# 1 Определения

## 1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

**Мультииндекс** — вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1. $|\alpha| \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2. $x^\alpha \overset{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\alpha! \overset{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4. $f^{(\alpha)}_{(x)} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$

## 1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + o(|h|^r)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \le |\alpha| \le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

## 1.3 $n$-й дифференциал

$\sum\limits_{\alpha: |\alpha| = k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha \overset{\text{def}}{=}$ $k$-й **дифференциал** функции $f$ в точке $a$ относительно $h \overset{\text{def}}{=} d^k f(a,h)$

## 1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad ||A|| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x| = 1}} |Ax|$$

## 1.5 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

**Определение.** **Квадратичная форма** $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \le i,j \le m} a_{ij} h_i h_j$$

**Определение.** **Положительно определенная кв. форма:** $\forall h \neq 0 \;\; Q(h) > 0$

**Определение.** **Отрицательно определенная кв. форма:** $\forall h \neq 0 \;\; Q(h) < 0$

**Определение.** **Незнакоопределенная кв. форма:** $\exists \overline{h} : Q(\overline{h}) < 0, \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) > 0$

**Определение.** **Полуопределенная (*положительно определенная вырожденная*) кв. форма:** $Q(h) \geq 0 \;\; \exists \overline{h} \neq 0 : Q(\overline{h}) = 0$

## 1.6 Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in E$ — **локальный максимум**, если

$$\exists U(a) \subset E \;\; \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

## 1.7 Диффеоморфизм

$F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — **диффеоморфизм**, если:

- $F$ обратимо
- $F$ дифференцируемо
- $F^{-1}$ дифференцируемо

## 1.8 Формулировка теоремы о локальной обратимости

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $x_0 \in O$
- $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : T\Big|_U$ — диффеоморфизм, т.е. $\exists T^{-1}$

## 1.9 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть $(x^0, y^0)$ — решение этой системы, $F = (f_1 \dots f_m)$

$\det F'(x^0) \neq 0$. Тогда $\exists U(y^0) : \forall y \in U(y^0)$ система имеет решение, $C^r$ гладко зависящее от $y$.

## 1.10 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

Дана система из $n$ функций, $f_i \in C^r$.

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть $(a, b) = (a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n)$ — решение системы и $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)\right) \neq 0$. Тогда $\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m$ и $\exists!\ \Phi$ такие, что $\forall x \in U(a)\ x, \Phi(x)$ — тоже решение системы.

## 1.11 ! Простое $k$-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

$M \subset \mathbb{R}^m$ — **простое $k$-мерное $C^r$-гладкое многообразие** в $\mathbb{R}^m$, если:

- $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi(O) = M$
- $\Phi \in C^r$
- $\forall x \in O\ \ \mathrm{rg}\Phi'(x) = k$

## 1.12 Касательное пространство к $k$-мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- $\Phi$ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, $M$ — гладкое $k$-мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ есть $k$-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Оно не зависит от $\Phi$.

$\Phi'(t^0)$ — **касательное пространство** к $M$ в точке $p$, обозначается $T_pM$.

## 1.13 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$
- $x_0 \in M_\Phi$

$x_0$ — точка **локального относительного** max, min, строгий max, строгий min, экстремума, если $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n} : \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi \;\; f(x_0) \geq f(x)$, остальные — аналогично.

Уравнения $\Phi(x) = 0$ называются **уравнениями связи**.

## 1.14 ! Формулировка достаточного условия относительного экстремума

Выполняется условие теоремы о необходимом условии экстремума, то есть:

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ — гладкое в $O$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в $O$
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\mathrm{rg}\Phi'(a) = n$

$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$: если $\Phi'(a)h = 0$, то можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$.

Пусть $G(x) = f(x) - \langle \lambda, \Phi(x) \rangle$, где $\lambda$ берется из необходимого условия экстремума.

Рассмотрим квадратичную форму $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$.

Тогда:

1. Если $Q(h)$ положительно определена, $a$ — точка минимума
2. Если $Q(h)$ отрицательно определена, $a$ — точка максимума
3. Если $Q(h)$ незнакоопределена, $a$ — не экстремум
4. Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= G(a+h) - G(a) \\ &= dG(a,h) + \frac{1}{2}d^2G(a,h) + o(|h|^2) \\ &= \frac{1}{2}d^2G(a,\tilde{h}) + o(|h|^2) > 0 \end{aligned}$$

Объяснение переходов:

1. $a + h \in M_\Phi$
2. Формула Тейлора
3. $a + \tilde{h}$ лежит на касательной поверхности, $dG(a, h) = 0$, $h \simeq \tilde{h}$

Это нестрогое доказательство, но этого нам достаточно. □

## 1.15 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

Пусть $E \subset X$. Последовательность $f_n$ **сходится поточечно** к $f$ на множестве $E$, если $\forall x \in E \quad f_n(x) \to f(x)$, т.е.:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

## 1.16 ! Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

$f_n$ **равномерно сходится** к $f$ на $E \subset X$, если $M_n := \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ \ 0 \le M_n < \varepsilon \text{ т.е. } \forall x \in E\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

## 1.17 Равномерная сходимость функционального ряда

- $X$ — произвольное множество
- $Y$ — нормированное пространство
- $u_n : X \to Y$

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ **равномерно** на $E \subset X$ : $S_N \overset{N \to +\infty}{\underset{E}{\rightrightarrows}} S$

## 1.18 Формулировка критерия Больцано-Коши для равномерной сходимости

Остаток ряда: $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x), S(x) = S_N(x) + R_N(x)$

Ряд сходится на $E \Leftrightarrow R_N \underset{E}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$ — тождественный ноль.

## 1.19 ! Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

Степенной ряд: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in C, z$ — переменная $\in C$

$\sum a_n(z-z_0)^n$, тогда число $R = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}}$. Это **формула Адамара**.

## 1.20 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Ряд $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится, если:

1. $a_n$ равномерно ограничена и монотонна по $n$ для любого $x$
2. $\sum b_n$ равномерно сходится

## 1.21 Кусочно-гладкий путь

Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

Кусочно-гладкое отображение - отображение, имеющее не более, чем счётное число точек разрыва, все точки разрыва - I рода и $\gamma\Big|_{[t_{k-1},t_k]}$ — гладкое $\forall k$, где $t_k$ — точка разрыва.

## 1.22 Векторное поле

**Векторное поле** — непрерывное отображение $V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\forall x \in E \;\; V(x) \in \mathbb{R}^m$ — вектор, “приложенный к точке $x$”.

## 1.23 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

**Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути**

$$\begin{aligned} I(V,\gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \\ &= \int_a^b V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m \end{aligned}$$

Также используется обозначение $I(V,\gamma) = \int_\gamma V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m$

## 1.24 ! Потенциал, потенциальное векторное поле

$V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле **потенциально**, если оно имеет потенциал:

$$\exists f \in C^1(O), \nabla f = V$$

## 1.25 Локально потенциальное векторное поле

$V$ — **локально потенциальное** векторное поле в $O$, если $\forall x \in O\ \ \exists U(x) : V$ — потенциально в $U(x)$

## 1.26 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

Возьмём $\delta > 0$ из леммы 2.47.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — $\delta$-близкий кусочно-гладкий путь, т.е. $\forall t\ \ |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$.

Полагаем $I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$.

Корректность *(нет произвольности)* следует из лемм 2.47 и 2.46

## 1.27 Гомотопия путей связанная и петельная

**Гомотопия** двух (*непрерывных*) путей $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ это непрерывное отображение $\Gamma : \underbrace{[a, b]}_{t} \times \underbrace{[0, 1]}_{u} \to O$, такое что:

- $\Gamma(\circ, 0) = \gamma_0$
- $\Gamma(\circ, 1) = \gamma_1$

Гомотопия **связанная** (*не связная*), если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$
- $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1]\ \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_1(b)$

Гомотопия **петельная**, если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$
- $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1]\ \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$

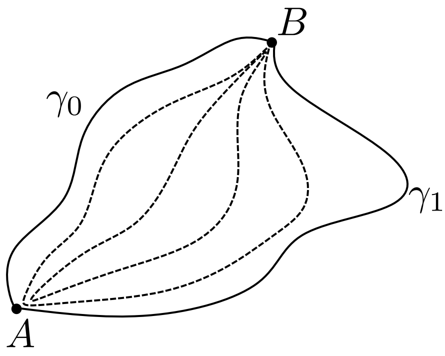



Рис. 1: Связанная гомотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных $u$

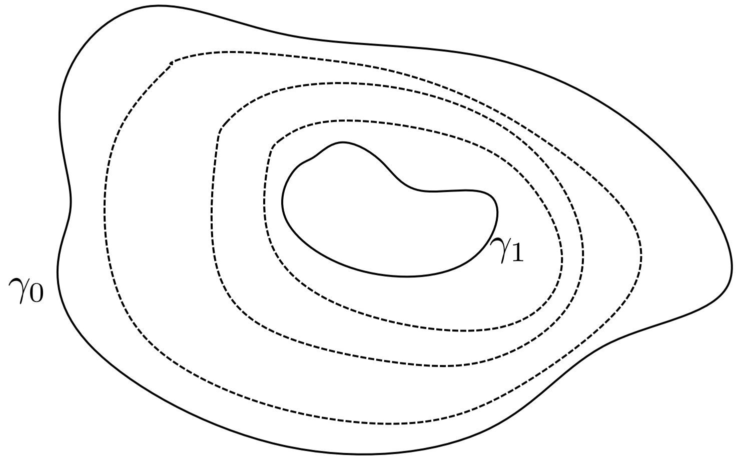



Рис. 2: Петельная гомотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных $u$

## 1.28 Односвязная область

Область $O \subset \mathbb{R}^m$ — **односвязная**, если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному пути.

Простыми словами — в $O$ нет дырок, иначе путь вокруг дырки нельзя было бы стянуть.

## 1.29 ! Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

$\mathcal{P} \subset 2^X$ — **полукольцо**, если:

- $\varnothing \subset \mathcal{P}$
- $\forall A, B \in \mathcal{P} \;\; A \cap B \in \mathcal{P}$
- $\forall A, A' \in \mathcal{P} \;\; \exists$ кон. и дизъюнктные $B_1 \dots B_n \in \mathcal{P} : A \setminus A' = \bigsqcup\limits_i B_i$

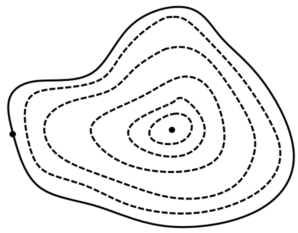


Рис. 3: Стягивание замкнутого пути (сплошной линией) к постоянному пути (точке)

$\mathfrak{A} \subset 2^X$ — **алгебра подмножеств** в $X$, если:

1. $\forall A, B \in \mathfrak{A} \ \ A \setminus B \in \mathfrak{A}$
2. $X \in \mathfrak{A}$

$\sigma$-алгебра $\mathfrak{A} \subset 2^X$:

1. $\mathfrak{A}$ — алгебра
2. $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

## 1.30 ! Объем

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **объем**, если $\mu \geq 0$ и $\mu$ — аддитивная.

## 1.31 ! Ячейка

Ячейка в $\mathbb{R}^m$ это $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \ \ x_i \in [a_i, b_i)\}$

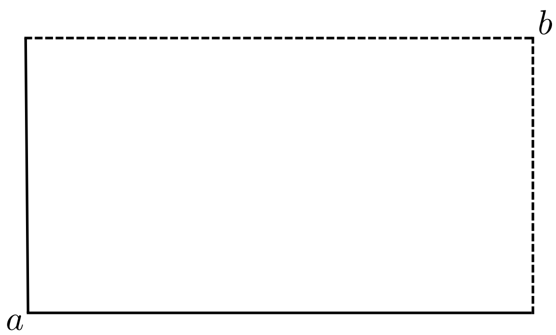



Рис. 4: $[a, b)$ — ячейка в $\mathbb{R}^2$

## 1.32 Классический объем в $\mathbb{R}^m$

Классический объем в $\mathbb{R}^m$ $\mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$$

Этот объем не конечный.

## 1.33 Формулировка теорема о непрерывности снизу

- $\mathfrak{A}$ — алгебра
- $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем.

Тогда эквивалентно:

1. $\mu$ — мера
2. $\mu$ — непрерывна снизу:

$$A, A_1, A_2 \dots \in \mathfrak{A} \;\; A_1 \subset A_2 \subset \dots, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to +\infty} \mu A_i$$

## 1.34 ! Мера, пространство с мерой

$\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **мера**, если $\mu$ — объем и $\mu$ счётно-аддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad \mu A = \sum_i \mu A_i$$

**Пространство с мерой** — тройка $(\underbrace{X}_{\text{множество}}, \underbrace{\mathfrak{A}}_{\sigma\text{-алгебра}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера на } \mathfrak{A}})$

## 1.35 Полная мера

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера.

$\mu$ — **полная** в $\mathcal{P}$, если $\forall A \in \mathcal{P} \;\; \mu A = 0 \;\; \forall B \subset A$ выполняется: $B \in \mathcal{P}$ и *(тогда автоматически)* $\mu B = 0$ *(по монотонности)*

Это совместное свойство $\mu$ и $\mathcal{P}$.

## 1.36 ! Сигма-конечная мера

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера, $\mathcal{P} \subset 2^X$

$\mu$ — $\sigma$-**конечна**, если $\exists A_1, A_2 \dots \in \mathcal{P} : X = \bigcup A_i, \mu A_i < +\infty$

## 1.37 Дискретная мера

$X$ — (бесконечное) множество.

$a_1, a_2, a_3 \ldots$ — набор попарно различных точек.

$h_1, h_2, h_3 \ldots$ — положительные числа.

Для $A \subset X$ $\mu A := \sum\limits_{k: a_k \in A} h_k$.

Физический смысл $\mu$: каждой точке $a_i$ сопоставляется "масса" $h_i$. Мера множества точек есть сумма "масс" точек.

Счётная аддитивность $\mu \Leftrightarrow$ теореме о группировке слагаемых (в ряду можно ставить скобки).

Эта мера называется дискретной.

## 1.38 Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

- $\mathcal{P}_0 \subset X$ — полукольцо
- $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \mathbb{R}$ — $\sigma$-конечная мера

Тогда $\exists \sigma$-алгебра $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}_0$, $\exists \mu$ — мера на $\mathfrak{A}$:

1. $\mu$ — продолжение $\mu_0$ на $\mathfrak{A}$
2. $\mu$ — полная мера
3. Если $\tilde{\mu}$ — полная мера на $\sigma$-алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}$ и $\tilde{\mu}$ — продолжение $\mu_0$, то $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$ и при этом $\tilde{\mu}$ продолжает $\mu$ : $\tilde{\mu}\big|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. Если $\mathcal{P}$ — полукольцо, такое что $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathfrak{A}$ и мера $\upsilon$ — продолжение $\mu_0$ на $\mathcal{P}$, то $\forall A \in \mathcal{P}\ \ \upsilon(A) = \mu(A)$
5. $\forall A \in \mathfrak{A}\ \ \mu A = \inf\{\sum \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} P_k\}$

*Доказательство.* Не будет, это слишком сложно.

Общая идея следующая: $\forall A \subset X$ положим $\mu^*(A) = \inf\{\ldots\}$ — не аддитивна. $A \subset \bigcup A_k\ \ \mu^* A = \sum \mu^* A_k$ □

## 1.39 ! Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

**Мера Лебега** в $\mathbb{R}^m$ — лебеговское продолжение классического объема.

$\mathfrak{M}^m$ — $\sigma$-алгебра, на которой задана мера Лебега. Тогда множество называется **измеримым по Лебегу**

### 1.40 Борелевская сигма-алгебра

$\mathfrak{B}$ — **борелевская $\sigma$-алгебра** (в $\mathbb{R}^m$ или в метрическом пространстве) — минимальная $\sigma$-алгебра, которая содержит все открытые множества.

$\mathfrak{M}^m \supset \mathfrak{B}$

### 1.41 Формулировка теоремы о мерах, инвариантных относительно сдвигов

$\mu$ — мера на $\mathfrak{M}^m$:

1. $\mu$ — инвариантно относительно сдвигов:

$$\forall a \in \mathbb{R}^m \ \ \forall E \in \mathfrak{M}^m \ \ \mu(E+a) = \mu E$$

2. Для любого ограниченного $E \in \mathfrak{M}^m$ $\mu(E) < +\infty$

Тогда $\exists k \in [0, +\infty) : \mu = k \cdot \lambda$, *(где $\lambda$ — мера Лебега)* т.е.:

$$\forall E \ \ \mu E = k \cdot \lambda E$$

и пусть $0 \cdot \infty = 0$ в данном контексте.

*Доказательство.* Нет и не будет.

Общая идея: Как мера $\mu$ задается на рациональных ячейках?

В $\mathbb{R}^2$ $Q_1$ — единичная квадратная ячейка, $\mu Q_1 = v$

$Q_2$ — ячейка $2 \times 2$, $\mu Q_2 = 4v$. Аналогично $\mu Q_n = n^2 v$, $\mu Q_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} v$

Тогда $k = v$ и $\mu$ пропорционально $\lambda$. $\square$

# 2 Теоремы

### 2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$ — это подразумевает, что $E$ открыто
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при $1 \le k \le r$:

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j:|j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

*Доказательство.* Как на лекции:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\right)' h_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a+th)h_i h_{i_2}$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}h_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}h_m^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}h_1h_3 + \ldots\right)$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}} h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k}$$

Формальное доказательство по индукции:

Индукционное предположение:

$$\varphi^k(t) = \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f(a+th)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}} h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k}$$

**База**:

$$\varphi'(t) = \sum_{i_1=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a+th)h_{i_1}$$

**Переход**:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k+1)}(t) &= \left(\varphi^k(t)\right)' \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f(a+th)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}} h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k}\right)' \\
&= \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m} \left(\frac{\partial^k f(a+th)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}\right)' h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k} \\
&= \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m}\sum_{i_{k+1}=1}^{m} \frac{\partial^{k+1} f(a+th)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}} h_{i_{k+1}}h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k}
\end{aligned}$$

□

## 2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

### 2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$ — это подразумевает $E \subset \mathbb{R}^m$, $f : E \to \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда $\exists t \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

*Доказательство.* Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$, где $h = x - a$. Тогда $\varphi(0) = f(a)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \ldots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\overline{t})}{(r+1)!}t^{r+1}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{o(|x-a|^r)}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha: |\alpha| = k} \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!}h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!}h^\alpha$$

□

### 2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}h^\alpha + o(|h|^r)$$

*Доказательство.* Отсутствует □

## 2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение $A \to ||A||$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — норма, т.е.:
   (a) $||A|| \geq 0$
   (b) $||A|| = 0 \Rightarrow A = 0_{n\times m}$
   (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ ||\lambda A|| = |\lambda|||A||$
   (d) $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$
2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow ||BA|| \leq ||B|| \cdot ||A||$

*Доказательство.*

1. $||A|| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$

   a, b, c — очевидно.

   d: $|(A+B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (||A|| + ||B||)|x|$

   По замечанию 3 $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$
2. $|BAx| = |B(Ax)| \leq ||B|| \cdot |Ax| \leq ||B|| \cdot ||A||$

□

## 2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- $X, Y$ — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $A$ — ограниченный оператор, т.е. $||A||$ — конечно
2. $A$ — непрерывно в нуле
3. $A$ — непрерывно всюду в $X$
4. $A$ — равномерно непрерывно

*Доказательство.*

1. 4 ⇒ 3 ⇒ 2 — очевидно.
2. 2 ⇒ 1

   Непрерывность в 0: $\forall \varepsilon \ \ \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

$\lhd \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left|A\frac{1}{\delta}\delta x\right| = \frac{1}{\delta}|A\delta x| \le \frac{1}{\delta}$

3. $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{||A||} \ \forall x_1, x_0 : |x_1 - x_0| < \delta$$
$$|Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \le ||A|| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$$

□

## 2.5 Теорема Лагранжа для отображений

- $E$ открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- $F$ дифф. на $E$
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда $\exists c \in [a, b]$ $(c = a + \Theta(b - a)), \Theta \in (0, 1)$ :

$$|F(b) - F(a)| \le ||F'(c)|||b - a|$$

*Доказательство.* $f(t) := F(a + t(b - a)), t \in \mathbb{R}$

$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$

Тогда по теореме Лагранжа для векторнозначных функций

$$|f(1) - f(0)| \le |f'(c)||1 - 0|$$

$$|F(b) - F(a)| \le |F'(a + c(b - a))(b - a)| \le ||F'(a + c(b - a))|||b - a|$$

□

## 2.6 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

- $L \in \Omega_m$ — обратимый
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $||L - M|| < \dfrac{1}{||L^{-1}||}$, т.е. $M$ “близкий” к $L$

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$, т.е. $\Omega_m$ открыто в $\mathcal{L}_{m,m}$
2. $||M^{-1}|| \le \dfrac{1}{||L^{-1}||^{-1} - ||L-M||}$
3. $||L^{-1} - M^{-1}|| \le \dfrac{||L^{-1}||}{||L^{-1}||^{-1} - ||L-M||}||L-M||$

*Доказательство.* По неравенству треугольника $|a+b| \ge |a| - |b|$:

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M-L)x| \\ &\ge |Lx| - |(M-L)x| \\ &\ge \frac{1}{||L||^{-1}}|x| - ||M-L|| \cdot |x| \\ &\ge \left(||L^{-1}||^{-1} - ||M-L||\right)|x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 *($M$ — биекция, т.к. Ker $M = \{0\}$)* и 2, докажем 3:

Аналогично равенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ в $\mathbb{R}$ выполняется следующее равенство в $\Omega_m$:

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L-M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на $M$ слева и на $L$ справа:

*Доказательство.*

$$M^{-1} - L^{-1} \stackrel{?}{=} M^{-1}(L-M)L^{-1}$$

$$E - L^{-1} \stackrel{?}{=} (L-M)L^{-1}$$

$$L - M = L - M$$

□

$$||M^{-1} - L^{-1}|| = ||M^{-1}(L-M)L^{-1}|| \le \frac{||L^{-1}||}{||L^{-1}||^{-1} - ||L-M||}||L-M||$$

□

## 2.7 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- $F$ дифф. на $E$

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1. $F \in C^1(E)$, т.е. $\exists$ все $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ и они непрерывны на $E$
2. $F' : E \to \mathcal{L}_{m,l}$ — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \;\; \forall \overline{x} : |\overline{x} - x| < \delta \quad ||F'(x) - F'(\overline{x})|| \le \varepsilon$$

*Доказательство.*

- $1 \Rightarrow 2$:
  Берем $x, \varepsilon$. $\exists \delta > 0 : \forall \overline{x} \quad \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ для всех $i, j$.

$$||F'(x)| - F'(\overline{x})|| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \overline{x} : |x - \overline{x}| < \delta \quad ||F'(x) - F'(\overline{x})|| < \varepsilon$$

$\lhd h = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0)$

$$|F'(x)h - F'(\overline{x})h| \le ||F'(x) - F'(\overline{x})|| \cdot |h| < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\overline{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| < \varepsilon$$

$\square$

## 2.8 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $a \in IntE$
- $a$ — точка локального экстремума
- $f$ — дифф. в точке $a$

Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \dfrac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

*Доказательство.* Для $f\Big|_{\text{прямая}(a,u)}$ $a$ остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. ☐

*Следствие* 0.1 (необходимое условие экстремума). $a$ — локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) =$ 0

*Следствие* 0.2 (теорема Ролля).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $K \subset E$ компакт
- $f$ дифф. в $IntK$
- $f$ непрерывно на $K$
- $f\Big|_{\text{граница}K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in IntK : f'(a) = \vec{0}$

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса $f$ достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо $f$ на $K$ const, либо $\exists a \in IntK$ — точка экстремума. В первом случае $f' \equiv 0$, во втором по т. Ферма $f'(a) = 0$ ☐

## 2.9 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

**Лемма 1** (об оценке формы).

- $Q$ — положительно определенная

Тогда $\exists \gamma_Q > 0 \ \ \forall h \ \ Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$

*Доказательство.* $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ — компакт в $\mathbb{R}^m$, поэтому min и max достигается по т. Вейерштрасса.

$$\gamma_Q := \min_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$$

$$Q(h) = Q\left(|h|\frac{h}{|h|}\right) \stackrel{(*)}{=} |h|^2 Q\underbrace{\left(\frac{h}{|h|}\right)}_{\text{ед. вектор}} \geq \gamma_Q |h|^2$$

Переход $(*)$ работает, т.к. $Q$ - квадратичная форма, поэтому:

$$\sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j} a_{ij} |h| \frac{h_i}{|h|} |h| \frac{h_j}{|h|} = |h|^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{h_i}{|h|} \frac{h_j}{|h|}$$

☐

**Лемма 2** (об эквивалентных нормах).

- $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists C_1, C_2 > 0 \ \forall x \ \ C_2|x| \leq p(x) \leq C_1|x|$

*Доказательство.*

$$C_1 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = |x| p\left(\frac{x}{|x|}\right) \begin{cases} \geq C_2|x| \\ \leq C_1|x| \end{cases}$$

Существование $C_1$ и $C_2$ гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности $p(x)$.

Докажем, что $p$ непрерывна.

Введем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} p(x-y) &= p\left(\sum (x_k - y_k) e_k\right) \\ &\leq \sum p((x_k - y_k) e_k) \\ &= \sum |x_k - y_k| p(e_k) \\ &\leq |x - y| \sqrt{\sum p(e_k)^2} \\ &\leq |x - y| M \end{aligned}$$

□

## 2.10 ! Достаточное условие экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $a \in IntE$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если $Q(h)$ положительно определена, $a$ — локальный минимум
- Если $Q(h)$ отрицательно определена, $a$ — локальный максимум
- Если $Q(h)$ незнакоопределена, $a$ — не экстремум

- Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

*Доказательство.* Для положительно определенной формы:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}d^2f(a+\Theta h, h)$$
$$= \frac{1}{2}\left(Q(h) + (d^2f(a+\Theta h, h) - Q(h))\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(f''_{x_ix_i}(a+\Theta h) - f''_{x_ix_i}(a)\right)}_{\to 0}\underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2} + 2\sum_{i<j}\underbrace{\left(f''_{x_ix_i}(a+\Theta h) - f''_{x_ix_i}(a)\right)}_{\to 0}\underbrace{h_ih_j}_{\substack{\leq |h|^2 \\ \text{по модулю}}}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2}\right)$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}\left(\gamma_Q|h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2\right) \geq \frac{1}{4}\gamma_Q|h|^2 > 0$$

Аналогично для отрицательно определенной формы.

Для незнакоопределеной формы:

$$\triangleleft \overline{h} : Q(\overline{h}) > 0 \Rightarrow f(a+t\overline{h}) - f(a) = \frac{1}{2}d^2f(a+\Theta t\overline{h}, \overline{h})t^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{t^2Q(\overline{h})}_{Q(t\overline{h})} + t^2\underbrace{\left(\sum(f''_{x_ix_i}(a+\Theta th) - f''_{x_ix_i}(a))\overline{h}_i^2 + 2\sum_{i<j}\ldots\right)}_{\text{б.м. при } t\to 0}\right)$$
$$\geq \frac{1}{2}t^2(Q(h) - \frac{1}{2}Q(h)) > 0$$

Т.е. $f(a+t\overline{h}) > f(a)$ при $t$, близких к $0$.

Аналогично $f(a+t\overline{\overline{h}}) < f(a)$ при $t$, близких к $0$.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$f(x_1, x_2\ldots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4\ldots$

$\overline{f}(x_1, x_2\ldots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4\ldots$

$a = (0, 0, \ldots)$

$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \ldots$

$d^2f(a, h) = 2h_1^2$

$d^2\overline{f}(a,h) = 2h_1^2$

Итого $f$ не имеет экстремума в $a$, но для $\overline{f}$ $a$ — локальный минимум. □

## 2.11 Лемма о "почти локальной инъективности"

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $F$ дифф. в $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists C > 0, \delta > 0 \ \ \forall h \in B(0,\delta) \ \ |F(x_0+h) - F(x_0)| > C|h|$

*Доказательство.* Если $F$ — линейное отображение:

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq ||F'(x_0)|| \cdot |h| \geq \frac{1}{||(F'(x_0))^{-1}||}|h|$$

В общем случае:

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б.м.}}|h|| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

□

## 2.12 Теорема о сохранении области

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $F$ дифф.
- $\forall x \in O \ \ \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открыто.

*Доказательство.* $x_0 \in O \Rightarrow y_0 = F(x_0) \in F(O)$ — внутренняя? в $F(O)$

По лемме $\exists c, \delta : \forall h \in \overline{B(0,\delta)} \ \ |F(x_0+h) - F(x_0)| > C|h|$

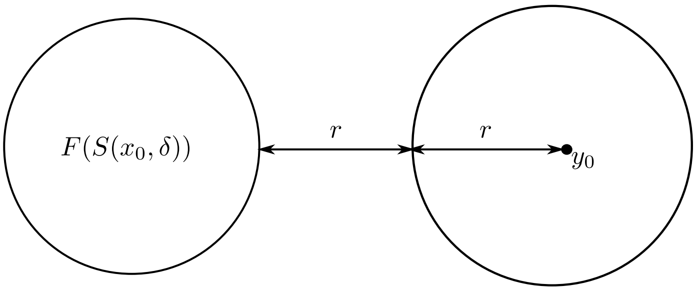
В частности $F(x_0+h) \neq F(x_0)$ при $|h| = \delta$

$$r := \frac{1}{2}\rho(y_0, F(S(x_0,\delta))$$

При этом $\rho$ между множествами определено следующим образом:

$$\rho(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a\in A, b\in B} \rho(a,b)$$

Т.к. $S$ — компакт, $\exists \min$.




Если $y \in B(y_0, r)$, то $\rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$:

Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$, т.е. $\forall y \in B(y_0, r) \;\; \exists x \in B(x_0, \delta) \;\; F(x) = y$

Рассмотрим функцию $g(x) = |F(x) - y|^2$ при $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$.

Мы хотим показать, что $\exists x : g(x) = 0$. Найдем $\min g$.

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r^2$$

При $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2 \Rightarrow \min g$ не лежит на границе шара $\Rightarrow$ он лежит внутри шара.

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \ldots + (F_m(x) - y_m)^2$$
$$\forall i \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$
$$2(F_1(x) - y)F'_{1x_i}(x) + \ldots + 2(F_m(x) - y)F'_{mx_i}(x) = 0$$
$$F'_x 2(F(x) - y) = 0$$
$$\forall x \;\; \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$$

□

## 2.13 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- $F \in C^1(O)$
- $l < m$
- $\mathrm{rg} F'(x) = l \;\; \forall x \in O$

Тогда $F(O)$ открыто.

*Доказательство.* Зафискируем точку $x_0$. Пусть ранг реализуется на столбцах $1 \dots l$, т.е. определитель матрицы из столбцов $1 \dots l \neq 0$, т.е.:

$$\underbrace{\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1\dots l}(x_0)}_{A(x_0)} \neq 0$$

И для близких точек тоже $\neq 0$

$$\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}'(x) = \left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{F'(x)} \\ \hline 0 & E_{m-l} \end{array}\right]$$

$$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \det E_{m-l} \neq 0 \quad \text{в окрестности } x_0$$

Тогда $\tilde{F}\Big|_{U(x_0)}$ удовлетворяет теореме $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$

$F(U(x_0)) = \tilde{F}(U(x_0)) \cap \mathbb{R}^l$ □

## 2.14 Теорема о гладкости обратного отображения

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $O \subset \mathbb{R}^m$
- $r = 1, 2, \dots + \infty$
- $T$ обратимо
- $\det T'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in O$

Тогда $T^{-1} \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$ и $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$, где $y_0 = T(x_0)$

*Доказательство.* Докажем по индукции по $r$.

**База:** $r = 1$

$S := T^{-1}$ — непрерывно по теореме о сохранении области. Почему? По теореме о топологическом определении непрерывности:

$f : X \to Y$ непр. $\Leftrightarrow \forall B$ — откр. $\subset Y$ $f^{-1}(B)$ — открыто.

$T'(x_0) = A$ — невырожденный оператор.

По лемме о почти локальной иньективности

$$\exists c, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) \ \ |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \quad (*)$$

По определению дифференцируемости $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)|x - x_0|$

$$T(x) = y \quad T(x_0) = y_0 \quad x = S(y) \quad x_0 = S(y_0)$$

В терминах $y$ и $S$:

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\xrightarrow[y \to 0]{?} 0 \text{ быстрее, чем } |y - y_0|}$$

Если действительно $\to 0$, то $S$ дифференцируемо по определению.

Пусть $y$ близко к $y_0$, тогда $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$

$$\begin{aligned} |A^{-1}w(S(y))|S(y) - S(y_0)|| &= |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1}w(S(y))| \\ &\le |x - x_0| \cdot ||A^{-1}|| \cdot |w(S(y))| \\ &\overset{(*)}{\le} \frac{1}{C}|y - y_0| \cdot ||A^{-1}|| \cdot |w(S(y))| \end{aligned}$$

Мы доказали, что $S$ дифференцируемо, теперь необходимо доказать, что $S'$ непрерывно.

$$S'(y_0) = A^{-1}$$

"Алгоритм" получения обратного оператора:

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1}$$

Здесь все шаги непрерывны, поэтому $S'$ непрерывно.

**Переход**

$$T \in C^{r+1} \quad T' : O \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad T' \in C^r \quad ?S \in C^{r+1}$$
$$y \overset{\in C^r \text{ по инд.}}{\mapsto} S(y) \overset{\in C^r}{\mapsto} T'(x) \overset{\in C^\infty}{\mapsto} (S^{-1})'$$

$\square$

## 2.15 ! Теорема о неявном отображении

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$
- $O$ откр.
- $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$
- $\det F'_y(a, b) \neq 0$

Тогда:

1. $\exists$ откр. $P \subset \mathbb{R}^m, a \in P$

   $\exists$ откр. $Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$

   $\exists!\ \Phi : P \to Q \in C^r : \forall x \in P \;\; F(x, \Phi(x)) = 0$
2. $\Phi'(x) = -\left(F'_y(x, \Phi(x))\right)^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

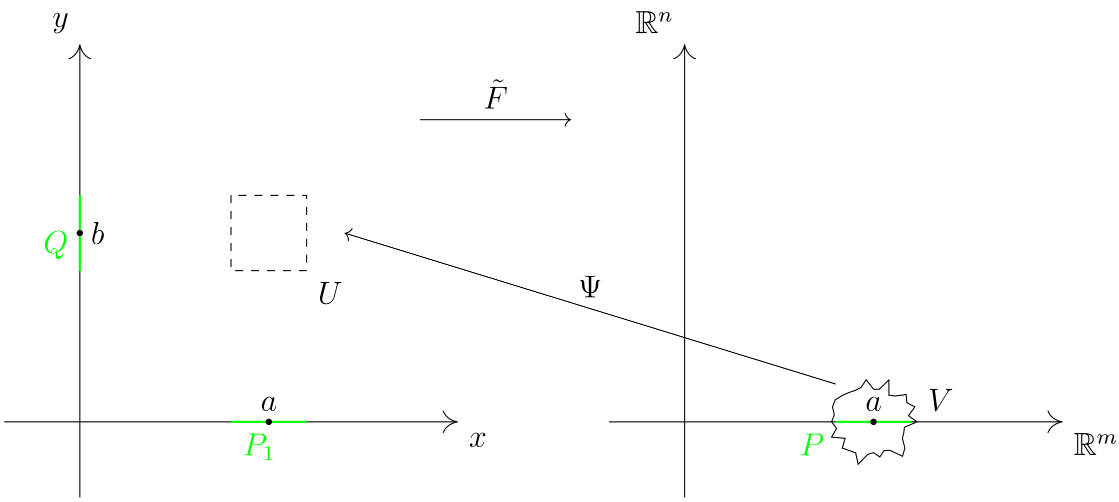
*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$: $F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x))\Phi'(x) = 0$

1: $\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^{m+n} : (x, y) \mapsto (x, F(x, y)), \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$

$$\tilde{F}' = \left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array}\right)$$

Очевидно $\det \tilde{F}' \neq 0$ в $(a, b)$, значит $\exists U(a, b) : \tilde{F}\Big|_U$ — диффеоморфизм



1. $U = P_1 \times Q$ — можно так считать
2. $V = \tilde{F}(U)$
3. $\tilde{F}$ — диффеоморфизм на $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \to U$
4. $\tilde{F}$ не меняет первые $m$ координат $\Rightarrow \Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : V \to \mathbb{R}^n$.
5. "Ось $x$" $\Leftrightarrow$ "ось $u$", $P :=$ ''ось $u$" $= \mathbb{R}^m \times a \cap V$, $P$ — откр. в $\mathbb{R}^m$, $P = P_1$
6. $\Phi(x) := H(x, 0)$

   $F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$

   Единственность: $(x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$

$\square$

## 2.16 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $1 \le k \le m$ (случай $k = m$ тривиален)
- $1 \le r \le \infty$
- $p \in M$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность $p$ в $\mathbb{R}^m : M \cap U$ — $k$-мерное $C^r$-гладкое многообразие.
2. $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$ и функции $f_1, f_2 \dots f_{m-k} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$, все $f_i \in C^r$

   $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \ldots = 0$, при этом $\mathrm{grad} f_1(p) \ldots \mathrm{grad} f_{m-k}(p)$ — ЛНЗ.

*Доказательство.*

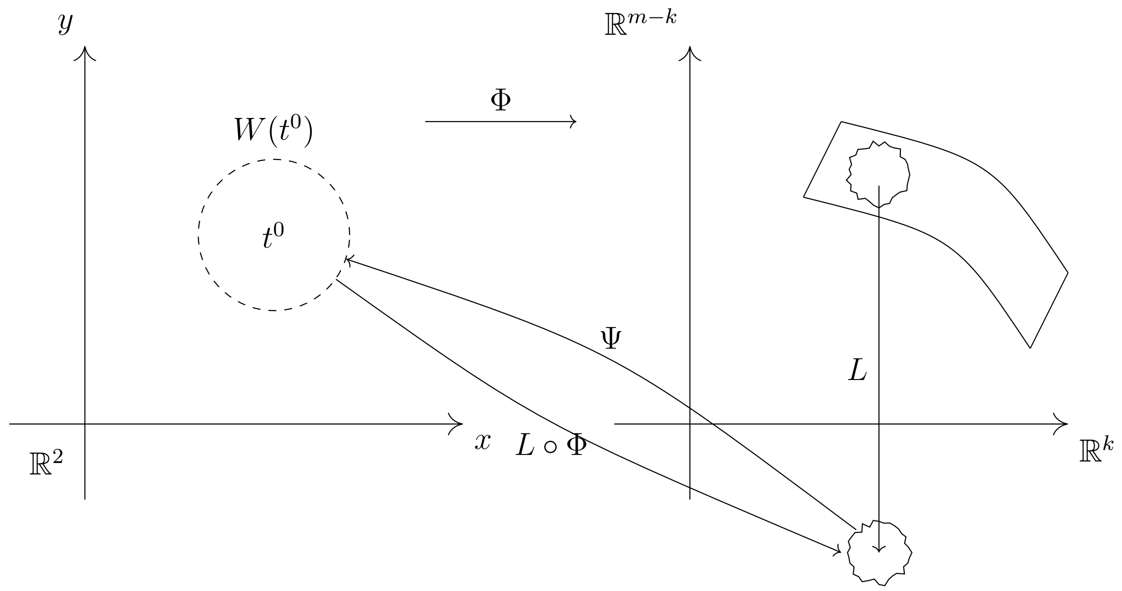
$1 \Rightarrow 2$: $\Phi$ — параметризация $O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m, \Phi \in C^r, p = \Phi(t^0)$

$\mathrm{rg}\Phi'(t^0) = k$

Пусть $\det \left( \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t^0) \right)_{i,j=1\dots k} \ne 0$

Пусть $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекция на первые $k$ координат: $(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_k)$

Тогда $(L \circ \Phi)'$ — невырожденный оператор $\Rightarrow$ локальный диффеоморфизм. Тогда если $W(t^0)$ — окрестность точки $t^0$, то $L \circ \Phi : W \to V \subset \mathbb{R}^k$ — диффеоморфизм.




Множество $\Phi(W)$ — график некоторого отображения $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1}$

Берем $x' \in V$, тогда $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$, т.е. $H \in C^r$

Множество $\Phi(W)$ открыто в $M$ по топологическому определению непрерывности $\Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$, где $\tilde{U}$ открыто в $\mathbb{R}^m$

Можно считать, что $\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$, т.к. $\mathbb{R}^{m-k}$ открыто.

Пусть $f_j : \tilde{U} \to \mathbb{R}, x \mapsto H_j(L(x)) - x_{k+j}$. Тогда $x \in M \cap \tilde{U}(= \Phi(W)) \Leftrightarrow f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad} f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = k \Rightarrow$ ЛНЗ

$2 \Rightarrow 1$: $F := (f_1 \dots f_{m-k})$

$$I := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

Градиенты ЛНЗ $\Rightarrow \text{rg} I = m - k$.

Пусть ранг реализуется на последних $m - k$ столбцах, т.е.

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1\dots m-k} \neq 0$$

$F(x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_m) = 0$ при $x \in \tilde{U}$

По т. о неявном отображении:

$\exists P$ — окр. $(x_1 \dots x_k)$ в $\mathbb{R}^m$

$\exists Q$ — окр. $(x_{k+1} \dots x_m)$ в $\mathbb{R}^{m-k}$

$\exists H \in C^r : P \to Q : F(x', H(x')) \equiv 0$ для $x' \in P$

Тогда $\Phi : P \to \mathbb{R}^m : (x_1 \dots x_k) \mapsto (x_1 \dots x_k, H_1(x_1 \dots x_k), H_2(x_1 \dots x_k) \dots H_{m-k}(x_1 \dots x_k))$

$\Phi$ — гомеоморфизм $P$ и $M \cap \tilde{U}$, потому что $\Phi^{-1}$ — фактически проекция.

$\square$

## 2.17 Следствие о двух параметризациях

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — $k$-мерное $C^r$-гладкое многообразие
- $p \in M$
- $\exists$ две параметризации:

  $\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_1(t^0) = p$

  $\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_2(s^0) = p$

Тогда $\exists$ диффеоморфизм $\Psi : O_1 \to O_2$, такой что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

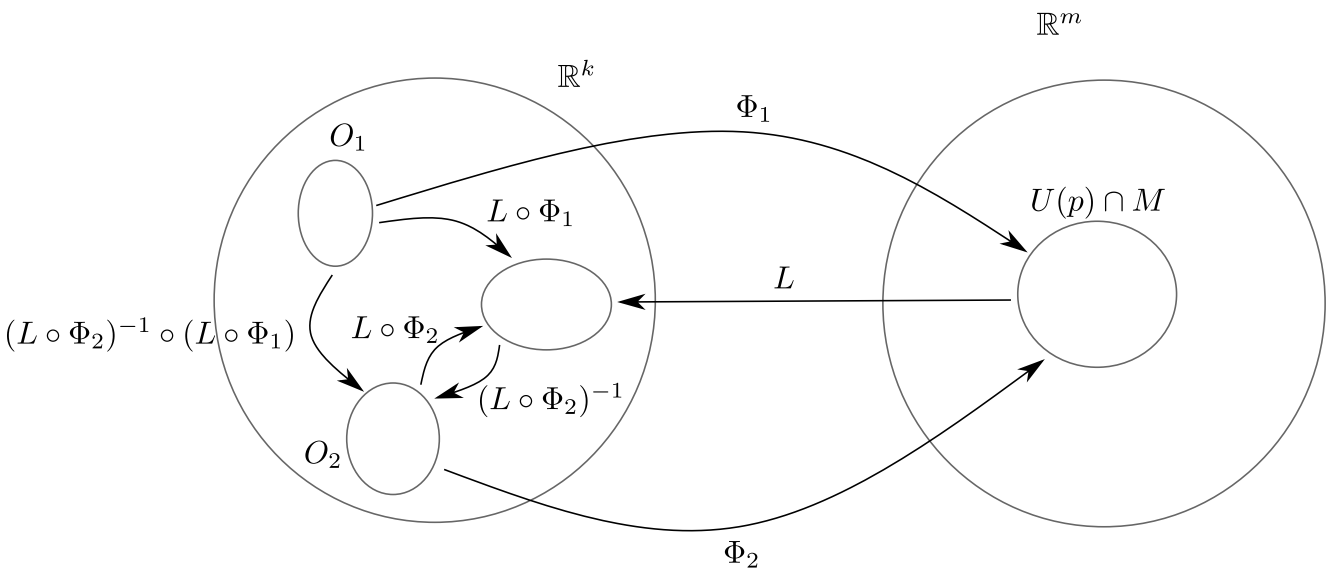
*Доказательство.*

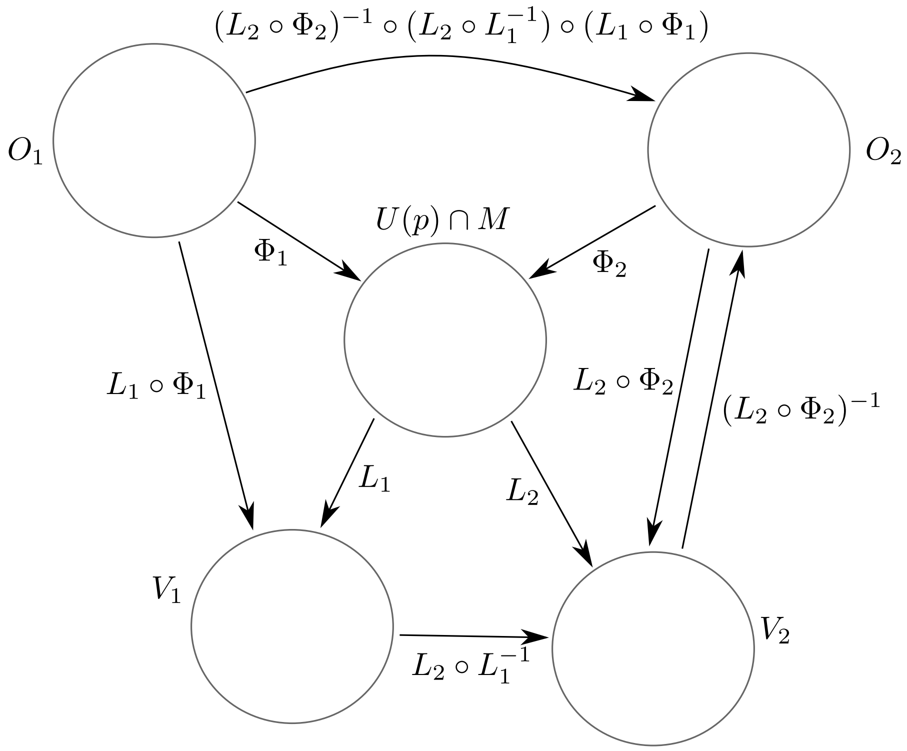
**Частный случай**: Пусть $\mathrm{rg}\Phi_1'(t^0), \mathrm{rg}\Phi_2'(s^0)$ достигается на первых $k$ столбцах.

Тогда $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta \text{ — искомый диффеоморфизм}}$

**Общий случай**: $\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$

Кажется, в формуле ошибка — см. иллюстрацию.




$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Гладкость очевидна в силу гладкости всех элементов.

Невырожденность мы не доказали, поэтому то, что это диффеоморфизм — ещё не доказано. Возможно, это будет на следующей лекции.

□

## 2.18 Лемма о корректности определения касательного пространства

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- $\Phi$ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, $M$ — гладкое $k$-мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ есть $k$-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Оно не зависит от $\Phi$.

$\Phi'(t^0)$ — **касательное пространство** к $M$ в точке $p$, обозначается $T_pM$.

*Доказательство.* $\mathrm{rg}\Phi'(t^0) = k$ по определению параметризации $\Rightarrow$ искомое очевидно. Если взять другую параметризацию $\Phi_1$, то по следствию о двух параметризациях

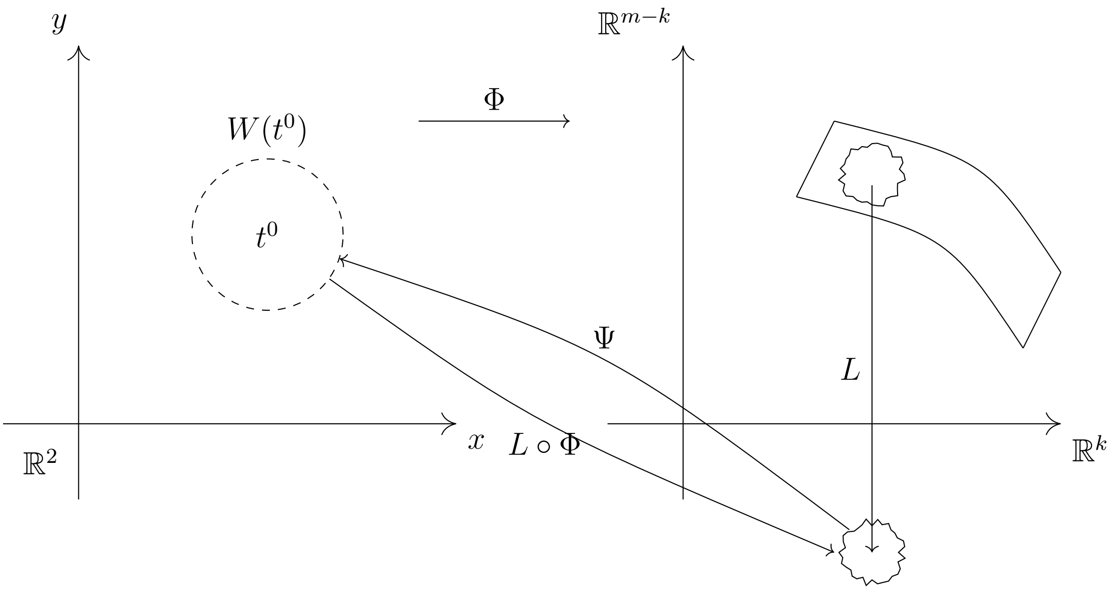
$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

$$\Phi' = \Phi_1' \Psi'$$

$\Psi'(t^0)$ — невырожденный оператор $\Rightarrow$ образ $\Phi'$ = образ $\Phi_1'$ □

## 2.19 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M, \gamma(0) = p$ — гладкий путь. Тогда $\gamma'(0) \in T_pM$



*Доказательство.* Из иллюстрации очевидно:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

$$\gamma'(0) = \Phi'(\Psi(L(\gamma(0))))\Psi'(L(\gamma(0)))L'(\gamma(0))\gamma'(0)$$

Очевидно, что мы попадаем в образ $\Phi'(\dots)$, поэтому $\gamma'(0) \in T_pM$ □

## 2.20 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, f \in C(O), y = f(x)$ — поверхность в $\mathbb{R}^{m+1}$, задается точками $(x, y)$.

Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке $(a, b)$ задается уравнением

$$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

*Доказательство.* $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$

$\Phi(x) = (x, f(x))$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$. В каких случаях он принадлежит образу $\Phi'$?

$$\Phi'\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \ldots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор принадлежит образу, если $\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \ldots + \alpha_m f'_{x_m}$

Сместив на $a, b$, получаем искомое. □

$\Phi(x_1 \dots x_m) = 0$

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$\Phi(a) = 0$

Тогда уравнение касательной плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

*Доказательство.* $\gamma$ — путь в $M : \Phi(\gamma(s)) = 0, \Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$. По предыдущим утверждениям такой путь есть, кроме того, любому вектору $x$ в касательном пространстве можно сопоставить $\gamma : \gamma'(s) = x$. Поэтому любой касательный вектор от точки $a$ должен быть подчинём искомому отношению.

Альтернативное доказательство:

По определению дифференцируемости $\Phi$ в точке $a$:

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(x_1 - a_1) + \ldots + \Phi'_{x_m}(x_m - a_m) + \cancel{o()}$$

Мы игнорируем $o$, потому что оно скомпенсируется тем, что мы берем не с поверхности $\Phi$, а с касательной плоскости. Это нестрогое утверждение. □

## 2.21 ! Необходимое условие относительного локального экстремума

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ — гладкое в $O$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в $O$
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\mathrm{rg}\Phi'(a) = n$

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f'(a) + \lambda\Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

Второе условие дописано для удобства, оно не содержательно, т.к. оно уже дано.

$$\text{В координатах: } \begin{cases} f'_{x_1} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} + \ldots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} + \ldots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Здесь неизвестны $a_1 \dots a_{m+n}, \lambda_1 \dots \lambda_n$, поэтому, если уравнения не вырождены, то решение есть.

*Доказательство.* $\operatorname{rg}\Phi'(a) = n$. Пусть ранг реализуется на столбцах $x_{m+1} \dots x_{m+n}$.

Обозначим $y_1 = x_{m+1} \dots y_n = x_{m+n}$.

$(x_1 \dots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y), a \leftrightarrow (a_x, a_y)$.

$\det \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(a) \neq 0$. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists U(a_x)\ \exists V(a_y)\ \exists \varphi : U(a_x) \to V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ и отображение $x \mapsto (x, \varphi(x))$ есть параметризация простого гладкого многообразия $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$.

$a$ — точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ — точка локального экстремума функции $g(x) = f(x, \varphi(x))$, потому что $(x, \varphi(x)) \in U(a)$.

Необходимое свойство экстремума для $a_x$:

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi')(a_x) = 0 \tag{1}$$

*Примечание.* Здесь и далее в этом доказательстве в функции и производные операторы подставляется $a$ и $a_x$, но не записывается ради краткости и запутанности.

$$\begin{gathered}\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0 \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' = 0\end{gathered}$$

Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \cdot \varphi' = 0 \tag{2}$$

$$f'_x + \lambda \Phi'_x + (f'_y + \lambda \Phi'_y)\varphi' = 0 \tag{3}$$

(3) это (2) + (1)

Пусть $\lambda = -f'_y \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}$.

Тогда $f'_y + \lambda \Phi'_y = f'_y - f'_y(\Phi'_y(a))^{-1}\Phi'_y(a) = 0$ и $f'_x + \lambda\Phi'_y = 0$ в силу (3). Итого (3) выполнено, мы предъявили $\lambda$, подходящее под искомое. □

## 2.22 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

- $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Тогда $||A|| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda$ — собственное число $A^T A\}$

Такое число существует, т.к. $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle \Rightarrow \langle A^T A x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$.

*Доказательство.* $\sphericalangle x \in S^{m-1}$.

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle \underbrace{A^T A}_{\text{симм.}} x, x\rangle$$

$$\max |Ax|^2 = \max\langle A^T Ax, x\rangle = \lambda_{\max}$$

□

## 2.23 ! Теорема Стокса-Зайдля о непрерывности предельной функции. Следствие для рядов

*Теорема* 1 (Стокса-Зайдля).

- $f_n, f : X \to \mathbb{R}$
- $X$ — метрическое пространство
- $x_0 \in X$
- $f_n$ непрерывна в $x_0$
- $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$

Тогда $f$ непрерывна в $x_0$.

*Доказательство.* $|f(x) - f(x_0)| \leq \underline{|f(x) - f_n(x)|} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underline{|f_n(x_0) - f(x_0)|}$ — верно $\forall x, \forall n$

$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$

Берем $\forall \varepsilon > 0$ возьмём любой $n$, для которого выполняется (1). Тогда подчеркнутые слагаемые $\leq \frac{\varepsilon}{3}$. Теперь для этого $n$ подбираем $U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \ \ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

*Теорема* 1' (Стокса-Зайдля для рядов).

- $u_n : X \to Y$
- $X$ — метрическое пространство
- $Y$ — нормированное пространство
- $x_0 \in X$
- $u_n$ непрерывно в $x_0$

- $\sum u_n(x)$ **равномерно** сходится на $X$
- $S(x) := \sum u_n(x)$

Тогда $S(x)$ непрерывно в $x_0$.

*Доказательство.* По теореме 1 $S_n(x) \rightrightarrows S(x), S_n(x)$ — непр. в $x_0 \xRightarrow{\text{т. 1}} S(x)$ непр. в $x_0$ □

## 2.24 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

- $X$ компакт
- $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$, где $f_1, f_2 \in C(X)$

Тогда пространство $C(X)$ — полное метрическое пространство с метрикой $\rho$.

*Доказательство.* $f_n$ — фундаментальная в $C(X) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n, m > N \;\; \forall x \in X \;\; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{4}$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in X$ вещественная последовательность $(f_n(x_0))$ фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) =:$ $f(x_0)$, тогда $f$ — поточечный предел $f_n$. Проверим, что $f_n \rightrightarrows f$ и $f \in C(X)$.

В (4) перейдем к пределу при $m \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \;\; \forall x \in X \;\; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \xRightarrow{\text{Стокс}} f \in C(X)$$

□

## 2.25 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

*Теорема* 2.

- $f, f_n \in C[a, b]$
- $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$

Тогда $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

*Доказательство.*

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a,b]} |f_n - f| (b - a) = \rho(f_n, f)(b - a) \to 0$$

□

*Теорема* 2'. О почленном интегрировании ряда

- $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$
- $u_n$ — непр. на $[a, b]$
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ **равномерно** сходится на $[a, b]$
- $S(x) = \sum u_n(x)$

Тогда $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx$

Можно интегрировать, т.к. $S(x)$ — непр. на $[a, b]$ по теореме 1'

*Доказательство.* По теореме 2

$S_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$

По теореме 2:

$$\int_a^b S_n(x)dx \to \int_a^b S(x)dx$$

$$\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} u_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(x)dx \xrightarrow{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)dx$$

□

## 2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

- $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$
- $f, f'_y$ — непр. на $[a, b] \times [c, d]$
- $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$

Тогда $\Phi$ дифференцируема на $[c, d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} &= \int_a^b \frac{f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx \\ &= \int_a^b f'_y\left(x, y + \frac{\Theta}{n}\right) dx \\ &= \int_a^b g_n(x, y)dx \end{aligned} \tag{5}$$

(5): по т. Лагранжа.

$g_n(x,y) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f'_y(x,y)$ на $x \in [a,b]$ по теореме Кантора о равномерной непрерывности, и мы считаем $y$ фиксированным.

Таким образом, $\Phi'(y) \leftarrow \dfrac{\Phi\left(y+\frac{1}{n}\right)-\Phi(y)}{\frac{1}{n}} \to \int_a^b f'_y(x,y)dx$ □

## 2.27 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

*Теорема* 3 (о предельном переходе под знаком производной).

- $f_n \in C^1\langle a,b\rangle$
- $f_n \to f$ поточечно на $\langle a,b\rangle$
- $f'_n \underset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} \varphi$

Тогда $f \in C^1\langle a,b\rangle$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{tikzcd}
f_n \arrow[r, "n\to+\infty"] \arrow[d, "D"'] & f \arrow[d, dashed] \\
f'_n \arrow[r, Rightarrow] & \varphi
\end{tikzcd}$$

*Доказательство.* $\forall x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle$:

$$f'_n \overset{[x_0,x_1]}{\rightrightarrows} \varphi \xRightarrow{\text{теорема 2}} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$f(x_1)-f(x_0) \xleftarrow{n\to+\infty} f_n(x_1)-f_n(x_0) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$f(x_1)-f(x_0) \to \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Тогда $\begin{cases} f \text{ — первообразная } \varphi \\ \varphi \text{ — непр.} \end{cases} \Rightarrow f' = \varphi$ □

*Теорема* 3' (о дифференцировании ряда по параметру).

- $u_n \in C^1\langle a, b\rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$ (поточечная сходимость)
- $\sum u_n'(x) = \varphi(x)$ (равномерная сходимость)

Тогда:

1. $S(x) \in C^1\langle a, b\rangle$
2. $S' = \varphi$ на $\langle a, b\rangle$

То есть $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$

*Доказательство.* Следует из теоремы 3.

$S_n \to S$ поточечно, $S_n' \rightrightarrows \varphi$ □

### 2.28 ! Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

- $\sum u_n(x)$
- $x \in X$

Пусть $\exists c_n$ — вещественная:

- $|u_n(x)| \leq c_n$ при $x \in E$
- $\sum c_n$ — сходится

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $E$

*Доказательство.* $|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}$ — тривиально

$\sum c_n$ — сх. $\Rightarrow c_n$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \ \ c_{n+1} + \ldots c_{n+p} < \varepsilon$$

Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости. □

### 2.29 Дифференцируемость $\Gamma$ функции

Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, x > 0$$

$\gamma$ — постоянная Эйлера.

$$-\ln\Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)}_{u_k(x)}$$

Зафиксируем $x_0$.

$$u_k'(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{k}}\frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$$

Пусть $M > x_0$. Тогда

$$\left|\frac{-x}{(x+k)k}\right| \leq \frac{M}{k^2}$$

при $x \in (0, M)$.

Тогда $\sum \dfrac{-x}{(x+k)k}$ равномерно сходится на $(0, M)$, значит $\ln\Gamma(x) \in C^1(0, M)$, $\dfrac{-x}{(x+k)k}$ — непр. $\Rightarrow \sum \dfrac{-x}{(x+k)k}$ — непр. $\Rightarrow \ln\Gamma(x) \in C^1(0, +\infty) \Rightarrow \Gamma(x) \in C^1(0, +\infty)$

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{(x+k)k}$$
$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x)\left(\frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{(x+k)k}\right)$$

Изучив равномерную сходимость $\left(\dfrac{x}{(x+k)k}\right)'$, получаем, что $\Gamma \in C^2(0, +\infty)$ и т.д. $\Rightarrow$ $\Gamma \in C^{\infty}(0, +\infty)$

## 2.30 Теорема о предельном переходе в суммах

- $u_n : E \subset X \to \mathbb{R}$
- $X$ — метрическое пространство
- $x_0$ — предельная точка $E$
- $\forall n\ \ \exists$конечный $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $E$.

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится

2. $\sum a_n = \lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

*Доказательство.*

1. $? \sum a_n$ — сходится

   $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x), S_n^a = \sum_{k=1}^{n} a_k$

   Проверим, что $S_n^a$ — фундаментальная:

   $$|S_{n+p}^a - S_n^a| \le |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

   Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ |S_{n+p} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

   *(Это критерий Больцано-Коши для равномерной сходимости)*

   Зададим $\varepsilon$ по $N$, выберем $n, n+p$ и возьмём $x$ близко к $x_0$ : $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   $|S_n^a - S_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   Тогда выполнено 1, т.е. $|S_{n+p} - S_n^a| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

2. $\sum a_n \overset{?}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \sum u_n(x)$

   Сведём к теореме Стокса-Зайдля.

   $\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$ — задано на $E \cup \{x_0\}$, непрерывно в $x_0$.

   $\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится на $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна в $x_0$.

   $$\lim_{x \to x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x \to x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n$$

   $\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится, т.к.:

   $$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \le \underbrace{\sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|}_{\to 0} + \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right|}_{\to 0}$$

□

## 2.31 Теорема о перестановке двух предельных переходов

- $f_n : E \subset X \to \mathbb{R}$
- $x_0$ — предельная точка $E$
- $f_n \overset{E}{\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} S(x)$
- $f_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A_n$

Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$

То есть пунктирные преобразования верны:

$$
\begin{tikzcd}
f_n \arrow[r, shift left, "n\to+\infty"] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "x\to x_0"'] & S(x) \arrow[d, dashed, "x\to x_0"] \\
A_n \arrow[r, dashed, "n\to+\infty"'] & A
\end{tikzcd}
$$

*Доказательство.* $u_1 = f_1, \dots u_k = f_k - f_{k-1} \dots$

$a_1 = A_1, \dots a_k = A_k - A_{k-1}$

Тогда $f_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

В эти обозначениях $\sum u_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$.

$u_k(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a_k$

Тогда по т. 4' $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ имеет конечный предел при $n \to +\infty$.

$$\lim_{x\to x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = \sum a_k = A$$

□

## 2.32 ! Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

- $\sum a_n(x) b_n(x)$ — вещественный ряд.
- $x \in X$

- Частичные суммы ряда $\sum a_n$ равномерно ограничены :

$$\exists C_a \;\; \forall n \;\; \forall x \in X \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \le C_a$$

- $\forall x$ последовательность $b_n(x)$ — монотонна по $n$ и $b_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{X} 0$

Тогда ряд $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на $X$

*Доказательство.* Преобразование Абеля *(суммирование по частям)*

$$\sum_{M\le k\le N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1}b_{M-1} + \sum_{M\le k\le N-1} A_k(b_k - b_{k+1})$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{N} a_k(x)b_k(x)\right| &\le C_A|b_N| + C_A|b_{M-1}| + \sum_{M\le k\le N-1} C_A|b_k - b_{k+1}| \\ &\le C_A\left(|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=M}^{N-1}|b_k - b_{k+1}|\right) \qquad (6)\\ &\le C_A\left(2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|\right)\end{aligned}$$

(6) : Все разности одного знака $\Rightarrow$ телескопически $= \pm(b_M - b_N)$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K : \forall l > K \;\; \forall x \in X \;\; |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_A}$$

Значит, при $M, N > K \;\; \forall x \in X$:

$$\left|\sum_{k=m}^{N} a_k(x)b_k(x)\right| < \varepsilon$$

Это критерий Больцано-Коши равномерной сходимости ряда. □

## 2.33 Теорема о круге сходимости степенного ряда

- $\sum a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд

Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится только при $z = z_0$

3. $\exists R \in (0, +\infty)$ :
   (a) при $|z - z_0| < R$ ряд абсолютно сходится
   (b) при $|z - z_0| > R$ ряд расходится

*Доказательство.* Применим признак Коши: $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, если $r < 1$, ряд сходится, если $r > 1$, ряд расходится.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| = |z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1. $\overline{\lim} = 0$. Тогда $r = 0$, есть абсолютная сходимость при всех $z$.
2. $\overline{\lim} = +\infty$. Тогда $r = +\infty$ при $z \neq z_0$. При $z = z_0$ сходимость очевидна.
3. $\overline{\lim} \neq 0, +\infty$. Тогда $|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \overset{\text{def}}{=} R$

□

## 2.34 Теорема о непрерывности степенного ряда

- $\sum a_n (z - z_0)^n$
- $0 < R \leq +\infty$

Тогда:

1. $\forall r : 0 < r < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ — непрерывна в $B(z_0, r)$

*Доказательство.*

1. Если $0 < r < R$, то при $z - z_0 = r$ ряд абсолютно сходится, т.е. $\sum |a_n| r^n < +\infty$

   Признак Вейерштрасса:
   (a) При $|z - z_0| \leq r$ $|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$
   (b) $\sum |a_n| r^n < +\infty$

   $\Rightarrow$ есть сходимость на $\overline{B(z_0, r)}$
2. Следствие из пункта 1 и теоремы Стокса-Зайдля.

   Если $z$ удовлетворяет $|z - z_0| < R$, то $\exists r_0 < R : z \in B(z_0, r_0)$

   На $B(z_0, r_0)$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow f$ непр. в точке $z$.

□

## 2.35 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, 0<R<+\infty$

(A') $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$

Тогда:

1. Радиус сходимости (A') равен $R$
2. $\forall z \in B(z_0, R)\ \ \exists f'(z)$ и $f'(z) = \sum na_n(z-z_0)^n$

*Доказательство.*

1. По формуле Адамара.

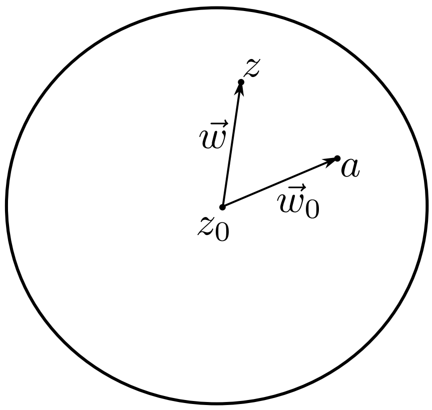
   Ряд (A') сходится при каком-то $z \Leftrightarrow \sum na_n(z-z_0)^n$ — сходится.

$$\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{1\cdot\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

2. $\lhd a \in B(z_0, R), \exists r < R : a \in B(z_0, r)$

   $a = z_0 + w_0, |w_0| < r$

   $z = z_0 + w$




$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{a_n\frac{w^n-w_0^n}{w-w_0}}_{\substack{\text{модуль по лемме}\\ nr^{n-1}|a_n|}} \tag{7}$$

$\sum nr^{n-1}|a_n|$ сходится по пункту 1.

То есть ряд (7) в круге $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lim \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} = \sum n a_n (a-z_0)^{n-1}$$

□

*Следствие* 0.3.

- $f(x) = \sum a_n (x-x_0)^n$
- $a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$

Тогда:

1. $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и $f$
2. $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$

*Пример.*

$$\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C$$

$$f(x) := \operatorname{arcctg} x$$

$$f' = \frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$$

Проинтегрируем:

$$\operatorname{arcctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$
$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} 0 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$
$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

То же самое можно получить, взяв определенный интеграл.

## 2.36 Свойства экспоненты

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp(z)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp z$
3. $\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$

*Доказательство.*

1.
$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

2.
$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

3.
$$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k w^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}\right) \\ &= \exp(z)\exp(w)\end{aligned}$$

□

## 2.37 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ — сходится
- $c_n \in \mathbb{C}$
- $f(x) = \sum c_n x^n$
- $R \geq 1$
- $-1 < x < 1$

Тогда $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \sum c_n$

*Доказательство.* Ряд $\sum c_n x^n$ равномерно сходится на $[0, 1]$ по признаку Абеля при $a_n(x) = c_n, b_n(x) = x^n$.

Функции $c_n x^n$ непрерывны на $[0, 1] \xRightarrow{\text{Стокса-Зайдля}} \sum c_n x^n$ — непр. на $[0, 1]$ □

*Следствие* 0.4 (т. Абеля).

- $\sum a_n = A$
- $\sum b_n = B$
- $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$
- $\sum c_n = C$

Тогда $C = AB$

*Доказательство.* $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n, x \in [0, 1]$

При $x < 1$ есть абсолютная сходимость $f(x)$ и $g(x)$. Можно перемножать: $f(x)g(x) = h(x)$, при $x \to 1 - 0 \quad A \cdot B = C$ □

## 2.38 Единственность разложения функции в ряд

$f$ — **разлагается в степенной ряд** в окрестности $x_0$, если:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \exists C_n - \text{вещ. посл.} \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x - x_0)^n \tag{8}$$

**Теорема 1** (о единственности). $f$ разлагается в степенной ряд в окрестности $x_0$. Тогда разложение единственно.

*Доказательство.* Выполняется (8).

База:

$$C_0 = f(x_0) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n (x - x_0)^{n-1}$$

Переход:

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) C_n (x - x_0)^{n-k} \Rightarrow C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

□

## 2.39 Разложение бинома в ряд Тейлора

$\forall \sigma \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in (-1, 1)$

$$(1 + x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma - 1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\sigma}{n} x^n + \dots$$

*Доказательство.* При $|x| < 1$ ряд сходится по признаку Даламбера:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{\sigma!}{(n+1)!(n+1-\sigma)!}x^{n+1}}{\frac{\sigma!}{n!(n-\sigma)!}x^n}\right| = \left|\frac{(\sigma - n)x}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to+\infty} |x| < 1$$

Обозначим сумму ряда через $S(x)$.

Наблюдение: $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!}x^n + \dots$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$\begin{aligned}(1+x)S' &= \dots + \left(\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!}n\right)x^n + \dots\\ &= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!}\sigma x^n + \dots\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} \quad f'(x) = \frac{S'(1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1}S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0$$

$\Rightarrow f = \text{const}, f(0) = 1 \Rightarrow f \equiv 1 \Rightarrow S(x) = (1+x)^\sigma$ □

## 2.40 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

$f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$

Тогда $f$ — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности $x_0 \iff$

$$\exists \delta, C, A > 0 \ \forall n \ \forall x : |x - x_0| < \delta \ \ |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$$

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ формула Тейлора в $x_0 : f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$

Если

$$\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

, то $f$ раскладывается в ряд Тейлора. Из условия мы знаем:

$$\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n\right| \le C|A(x-x_0)|^n$$

Тогда при $C|A(x-x_0)|^n \to 0$ $f$ раскладывается в ряд Тейлора.

$$C|A(x-x_0)|^n \to 0 \Leftrightarrow |x-x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$$

Таким образом, $f$ раскладывается в ряд Тейлора в области $(x_0 - \min(\delta, \frac{1}{A}), x_0 + \min(\delta, \frac{1}{A}))$

$\Rightarrow$ $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Возьмём $x_1 \neq x_0$, для которого разложение верно.

(a) при $x = x_1$, ряд сходится $\Rightarrow$ слагаемые $\to 0 \Rightarrow$ слагаемые ограничены:

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n\right| \leq C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \leq C_1 n! B^n$$

, где $B = \frac{1}{|x_1-x_0|}$

Таким образом, мы оценили производную в $x_0$, но нужно уметь оценивать и производную в окрестности $x_0$.

(b)

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1)\dots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m} \end{aligned}$$

Пусть $|x-x_0| < \frac{1}{2B}$

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &\leq \sum \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}|x-x_0|^{n-m}\right| \\ &\leq \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!}|x-x_0|^{n-m} \\ &= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!}(\underbrace{B|x-x_0|}_{<\frac{1}{2}})^{n-m} \\ &= \frac{C_1 B^m m!}{(\underbrace{1-B|x-x_0|}_{>\frac{1}{2}})^{m+1}} \\ &< C_1 2^{m+1} B^m m! \end{aligned} \tag{9}$$

$$= \underbrace{(2C_1)}_{C}(\underbrace{2B}_{A})^m m!$$

(9): по следствию 2.

Эта оценка выполняется при $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{2B}$

$\square$

## 2.41 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

1. Линейность интеграла по полю.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \forall U, V - \text{векторные поля} \ \ I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$$

*Доказательство.* Очевидно из формулы 1.23 в определении. $\square$

2. Аддитивность при дроблении пути

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$
- $c \in (a, b)$
- $\gamma^1 = \gamma\Big|_{[a,c]}$
- $\gamma^2 = \gamma\Big|_{[c,b]}$

Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

*Доказательство.* Очевидно из линейности интеграла в 1.23. $\square$

3. Замена параметра

- $\varphi : [p, q] \to [a, b]$
- $\varphi \in C^1$
- $\varphi(p) = a$
- $\varphi(q) = b$
- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$
- $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$

*Доказательство.* Это замена переменной в интеграле.

$$
\begin{aligned}
I(V,\tilde{\gamma}) &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(s)\rangle ds \\
&= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s))\rangle \varphi'(s) ds \\
t := \varphi(s) & \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\
&= I(V,\gamma)
\end{aligned}
$$

□

*Примечание.* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — параметризация гладкого одномерного простого многообразия

$\tilde{\varphi} : [p,q] \to \mathbb{R}^m$ — то же самое

По теореме о двух параметризациях: $\exists$ диффеоморфизм $\varphi : [p,q] \to [a,b]$ $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

4. Объединение носителей

   - $\gamma^1 : [a,b] \to \mathbb{R}^m$
   - $\gamma^2 : [c,d] \to \mathbb{R}^m$
   - $\gamma^1(b) = \gamma^2(c)$

   Зададим путь $\gamma = \gamma^2\gamma^1 : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^m, t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma^2(t+c-b), & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$

   В точке $b$ возможен излом, т.е. нет $\gamma'(b)$, но есть левосторонняя и правосторонняя производные.

   Если $\gamma^1, \gamma^2$ — кусочно-гладкие, то $\gamma$ — кусочно-гладкое.

   Тогда $I(V, \gamma^2\gamma^1) = I(V,\gamma^1) + I(V,\gamma^2)$

   *Доказательство.*

$$
\begin{aligned}
I(V,\gamma) &= \int_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt + \int_b^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\
\tau := t-b+c & \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma^1(t)), \gamma^{1\prime}(t)\rangle dt + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), \gamma^{2\prime}(\tau)\rangle d\tau
\end{aligned}
$$

$$= I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$$

□

5. Противоположный путь

   $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^m, t \mapsto= \gamma(a + b - t)$, т.е. мы идём от $b$ к $a$, а не наоборот.

   Тогда $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$

   *Доказательство.*

$$\begin{aligned} I(V, \gamma^-) &= \int_a^b \langle V(\gamma(a + b - \tau)), -\gamma'(a + b - \tau)\rangle d\tau \\ t := a + b - \tau \\ &= \int_b^a \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t)\rangle(-dt) \\ &= -I(V, \gamma) \end{aligned}$$

□

6. Оценка интеграла векторного поля пути

$$|I(V, \gamma)| \le \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$$

   , где $L = \gamma[a, b]$ — носитель пути.

   *Доказательство.*

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \right| &\le \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle| \, dt \\ &\le \int_a^b |V(\gamma(t))||\gamma'(t)| dt \qquad (10) \\ &\le \sup_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\le \max_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \qquad (11) \\ &\le \max_{x \in L} |V(x)| l(\gamma) dt \end{aligned}$$

   (10): Неравенство Коши-Буняковского

   (11): $V$ — непр., $L$ — компакт $\Rightarrow$ sup достигается □

## 2.42 ! Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $V$ — потенциально
- $f$ — потенциал $V$
- $\gamma[a,b] \to O$
- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

Тогда

$$\int_\gamma \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$$

*Доказательство.* Рассмотрим случаи:

1. $\gamma$ — гладкий

   $\Phi(t) = f(\gamma(t))$

$$\begin{aligned}\Phi' &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\gamma_m'(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum v_k dx_k &= \int_a^b \Phi'(t)dt \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= f(B) - f(A)\end{aligned}$$

2. $\gamma$ — кусочно-гладкий

   $\exists$ дробление: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b : \gamma\Big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое

$$\int_\gamma \sum v_k dx_k = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \varphi'(t) \rangle dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) \qquad (12)\\
&= f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0))\\
&= f(B) - f(A)
\end{aligned}
$$

(12): по пункту 1.

□

## 2.43 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

$V$ — векторное поле в области $O$. Тогда эквивалентны следующие:

1. $V$ — потенциально
2. $\int_\gamma \sum v_i dx_i$ не зависит от пути в $O$
3. $\forall \gamma$ — кусочно-гладкий, замкнутый в $O$ $\int_\gamma \sum v_i dx_i = 0$

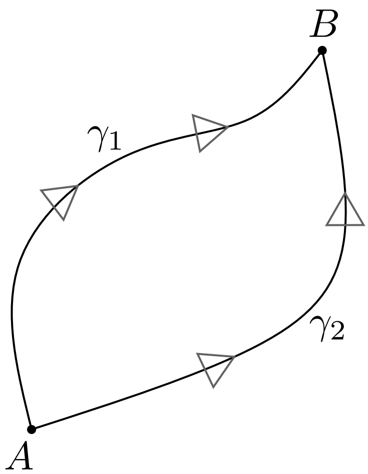
*Доказательство.*

1⇒2 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

2⇒3 $\gamma$ — петля: $[a,b] \to O$. $\gamma(a) = \gamma(b) = A$

Рассмотрим постоянный путь $\tilde{\gamma} : [a,b] \to O, t \mapsto A$. По свойству 2: $\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} \langle V, \gamma' \rangle dt = 0$

3⇒2 $\gamma_1, \gamma_2$ — пути с общим началом и концом. Тогда $\gamma := \gamma_2^- \gamma_1$ — петля. $\gamma$ — кусочно гладкий $\Rightarrow 0 = \int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2^-} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$

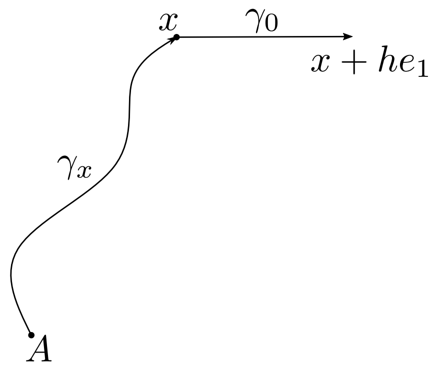


2⇒1 Фиксируем $A \in O$.

$\forall x \in O$ выберем кусочно-гладкий путь $\gamma_x$ из $A$ в $x$. Проверим, что $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i$ — потенциал.

Достаточно проверить, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$ в $O$.

Фиксируем $x \in O$. $\gamma_0(t) = x + the_1, t \in [0, 1]$, $\gamma_0'(t) = (h, 0 \dots 0) = he_1$




$$
\begin{aligned}
f(x + he_1) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+he_1}} - \int_{\gamma_x} \\
&= \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} \\
&= \int_{\gamma_0} \\
&= \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) h dt \\
&= hV_1(x_1 + ch_1, x_2 \dots x_n)
\end{aligned}
$$

Таким образом:

$$\frac{f(x + he_1) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} V_1(x_1 + ch_1, x_2 \dots x_n) \xrightarrow{h \to 0} V_1(x)$$

$\square$

## 2.44 ! Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

$V$ — гладкое, потенциальное в $O$

Тогда
$$\forall x \in O \ \ \forall k, j \ \ \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x) \tag{13}$$

*Доказательство.* Непрерывные производные не изменяются при порядке дифференцирования:
$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x)$$
□

Лемма Пуанкаре:

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — **выпуклая** область
- $V : O \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- $V$ удовлетворяет 13, в т.ч. $V$ — гладкое.

Тогда $V$ — потенциальное.

*Доказательство.* Фиксируем $A \in O$
$$\forall x \in O \ \ \gamma_x(t) := A + t(x - A), t \in [0, 1]$$
$$\gamma_x'(t) = x - A$$
$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))(x_k - A_k)dt$$
Проверим, что $f$ — потенциал.
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \text{правило Лейбница}\\ &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\ldots)t(x_k - A_k)dt\\ &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\ldots)t(x_k - A_k)dt \qquad (14)\\ &= \int_0^1 (tV_j(A + t(x - A)))_t' dt\\ &= tV_j(A + t(x - A))\Big|_{t=0}^{t=1}\\ &= V_j(x)\end{aligned}$$
(14): по (13). □

Лемма Пуанкаре о локальной потенциальности:

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — **любая** область
- $V : O \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- $V$ удовлетворяет 13.

Тогда $V$ — локально потенциально.

## 2.45 Лемма о гусенице

- $\gamma : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Тогда $\exists$ дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и $\exists$ шары $B_1 \dots B_n \subset O : \gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$.

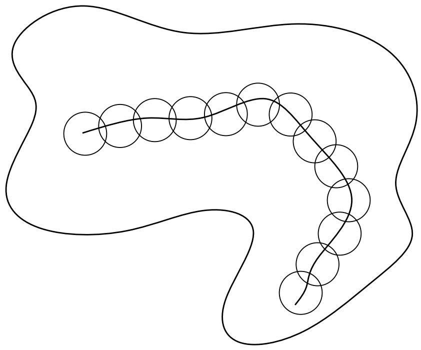


Рис. 5: "Гусеница" — покрытие пути шарами

*Доказательство.* $\forall c \in [a, b]$ возьмём $B_c := B(\gamma(c), \underbrace{r_c}_{\text{произвольн.}}) \subset O$.

$\overline{\alpha_c} := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$

$\overline{\beta_c} := \sup\{\beta \in [a, b] : \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$ — момент первого выхода после посещения точки $\gamma(c)$

Возьмём $(\alpha_c, \beta_c) : \overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$

Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a, b]$, если для $c = a$ или $c = b$ вместо $\alpha_c, \beta_c$ брать $[a, \beta_a), (\alpha_b, b]$

$[a, b]$ — компактно $\implies [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$

Не умаляя общности ни один интервал не накрывается целиком остальными $\Leftrightarrow \forall(\alpha_c, \beta_c) \exists d_c$, принадлежащая "только этому" интервалу.

Точка $t_k$ выбирается на $d_k, d_{k+1}$ и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$.

$\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$ $\square$

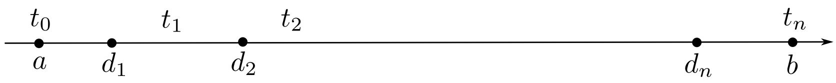



Рис. 6: Выбор точек $t_k$

## 2.46 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

- $V$ — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ — $V$-похожие, кусочно гладкие
- $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда $\int_\gamma \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

*Доказательство.* Рассмотрим общую $V$-гусеницу. Пусть $f_k$ — потенциал $V$ в шаре $B_k$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Сдвинем потенциалы прибавлением константы, так что $f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1 \dots n$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum_i V_i dx_i &= \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \\ &= \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) \qquad (15) \\ &= f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a))\end{aligned}$$

(15): По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Для $\tilde{\gamma}$ воспользуемся свойством: $f_k\Big|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}\Big|_{B_k \cap B_{k+1}}$ и тогда аналогично

$$\int_{\tilde{\gamma}} \sum v_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_1(\tilde{\gamma}(a))$$

$\square$

## 2.47 Лемма о похожести путей, близких к данному

- $\gamma : [a, b] \to O$ — непр.
- $V$ — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда $\exists \delta > 0$ : если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \to O$ таковы, что:

$$\forall t \in [a, b] \;\; |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$$

Тогда $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ $V$-похожи.

*Доказательство.* Берём $V$-гусеницу для $\gamma$.

$\delta_k$-окрестность множества $A := \{x : \exists a \in A \;\; \rho(a,x) < \delta\} = \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \delta)$

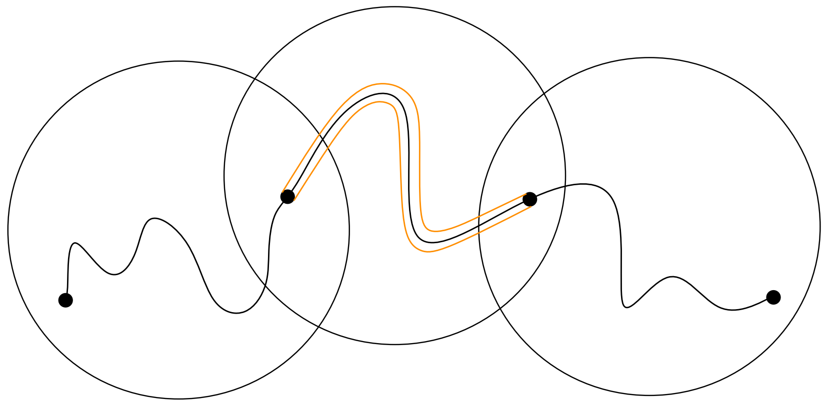


Рис. 7: $\delta_k$-окрестность множества $\gamma[t_{k-1}, t_k]$

$$\forall k \;\; \exists \delta_k > 0 : (\delta_k\text{-окрестность } \gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$$

Это следует из компактности:

Пусть $B_k = B(w, r)$, функция $t \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ непрерывна $\Rightarrow$ достигается max, $\rho(\gamma(t), w) \le r_0 < r$

$\delta_k := \frac{r - r_0}{2}, \delta := \min(\delta_1 \dots \delta_k)$

При таком $\delta$ все три пути лежат в одной гусенице. $\square$

## 2.48 Равенство интегралов по гомотопным путям

- $V$ — локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma_0, \gamma_1$ — связанно гомотопные пути

Тогда $\int_{\gamma_0} \sum V_i dx_i = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

*Доказательство.* Пусть $\Gamma$ — гомотопия $\gamma_0$ и $\gamma_1$.

$\gamma_u(t) := \Gamma(t, u), t \in [a, b], u \in [0, 1]$

$$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$$

Мы хотим доказать, что $\Phi(u) = \text{const}$. Докажем более простой факт, что $\Phi$ — локально постоянна, тогда в силу компактности и связности отрезка $\Phi$ будет постоянна.

Определение локально постоянной функции:

$$\forall u_0 \in [0,1] \;\; \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0,1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$$

$\Gamma$ — непр. на $[a,b] \times [0,1]$ — комп. $\Rightarrow$ $\Gamma$ равномерно непрерывна:

$$\forall \delta > 0 \, \exists \sigma > 0 \, \forall t, t' : |t - t'| < \sigma \, \forall u, u' : |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t,u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$$

Возьмём $\delta$ из леммы о похожести близких путей (2.47) для пути $\gamma_{u_0}$.

Если $|u - u_0| < \sigma \;\; |\Gamma(t,u) - \Gamma(t,u_0)| < \frac{\delta}{2}$ при $t \in [a,b]$, т.е. $\gamma_u$ и $\gamma_{u_0}$ похожи по лемме о похожести близких путей. Хочется сказать, что интегралы по $\gamma_u$ и $\gamma_{u_0}$ таким образом равны, однако это не обосновано, для этого необходимо, чтобы пути были кусочно-гладкими.

Построим кусочно-гладкий путь $\tilde{\gamma}_{u_0}$, $\frac{\delta}{4}$-близкий к $\gamma_{u_0}$, т.е.

$$\forall t \in [a,b] \;\; |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}(t)| < \frac{\delta}{4}$$

и кусочно-гладкий путь $\tilde{\gamma}_u$, $\frac{\delta}{4}$-близкий к $\gamma_u$. Тогда $\tilde{\gamma}_{u_0}$ и $\tilde{\gamma}_u$ - $\delta$-близкие к $\gamma_{u_0}$ $\Rightarrow$ они $V$-похожи $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \overset{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \overset{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$$

Таким образом, $\Phi(u) = \Phi(u_0)$ при $|u - u_0| < \delta$, т.е. $\Phi$ — локально постоянна. □

## 2.49 ! Теорема Пуанкаре для односвязной области

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область
- $V$ — локально потенциальное векторное поле в $O$

Тогда $V$ — потенциальное в $O$

*Доказательство.* $V$ — локально потенциально, $\lessdot \gamma_0$ — кусочно-гладкая петля, тогда $\gamma_0$ гомотопна постоянному пути $\gamma_1$ $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0$$

Тогда по теореме о характеризации потенциальных векторных полей в терминах интегралов $V$ потенциально. □

## 2.50 Теорема о веревочке

- $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- $\gamma : [0, 2\pi] \to O, t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля нестягиваема.

Неформальная формулировка: пусть даны две плоскости, соединенные гвоздём, между плоскостями есть зазор. На гвоздь надета веревочка в виде петли. Можно ли снять веревочку с гвоздя?

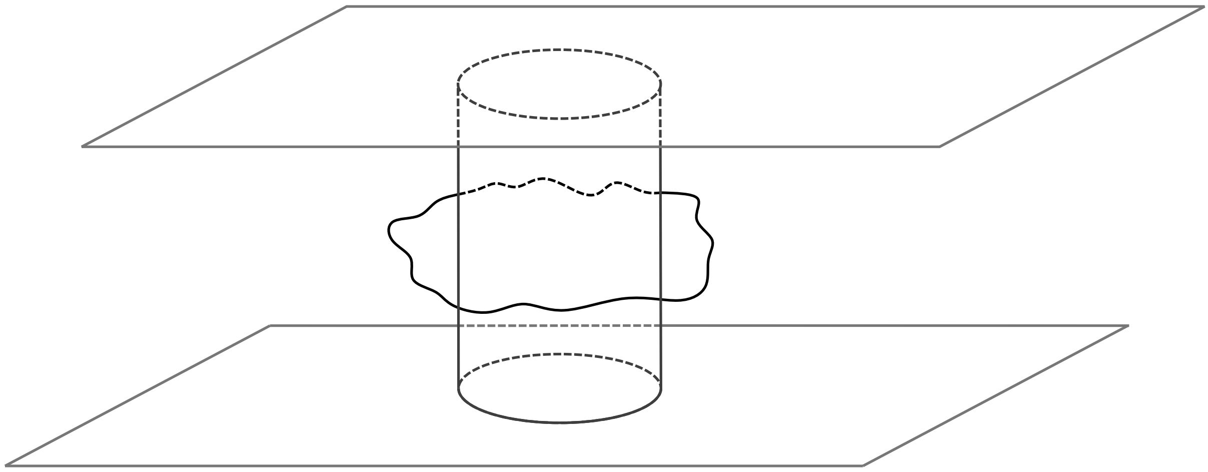


Рис. 8: Веревочка (жирным), надетая на “гвоздь” (цилиндр)

*Доказательство.* $V(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Таким образом, $\dfrac{\partial V_1}{\partial y} = \dfrac{\partial V_2}{\partial x}$ в области $O$. Тогда по лемме Пуанкаре $V$ — локально потенциально.

При этом

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum V_i dx_i &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t)dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi\end{aligned}$$

Таким образом, если бы существовал постоянный путь $\tilde{\gamma}$, которому $\gamma$ гомотопен, то $\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} = 0$, но это не так. $\square$

## 2.51 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем. Тогда $\mu$ имеет свойства:

1. Усиленная монотонность

$$\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots A_n}_{\text{дизъюнктны}} \in \mathcal{P} \ \ \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \ \ \sum_{i=1}^{n} \mu A_i \le \mu A$$

2. Конечная полуаддитивность

$$\forall A, A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{P} \ \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \ \mu A \le \sum_{i=1}^{n} \mu A_i$$

3. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ пусть ещё известно $A \backslash B \in \mathcal{P}$, $\mu(B)$ — конечно. Тогда $\mu(A \backslash B) \ge \mu A - \mu B$

*Доказательство.*

1. Усиление аксиомы 3 из определения полукольца:

$$A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigsqcup_{l=1}^{s} B_l$$

Это было доказано ранее, т.к. по теореме $A = (\bigsqcup A_i) \cup (\bigsqcup B_l)$ — дизъюнктное объединение конечного числа множеств.

$$\mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_l \ge \sum \mu A_i$$

2. $$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \ \ A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k$$

Сделаем это множество дизъюнктным.

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) \ \ A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k$$

Но эти $C_k$ вообще говоря $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i\right) = \bigsqcup_j D_{k_j} \in \mathcal{P}$$

Тогда $A = \bigsqcup\limits_{k,j} D_{k_j} \quad \mu A = \sum \mu D_{k_j}$

При этом $\forall k \ \ \sum\limits_j \mu D_{k_j} = \mu C_k \overset{\text{монот.}\mu}{\leq} \mu A_k$

Итого $\mu A = \sum\limits_k \sum\limits_j \mu D_{k_j} = \sum \mu C_k \leq \sum \mu A_k$

3. (a) $B \subset A \quad A = B \cup (A \setminus B) \quad \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B)$
   (b) $B \not\subset A \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \quad \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu(A \cap B) \geq \mu A - \mu B$

□

*Примечание.* 1. В пунтах 1 и 2 не предполагается, что $\bigcup A_i \in \mathcal{P}$

2. В пункте 3 если $\mathcal{P}$ — алгебра, условие $A \setminus B \in \mathcal{P}$ можно убрать.

## 2.52 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности

$\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем.

Тогда эквивалентно:

1. $\mu$ — мера, т.е. $\mu$ — счётно-аддитивна.
2. $\mu$ — счётно-полуаддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \ \ A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$$

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$ как в предыдущей теореме, пункт 2, но вместо конечного объединения по $k$ используется счётное.

$2 \Rightarrow 1$ $A = \bigsqcup A_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum \mu A_i$

$$\forall N \ \ A \supset \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i \ \ \mu A \geq \sum_{i=1}^{N} \mu A_i$$

$A \subset \bigcup A_i$ (на самом деле $A = \bigsqcup A_i$) $\Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$

$\Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i$

$\square$

## 2.53 Теорема о непрерывности сверху

- $\mathfrak{A}$ — алгебра
- $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ — объем.
- $\mu$ — конечный объем.

Тогда эквивалентно:

1. $\mu$ — мера, т.е. $\mu$ счётно-аддитивная.
2. $\mu$ — непрерывна сверху:

$$A, A_1, A_2 \dots \in \mathfrak{A} \;\; A_1 \supset A_2 \supset \dots, A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to +\infty} \mu A_i$$

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$ $B_k = A_k \setminus A_{k+1}, A_1 = \bigsqcup B_k \cup A$

$\mu A_1 = \sum \mu B_k + \mu A$

$$A_n = \bigsqcup_{k \geq n} B_k \cup A \quad \mu A_n = \sum_{k \geq n} \mu B_k + \mu A \xrightarrow{n \to +\infty} \mu A$$

$2 \Rightarrow 1$ Дана непрерывность сверху. Воспользуемся ей для случая $A = \varnothing$

Проверим, что $C = \bigsqcup C_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum \mu C_i$.

Пусть $A_k := \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} C_i$. Тогда $A_k \in \mathfrak{A}$, т.к. $A_k = C \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i$ — конечное объединение.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad \bigcap A_k = \varnothing \Rightarrow \mu A_k \xrightarrow{k \to +\infty} \mu \varnothing = 0$$

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \sqcup A_k \;\; \mu C = \sum_{i=1}^{k} \mu C_i + \mu A_k \xrightarrow{k \to +\infty} \sum \mu C_i$$

$\square$

## 2.54 Счетная аддитивность классического объема

- $\mu : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$ — классический объем в $\mathbb{R}^m$

Тогда $\mu$ это $\sigma$-конечная мера

*Доказательство.* $\sigma$-конечность очевидна, т.к. можно дизъюнктно разбить $\mathbb{R}^m$ на ячейки.

Докажем счётную аддитивность $\mu$.

Для этого достаточно проверить счётную полуаддитивность:

$$P = [a, b), P_n = [a_n, b_n) \;\; P \subset \bigcup P_n \;\; \mu P \overset{?}{\leq} \sum \mu P_n$$

Если $P = \varnothing$, то утверждение тривиально. Пусть $P$ непустое.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Чуть уменьшим координаты вектора $b$, так что $[a, b'] \subset [a, b)$ и $\mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$. Последняя формула некорректна, т.к. $P \setminus [a, b')$ не обязательно ячейка. Но оно представимо в виде $\bigsqcup D_j$, поэтому под $\mu(P \setminus [a, b'))$ подразумевается $\sum \mu D_j$. Также можно было записать $\mu P - \mu[a, b') < \varepsilon$ вместо этих трюков.

Уменьшим слегка координаты векторов $a_n$, так что $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n)$, $\mu([a'_n, b_n) \setminus [a_n, b_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Эта запись также некорректна, поэтому напишем $\mu[a'_n, b_n) - \mu[a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\underbrace{[a, b']}_{\text{комп.}} \subset \bigcup (a'_n, b_n) \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие: $[a, b'] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} (a'_n, b_n) \Rightarrow [a, b') \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} [a'_n, b_n)$

Тогда $\mu[a, b') \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \mu[a'_n, b_n)$

$$\mu P - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{N} \left(\mu P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$\mu P - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu P_n + \varepsilon$$

□

## 2.55 Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

1. $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое. Тогда $O = \bigsqcup Q_i$, где $Q_i$ — ячейки с рациональными координатами. Можно считать, что ячейки кубические.
2. Можно считать, что $\overline{Q}_i \subset O$

3. $E$ — измеримо, $\lambda E = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; E \subset \bigcup Q_i \, : \, Q_i$ — кубические ячейки и $\sum \lambda Q_i < \varepsilon$

*Доказательство.*

(a, b) $\forall x \in O$ пусть $Q(x)$ — какая угодно ячейка с рациональными координатами, $Q(x) \subset O$ *(можно потребовать $\overline{Q(x)} \subset O, Q$ — куб, координаты двоично-рациональны для второго пункта).*

$O = \bigcup\limits_{x \in O} Q(x)$ — здесь не более чем счётное множество различных ячеек.

$\Rightarrow O = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q(x_i)$. Сделаем ячейки дизъюнктными: $Q_1 := Q(x_1), Q(x_2) \setminus Q(x_1) = \bigcup D_j$. Переобозначим $D_j$ как $Q_2, Q_3 \dots Q_k$. Аналогично для всех $Q(x_i)$.

Можно считать, что координаты всех ячеек двоично рациональны.

Ячейки можно подразбить, чтобы они стали кубическими: пусть $2^l$ — самый крупный знаменатель. Тогда $[a_i, b_i]$ — конечное объединение кубических ячеек со стороной $\frac{1}{2^l}$

(c) Следует из пункта 5 теоремы о продолжении Лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \text{ ячейки } P_k \;\; E \subset \bigcup P_k \;\; 0 = \lambda E \leq \sum \lambda P_k \leq \varepsilon$$

$\exists \tilde{P}_k$ — двоично-рациональные ячейки:

$$P_k \subset \tilde{P}_k \;\; 0 = \lambda E \leq \sum \lambda_k \tilde{P}_k \leq 2\varepsilon$$

Можно разбить $\tilde{P}_k$ на конечное число кубов.

□

## 2.56 Пример неизмеримого по Лебегу множества

Зададим отношение $\sim$ на $\mathbb{R}$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = A$ — из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Можно считать, что $A \subset [0, 1]$

Очевидно, что $\bigsqcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R}$

$$[0, 1] \overset{(1)}{\subset} \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + q) \overset{(2)}{\subset} [-1, 2]$$

Измеримо ли $A$? Предпололжим, что да.

Очевидно $\forall q \;\; \lambda A = \lambda(A + q)$ по пункту 5 теоремы о продолжении меры.

Из (1):

$$\lambda[0,1] = 1 \le \sum_q \lambda(A+q) = \sum_q \lambda(A) \Rightarrow \lambda A > 0$$

Из (2):

$$\lambda\left(\bigcup (A+q)\right) = \sum_q \lambda A \le \lambda[-1,2] = 3 \Rightarrow \lambda A = 0$$

Противоречие $\Rightarrow A$ неизмеримо.

## 2.57 ! Регулярность меры Лебега

$\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G - \text{откр.}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F - \text{замкн.}}} \lambda(F) \overset{(*)}{=} \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K - \text{комп.}}} \lambda(K)$$

*Доказательство.* $(*)$ следует из $\sigma$-конечности $\mathbb{R}^m = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} Q(0,n)$, где $Q(a,R) = \times_{i=1}^n [a_i - R, a_i + R]$ — куб с центром в $a$ и ребром $R$.

$\lambda(A \cap Q(0,n)) \to \lambda A$ по непрерывности снизу, т.к. $A \cap Q(0,n)$ хорошо аппроксимируется замкнутым множеством. □

## 2.58 Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

- $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непр.
- $\forall E \in \mathfrak{M}^m : \lambda E = 0$ выполняется $\lambda TE = 0$

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m \;\; TA \in \mathfrak{M}^m$

*Доказательство.*

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N}$$

, где $K_j$ — компакт, $\lambda\mathcal{N} = 0$

$$TA = \bigcup_{j=1}^{+\infty} TK_j \cup T\mathcal{N}$$

$TK_j$ компакт как образ компакта при непрерывном отображении. $\Rightarrow TA$ измеримо. □

## 2.59 Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

- $O \subset \mathbb{R}^m$ открыто
- $\Phi : O \to \mathbb{R}^n$
- $\Phi \in C^1(O)$

Тогда $\forall A \in O : A \in \mathfrak{M}^m \;\; \Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$, т.е. образ измеримого множества измерим.

*Доказательство.* Достаточно проверить свойства $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$, т.к. если оно выполняется, то работает предыдущая лемма 2.58

$$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \text{ шары } B_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \lambda B_i < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ из теоремы о Лебеговском продолжении меры.

$\Leftarrow$ по полноте меры Лебега.

1. $E \subset P \subset \overline{P} \subset O, \lambda E = 0$
$$L := \max_{x \in \overline{P}} ||\Phi'(x)||$$
Тогда
$$\forall x, y \in P \;\; |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$$
— неравенство Лагранжа.
$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr)$$
$$B_i := B(x_i, r_i), y_i := \Phi(x_i)$$
$$E \subset \bigcup B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr) \subset \bigcup Q(y_i, Lr)$$
$$\sum \lambda\Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = (2L)^m \sum r_i^m$$
Было $\sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m})^m$, стало $\sum \lambda\Phi(B_i) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m}L)^m$
2. Рассмотрим произвольный случай, то есть $E \subset O$
$O = \bigsqcup Q_i$, где $Q_i$ — кубические ячейки, $Q_i \subset \overline{Q}_i \subset O$
$E = \bigsqcup (E \cap Q_i)$, $\lambda(E \cap Q_i) = 0$. Тогда по пункту 1 $\lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$
$$\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$$

$\square$

*Следствие* 1.1. $\lambda$ — инвариантно относительно сдвигов в $\mathbb{R}^m$ (и $\mathfrak{M}^m$ тоже инвариантно), т.е. $\forall a \in \mathbb{R}^m$:

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad A + a \in \mathfrak{M}^m \tag{16}$$

$$\text{и } \lambda A = \lambda(A + a) \tag{17}$$

*Доказательство.*

$$\Phi : x \mapsto x + a, \Phi \in C^1(\mathbb{R}^m)$$

Отсюда следует (16).

(17) следует из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

$$A \subset \bigcup P_k \Leftrightarrow A + a \subset \bigcup (P_k + a)$$

Для ячеек $\lambda P_k = \lambda(P_k + a)$

Таким образом:

$$\lambda A = \inf\left(\sum \lambda P_k\right) = \inf\left(\sum \lambda(P_k + a)\right) = \lambda(A + a)$$

$\square$

## 2.60 Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

- $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ортогонально, т.е. сохраняет длины векторов.

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m$:

1. $TA \in \mathfrak{M}^m$
2. $\lambda(TA) = \lambda A$

*Доказательство.*

1. $T \in C^1$, поэтому измеримость сохраняется.
2. $\mu A := \lambda(TA)$

   $\mu$ — мера на $\mathfrak{M}^m$ по лемме о заготовке пространства, т.к. $T$ биективно, при этом $\mu$ инвариантно относительно сдвигов:

   $$\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \lambda(TA) = \mu A$$

   $A$ ограничено $\Rightarrow$ $TA$ ограничено $\Rightarrow$ $\mu A < +\infty$

   По теореме 1.41 $\lambda(TA) = k \cdot \lambda(A)$. Какое у нас $k$?

   Возьмём шар $B$. $TB$ — шар того же радиуса, т.е. $TB$ — сдвинутый $B$, т.е. $TB = B + x_0$.

   $$\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$$

□