

Теорема 1 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- f суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E - \text{изм. } \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

Следствие 1. ???

Доказательство.

$$\begin{aligned} X_n &:= X(|f| \geq n) \\ X_n &\subset X_{n+1} \subset \dots \quad \mu \left(\bigcap X_n \right) \stackrel{(1)}{=} 0 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{\delta} \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

- (??): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
- (??): Т.к. f почти везде конечна.

□

Примечание. Следующие два свойства не эквивалентны:

1. $f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

Из 1 не следует 2: пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$, $f_n = \frac{1}{nx}$. Тогда $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$, но $\int |f_n - f|$???

Теорема 2 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists g :$

1. $\forall n \quad |f_n| \stackrel{(2)}{\leq} g$ почти везде

2. g — суммируемо на X

Тогда: f_n, f — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируемы в силу неравенства (??), f суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1. $\mu X < +\infty$

Зафиксируем ε . $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

$f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \rightarrow 0$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} = \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \text{сл. т. об абс. непр.}}} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X \xrightarrow{\quad} 0$$

2. $\mu X = +\infty$

□

Не дописано