

## Функциональные последовательности и ряды

*Пример.*  $\sum x^n, x \in (0, 1)$  — нет равномерной сходимости

$\exists \varepsilon = 0.1 \quad \forall N \quad \exists n > N$  — подходит любое  $> 100 \quad \exists p = 1 \quad \exists x = 1 - \frac{1}{n+1} : |u_{n+1}(x)| \geq \varepsilon$ , т.е.  
 $(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} \approx \frac{1}{e} > \frac{1}{10}$

**Теорема 1** (признак Вейерштрасса).

- $\sum u_n(x)$
- $x \in X$

Пусть  $\exists c_n$  — вещественная:

- $|u_n(x)| \leq c_n$  при  $x \in E$
- $\sum c_n$  — сходится

Тогда  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$

*Доказательство.*  $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \dots + c_{n+p}$  — тривиально

$\sum c_n$  — сх.  $\Rightarrow c_n$  удовлетворяет критерию Больцано-Коши :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon$$

Тогда  $\sum u_n(x)$  удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости.  $\square$

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}, x \in \mathbb{R}$ . Попытаемся применить признак.

$c_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right|$  — это минимальное возможное  $c_n$ , если для него не работает признак, до ни для какого  $c_n$  не работает.

$\sup$  достигается в точке  $x_0 = \frac{1}{n}$ ,  $\sup = \frac{1}{2n} \cdot \sum \frac{1}{2n}$  расходится  $\Rightarrow$  признак не сработал.

Построим отрицание критерия Больцано-Коши:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon = \frac{1}{6} \quad \forall N \quad \exists n > N \quad p = n \in \mathbb{N} \quad \exists x = \frac{1}{n} \quad |u_{n+1}(x) + u_{2n}(x)| &= \frac{\frac{1}{n}}{1 + (n+1)^2 \frac{1}{n^2}} + \dots + \frac{\frac{1}{n}}{1 + (2n)^2 \frac{1}{n^2}} \geq \\ &\geq n \frac{\frac{1}{n}}{1 + (2n)^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{5} > \frac{1}{6} = \varepsilon \end{aligned}$$

*Пример.*  $\sum \frac{x}{1+x^2n^2}, x \in \left( \frac{1}{2020}, 2020 \right)$

$$c_n := \sup \frac{x}{1 + x^2 n^2} \leq \frac{2020}{1 + \frac{1}{2020^2} n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^2}$$

$\sum c_n$  сходится  $\Rightarrow$  есть равномерная сходимость.

## Приложения равномерной сходимости для рядов

**Теорема 1'** (Стокса-Зайделя для рядов).

- $u_n : X \rightarrow Y$
- $X$  — метрическое пространство
- $Y$  — нормированное пространство
- $x_0 \in X$
- $u_n$  непрерывно в  $x_0$
- $\sum u_n(x)$  **равномерно** сходится на  $X$
- $S(x) := \sum u_n(x)$

Тогда  $S(x)$  непрерывно в  $x_0$ .

*Доказательство.* По теореме 1  $S_n(x) \Rightarrow S(x)$ ,  $S_n(x)$  — непр. в  $x_0 \xrightarrow{\tau.1} S(x)$  непр. в  $x_0$   $\square$

*Примечание.* Достаточно равномерной сходимости  $u_n(x)$  на некоторой окрестности  $x_0$

*Примечание.*  $u_n \in C(x)$ ,  $\sum u_n$  — равномерно сходится на  $X \Rightarrow S(x) \in C(x)$

**Теорема 2'.** О почленном интегрировании ряда

- $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- $u_n$  — непр. на  $[a, b]$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  **равномерно** сходится на  $[a, b]$
- $S(x) = \sum u_n(x)$

Тогда  $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx$

Можно интегрировать, т.к.  $S(x)$  — непр. на  $[a, b]$  по теореме 1'

*Доказательство.* По теореме 2

$$S_n \xrightarrow{[a,b]} S$$

По теореме 2:

$$\int_a^b S_n(x) dx \rightarrow \int_a^b S(x) dx$$

$$\int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n u_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

□

*Пример.*  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$  — равномерно сходится при  $|x| \leq q < 1$  по Вейерштрассу:  $|(-1)^n x^n| \leq q^n$ ,  $\sum q^n$  сходится.

Проинтегрируем от 0 до  $t$  ( $|t| \leq q$ )

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}$$

Это верно при  $t \in [-q, q] \quad \forall q : 0 < q < 1$ , т.е. верно при  $t \in (-1, 1)$

При  $t = -1$   $\sum -\frac{1}{k}$  расходится

При  $t \rightarrow 1$  ряд  $\sum (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}$  равномерно сходится (\*) на  $[0, 1]$ , слагаемые непрерывны в

$t_0 = 1 \xrightarrow{т.1} \text{сумма ряда непрерывна в точке } t_0 = 1 \Rightarrow \ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

(\*): равномерная сходимость есть по секретному приложению к признаку Лейбница:

$$\forall t \quad \frac{t^k}{k} \text{ — монотонно убывает по } k \Rightarrow \underbrace{\left| \sum_{k=N}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k} \right|}_{S_{N-1}-S} \leq \left| \frac{t^N}{N} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{N}}_{\text{не зависит от } t} \rightarrow 0, \text{ это и есть}$$

равномерная сходимость ряда.

## Криволинейный интеграл

### Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

**Определение.**

- Путь — непрерывное отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$

- $\gamma(a)$  — начало пути
- $\gamma(b)$  — конец пути
- $\gamma[a, b]$  — носитель пути
- Если  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , путь называется замкнутым или петлёй.
- Если  $\gamma$  — гладкое или кусочно-гладкое, то  $\gamma'(t)$  — вектор скорости
- Кусочно-гладкое отображение — отображение, имеющее не более, чем счётное число точек разрыва, все точки разрыва — I рода и  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  — гладкое  $\forall k$ , где  $t_k$  — точка разрыва.
- $\gamma(t) = (\gamma_1(t) \dots \gamma_m(t))$ , то  $\gamma' = (\gamma'_1 \dots \gamma'_m)$
- Длина гладкого пути это  $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

**Определение.** Векторное поле — непрерывное отображение  $V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$  — вектор, “приложенный к точке  $x$ ”.

**Определение.** Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m \end{aligned}$$

Также используется обозначение  $I(V, \gamma) = \int_\gamma V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m$

Пусть  $V$  — поле силы. Запишем интегральную сумму для интеграла векторного поля:

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle V(\gamma(\xi_k)), \gamma'(\xi_k) \rangle (t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \overbrace{\left\langle V(\gamma(\xi_k)), \frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|} \right\rangle}^{\text{работа силы}} \underbrace{|\gamma'(\xi_k)| (t_k - t_{k-1})}_{\approx \text{пройденный путь}} \\ &\quad \underbrace{\left\langle V(\gamma(\xi_k)), \frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|} \right\rangle}_{\text{проекция силы на касательную к направлению}} \end{aligned}$$

Свойства:

1. Линейность интеграла по полю.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall U, V \text{ — векторные поля} \quad I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$$

*Доказательство.* Очевидно из формулы в определении.  $\square$

## 2. Аддитивность при дроблении пути

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $c \in (a, b)$
- $\gamma^1 = \gamma|_{[a, c]}$
- $\gamma^2 = \gamma|_{[c, b]}$

Тогда  $I(V, \gamma) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

*Доказательство.* Очевидно из линейности интеграла в .  $\square$

## 3. Замена параметра

- $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$
- $\varphi \in C^1$
- $\varphi(p) = a$
- $\varphi(q) = b$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Тогда  $I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$

*Доказательство.* Это замена переменной в интеграле.

$$\begin{aligned}
 I(V, \tilde{\gamma}) &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(s) \rangle ds \\
 &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\
 t &:= \varphi(s) \\
 &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= I(V, \gamma)
 \end{aligned}$$

$\square$

*Примечание.*  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — параметризация гладкого одномерного простого многообразия

$\tilde{\varphi} : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — то же самое

По теореме о двух параметризациях:  $\exists$  диффеоморфизм  $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$   $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

#### 4. Объединение носителей

- $\gamma^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^1(b) = \gamma^2(c)$

Зададим путь  $\gamma = \gamma^2 \gamma^1 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma^2(t + c - b), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$

В точке  $b$  возможен излом, т.е. нет  $\gamma'(b)$ , но есть левосторонняя и правосторонняя производные.

Если  $\gamma^1, \gamma^2$  — кусочно-гладкие, то  $\gamma$  — кусочно-гладкое.

Тогда  $I(V, \gamma^2 \gamma^1) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_b^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ \tau &:= t - b + c \\ &= \int_a^b \langle V(\gamma^1(t)), \gamma^{1'}(t) \rangle dt + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), \gamma^{2'}(\tau) \rangle d\tau \\ &= I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2) \end{aligned}$$

□

#### 5. Противоположный путь

$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \gamma(a + b - t)$ , т.е. мы идём от  $b$  к  $a$ , а не наоборот.

Тогда  $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} I(V, \gamma^-) &= \int_a^b \langle V(\gamma(a + b - \tau)), -\gamma'(a + b - \tau) \rangle d\tau \\ t &:= a + b - \tau \\ &= \int_b^a \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t) \rangle (-dt) \end{aligned}$$

$$= -I(V, \gamma)$$

□

## 6. Оценка интеграла векторного поля пути

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$$

, где  $L = \gamma[a, b]$  — носитель пути.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \right| &\leq \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| dt \\ &\leq \int_a^b |V(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| l(\gamma) \end{aligned} \quad (2)$$

(1): Неравенство Коши-Буняковского

(2):  $V$  — непр.,  $L$  — компакт  $\Rightarrow \sup$  достигается

□

## Потенциальные векторные поля

**Определение.**  $V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — векторное поле **потенциально**, если оно имеет потенциал:

$$\exists f \in C^1(O), \nabla f = V$$

**Загадка.**  $V$  — потенциально с потенциалом  $f_1$ ,  $f_2$  — тоже потенциал. Тогда  $f_1 - f_2 = \text{const.}$

**Теорема 2** (обобщенная формула Ньютона-Лейбница).

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $V$  — потенциально
- $f$  — потенциал  $V$
- $\gamma[a, b] \rightarrow O$

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

Тогда

$$\int_{\gamma} \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$$

*Доказательство.* Рассмотрим случаи:

1.  $\gamma$  — гладкий

$$\Phi(t) = f(\gamma(t))$$

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\gamma'_m(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum v_k dx_k &= \int_a^b \Phi'(t) dt \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned}$$

2.  $\gamma$  — кусочно-гладкий

$\exists$  дробление:  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b : \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  — гладкое

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum v_k dx_k &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \varphi'(t) \rangle dt \\ &= \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) \\ &= f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned} \tag{3}$$

(3): по пункту 1.

□