarrow \varphi$ и $\alpha_i = \psi \rightarrow \forall x.\varphi$, причём x не входит свободно в ψ .

4.4 Вхождение

Рассмотрим некоторую формулу и рассмотрим вхождения x в неё:

$$(P(\underbrace{x}_1) \vee Q(\underbrace{x}_2)) \rightarrow (R(\underbrace{x}_3) \& (\overbrace{\forall \underbrace{x}_4 . P_1(\underbrace{x}_5)}^{\text{Область действия } \forall \text{ по } x})))$$

- Вхождение 4 связывающее
- Вхождение 5 связано вхождением 4
- Вхождения 1-3 свободны.

Случай множественного связывания:

$$\underbrace{\forall x. \forall y. \overbrace{\forall x. \forall y. \forall x. P(x)}^{\text{Область действия } \forall \text{ по } x}}_{\text{Область действия } \forall \text{ по } x}$$

Определение. Вхождение **свободно**, если не связано.

Примечание. Свободно входящие переменные нельзя переименовывать, т.к. к формуле могут приписать кванторы, которые используют данные имена переменных. Это ограничение не распространяется на связанные переменные.

Любая аксиома есть предикат.

4.5 Свобода для подстановки

Определение. θ **свободен для подстановки** вместо x в φ , если никакая свободная переменная в θ не станет связанной в $\varphi[x := \theta]$

Обозначение. $\varphi[x := \theta]$ — заменить все свободные вхождения x в φ на θ

Пример.

$$\begin{aligned} (\forall x. \forall y. \forall x. P(x))[x := y] &\equiv \forall x. \forall y. \forall x. P(x) \\ P(x) \vee \forall x. P(x)[x := y] &\equiv P(y) \vee \forall x. P(x) \\ (\forall y. x = y)[x := y] &\equiv \forall y. y = y \end{aligned}$$

В этой формуле новый y связался.

Примечание. В определении можно опустить “свободная” в нашем исчислении, но это не верно в достаточно извращенных исчислениях.

Лемма 5. Пусть $\vdash \alpha$. Тогда $\vdash \forall x. \alpha$

Доказательство. Т.к. $\vdash \alpha$, то существует $\gamma_1 \dots \gamma_n : \gamma_n \equiv \alpha$

Создадим новое доказательство.

$$\begin{array}{ll} (1) & \gamma_1 \\ & \vdots \\ (n) & \gamma_n \\ (n+1) & A \& A \rightarrow A \quad (\text{акс.}) \\ (n+2) & \alpha \rightarrow ((A \& A \rightarrow A) \rightarrow \alpha) \quad (\text{акс.}) \\ (n+3) & (A \& A \rightarrow A) \rightarrow \alpha \quad (\text{М.Р. } n, n+2) \\ (n+4) & (A \& A \rightarrow A) \rightarrow \forall x. \alpha \quad (\text{введение } \forall) \\ (n+5) & \forall x. \alpha \quad (\text{М.Р. } n+1, n+4) \end{array}$$

□

Лемма 6. $(\alpha \rightarrow \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \alpha \& \varphi \rightarrow \psi$

Лемма 7. $(\alpha \& \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi \rightarrow \psi)$

Доказательство двух лемм. По теореме о полноте исчисления высказываний. □

Теорема 13 (о дедукции). Пусть даны Γ, α, β .

1. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ при условии, если в доказательстве $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ не применялись правила для \forall, \exists по переменным, входящим свободно в α .
2. Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

Доказательство. По индукции. Пусть доказано $\alpha \rightarrow \delta_i$ для $i \in [1, n]$, докажем $\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$.

Рассмотрим случаи:

1. Схемы аксиом 1-10 — аналогично ¹.
2. М.Р. — аналогично
3. Аксиомы 11-12 — аналогично первому пункту.
4. Пусть δ_{n+1} получено правилом $\forall : \delta_{n+1} \equiv \varphi \rightarrow \forall x.\psi$ и существует $\delta_k \equiv \varphi \rightarrow \psi$ и $k \leq n$, причём x не входит свободно в φ .

При этом в новом доказательстве уже доказано $\alpha \rightarrow \delta_k$

$$\begin{array}{lll}
 (1) & \alpha \rightarrow \delta_1 & \\
 & \vdots & \\
 (k) & \alpha \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) & \\
 & \vdots & \\
 (n) & \alpha \rightarrow \delta_n & \\
 & \vdots & \\
 (n+0.1) & \alpha \rightarrow \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \alpha \& \varphi \rightarrow \psi & \text{(лемма 6)} \\
 (n+0.2) & \alpha \& \varphi \rightarrow \psi & \text{(М.Р.)} \\
 (n+0.3) & \alpha \& \varphi \rightarrow \forall x.\psi & \text{(введение } \forall) \\
 (n+0.4) & (\alpha \& \varphi \rightarrow \forall x.\psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi \rightarrow \forall x.\psi) & \text{(лемма 7)} \\
 (n+1) & \alpha \rightarrow \varphi \rightarrow \forall x.\psi & \text{(М.Р.)}
 \end{array}$$

□

Примечание. Доказательство пункта 2 аналогично исходному доказательству для исчисления высказываний.

¹ доказательству ИВ