$\varphi : X \to X$

Определение. $x \in X$ — **собственный вектор** φ, если

$$x \neq 0 \quad \varphi x = \lambda x, \quad \lambda \in K$$

λ — **собственное значение** φ, соответствующее x

Определение. **Спектр** $\sigma_\varphi = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ — множество всех собственных значений вектора

Пример. Найти спектр и собственные вектора оператора φ, заданного матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Найдем спектр:

$$\chi_\varphi(\lambda) = |A_\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 6 \\ -2 & 6-\lambda & 3 \\ 6 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)((6-\lambda)(-2-\lambda)-9) + 2(2(2+\lambda)-18) + 6(-6-6(6-\lambda)) =$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-21) + 4(\lambda-7) - 36(7-\lambda) =$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-21) + 40(\lambda-7) =$$
$$= (3-\lambda)(\lambda-7)(\lambda+3) + 40(\lambda-7) =$$
$$(49-\lambda^2)(\lambda-7) = (\lambda-7)^2(\lambda+7)$$

$$\sigma_\varphi = \text{корни } \chi_\varphi = \{-7, 7^{(2)}\}$$

Найдем собственные вектора:

1. $\lambda = -7$

$$A\xi = \lambda\xi \Rightarrow (A-\lambda E)\xi = 0 \text{ — однор. СЛАУ}$$

$$\begin{bmatrix} 3+7 & -2 & 6 \\ -2 & 6+7 & 3 \\ 6 & 3 & -2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 6 \\ -2 & 13 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 13 & 3 \\ 0 & 42 & 14 \\ 0 & 63 & 21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 13 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$]\xi^3$ — параметр $\Rightarrow \begin{cases} -2\xi^1 + 13\xi^2 = -3\xi^3 \\ 3\xi^2 = -\xi^3 \end{cases}$

$]\xi^3 = 3 \Rightarrow \xi^2 = -1, \xi^1 = -2 \Rightarrow \xi = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Собственный вектор один *(см. СЛАУ)*

2. $\lambda = 7$

$$\begin{bmatrix} 3-7 & -2 & 6 \\ -2 & 6-7 & 3 \\ 6 & 3 & -2-7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{два собственных вектора}$$

$]\xi^2, \xi^3$ — параметры

$\xi^2 = 2, \xi^3 = 0 \Rightarrow \xi^1 = -1$

$\xi^2 = 0, \xi^3 = 2 \Rightarrow \xi^1 = 3$

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\{\xi_j\}_{j=1}^3$ — базис X

Проверка:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Проверим, что A в базисе из собственных векторов диагональна:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T}\tilde{T}^T$$

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

$$\tilde{T}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{-1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \frac{-1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 7 & -21 \\ -7 & -14 & 0 \\ 21 & 0 & -14 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{bmatrix}$$