1 Линейный оператор

Пример. $\lhd \mathbb{R}_2^2 \quad \varphi : A \mapsto A^T$

A_φ? в стандартном базисе

Стандартный матричный базис: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\varphi(E_1) = E_1 \Rightarrow A_{\varphi 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$\varphi(E_2) = E_3 \Rightarrow A_{\varphi 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$\varphi(E_3) = E_2 \Rightarrow A_{\varphi 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$\varphi(E_4) = E_4 \Rightarrow A_{\varphi 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$
$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$Ker\varphi = \{0\}$$
$$Im\varphi = \mathbb{R}_2^2$$

$]M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}^T = m$

$Ker\varphi : A_\varphi m = 0$ — это СЛАУ

Заметим, что эта СЛАУ имеет только тривиальные решения $\Rightarrow \dim Ker\varphi = 0 \Rightarrow \dim Im\varphi = \dim \mathbb{R}_2^2 - \dim Ker\varphi = 4 - 0 = 4$

Пример. $\lhd \mathcal{P}_2^{x,y}$

$$\varphi p := x\frac{\partial p}{\partial x} + y\frac{\partial p}{\partial y}$$

A_φ? в базисе $\{x^2 \;\; xy \;\; x^2\}$

$Ker\varphi$?

$$\varphi(x^2) = 2x^2 \quad \varphi(xy) = 2xy \quad \varphi(y^2) = 2y^2$$
$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Ker\varphi = \{0\}$$

Пример.

$$\varphi p := y\frac{\partial p}{\partial x} - x\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\varphi(xy) = y^2 - x^2$$

$$\varphi(y^2) = -2xy$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Найдём ядро:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ФСР: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Ker\varphi = \mathscr{L}(x^2 + y^2)$$

Пример. Найти ядро и образ оператора φ, заданного в некотором базисе матрицей:

$\varphi : X \simeq \mathbb{R}^5 \to Y \simeq \mathbb{R}^5$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & -7 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 13 & -8 \\ 1 & 3 & 13 & -8 \\ 2 & 4 & 13 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Это базис $Im\varphi$

Пример. $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Найдём прообраз a

$$A_\varphi x = a$$

$$]x = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 & \xi^5 \end{pmatrix}^T$$

СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример. $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad L : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Найдем прообраз L — найдем ФСР L и полный прообраз каждого элемента ФСР.

Пример. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}_2^2$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \end{pmatrix}^T \mapsto \begin{bmatrix} \xi^3 & \xi^1 + i\xi^2 \\ \xi^1 - i\xi^3 & -\xi^3 \end{bmatrix}$$

$Ker\varphi = \{0\}$

A_φ?

$$C_2^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\varphi(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \varphi(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \varphi(e_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$