

# 1 Пределы

**Теорема 1.** Определение Коши  $\Leftrightarrow$  определение Гейне.

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”.

Если дана  $(x_n)$ , удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

$$\text{Для этого } \delta \exists N \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$$

, где  $x_n \in D, x_n \neq a$

$$\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

□

*Доказательство.* Докажем “ $\Leftarrow$ ”

Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D \quad 0 < \rho(x, a) < \delta \quad \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in D \quad 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Построена последовательность  $(x_n) : x_n \in D, x_n \neq a, \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow a$ . Кроме того,  $\rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$  — противоречит утверждению Гейне, что  $f(x_n) \rightarrow A$ . □

**Теорема 2.** О единственности предела.  $f : D \subset X \rightarrow Y, a$  — пред. точка  $D$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A; \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$$

Тогда  $A = B$

*Доказательство.* По Гейне.  $\forall (x_n) :$

- $x_n \rightarrow a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$$f(x_n) \rightarrow A, f(x_n) \rightarrow B \xrightarrow[\text{теор. о ед. предела посл.}]{=} A = B$$

□

**Теорема 3.** О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.

$$f : D \subset X \rightarrow Y, a - \text{пред. точка } D, \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Тогда  $\exists V(a) : f - \text{огр. на } V(a) \cap D$ , т.е.  $f(V(a) \cap D)$  содержится в некотором шаре.

*Доказательство.* Для  $\varepsilon = 1 \exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Если  $\nexists f(a)$ , ограниченность доказана. Иначе:

$$\forall x \in V(a) \cap D \ f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A), \text{ где } \tilde{\varepsilon} = \max(\varepsilon, \rho(A, f(a)) + 1)$$

□

**Теорема 4.** О стабилизации знака.

$$f : D \subset X \rightarrow Y, a - \text{пред. точка } D, \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Пусть  $B \in Y, B \neq A$

$$\text{Тогда } \exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \neq B$$

*Доказательство.* Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$U_\varepsilon(A)$  не содержит  $B$ .

□

*Следствие 1.*  $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}, a - \text{пред. точка}, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0 \ B = 0$

$$\exists \dot{V}(a) \cap D : f(x) \neq 0$$

В доказательстве  $0 < \varepsilon < A \ f(x) \in U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

**Теорема 5.** Об арифметических свойствах предела

$f, g : D \subset X \rightarrow Y, X - \text{метрич. пространство}, Y - \text{норм. пространство над } \mathbb{R}, a - \text{пред. точка } D$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

$$\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \lambda_0$$

Тогда:

$$1. \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$$

4. Для случая  $Y = \mathbb{R}$  и для  $B \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$\frac{f}{g}$  задано на множестве  $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

$a$  — пр. точка  $D'$  по теореме о стабилизации знака  $\exists V(a) \forall x \in V(a) \cap D' \quad g(x) \neq 0$  — того же знака, что и  $B$ , т.е.  $g(x) \neq 0$

$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$  — пред. точка для  $D'$

*Доказательство.* По Гейне.  $\forall (x_n)$  :

- $x_n \rightarrow a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow^? A + B$  верно по теореме последовательности.

Аналогично прочие пункты, кроме 4.

$$f(x_n) \rightarrow A$$

$$g(x_n) \rightarrow B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \forall n > n_0 \quad g(x_n) \neq 0$$

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$  корректно задано при  $n > n_0$ . □

*Примечание.* Для  $\overline{\mathbb{R}}$

Если  $Y = \overline{\mathbb{R}}$ , можно “разрешить” случай  $A, B = \pm\infty$

Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения  $A \pm B, \lambda_0 A, \frac{A}{B}$  корректны.

Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \exists \delta_1 > 0 \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) \quad f(x) > E_1 \quad \forall E_2 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) \quad g(x) > E_2$$

Это доказательство не будет спрашиваться.

## 2 Компактные множества

**Теорема 6.** О простейших свойствах компактных множеств.  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$

1.  $K$  — комп.  $\Rightarrow K$  — замкн.,  $K$  — огр.
2.  $X$  — комп,  $K$  — замкн.  $\Rightarrow K$  — комп.

Доказательство. 1.  $?K$  — замкн.  $?K^c$  — откр.

$a \notin K$ , проверим, что  $\exists U(a) \subset K^c$

$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{2}\rho(x, a))$  — откр. покрытие

$K$  — комп.  $\Rightarrow \exists x_1 \dots x_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a))$  — открытое покрытие

$r := \min(\frac{1}{2}\rho(x_1, a)) \dots \frac{1}{2}\rho(x_n, a))$

$B(a, r)$  не пересекается ни с одним  $B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a)) \Rightarrow B(a, r) \subset K^c$

$?K$  — огр.

$b \in X$

$K \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(b, n) = X$

$K$  — комп.  $\Rightarrow K \subset \bigcup_{n=1}^m \Rightarrow K \subset B(b, \max(n_1 \dots n_m))$

2.  $?K$  — комп.

$\begin{cases} K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — откр.} \\ K \text{ — замкн., } K^c \text{ — откр.} \end{cases} \Rightarrow K^c \cup \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \text{ — откр. покрытие } X \Rightarrow$   
 $\Rightarrow X \subset (\text{может быть } K^c) \cup \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

□

**Лемма 1.** О вложенных параллелепипедах.  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \quad a_i \leq x_i \leq b_i\}$  — параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$  — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \emptyset$

Если  $\text{diam}[a^n, b^n] = \|b^n - a^n\| \rightarrow 0$ , тогда  $\exists! c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

Доказательство.  $\forall i = 1 \dots m \quad [a_i^1, b_i^1] \supset [a_i^2, b_i^2] \supset \dots \quad \exists c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n]. c = (c_1 \dots c_m)$  — общая точка всех параллелепипедов.

$|a_i^n - b_i^n| \leq \|a^n - b^n\| \rightarrow 0 \Rightarrow_{\text{т. Кантора}} \exists! c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists! c = (c_1 \dots c_m)$

□

**Лемма 2.**  $[a, b]$  — компактное множество в  $\mathbb{R}^m$   $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  — откp. в  $\mathbb{R}^m$

*Доказательство.* Докажем, что  $\exists$  кон.  $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) : [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Допустим, что не  $\exists$

$[a^1, b^1] := [a, b] \Rightarrow [a^1, b^1]$  нельзя покрыть кон. набором

$[a^2, b^2] :=$  делим  $[a^1, b^1]$  на  $2^m$  частей, берем любую “часть”, которую нельзя покрыть конечным набором  $G_\alpha$

$\vdots$

$$\text{diam} = [a^n, b^n] = \frac{1}{2} \text{diam}[a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} \text{diam}[a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0} \text{ — откp.}$$

$$\exists U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad \text{diam}[a^n, b^n] \ll \varepsilon$$

$$\text{и тогда } [a^n, b^n] \subset U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

□

*Примечание.*  $x_n \rightarrow a$

$\forall$  подпосл.  $n_k \quad x_{n_k} \rightarrow a$

*Примечание.*  $\{n_k\} \cap \{m_k\} = \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n_k} \rightarrow a \\ x_{m_k} \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow x_n \rightarrow a$$

**Определение.** Секвенциально компактным называется множество  $A \subset X : \forall$  посл.  $(x_n)$  точек  $A$   $\exists$  подпосл.  $x_{n_k}$ , которая сходится к точке из  $A$

**Теорема 7.** О характеристике компактов в  $\mathbb{R}^m$ .  $K \subset \mathbb{R}^m$ . Эквивалентны следующие утверждения:

1.  $K$  — замкнуто и ограничено
2.  $K$  — компактно
3.  $K$  — секвенциально компактно

*Доказательство.* Докажем  $1 \Rightarrow 2$

$K$  — огр.  $\Rightarrow K$  содержится в  $[a, b]$

$K$  — замкн. в  $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$  — замкн. в  $[a, b]$

Т.к.  $[a, b]$  — комп., по простейшему свойству компактов  $K$  — комп. □

*Доказательство.* Докажем  $2 \Rightarrow 3$

$\forall (x_n)$  — точки из  $K$ .

?сходящаяся последовательность

Если множество значений  $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  — конечно, то  $\exists$  сход. подпосл. очевидно.

Пусть  $D$  — бесконечно

Если  $D$  имеет предельную точку, то  $x_{n_k} \rightarrow a$

Если  $D$  — бесконечно и не имеет предельных точек,  $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$ , радиус такой, что в этом шаре нет точек  $D$ , кроме  $x$  (его может тоже не быть). Тогда  $\bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$  — открытое покрытие  $K$ . Так как каждый шар содержит 0 или 1 точку, конечное число шаров не может покрыть  $K$ , т.к. в  $K$  бесконечное число точек (т.к. бесконечное число различных значений  $D$ ). Таким образом, мы нашли открытое покрытие  $K$ , у которого нет конечного подпокрытия — противоречие.

Пусть  $a \in K$  — предельная точка. Возьмём из  $B(a, r_1)$  точку  $x_{n_1}$ . Возьмём  $r_2 < r_1$  и из соответствующего шара возьмём  $x_{n_2}$ . При  $r_n \rightarrow 0$   $x_{n_k} \rightarrow a$ .

Почему вблизи  $a$  будет точка из произвольной последовательности? □