1 Определения

1.1 Локальный максимум, минимум, экстремум

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ — **локальный максимум функции**, если

$$\exists U(x_0)\ \ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \le f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

Определение. **Экстремум** — точка минимума либо максимума.

1.2 ! Первообразная, неопределенный интеграл

$F, f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

F — **первообразная** f на $\langle a, b\rangle$

$$\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a, b\rangle$ — множество всех первообразных f:

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

1.3 Теорема о существовании первообразной

$f \in C^0(\langle a, b\rangle)$ тогда у f существует первообразная.

Теорема о существовании первообразной — следствие теоремы Барроу.

1.4 ! Таблица первообразных

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C, n \ne -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\Big(x + \sqrt{1+x^2}\Big) + C \text{ — длинный логарифм}$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

1.5 Равномерная непрерывность

$f : \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \;\; \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2.

1.6 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

$\mathcal{E}$ — множество всех ограниченных фигур в $\mathbb{R}^2$ (“фигура” = подмножество $\mathbb{R}^2$)

Площадь это $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ *(конечная аддитивность)*
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

$\sqcup$ — **дизьюнктное объединение**; если $x \in A_1$ и $x \in A_2$, то x “дважды $\in$” $A_1 \sqcup A_2$

Ослабленная площадь $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна: $E \subset D \Rightarrow \sigma E \leq \sigma D$
2. Нормирована
3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Отрезок вертикальный, потому что этого требует определение определенного интеграла.

1.7 ! Определенный интеграл

$f : [a, b] \to \mathbb{R}; f \geq 0$

$$\text{Под графиком } \textit{(ПГ)}(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b]; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, b]) - \sigma\Pi\Gamma(f_-, [a, b])$$

1.8 Положительная и отрицательная срезки

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

$f_+ := \max(f, 0)$ — **положительная срезка**

$f_- := \max(-f, 0)$ — **отрицательная срезка**

1.9 Среднее значение функции на промежутке

Среднее значение функции на промежутке:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$$

1.10 Кусочно-непрерывная функция

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **кусочно непрерывна**

f — непр. на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

1.11 Почти первообразная

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — **почти первообразная** кусочно непрерывной функции f:

F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$

$F := |x|$

1.12 Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

$Segm\langle a, b\rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b\rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a, b\rangle$

Функция промежутка $\Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

Аддитивная функция промежутка: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle \;\; \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

1.13 Плотность аддитивной функции промежутка

Плотность аддитивной функции промежутка: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — плотность Φ, если:

$$\forall \delta \in Segm\langle a, b\rangle \quad \inf_{x \in \delta} f(x) \cdot len_\delta \le \Phi(\delta) \le \sup f \cdot len_\delta$$

1.14 Выпуклая функция

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \le \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Примечание. f — выпуклая $\Leftrightarrow$ всякая хорда графика f расположена "выше" графика *(нестрого выше)* $\Leftrightarrow$ НГ$(f, \langle a, b\rangle)\{(x, y) : x \in \langle a, b\rangle \;\; y \ge f(x)\}$

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — **строго выпуклая**

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

1.15 Выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$

$A \subset \mathbb{R}^m$ — **выпуклое множество в** $\mathbb{R}^m$, если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$

Это определение с вики

1.16 Надграфик

Надграфик функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ это множество $\{(x, y) \mid x \in \langle a, b\rangle, y \ge f(x)\}$

1.17 Опорная прямая

$A \subset \mathbb{R}^2$ — вып. $l \subset \mathbb{R}^2$ — прямая

l — **опорная прямая** к A, если:

1. A содержится в одной полуплоскости относительно l
2. $l \cap A \neq \varnothing$

1.18 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — непр.

$\gamma(a)$ — начало; $\gamma(b)$ — конец

$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$; γ_i — коорд. функции

Если все $\gamma_i \in C^1[a, b]$, то γ — **гладкий путь**.

$C_\gamma := \gamma([a, b])$ — **носитель пути**.

Вектор скорости:

$$\gamma'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \lim \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t+\Delta t) - \gamma_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_m(t+\Delta t) - \gamma_m(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_m'(t) \end{pmatrix}$$

1.19 Длина гладкого пути

Длина пути — фукнция l, заданная на множестве гладких путей в $\mathbb{R}^m$, такая что:

1. $l \geq 0$
2. l — аддитивна: $\forall [a, b] \ \ \forall \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m \ \ \forall c \in (a, b) \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
3. $\forall \gamma, \tilde{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\tilde{\gamma}}$ — носители путей

   Если $\exists T : C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$ — сжатие: $(\forall M, M' \ \ \rho(T(M), T(M')) \leq \rho(M, M'))$, тогда $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. Нормировка: γ — гладкий путь, $\gamma(t) = vt + u; \ \ u, v \in \mathbb{R}^m$:

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

1.20 Формулы для длины пути: в $\mathbb{R}^m$, в полярных координатах, длина графика

1.20.1 В $\mathbb{R}^m$

$\gamma \in C^1([a,b] \to \mathbb{R}^m)$

Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$

1.20.2 В полярных координатах

Длина кривой $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$x = r(\varphi)\cos\varphi \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$$

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2 - 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi}$$

$$||\gamma'(\varphi)|| = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi$$

1.20.3 Длина графика

Длина графика $y = f(x), f \in C^1$ на отрезке $[a, b]$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \quad ||\gamma'(x)|| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

1.21 Вариация функции на промежутке

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$

$\tau = \{t_0 \ldots t_n\}$ — дробление отрезка.

Тогда **вариация функции** γ на отрезке $[a, b]$ это l:

$$l(\gamma) = \sup_\tau \Big\{ \sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \Big\}$$

1.22 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Дробление отрезка $[a, b]$ это разбиение отрезка на n частей следующим образом:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad [x_{i-1}, x_i]$$

Ранг *(мелкость)* дробления — длина самого длинного из отрезков дробления:

$$\tau = \{x_0 \ldots x_n\} \quad |\tau| = \max(x_i - x_{i-1})$$

Оснащение — множество точек $\{\xi_1 \ldots \xi_n\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

1.23 Риманова сумма

Интегральная *(риманова)* сумма для разбиения $\{x_i\}$, произвольной функции f и оснащения $\{\xi_i\}$ это следующая сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

1.24 Постоянная Эйлера

γ — **постоянная Эйлера**. ≈ 0.577

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

1.25 Допустимая функция

$f : [a, b) \to \mathbb{R} \quad -\infty < a < b \leq +\infty$

f **допустима**, если f — кусочно-непрерывна на $[a, A]$ $\forall A \in (a, b)$

1.26 ! Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

$$\Phi(A) := \int_a^A f$$

$$?\exists \lim_{A \to b-0} \Phi(A)$$

- Если да, то это **несобственный интеграл** $\int\limits_a^{\to b} f dx$.
- Если этот предел конечный, то тот несобственный интеграл **сходится**.
- Если этот предел бесконечный или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

1.27 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла

$$\lim_{A \to b-0} \int_a^A \text{ кон.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \Delta \in (a, b) \;\; \forall A, B \in (\Delta, b) \quad \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально из определения предела. □

1.28 Гамма функция Эйлера

Γ — **гамма-функция Эйлера**

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

1.29 ! Верхний и нижний пределы

- $y_n := \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$
- $z_n := \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$
- **Верхний предел** x_n: $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n := \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$
- **Нижний предел** x_n: $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n := \lim\limits_{n \to +\infty} z_n$

1.30 Частичный предел

Частичный предел вещественной последовательности x_n — предел вдоль подпоследовательности n_k:

$$n_k \to +\infty, n_1 < n_2 < \ldots \quad \lim x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$$

1.31 ! Абсолютно сходящийся интеграл, ряд

f — допустимая функция на $[a, b)$

$\int_a^b f$ — **абсолютно сходится**, если:

1. $\int_a^b f$ сходится
2. $\int_a^b |f|$ — сходится

Ряд A **абсолютно сходится**, если 1 и 2:

1. $\sum a_n$ сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.

1.32 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость

$a_1 + a_2 + \ldots$, $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ — **числовой ряд** ($a_i \in \mathbb{R}$) $\quad \forall N \in \mathbb{N} \quad S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — **частичная сумма** Если $\exists \lim_{N\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, ряд **сходится**, иначе ряд **расходится**.

1.33 N-й остаток ряда

$\sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ — N-й **остаток ряда**

1.34 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда

Критерий сходимости ряда Больцано-Коши:

$$\sum a_n \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall k > N \ \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально. □

1.35 Произведение рядов

$\sum a_k, \sum b_k$

$\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биекция, $\gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$

Произведение рядов A и B — ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$

1.36 Произведение степенных рядов

$x \in \mathbb{R}, x$ — фиксированный

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

Это называется произведение степенных рядов.

1.37 Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в $\mathbb{R}^m$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$$

$$\rho(x, y) := |x - y|$$

1.38 Окрестность точки в $\mathbb{R}^m$, открытое множество

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$ — открытый шар, r-окрестность точки a

a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

1.39 ! Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$, покоординатная сходимость

$\triangleleft x_n$ — посл. в $\mathbb{R}^m, a \in \mathbb{R}^m$

$$x_n \to a \Leftrightarrow \forall U(a) \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ x_n \in U(a)$$

Норма и скалярное произведение сохраняют сходимость:

$$x_n \to a, y_n \to b \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle a, b \rangle, |x_n| \to |a|$$

Сходимость функций:

$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

a — предельная точка O, $L \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x : 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

То же самое, но по Гейне:

$$\forall (x_k) : \begin{cases} x_k \in O \subset \mathbb{R}^m \\ x_k \to a \\ \forall k \ \ x_k \neq a \end{cases} \qquad f(x_k) \xRightarrow[k \to +\infty]{} L$$

Покоординатная сходимость:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq n : \lim_{x \to a} f(x)_i = L_i$$

$$x_k \to a \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq m : x_i^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} a_i$$

1.40 ! Предельная точка, замкнутое множество, замыкание

a — **предельная точка** множества D, если $\forall \dot{U}(a) \ \ \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$

D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

Замыканием множества D называется $\overline{D} = D \cup$(множество предельных точек D)

1.41 Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

K **компактно**, если $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} \underbrace{G_\alpha}_{\text{откр.}} \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

В $\mathbb{R}^m$ комп. $\Leftrightarrow$ замкн. и огр.

Секвенциальная компактность: $\forall (x_n), x_n \in K \Rightarrow \exists n_k, a \in K : x_{n_k} \to a$

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса: если в $\mathbb{R}^m$ (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

1.42 Координатная функция

$\triangleleft F : X \to \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, то $F_1(x) \ldots F_m(x)$ — **координатные функции** отображения F

1.43 Двойной предел, повторный предел

$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — пр. точка D_1, b — пр. точка D_2

$(D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) \subset D \quad f : D \to \mathbb{R}$

$\forall x \in D_1 \setminus \{a\}\ \exists$ кон. $\varphi(x) = \lim\limits_{y \to b} f(x, y)$

Если $\exists \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$ — это **повторный предел**.

Двойной предел:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall W(A)\ \ \exists U(a), V(b)\ \ \forall x \in \dot{U}(a), \forall y \in \dot{V}(b) \quad f(x, y) \in W(A)$$

1.44 Предел по направлению, предел вдоль пути

Предел по направлению $l, |l| = 1$:

$$\lim_{t \to 0+0} f(a + t\vec{l})$$

Предел вдоль пути *(непрерывного)* $\gamma : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}^m$ **функции** $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma(t))$$

1.45 ! Предел отображения (определение по Коши и по Гейне)

Дано выше. (1.39, стр. 11)

1.46 Линейный оператор

Линейное отображение = линейный оператор

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n - \text{лин.} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^m\ \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

1.47 ! Отображение бесконечно малое в точке.

Бесконечно малое отображение $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

x_0 — предельная точка E

φ — бесконечно малое отображение при $x \to x_0$ $\varphi(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$

1.48 $o(h)$ при $h \to 0$

$o(h)$ (оно же $o(|h|)$)

$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, 0 — предельная точка E

$\varphi(h) = o(h)$ при $h \to 0$, если $\frac{\varphi(h)}{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0$

По-другому: $\exists \alpha : E \to \mathbb{R}^l$ — бесконечно малое при $h \to 0$:

$$\varphi(h) = |h|\alpha(h)$$

1.49 ! Отображение, дифференцируемое в точке

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, a \in IntE$

F — дифф. в точке a, если:

$$\exists \text{ лин. оп. } L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \ \ \exists \text{ бесконечно малое } \alpha : E \to \mathbb{R}^l :$$

$$F(a+h) = F(a) + Lh + |h|\alpha(h), h \to 0$$
$$F(a+h) = F(a) + Lh + o(h)$$
$$x := a+h$$
$$F(x) = F(a) + L(x-a) + |x-a|\alpha(x-a)$$

1.50 ! Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал

Оператор L из определения — **производный оператор** отображениия F в точке a (“производная”), обозначается $F'(a)$.

Матрица $F'(a)$ — **матрица Якоби** F в точке a

Выражение $F'(a)h$ называется **дифференциалом** отображения F в точке a.

Это понимают как:

1. Производный оператор $h \mapsto F'(a)h$
2. Отображение $E \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \quad (x,h) \mapsto F'(x) \cdot h$

1.51 ! Частные производные

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE$

Фиксируем $k \in \{1 \dots m\}$ $\varphi_k(t) := f(a_1, a_2 \dots t \dots a_m)$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varphi_k(a_k+h)-\varphi_k(a_k)}{h} = \varphi'_k(a_k)$ называется **частной производной** функции f в точке a

1.52 ! Бесконечное произведение

$\prod\limits_{i=1}^{+\infty} p_n : \prod_N := \prod\limits_{n=1}^{N} p_n \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \prod_N = P$

- $P \in (0, +\infty) \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{+\infty} p_n$ сходится к P
- $P = +\infty \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{+\infty} p_n$ расходится к $+\infty$
- $P = 0 \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{+\infty} p_n$ расходится к 0
- $\nexists \lim \prod_n$: расходится

1.53 ! Классы $C^r(E)$

$E \subset \mathbb{R}^m$, откр.

Класс $C^r(E), r \in \mathbb{N}$:

$f \in C^r(E)$, если у f существуют все частные производные порядка $\leq r$ на всём E и они непрерывны.

$C(E)$ — непр. функции $= C^0(E)$

$C(E) \overset{\neq}{\supset} C^1(E) \overset{\neq}{\supset} C^2(E) \dots$

1.54 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс (для $\mathbb{R}^m$) — вектор $(k_1, k_2 \dots k_m)$, $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- $|k| := \sum_{i=1}^m k_i$ — **высота** мультииндекса
- $k! = k_1!k_2! \dots k_m!$
- $x \in \mathbb{R}^m \quad x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$
- $f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}$

2 Теоремы

2.1 Критерий монотонности функции. Следствия

$f \in C(\langle a, b \rangle)$, дифф. в (a, b)

Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$

Доказательство. "$\Rightarrow$" По определению f' $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

"$\Leftarrow$" $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ □

Следствие 0.1. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b\rangle) -$ дифф. на (a, b), $f' \equiv 0)$

Следствие 0.2. $f \in C\langle a, b\rangle$, дифф. на (a, b). Тогда:

f строго возрастает $\Leftrightarrow$ ① и ②

① $f' \geq 0$ на (a, b)

② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. "$\Rightarrow$" очевидно

"$\Leftarrow$" По лемме Ферма. □

Следствие 0.3. О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b) \;\; f'(x) \leq g'(x)$

Тогда $\forall x \in [a, b\rangle \;\; f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f -$ возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ □

2.2 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f -$ дифф. на (a, b)

Тогда:

1. $x_0 -$ лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
2. $f - n$ раз дифф. в x_0

   $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

   Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет. :} & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет. :} & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

   Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет. :} & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет. :} & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = \mathrm{T}_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x, близких к x_0:

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

Тогда при чётном n

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном n

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

2.3 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \to Y, X$ — секвенциальный компакт, f — непр. на X

Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$$
$$\delta := \frac{1}{n} \ \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \to \tilde{x}, \overline{x}_{n_k} \to \tilde{\tilde{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq \lim_{n \to \infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}), f(\overline{x}_{n_k}) \to f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$ □

2.4 Теорема Брауэра о неподвижной точке

$f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$, непр.

Тогда $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1. $f : [0, 1]^m \to [0, 1]^m$ — непр.
2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0, 1)$ — непр.
3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \to S(0, 1)$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0, 1]^2$

От противного — пусть $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0

По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in [0, 1] \ \rho(f(x), x)) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для f: для этого $\varepsilon \ \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \overline{x} : ||x - \overline{x}|| < \delta \quad ||f(x) - f(\overline{x})|| < \varepsilon$$

Можно писать не $|| \cdot ||$, а ρ.

Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску $Hex(n + 1, n + 1)$, где $n + 1$ — число узлов.

Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$

$K(V) := \min\{i \in \{1, 2\} : |f_i(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$ По лемме позиция выигрышна хотя бы для одного игрока. Рассмотрим случай, когда она выигрышна для белого игрока.

В точке $A = (0, k) \rightsquigarrow (0, \frac{k}{n})$

$$\left| f_1(\frac{A}{n}) - \frac{A_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

$A_1 = 0; f_1(\frac{A}{n}) \geq 0 \Rightarrow$ при $v = A$

$$f_1(\frac{v}{n}) - \frac{v_1}{n} \geq 0$$

В точке $B = (n, l) \rightsquigarrow (1, \frac{l}{n})$

$$\left| f_1\left(\frac{B}{n}\right) - \frac{B_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

При $v = B$

$$f_1\left(\frac{v}{n}\right) - \frac{v_1}{n} \geq -\varepsilon$$

$\square$

Надо дописать

2.5 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда

1. Линейность:

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x)dx\right)|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}:$

$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b\rangle$; $f'g$ — имеет первообр.

Тогда fg' имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. $(F+G)' = F' + G' \quad (\alpha F)' = \alpha F'$

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$
3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

$\square$

2.6 ! Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

$f, g \in C[a, b] \quad f \le g$. Тогда

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \le \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$
$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \ge \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$
$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \le \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Теорема о среднем: $f \in C[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b - a)$

Доказательство.

$$\min f(b - a) \le \int_a^b f \le \max f(b - a)$$
$$\min f \le \frac{1}{b - a} \int_a^b f \le \max f$$
$$f(c) := \frac{1}{b - a} \int_a^b f$$

Такое c существует, т.к. $f \in C[a, b]$ □

2.7 Теорема Барроу

$f \in C[a, b] \quad \Phi$ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [a, b] \quad y > x, y \le b$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^y f + \int_y^x f)}{y - x} = \frac{\int_x^y f}{y - x} \underset{\substack{\text{т.о.ср.} \\ \exists c \in [x, y]}}{=} \frac{f(c)(y - x)}{y - x} = f(c) \xrightarrow[y \to x+0]{} f(x)$$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{x - y} \int_y^x f = f(c) \xrightarrow[y \to x-0]{} f(x)$$

□

2.8 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

$f \in C[a, b] \quad F$ — первообр. f

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. $\Phi(x) = \int_a^x f$ — первообр.

$\exists C : F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

Для кусочно-непрерывных:
f — кус. непр. на $[a, b]$, F — почти первообразная

Доказательство.

$$\int\limits_a^b f = \sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum F(t)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \sum F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$$

□

2.9 Лемма об ускоренной сходимости

1. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \quad a$ — предельная точка D

   $\exists U(a)$: при $x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$

   Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

   Тогда
   $$\forall x_k \to a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \to a \quad (y_k \neq a, y_k \in D)$$
   такое, что
   $$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

   Таким образом, $g(y_k) \to 0$ быстрее, чем $g(x_k) \to 0$

2. То же самое, но $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

Доказательство. 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)| \frac{1}{k}$$

$\varepsilon := |g(x_k)|$

$$k=1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < 1 \quad \left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < 1$$

$$k=2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{2} \quad \left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

2. (a) Частный случай: Пусть $g(x_n)$ возрастает. Берем $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}$ или

   $|g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$

   $y_k := x_{m-1} \Rightarrow |f(y_k)| \leq \sqrt{g(x_k)} \;\; |g(y_k)| \leq \sqrt{g(x_k)}$

   $$\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

   $$\left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

   Зачем нужно возрастание?

   (b) Общий случай: $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1\ldots\} \quad \tilde{g}(x_k) \to +\infty$

   $\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$. Как в пункте (a) построим y_k

   $$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

   $$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{g(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \to 0$$

$\square$

2.10 Правило Лопиталя

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$

f, g — дифф., $g' \neq 0$ на (a, b)

Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to a+0]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}\right\}$

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — сохр. знак $\Rightarrow g$ — монотонна.

Для $\frac{0}{0}$ $\quad g(x) \neq 0$ в (a, b)

По Гейне $x_k \to a \ \ (x_k \neq a, x_k \in (a, b))$

Выберем y_k по лемме об ускоренной сходимости.

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} - \text{т. Коши}$$

$$f(x_k) - f(y_k) = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}(g(x_k) - g(y_k))$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \to 0 \quad \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \to 0$$

$x_k \to a \quad y_k \to a \quad \xi_k \to a$ □

2.11 Теорема Штольца

“Неправильное” сложение дробей:

$a, b, c, d > 0$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Доказательство.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ba - ba + bc - ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) > 0$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} = \frac{b}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) > 0$$

□

Теорема Штольца.

Это дискретная версия правила Лопиталя.

$y_n \to 0, x_n \to 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$

Примечание. Аналогичное верно, если $x_n \to +\infty, y_n \to +\infty$

Доказательство.

1. $a > 0 \quad (a \neq +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; [\varepsilon < a] \;\; \exists N_1 \;\; \forall n > N_1 \;\; a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению:*(оно применимо, т.к. все дроби положительные)*

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \to +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же
3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же
4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

   Для $a = +0 \quad \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$

$\square$

2.12 Пример неаналитической функции

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0$$

$f'(0) =?$

Следствие из теоремы Лагранжа:

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = A \text{ тогда } f'(x_0) = A$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim 2 \frac{\frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^2} = \lim \frac{4}{3} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5} = \text{ больно, не надо так}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{\frac{-6}{x^4}}{\frac{-2}{x^3}\, e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{\frac{3}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{\frac{-3}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}\, e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{3}{2} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n \left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что многочлен Тейлора этой функции при $x \to 0$ не становится точнее при увеличении числа слагаемых, т.к. они все $= 0$. Таким образом, эта функция по определению неаналитическая.

2.13 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

Неравенство Чебышева

$f, g \in C[a, b]$ монот. возр.

$$I_f := \frac{\int_a^b f}{b - a}$$

Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int\limits_a^b f \int\limits_a^b g \leq (b-a) \int\limits_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a, b] : x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y), g(x) \geq g(y)$

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a, b]$ и делим на $b - a$:

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a, b]$ и делим на $b - a$:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

Дискретное неравенство Чебышева

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \frac{1}{n}\left(\sum b_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \ldots n - \text{задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \ldots b_i$$

$$I_f I_g \leq I_{fg}$$

□

2.14 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

Тривиально из свойств неопределенного интеграла: Дано выше. (2.5, стр. 18)

2.15 Иррациональность числа пи

$$H_n := \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt = \left[\begin{array}{ll} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n & g = \sin t \\ df = -2n\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} tdt & dg = \cos tdt \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t\sin t =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t & g = -\cos t \\ df = \left(-2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} t^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1}\right) dt & dg = \sin tdt \end{array}\right] =$$

$$= \Bigg[df = \Bigg(- 2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} t^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} +$$

$$+2(n-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} - 2(n-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\Bigg)dt\Bigg] =$$

$$= \left[df = \left((2n-2)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - (n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\right) dt\right] =$$

$$= \left[df = \left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - (n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\right) dt\right] =$$

$$= 0 + \frac{2}{(n-1)!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t(-\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\right)\cos tdt =$$

$$= (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

Число π — иррационально

Доказательство. Пусть $\pi = \frac{p}{q}$; H_n задано выше

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)\cos t = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt = 2t(-\cos t)\Big|_{\dots}^{\dots} + 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t = 4$$

$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2)$ — многочлен с целыми коэффициентами, степень $\leq n$

$$q^{2n} P_n\left(\frac{p^2}{q^2}\right) = \text{ целое число } = q^{2n} H_n > 0 \Rightarrow q^{2n} H_n \geq 1$$

$$1 \leq \frac{q^{2n}}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt \leq \frac{q^{2n} 4^n}{n!}\pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Противоречие. □

2.16 ! Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — непр. $\quad \Phi : Segm\langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

f — плотность Φ

Тогда $\Phi([p, q]) = \int\limits_p^q f, \quad \forall [p, q] \in Segm\langle a, b \rangle$

Доказательство.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , x = a \\ \Phi([a, x]) & , x > a \end{cases} \text{ — первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p, q]) = \Phi[a, q] - \Phi[a, p] = F(q) - F(p) = \int\limits_p^q f$$

Докажем утверждение:

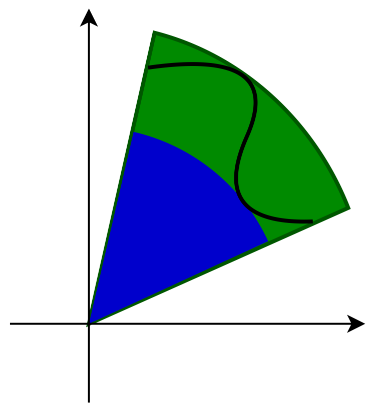
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a, x+h] - \Phi[a, x]}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} = [0 \leq \Theta \leq 1] = f(x + \Theta h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$$

□

2.17 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

$\Phi([\alpha,\beta]) := S_{\text{сектор}(\alpha,\beta)} \quad g(\varphi) := r^2(\varphi)/2$

$\forall\Delta \in Segm \ \ |\Delta|\inf_\Delta g \le \Phi(\Delta) \le |\Delta|\sup_\Delta g$ очевидно выполняется, т.к. $|\Delta|\inf_\Delta g$ — площадь синего сектора, а $|\Delta|\sup_\Delta g$ — площадь зеленого:



По теореме о вычислении аддитивной функции отрезка по плотности:

$$\Phi([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta g(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

$\triangleleft x(t), y(t)$ — кривая в $\mathbb{R}^2$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} r^2(\varphi(t))d\varphi(t) = \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} r^2(t)\varphi'(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}^2 \left(\operatorname{arctg}\frac{y(t)}{x(t)}\right)' dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(x^2(t)+y^2(t)\right) \frac{1}{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(x^2(t)+y^2(t)\right) \frac{1}{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} \frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(x^2(t)+y^2(t)\right) \frac{x^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)} \frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(y'(t)x(t)-y(t)x'(t)\right)dt$$

2.18 Изопериметрическое неравенство

Изопериметрическое неравенство

$G \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое замкнутое множество (ограниченное)

$diamG = \sup\{\rho(x,y),\ x,y \in G\}$

$diamG \le 1$

Тогда $\sigma(G) \le \frac{\pi}{4}$

Доказательство. Пойдём от некоторой точки на границе G под углом φ внутрь фигуры по прямой. В какой-то момент мы встретим другую граничную точку. Назовем этот процесс $r(\varphi)$ *(возвращает длину пути)*. Очевидно, что $r^2(\varphi)+r^2(\varphi-\frac{\pi}{2}) \leq (diamG)^2 \leq 1$

$$\sigma(G)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r^2(\varphi)d\varphi+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(r^2(\varphi)+r^2\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right)d\varphi \leq \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1d\varphi=\frac{\pi}{4}$$

□

2.19 Лемма о трех хордах

$f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f — вып. $\langle a,b\rangle$
2. $\forall x_1,x_2,x_3 \in \langle a,b\rangle\ \ x_1<x_2<x_3 \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Доказательство. Левое $\Leftrightarrow f(x_2)(x_3-x_1) \leq f(x_3)(x_2-x_1)+f(x_1)(x_3-x_1-(x_2-x_1))$

$$f\left(x_3\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}+x_1\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)=f(x_2) \leq f(x_3)\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}+f(x_1)\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$$

□

2.20 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

f — вып. $\langle a,b\rangle$. Тогда $\forall x \in (a,b)\ \ \exists f'_+(x), f'_-(x)$ и $\forall x_1,x_2 \in (a,b), x_1<x_2$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Доказательство. $f'_+(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1+0}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ — монотонно убывающая функция от x

Фиксируем $x_0<x_1$. По лемме о трех хордах $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ □

2.21 Следствие о точках разрыва производной выпуклой функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — вып.

Тогда f — дифф. на (a, b) за исключением, может быть, счетного множества точек.

Доказательство. $\forall x \ \exists f'_+(x), f'_-(x)$

$f'_\pm$ возрастает

$f'_-(x) = f'_+(x) \Rightarrow f$ дифф. в x

$f'_-(x) < f'_+(x) \Rightarrow f$ не дифф. в x

Тогда x — точка скачка для f'_+, f'_-, их НБСЧ, т.к. f^+ и f^- возрастают. □

2.22 Описание выпуклости с помощью касательных

f — вып. на $\langle a, b\rangle$. Тогда график f расположен не ниже любой касательной

т.е. $\forall x, x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Доказательство. "$\Rightarrow$"

Если $x > x_0 \quad f'(x_0) \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, это неравенство 2. из предыдущей теоремы

$x < x_0$ аналогично

"$\Leftarrow$" фиксируем x_0. Берем $x_1 < x_0 < x_2$

$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$; $f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$, т.е. $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$. Это верно по лемме. □

2.23 Дифференциальный критерий выпуклости

1. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифф. в (a, b)

   Тогда f — вып. $\Rightarrow f'$ возр. на (a, b)

   Если f — строго выпуклая $\Rightarrow f'$ строго возрастает

2. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дважды дифф. на (a, b)

   f — вып. $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ на (a, b)

   (a) "$\Rightarrow$" $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \quad (x_1 < x_2)$

   "$\Leftarrow$" $?f$ вып. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

   Теперь утверждение 2. очевидно.

2.24 Обобщенная теорема о плотности

Обобщенная теорема о плотности.

$\Phi : Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр.

$\forall \Delta \in Segm\langle a, b\rangle\ \ \exists m_\Delta, M_\Delta$ — не точный минимум/максимум

1. $m_\Delta l_\Delta \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta l_\Delta$
2. $m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$ при всех $x \in \Delta$
3. $\forall$ фикс. $x \quad M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{“}\Delta \to x\text{”}]{} 0$

   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \Delta : l_\Delta < \delta \quad |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда $\forall [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle \quad \Phi([p, q]) = \int\limits_p^q f$

Доказательство. $F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi[a, x], & x > a \end{cases}$

Докажем, что F — первообразная f.

Фиксируем x

По 1.:

$$m_\Delta \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} \le M_\Delta$$

По 2.:

$$m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \le M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\text{“}\Delta \to x\text{”}]{} 0$$

Мы не можем написать “$\Delta \to x$” без кавычек, т.к. Δ — не число, но “$\Delta \to x$”$\Leftrightarrow h \to 0$

Таким образом,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

□

2.25 Вычисление длины гладкого пути

$\gamma \in C^1([a,b] \to \mathbb{R}^m)$

Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt$

Доказательство. Будем считать $\gamma' \neq 0$, γ — инъективная.

$\Phi : [p,q] \subset [a,b] \mapsto l(\gamma|_{[p,q]})$ — адд. ф-ция промежутка.

Докажем, что $f(t) = ||\gamma'(t)||$ — плотность Φ

$$\Delta \subset [a,b] \quad m_i(\Delta) := \min_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)| \quad M_i(\Delta) = \max |\gamma_i'(t)|$$

$$m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i(\Delta)^2} \quad M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i(\Delta)^2}$$

Докажем, что $m_\Delta l_\Delta \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta l_\Delta$

$\tilde{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — лин. путь

$\tilde{\gamma}(t) = \vec{M} \cdot t$, где $\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1(\Delta) & \dots & M_m(\Delta) \end{pmatrix}$

$T : C_{\gamma|_\Delta} \to C_{\tilde{\gamma}} \quad \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$

Утверждение: T — растяжение.

$$||\vec{M}q - \vec{M}p|| = (q-p)||\vec{M}|| = (q-p)M_\Delta$$

$$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma_i'(\bar{t}_i)^2 (t_0 - t_1)^2} \le ||\vec{M}|| \cdot |t_0 - t_1| =$$

$$= \rho(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t_1)) = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1)))$$

□

Доказательство. (альтернативное).

Покажем, что $\int ||\gamma'||$ удовлетворяет всем требованиям длины гладкого пути:

1. $\forall \gamma \;\; l(\gamma) \ge 0$ — очевидно, т.к. $||\gamma'|| \ge 0$
2. Линейность: очевидно по линейности определенного интеграла.

3. Сжатие: $\exists T : C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$
$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$
$$||\gamma'(t)|| = \lim_{h\to 0} \frac{||\gamma(t+h), \gamma(t)||}{|h|}$$
$$||\gamma'(t)|| = \lim_{h\to 0} \frac{\rho(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|} \quad ||\tilde{\gamma}'(t)|| = \lim_{h\to 0} \frac{\rho(\tilde{\gamma}(t+h), \tilde{\gamma}(t))}{|h|}$$
$$\rho(\gamma(t+h), \gamma(t)) \geq \rho(\tilde{\gamma}(t+h), \tilde{\gamma}(t)) \Rightarrow ||\gamma'(t)|| \geq ||\tilde{\gamma}'(t)|| \Rightarrow l(\gamma) \geq l(\tilde{\gamma})$$

4. Нормировка. $\lhd \gamma : \gamma(t) = \vec{u} + \vec{v}t$
$$l(\gamma) = \int_a^b ||\vec{v}||dt = ||\vec{v}||(b-a)$$
$$\rho(\gamma(a), \gamma(b)) = ||\vec{u} + \vec{v}a - \vec{u} - \vec{v}b|| = ||\vec{v}(a-b)|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} v_i^2 (b-a)^2} = (b-a)||\vec{v}||$$

$\square$

2.26 Объем фигур вращения

Определение. $\lhd A \in \mathbb{R}^2$ — фигура в I квадранте.

Вращение A:

1. по оси $x : A_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in A\}$
2. по оси $y : A_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + z^2}, y) \in A\}$

Для непр. $f : [a, b] \to \mathbb{R}, c \mapsto \tilde{c} \geq 0$:
$$\Phi(\Delta) = V(\text{ПГ}(f, \Delta)_x)\textit{(или } y\textit{)}$$

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., $f \geq 0$

$\Phi_x(\Delta) =$ "объем фигуры вращения вокруг оси OX"

$\Phi_y(\Delta) =$ "объем фигуры вращения вокруг оси OY"

Тогда : $\forall \Delta = [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle$:

1. $\Phi_x[p, q] = \pi \int\limits_p^q f^2(x)dx$

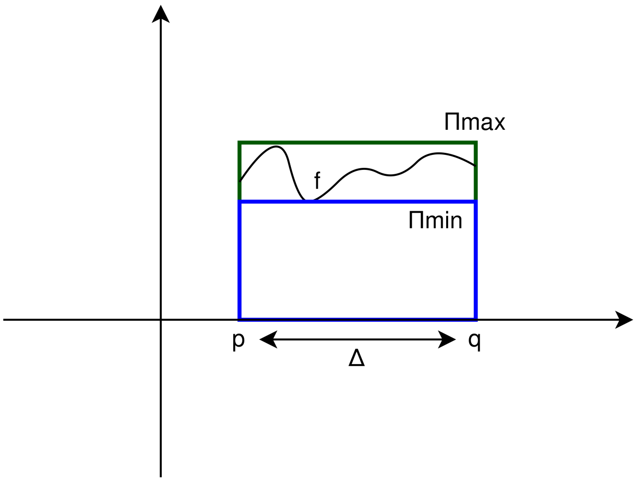
2. $\Phi_y[p, q] = 2\pi \int\limits_p^q x f(x) dx$

Доказательство. 1. Это — упражнение, оно не использует ничего умного.

На лекции было сказано, что это доказывается через плотность аналогично площади криволинейного сектора.

2. Мы знаем, что объем цилиндра $= S(\text{основание}) \cdot h$.

Для оценки $\Phi(\Delta)$ найдем прямоугольник, который является минимальным по площади сечения и максимальный прямоугольники: Π_{min} и Π_{max}.



Покажем, что $2\pi x f(x)$ подходит под обобщенную теорему о плотности для Φ:

$$V((\Pi_{\max})_y) \le \Phi(\Delta) \le V((\Pi_{\max})_y)$$

$$V((\Pi_{\max})_y) = S_{\text{кольца}} \max_{x\in[p,q]} f = \pi(q-p)(q+p) \max_{x\in[p,q]} f \le \pi(q-p) \overbrace{\max_{x\in[p,q]} 2x}^{=2q \ge q+p} \max_{x\in[p,q]} f$$

$$V((\Pi_{\min})_y) \ge \pi \min 2x(q-p) \min f$$

$$M_\Delta := \pi \max_{x\in[p,q]} 2x \max_{x\in[p,q]} f(x) \quad m_\Delta := \pi \min_{x\in[p,q]} 2x \min_{x\in[p,q]} f(x)$$

На лекции было дано m_Δ и M_Δ без π.

Все три условия теоремы очевидно выполнены:

(a) $m_\Delta(q-p) \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta(q-p)$

(b) $m_\Delta \le 2\pi x f(x) \le M_\Delta \quad \forall x \in \Delta$

(c) $\pi(\max f \max 2x - \min f \min 2x) \xrightarrow[\text{“}\Delta\to x\text{”}]{} 0$

□

2.27 ! Интеграл как предел интегральных сумм

$f \in C[a, b]$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \text{дробление } \tau = \{x_0 \dots x_n\} : |\tau| < \delta\ \forall \text{оснащение } \xi_i :$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности на компакте.

$[a, b]$ — компакт, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$$

По двойной бухгалтерии заменим ε на $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, \overline{x} \in [a, b] : |x - \overline{x}| < \delta \quad |f(x) - f(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Разобьем интеграл на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \right)$$

Запишем $(x_i - x_{i-1})$ в виде интеграла $\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))dx \right| \le \sum \left| \int \right| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f(x) - f(\xi_i))dx| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) = \varepsilon$$

□

2.28 Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников

$f \in C^2[a, b]$ $x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b$ $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$ $\xi_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Тогда

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \le \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| dx$$

Доказательство.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)d(x-x_{i-1}) + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)d(x-x_i) =$$

$$= f(x)(x-x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x-x_{i-1})dx + f(x)(x-x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x-x_i)dx = (*)$$

Заметим, что $\xi_i - x_{i-1} = x_i - \xi_i$, поэтому $f(x)(x-x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} + f(x)(x-x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$$(*) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \Big(f'(x)\frac{(x-x_{i-1})^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{\xi_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x)(x-x_{i-1})^2 dx +$$

$$+ f'(x)\frac{(x-x_i)^2}{2}\Big|_{\xi_i}^{x_i} - \frac{1}{2}\int_{\xi_i}^{x_i} f''(x)(x-x_i)^2 dx\Big) =$$

$$= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 + \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\varphi(x)dx$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x-x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ (x-x_i)^2, & x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}$$

Итого:

$$\int_a^b f(x) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\varphi(x)dx$$

$$\left|\int - \sum\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f''(x)|\varphi(x)dx$$

$$\max_{x\in[a,b]} \varphi(x) \overset{\text{достигается на отрезке длины } \delta}{=} \frac{\delta^2}{4}$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b |f''(x)|\varphi(x)dx \le \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''|$$

$\square$

2.29 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера-Маклорена

2.29.1 Теорема о формуле трапеций

$f \in C^2[a,b], \tau, \delta = |\tau|$

Тогда

$$\left|\int_a^b f dx - \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})\right| \le \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''|$$

Доказательство. Берем $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)d(x-\xi_i) = f(x)(x-\xi_i)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x-\xi_i)dx =$$

$$= (f(x_i)+f(x_{i-1}))\frac{x_i-x_{i-1}}{2} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)d((x-x_{i-1})(x_i-x)) = (*)$$

Проверим, что замена выражения под дифференциалом верная:

$$((x-x_{i-1})(x_i-x))' = (-x^2+x(x_i+x_{i-1})-x_{i-1}x)' = -2\left(x-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)$$

Действительно верно.

$$\psi(x) := (x-x_{i-1})(x_i-x)$$

$$(*) = (f(x_i)+f(x_{i-1}))\frac{x_i-x_{i-1}}{2} + \frac{1}{2}f'(x)(x-x_{i-1})(x_i-x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi(x)dx$$

$$\left|\int - \sum\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f''|\psi(x)dx$$

$$\max\psi = \frac{\delta^2}{4}$$

□

2.29.2 Формула Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}, f \in C^2[m,n]$. Тогда

$$\int_m^n f(x)dx = \left(\sum_{i=m}^{n}\right)' f(i) - \frac{1}{2}\int f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx$$

$'$ означает, что крайние слагаемые берутся с весом $\frac{1}{2}$, $\{x\}$ — дробная часть x

Доказательство. Это очевидно по формуле трапеций: $x_i := i$

$$\int_m^n f(x)dx = \sum_{i=m+1}^{n}\frac{f(i)+f(i-1)}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\psi(x)$$

$$\psi(x) \overset{\text{def}}{=} (x-x_{i-1})(x_i-x) = (x-i+1)(i-x) = (x-i+1)(1-(x-i+1)) = \{x\}(1-\{x\})$$

$f(n)/2$ и $f(m)/2$ в сумму попадают только 1 раз, остальные — 2 раза, как и в искомой формуле. □

2.30 Асимптотика степенных сумм

$p > -1 \quad f(x) = x^p$

$$1^p + 2^p + \dots n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{2}\int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) =$$

$\frac{1}{2}1^p + \frac{1}{2}n^p$ добавлены, чтобы не писать слева деление крайних слагаемых на 2.

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1})) = (*)$$

Откуда появилось $\mathcal{O}$? $\{x\}(1-\{x\}) < 1 \Rightarrow \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\}) \le C(n^{p-1}-1)$, C — некоторая константа.

Занесем константы под $\mathcal{O}$:

$$(*) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

2.31 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$]p = -1 \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) = (*)$$

$$\int_1^n x^{-3}\{x\}(1-\{x\}) \le \frac{1}{4}\int_1^n \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}\frac{-1}{\alpha^2}\bigg|_1^n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{8}$$

$$(*) = \ln n + \gamma + o(1) \quad \gamma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$$

2.32 Формула Валлиса

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$$

Вывод формулы Валлиса:

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{bmatrix} u = \sin^{n-1} x & du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (n-1)\sin^{n-2} x dx =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-sin^2x)\sin^{n-2}x=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}I_{n-6}=\ldots=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n-\text{чёт.}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}1, & n-\text{нечет.}\end{cases}$$

$$\sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}x\le\sin^{2k-1}x$$

Проинтегрируем по $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\le\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}\le\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}\le\frac{\pi}{2}\le\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k}$$

Правая часть $-$ левая часть $=\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)=\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k}\frac{1}{2k+1}\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{2k}\xrightarrow{k\to+\infty}$

Таким образом, левая и правая части стремятся друг другу и зажимают $\pi/2$.

2.33 Формула Стирлинга

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}n^ne^{-n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi}$$

$$]f(x)=\ln x\quad \ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n=\int_1^n\ln x dx+\frac{\ln n}{2}-\frac{1}{2}\int_1^n\frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}dx=$$

$$=n\ln n-n+\frac{\ln n}{2}+C_1+o(1)$$

$$\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n=\ln n!$$

$$n!=e^{n\ln n-n+\frac{\ln n}{2}+C_1+o(1)}$$

$$n!=n^ne^{-n}\sqrt{n}e^{C_1+o(1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}Cn^ne^{-n}\sqrt{n}$$

Найдём C.

$$\sqrt{\pi}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}\frac{1}{\sqrt{k}}=$$

Домножим дробь на числитель:

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2k)^2}{(2k)!}=$$

Вынесем 2 из каждого множителя в числителе:

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$$

Замена на эквивалент:

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k C k^k e^{-k}\sqrt{k})^2}{C(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$C = \sqrt{2\pi}$$

2.34 Простейшие свойства несобственного интеграла

Критерий Больцано-Коши

$$\lim_{A\to b-0} \int_a^A \text{ кон.} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\Delta \in (a,b) \ \forall A, B \in (\Delta, b) \quad \left|\int_A^B f\right| < \varepsilon$$

Аддитивность по промежутку

f — допустима. $[a,b) \quad c \in (a,b)$

Тогда $\int_a^{\to b} f$ и $\int_c^{\to b} f$ — сходятся/расходятся одновременно и, если сходятся, $\int_a^{\to b} f = \int_a^c f + \int_c^{\to b} f$

Берем $A > c$ $\int_a^A = \int_a^c + \int_c^A$

Следствие 0.4. f — допустима. $[a,+\infty)$, $\int_a^{+\infty} f$ — сходится. Тогда

$$\int_A^{+\infty} f \xrightarrow{A\to+\infty} 0$$

Это называется “хвост”.

Линейность

f, g — допустима $\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ — сход.

$\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда $\lambda f, f \pm g$ — допустима b $\int_a^{\to b} \lambda f, \int_a^{\to b} f \pm g$ — сходятся.

$$\int_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int_a^{\to b} f \qquad \int_a^{\to b} f \pm g = \int_a^{\to b} f \pm \int_a^{\to b} g$$

Доказательство. Тривиально. □

Интегрирование неравенств

f, g — доп., $\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ — существуют в $\overline{\mathbb{R}}$

$f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^{\to b} f \leq \int_a^{\to b} g$$

Очевидно: $\int_a^A f \leq \int_a^A g, A \to b - 0$

Интеграл произведения

f, g — дифф. $[a, b)$; f', g' — допустимы. Это эквивалентно $f, g \in C^1[a, b)$.

Тогда*

$$\int_a^{\to b} fg' = fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f'g$$

* значит, что если два из трех пределов существуют, то существует третий и выполняется равенство.

Интеграл композиции

$\varphi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B\rangle, \varphi \in C^1$

$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, f$ — непр., $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда*

$$\int_\alpha^{\to\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\to\varphi(\beta-0)} f(x)dx$$

Примечание. f — кусочно непрерывна на $[a, b]$. f можно также рассматривать на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^{\to b} f = \int_a^b f$$

2.35 ! Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла

$f, g \geq 0$, допустимы на $[a, b)$

1. $f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда:
   (a) $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится
   (b) $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится
2. $\exists \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l < +\infty$:

(a) $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится

(b) $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится

Доказательство. 1. $\Phi(A) := \int_a^A f, \Psi(A) = \int_a^A g$

$0 \leq \Phi(A) \leq \Psi(A)$

(a) $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \Psi$ огр. $\Rightarrow \Phi$ огр. $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится

(b) $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \Phi$ неогр. $\Rightarrow \Psi$ неогр. $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится

2. $l < +\infty \xRightarrow{def} \exists a_1 : \forall x > a_1 \;\; 0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l+1 \Rightarrow f(x) \leq g(x)(l+1)$, дальше тривиально *(предположительно по пункту 1.)*

□

Примечание. $l > 0$:

$$\exists a_2 : \forall x > a_2 \quad \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $\int_a^b f$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — сходится
2. $\int_a^b g$ — расходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — расходится

Следствие 0.5. Если $+\infty > l > 0$, то:

1. $\int_a^b f$ — сходится $\Leftrightarrow \int_a^b g$ — сходится
2. $\int_a^b f$ — расходится $\Leftrightarrow \int_a^b g$ — расходится

2.36 Интеграл Эйлера–Пуассона

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \overset{x=y^2}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = 2\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$ — интеграл Эйлера-Пуассона

Доказательство.

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Оба неравенства следуют из неравенства $e^t \geq 1 + t \;\; \forall t$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Казалось бы, переход от интеграла $\int_0^1$ к $\int_0^{+\infty}$ очень грубый, но это не так.

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \overset{y=\sqrt{n}x}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} I$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \overset{x=\cos y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \overset{x=\operatorname{tg} y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^{2n-2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy \le I \le \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \text{ чет.} \\ 1, & n \text{ нечет.} \end{cases}$$

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le I \le \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n}$$

По формуле Валлиса $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \to \sqrt{\pi}$:

$$\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \frac{n}{2n+1} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□

2.37 ! Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства.

Область определения

1. $\int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ — сходится при всех $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = e$$

$$0 \le x^{t-1} e^{-x} \le x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0 \Rightarrow \text{ при больших } x \;\; x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \le e^{-\frac{x}{2}}$$

2. $\int_{\to 0}^1 x^{t-1} e^{-x} dx$

$$x^{t-1} e^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} x^{t-1} \quad t > 0 \text{ сходится, } t \le 0 \text{ расходится}$$

Выпуклость

Подынтегральное выражение как функция от t является выпуклой функцией (при $x \geq 0$)

$$t \mapsto x^{t-1}e^{-x} = f_x(t)$$
$$f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha f_x(t_1) + (1-\alpha)f_x(t_2)$$
$$\int_0^{+\infty} f_x dx \leq \alpha \int_0^{+\infty} f_x(t_1)dx + (1-\alpha)\int_0^{\infty} f_x(t_2)dx$$

Определение выпуклости:

$$x^{(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)-1}e^{-x} \leq \alpha x^{t_1-1}e^{-x} + (1-\alpha)x^{t_2-1}e^{-x}$$

Зафиксируем α, t_1, t_2. Проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha\Gamma(t_1) + (1-\alpha)\Gamma(t_2)$$

Γ — выпуклая $\Rightarrow$ Γ — непрерывная

Третье свойство

$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}dx = -x^t e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx = 0 + t\Gamma(t)$$

Следствие 0.6. $\Gamma(n+1) = n!$

Доказательство.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)\cdots 1\Gamma(1) = n!$$

□

Четвертое свойство

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t\to+0}{\sim} \frac{1}{t}$$

Пятое свойство

Дано выше. (2.36, стр. 43)

2.38 Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

При каких α и β сходится:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

Мы знаем, что $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

При $\alpha > 1, \beta > 0$

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^\alpha}$$

Таким же образом можно еще что-то выяснить, но мы так делать не будем. Вместо этого воспользуемся методом **“удавливание логарифма”**

1. $\alpha > 1 \quad \alpha = 1 + 2a, a > 0$

$$0 \leq \frac{1}{x^{1+2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta}$$

$$\beta \geq 0 \quad x^a (\ln x)^\beta \to +\infty$$

$$b := -\beta \quad \beta < 0 \quad x^a (\ln x)^\beta = \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left(\frac{x^{\frac{a}{b}}}{\ln x}\right)^b \xrightarrow[x\to\infty]{} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{\text{лопиталь}} \frac{\frac{a}{b} x^{\frac{a}{b}-1}}{\frac{1}{x}} \to +\infty$$

$$x^a (\ln x)^\beta \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty \Rightarrow \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^{1+a}} \text{ — сходится}$$

2. $\alpha < 1 \quad \alpha = 1 - 2a, a > 0$

$$\frac{1}{x^{1-2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{x^a}{(\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$$

3. $\alpha = 1$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \overset{y=\ln x}{=} \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$$

Сходится при $\beta > 1$, расходится при $\beta \leq 1$

2.39 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах.

f — доп. на $[a, b)$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\int_a^b f$ абсолютно сходится
2. $\int_a^b |f|$ сходится
3. $\int_a^b f^+, \int_a^b f^-$ оба сходятся

Примечание. $f^+ = \max(f, 0), f^- = \max(-f, 0)$

Доказательство. 1⇒2 — тривиально

2⇒3 : $0 \le f^\pm \le |f|$

3⇒1 : $f = f^+ - f^- \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \quad |f| = f^+ + f^- \Rightarrow \int_a^b |f| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^-$ □

$\sum a_n, a_n \in \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\sum a_n$ абс. сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.
3. Оба ряда $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ сх.

2.40 Изучение интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

- При каких p сходится?
- При каких p абсолютно сходится?

1. $p > 1 \Rightarrow$ абсолютно сходится, т.к. $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| < \frac{1}{x^{p-1}}$
2. $p > 0 \Rightarrow$ сходится, т.к. (по частям):

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = -\frac{\cos x}{x^p}\Bigg|_1^{+\infty} - p\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}$$

   Первое конечно, второе абсолютно сходится.

3. $p \le 0$, по критерию Коши:

$$\exists A_n, B_n \to b \quad \int_{A_n}^{B_n} f \not\to 0 \Rightarrow \int_a^b f \text{ расходится}$$

$$A_n := 2\pi n, B_n := 2\pi n + \pi \quad \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \ge (2\pi n)^{-p} \int_{A_n}^{B_n} \sin x \text{ расходится}$$

   Итого для $p \le 0$ расходится.

4. $0 < p \le 1$, абсолютная сходимость?

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}$$

(a) Первый способ. $A_n := \pi n, B_n := 2\pi n$

$$\int_{A_n}^{B_n} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi n)^p} \underbrace{\int_{A_n}^{B_n} |\sin x|}_{\text{площадь } n \text{ арок синуса}} = \frac{2n}{(2\pi n)^p} = Cn^{1-p} \not\to 0$$

(b) Второй способ.

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x^p} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}}_{+\infty} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}}_{\substack{\text{При } p>0 \text{ сходится} \\ \text{как в пункте 2}}}$$

Итого абсолютной сходимости нет.

2.41 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла

f — допустима на $[a,b)$, $g \in C^1[a,b)$

Если выполняется 1 или 2, то $\int_a^b fg$ — сходится

1. (a) $F(A) := \int_a^A f(x)dx, A \in [a,b), F$ ограничена, т.е.:

$$\exists K : \forall A \in [a,b) \quad \left|\int_a^A f\right| \leq K$$

   (b) $g(x)$ монотонна, $g(x) \xrightarrow{x \to b-0} 0$

2. (a) $\int_a^b f(x)dx$ сходится, необязательно абсолютно

   (b) $g(x)$ монотонна, $g(x)$ ограничена, т.е.: $\exists L \ \ \forall x \in [a,b) \quad |g(x)| \leq L$

1 часть — Дирихле, 2 — Абель.

Доказательство. 1.

$$\int_a^b fg = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$\lim_{x\to b-0} \underbrace{F(x)}_{\text{огр.}} \underbrace{g(x)}_{\text{б.м.}} = 0 \Rightarrow F(x)g(x)\Big|_a^b \text{ — конечн.}$$

Покажем абсолютную сходимость, из нее следует обычная сходимость:

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|dx \leq \int_a^b K \int_a^b |g'| =$$

Можно снять модуль, т.к. g монотонна $\Rightarrow \text{sign}(g') = \text{const}$

$$= \pm K \int_a^b g' = \pm K g(x)\Big|_a^b = \pm K(\underbrace{\lim_{x\to b-0} g(x)}_{0} - \underbrace{g(a)}_{\text{кон.}})$$

2. $\alpha := \lim\limits_{x\to b-0} g(x)$ — кон.

$$\int_a^b fg = \underbrace{\int_a^b f\alpha}_{\text{кон. по (a)}} + \underbrace{\int_a^b f(g-\alpha)}_{\text{сходится по 1}}$$

Пояснение насчет сходимости $\int_a^b f(g-\alpha)$:

(a) $F : A \mapsto \int_a^A f$ — ограничена, т.к. $\int_a^b f$ сходится

(b) $g \to \alpha \Rightarrow (g-\alpha) \to 0$

$\square$

2.42 Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство.

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Проверим формулу:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$$

$$\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x + \ldots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$$

$$\int_0^\pi \cos kx = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^\pi = 0$$

Проинтегрируем исходное выражение по $[0,\pi]$:

$$0 = \int_0^\pi \ldots = \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} dx - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx = \begin{bmatrix} y = \left(n+\frac{1}{2}\right)x & \\ x = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}y & dx = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}dy \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin y}{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}y}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}dy = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin y}{y}dy$$

Итого:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin y}{y}dy$$

Проверим:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\int_0^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xh(x)dx$$

$$h(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x} = \frac{x-2\sin\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}} = \frac{\mathcal{O}(x^3)}{x^2} \xrightarrow[x\to0]{} 0$$

$$\int_0^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xh(x)dx = \begin{bmatrix} f = h(x) \\ g' = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)xh(x)\Big|_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)h'(x)dx$$

$$h'(x) = -\frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\cos\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{x^2\left(1-\frac{x^2}{4}+o(x^3)\right) - 4\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+o(x^3)\right)}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to0]{} \text{const}$$

$\Rightarrow h'(0) = \text{const}$ (той, которая lim) и $h \in C^1[0,\pi]$

$$\int_0^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xh(x)dx = \underbrace{\frac{-1}{n+\frac{1}{2}}\underbrace{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}_{\text{огр.}}x\underbrace{h(x)}_{\text{огр.}}\Big|_0^\pi}_{\to0} + \underbrace{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\underbrace{\int_0^\pi \underbrace{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\underbrace{h'(x)}_{\text{огр., т.к.}\in C^1}}_{\text{огр., непр.}}dx}_{\text{огр. как ф-ция от } n}}_{\to0}$$

$$\underbrace{\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin x}{x}dx}_{\to\text{инт. Дирихле}} = \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx}_{\to0} + \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx \to \frac{\pi}{2}$$

□

2.43 Неравенство Йенсена для сумм

f — выпуклая на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$\forall x_1 \ldots x_n \in \langle a, b\rangle\ \forall \alpha_1 \ldots \alpha_n : \alpha_i \geq 0\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1 \quad f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$

Доказательство. Для $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ тривиально.

Покажем, что $x^* := \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in \langle a, b\rangle$:

$$\min x_i \leq x^* \leq (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) \max(x_i) = \max(x_i) \Rightarrow x^* \in \langle a, b\rangle$$

В x^* можно провести опорную прямую $y = kx + b$

$$f(x^*) = kx^* + b = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i k x_i) + b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (k x_i + b) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

□

2.44 Неравенство Йенсена для интегралов

- f — выпуклая на $\langle A, B\rangle$
- $\varphi : [a, b] \to \langle A, B\rangle$ — непрерывная
- $\lambda : [a, b] \to [0, +\infty)$ — непрерывная *(для кусочно-непрерывной тоже верно)*
- $\int_a^b \lambda(t) dt = 1$

Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda(t)\varphi(t) dt\right) \leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt$$

Доказательство. $m := \inf \varphi, M := \sup \varphi$

$$m \leq m \int_a^b \lambda(t) \leq \int_a^b \lambda(t)\varphi(t) \leq M \int_a^b \lambda(t) = M$$

$$x^* := \int_a^b \lambda(t)\varphi(t) dt \Rightarrow x^* \in \langle A, B\rangle$$

Для $m = M$ тривиально.

$y = kx + b$ — опорная прямая в точке x^* графика f.

$$f(x^*) = kx^* + b = k \int_a^b \lambda\varphi + b \int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda(t)(k\varphi(t) + b) dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt$$

□

2.45 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

$$a_i > 0 \quad \frac{1}{n}\sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

Доказательство. $f(x) = \ln x$ — вогн., $\alpha_i = \frac{1}{n}$, по неравенству Йенсена:

$$\ln\left(\frac{1}{n}a_1 + \ldots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln a_1 + \ldots + \frac{1}{n}\ln a_n$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\ln(a_1 \cdots a_n)$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \ln(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

□

Неравенство Коши для интегралов:

$$f > 0, f \in C[a,b] \quad \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) dx$$

Правая часть — среднее значение f на $[a,b]$, похоже на среднее арифметическое, если рассмотреть интегральную сумму:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \approx \frac{1}{b-a}\sum \frac{1}{n} f(x_i)$$

Аналогично левая часть $\approx$ среднее геометрическое:

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x) dx\right) \approx \exp\left(\sum \frac{1}{n}\ln f(x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln(f(x_i))}{n}\right) = \sqrt[n]{f(x_i) \cdots f(x_n)}$$

Возьмём логарифм от искомого неравенства:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x) dx \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)$$

Подставим в интегральное неравенство Йенсена:

- $f \leftrightarrow \ln$
- $\lambda(t) \leftrightarrow \frac{1}{b-a}$
- $\varphi \leftrightarrow f$

2.46 Неравенство Гельдера для сумм

$a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n > 0, p > 1, q > 1 \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Частный случай при $p = q = 2$ — неравенство Коши-Буняковского.

Доказательство. $f(x) = x^p, (p > 1)$ — строго выпуклая, т.к. $f'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$
По Йенсену $(\sum \alpha_i x_i)^p \le \sum \alpha_i x_i^p$

$$\alpha_i := \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} \quad x_i := a_i b_i^{\frac{-1}{p-1}} \left(\sum b_j^q\right)$$

$$\text{Левая часть}^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i b_i^{\frac{-1}{p-1}} \sum b_j^q\right) = \sum a_i b_i^{q - \frac{1}{p-1}} = \sum a_i b_i$$

$$\text{Правая часть} = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i^p b_i^{\frac{-p}{p-1}} \left(\sum b_j^q\right)^p = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i^p b_i^{-q} \left(\sum b_j^q\right)^p =$$

$$= \left(\sum a_i^p\right) \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} = \left(\sum a_i^p\right) \left(\sum b_j^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\text{Правая часть}^{\frac{1}{p}} = \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\square$

Общий вид: $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum a_i b_i\right| \le \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

2.47 Неравенство Гельдера для интегралов

$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad f, g \in C[a, b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство КБШ в пространстве функций — частный случай этого неравенства.

Доказательство. По интегральным суммам:

$$x_i := a + i\frac{b-a}{n} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad a_i := f(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}} \quad b_i = g(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}$$

$$a_i b_i = f(x_i)g(x_i)(\Delta x_i)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\Delta x_i \right| \leq \left(\sum |f(x_i)|^p \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |g(x_i)|^q \Delta x_i \right)^{\frac{1}{q}}$$

Предельный переход доказывает искомое. □

2.48 Неравенство Минковского

$p \geq 1, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Это неравенство треугольника для нормы $||a||_p = (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Доказательство. $p = 1$ тривиально, $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$

Докажем для положительных a_i, b_i, другие случаи сводятся к этому.

По неравенству Гёльдера для $q = p/(p-1)$:

$$\sum a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Сложим эти два неравенства:

$$\sum (a_i + b_i)^p \leq \left(\left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \left(\sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left(\sum (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

2.49 Свойства верхнего и нижнего пределов

1. $\underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n$
2. $\forall n \;\; x_n \le \tilde{x}_n \Rightarrow$:
   (a) $\overline{\lim} x_n \le \overline{\lim} \tilde{x}_n$
   (b) $\underline{\lim} x_n \le \underline{\lim} \tilde{x}_n$
3. $\lambda \ge 0 \Rightarrow \overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \overline{\lim} x_n; \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$, считаем что $0 \cdot (\pm\infty) = 0$
4. $\overline{\lim} - x_n = -\underline{\lim} x_n; \underline{\lim} - x_n = -\overline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n+y_n) \le \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$, если правая часть имеет смысл, т.е. нет ситуации вида $+\infty - \infty$

   $\underline{\lim}(x_n+y_n) \ge \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$
6. $t_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n+t_n) = \overline{\lim} x_n + l$
7. $t_n \to l \in (0,+\infty) \Rightarrow \overline{\lim}(t_n x_n) = l \overline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $y_n \le x_n \le z_n$, по предельному переходу тривиально.

2. $z_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \ldots), \tilde{z}_n = \sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1} \ldots) \Rightarrow z_n \le \tilde{z}_n$
3. $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
4. $\sup -E = -\inf E$
5. $\sup(x_n+y_n, x_{n+1}+y_{n+1}, \ldots) \le \sup(x_n, x_{n+1} \ldots) + \sup(y_n, y_{n+1} \ldots)$
6. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 \;\; \forall k > N_0 \quad x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$

   $\lhd N > N_0$, перейдем к sup по $k \ge N$:
   $$y_N + l - \varepsilon < \sup(x_N + t_N, x_{N+1} + t_{N+1}, \ldots) \le y_N + l + \varepsilon$$
   Предельный переход:
   $$\overline{\lim} x_N + l - \varepsilon \le \overline{\sup}(x_N + t_N) \le \overline{\lim} x_N + l + \varepsilon$$
   $$\lim(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$$
7. То же самое.

□

2.50 Техническое описание верхнего предела

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр. сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$
3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ a и b:
   (a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \ x_n < l + \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0$ для бесконечного множества номеров $n : l - \varepsilon < x_n$

Доказательство. 1. Очевидно, т.к. $y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \dots) = +\infty \Leftrightarrow x_n$ — неогр. сверху

2. "$\Rightarrow$" $x_n \le y_n \to -\infty$
   "$\Leftarrow$" $\forall A \ \exists N \ \forall n > N \ \ y_n \le A, x_n < A$
3. "$\Rightarrow$" (a) $y_n \to l \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad x_n \le y_n < l + \varepsilon$
   (b) Берём $\varepsilon > 0$, предположим противное : $\exists$ конечное мн-во $n : l - \varepsilon < x_n$
   $]n_0$ — максимальный номер, такой что $l - \varepsilon < x_{n_0}$, тогда $y_{n_0} \le l - \varepsilon$, но $y_n \downarrow \Rightarrow \lim y_n \le l - \varepsilon$
   "$\Leftarrow$" $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon \Rightarrow y_n \le l + \varepsilon$, но в $x_n, x_{n+1} \dots \exists x_i : l - \varepsilon < x_i \Rightarrow y_n = \sup(x_n, x_{n+1} \dots) > l - \varepsilon$. Итого $l + \varepsilon \ge y_n > l - \varepsilon \Rightarrow l = \lim y_n = \overline{\lim} x_n$

□

2.51 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

$$\exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$$

Доказательство. "$\Rightarrow$" 1. $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = \lim y_n \ge \lim x_n = +\infty$

2. $\lim x_n = -\infty$ аналогично
3. $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$ очевидно из технического описания предела, пункт 3.

"$\Leftarrow$" $\underline{\lim} x_n \leftarrow z_n \le x_n \le y_n \to \overline{\lim} x_n$, по теореме о городовых $\exists \lim x_n = \overline{\lim} x_n$

□

2.52 Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

1. $\forall l$ — частичный пр. x_n $\underline{\lim} x_n \le l \le \overline{\lim} x_n$
2. $\exists (n_k) : x_{n_k} \to \overline{\lim} x_n \ \ \exists m_k : x_{m_k} \to \underline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $x_{n_k} \to l \quad \underline{\lim} x_n \leftarrow z_{n_k} \le x_{n_k} \le y_{n_k} \to \overline{\lim} x_n \Rightarrow \underline{\lim} x_n \le l \le \overline{\lim} x_n$

2. (a) $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ – неогр сверху $\Rightarrow$ можно выбрать $x_{n_1} < x_{n_2} < \dots x_n \to +\infty$

   (b) $\overline{\lim} x_n = -\infty$ тривиально.

   (c) $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R}\ \exists x_{n_k} : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$

□

2.53 Частичные пределы последовательности $\sin(n)$

1. $\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$
2. $\forall l \in [-1, 1]$ – частичный передел последовательности $\sin n$

Доказательство. 1. Тривиально

2. $n_k := \arcsin l + 2\pi k$

Кроме того, можно составить $n_k \in \mathbb{N}$.

□

2.54 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши

1. $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся, $c_n := a_n + b_n$. Тогда $\sum c_n$ сходится
2. $\sum a_n$ – сходится, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\sum \lambda a_n$ сходится и $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$
3. (a) $\sum a_n$ – сходится $\Rightarrow$ любой остаток сходится

   (b) остаток сходится $\Rightarrow \sum a_n$ сходится

   (c) $r_N = \sum\limits_{n \ge N} a_n, \sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow r_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Доказательство. (a) ?m-й остаток, $N \ge m : \sum\limits_{n=1}^{N} a_n = \sum\limits_{n=1}^{m-1} a_n + \sum\limits_{n=m}^{N} a_n$

(b) Аналогично.

(c) “$\Leftarrow$” Тривиально.

“$\Rightarrow$” $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{m-1} a_n + r_m \xRightarrow{m \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + r_{+\infty} \Rightarrow r_N \to 0$

□

Необходимое условие сходимости:

$\sum a_n$ сходится $\Rightarrow a_n \to 0$

Доказательство. Тривиально. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$ □

Критерий сходимости ряда Больцано-Коши:

$$\sum a_n \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall k > N \ \ \forall m \in \mathbb{N} \quad |a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+m}| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально. □

2.55 ! Признак сравнения сходимости положительных рядов

$a_k, b_k \geq 0$

1. $\forall k \ \ a_k \leq b_k$, или $\exists c > 0 \ \ \forall k \ \ a_k \leq cb_k$. Тогда $\sum b_k$ сх. $\Rightarrow \sum a_k$ сх., $\sum a_k$ расх. $\Rightarrow \sum b_k$ расх.
2. $\exists \lim \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$. Тогда при

$$\begin{aligned} 0 < l < +\infty: & \ \sum a_k \text{ сх.} \Leftrightarrow \sum b_k \text{ сх.} \\ l = 0: & \ \sum b_k \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_k \text{ сх.}, \sum a_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum b_k \text{ расх.} \\ l = +\infty: & \ \sum a_k \text{ сх.} \Rightarrow \sum b_k \text{ сх.}, \sum b_k \text{ расх.} \Rightarrow \sum a_k \text{ расх.} \end{aligned}$$

Доказательство.

Лемма 1. $a_n \geq 0 \quad \sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow S_n$ ограничено сверху.

Доказательство. $\exists$ кон. $\lim S_n \Leftrightarrow S_n$ ограничено сверху. □

1. $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}; \ \ S_n^{(b)}$ огр. $\Rightarrow S_n^{(a)}$ огр., по леммме a_n сходится. Аналогично расходимость.
2. (a) $0 < l < +\infty$: Для $\varepsilon = \frac{l}{2} \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \frac{1}{2} l b_n < a_n < \frac{3}{2} l b_n$, дальше по 1 пункту.
   (b) $l = 0 : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon b_n \Rightarrow$ по 1 пункту.
   (c) $l = +\infty : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \frac{a_n}{b_n} > \varepsilon \Rightarrow a_n > b_n \varepsilon \Rightarrow$ по 1 пункту.

□

2.56 ! Признак Коши сходимости положительных рядов

$a_n \geq 0, K_n := \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:

Lite:

1. Если $\exists q < 1 : K_n \leq q$, начиная с некоторого места *(НСНМ)* $(\exists N : \forall n > N) \Rightarrow \sum a_n$ сходится.
2. $K_n \geq 1$ для бесконечного множества $n \Rightarrow \sum a_n$ расходится.

Pro: $K := \overline{\lim} K_n$

1. $K < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится
2. $K > 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится

Доказательство. Lite:

1. НСНМ $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n, \sum q^n$ сх. $\Rightarrow \sum a_n$ сх.
2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow a_n \geq 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ расх.

Pro:

1. По техническому описанию $\overline{\lim}$ $\exists N \ \ \forall n > N \ \ K_n < q \Rightarrow$ по Lite.1 сходится.
2. $l = \overline{\lim} K_n > 1, 1 = l - \varepsilon$. Тогда $K_n \geq 1$ для бесконечного множества $n \Rightarrow$ по Lite.2 расходится.

□

2.57 Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)

Дано выше. (2.56, стр. 58)

2.58 Признак Даламбера сходимости положительных рядов

$a_n > 0, D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Lite:

1. $\exists q < 1 : D_n < q$ НСНМ $\Rightarrow \sum a_n$ сх.
2. $D_n \geq 1$ НСНМ $\Rightarrow \sum a_n$ расх.

Pro: $D := \lim D_n$

1. $D < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сх.
2. $D > 1 \Rightarrow \sum a_n$ расх.

Доказательство. Lite:

1. $\exists N : \frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \dots$
$$\frac{a_n}{a_N} < q^{n-N}$$
$$a_n < q^n \left(\frac{a_N}{q^N}\right)$$
$\sum q^n$ сх. $\Rightarrow \sum a_n$ сх.

2. $D_n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$, при $n > N$ $a_n \geq a_N \Rightarrow a_n \geq A_N \Rightarrow a_n \not\to 0$. Также можно аналогично пункту 1.

Pro:

1. $q := \frac{1+D}{2}$. По определению предела $\varepsilon := q - D$ $\exists N$ $\forall n > N$ $D_n < q \xRightarrow{Lite1} \sum a_n$ сх.

2. $\varepsilon := D - 1$ $\exists N$ $\forall n > N$ $D_n > 1 \xRightarrow{Lite2} \sum a_n$ расх.

$\square$

2.59 Признак Раабе сходимости положительных рядов

$a_n > 0, R_n := n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Тогда:

1. $\exists r > 1$ $R_n \geq r$ НСНМ $\Rightarrow \sum a_n$ сх.
2. $R_n \leq 1$ НСНМ $\Rightarrow \sum a_n$ расх.

Доказательство.

1. $R_n \geq r \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}$
$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$$
$$b_n := \frac{1}{n^s} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \leq \frac{1}{1+\frac{r}{n}} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$
$\sum b_n$ сх. $\Rightarrow \sum a_n$ сх. по лемме 1.

2. $R_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$
$b_n = \frac{1}{n}$ расх. $\Rightarrow \sum a_n$ расх.

$\square$

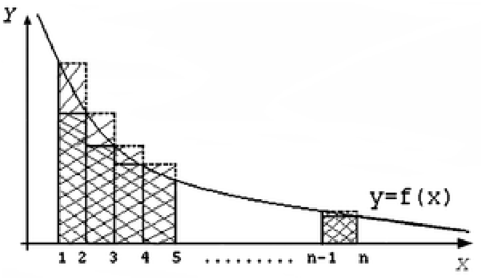
2.60 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ монотонно убывает, $f \geq 0$, f непр.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится/расходится одновременно.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \Delta_n$$



Δ_n — площадь криволинейных треугольников, получаемых отсечением кривой $y = f(x)$.

$$0 \leq \Delta_n \leq f(1) - f(n) \leq f(1)$$

$\Delta_n \uparrow \Rightarrow \exists$ кон. $\lim \Delta_n$

Более формальный вариант, без картинок:

$$\sum_{k=1}^{n} - \int_1^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right)$$

Т.к. $f \downarrow$:

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(k+1) = f(1) - f(n+1)$$

□

2.61 ! Признак Лейбница

$c_n \geq 0, c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \ldots, c_n \to 0$

Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} c_n$ сх.

Доказательство.

$$S_{2N} = c_1 - c_2 + \ldots + c_{2N-1} - c_{2N}$$

$$S_{2N+2} = S_{2N} + \underbrace{(c_{2N+1} - c_{2N+2})}_{\geq 0} \geq S_{2N} \Rightarrow S_{2N} \uparrow$$

$$S_{2N} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_3 - c_4)}_{\geq 0} - \ldots - c_{2N} \leq c_1$$

$$\left.\begin{aligned} &S_{2N} \uparrow \\ &S_{2N} \leq c_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{N \to +\infty} S_{2N} \in \mathbb{R}$$

$$S_{2N+1} = \underbrace{S_{2N}}_{\to l \in \mathbb{R}} + \underbrace{c_{2N+1}}_{\to 0} \Rightarrow S_{2N+1} \to l \Rightarrow S_N \to l$$

□

2.62 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

Дирихле:

1. Последовательность $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ ограничена: $\exists C_A > 0 \ \forall k \ \ |A_k| < C_A$
2. b_k монотонна и $\to 0$

Абеля:

1. Ряд $\sum a_k$ сходится
2. b_k монотонна, ограничена: $\exists C_B > 0 \ \forall k \ \ |b_k| < C_B$

Если хотя бы один из этих признаков состоялся, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ сходится.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \underbrace{A_n b_n}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})}_{\substack{\exists \text{ конечный предел,} \\ \text{т.к. ряд абсолютно сходится}}}$$

Докажем Дирихле.

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq C_A \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm C_A \sum_{k=1}^{n-1} b_k - b_{k+1} = \pm \underbrace{C_a (b_1 - b_n)}_{\text{огр.}} \leq C_A C_B$$

Докажем Абеля.

$\exists$ конечный $\beta = \lim\limits_{k\to+\infty} b_k$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \beta \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - \beta)$$

Второй ряд сходится по признаку Дирихле, первый сходится по условию. □

2.63 Теорема о перестановке слагаемых

Ряд A абсолютно сходится, тогда его перестановка B тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. 1. $a_k \geq 0$

$$S_n^{(b)} = b_1 + \ldots + b_n = a_{w(1)} + \ldots + a_{w(n)} \leq S_N^{(a)}, N = \max(w(1) \ldots w(n))$$

Предельный переход: $S^{(b)} \leq S^{(a)}$

Т.к. A — перестановка B, то $S^{(a)} \leq S^{(b)} \Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$

2. Общий случай

$a_k^+ = \max(a_k, 0), a_k^- = \max(-a_k, 0)$

$\sum b_k^+$ — перестановка $\sum a_k^+$; $\sum b_k^-$ — перестановка $\sum a_k^-$

Срезки сходятся по пункту 1., в силу абсолютной сходимости $\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$ конечны $\Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$

□

2.64 Теорема о произведении рядов

Пусть ряды $\sum a_k, \sum b_k$ абсолютно сходятся. Тогда $\forall$ биекции $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ произведение рядов абсолютно сходится и его сумма $= AB$

Доказательство. $\sum |a_k| = A^*, \sum |b_k| = B^*, 0 \leq A^*, B^* < +\infty$

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{\varphi(x)} b_{\psi(x)}| \leq \sum_{i=1}^{M} |a_i| \sum_{j=1}^{L} |b_j| \leq A^* B^*$$

$$M := \max(\varphi(1) \ldots \varphi(N)) \quad N := \max(\psi(1) \ldots \psi(N))$$

Итого произведение сходится абсолютно.

Произведение для $\overline{\gamma} \neq \gamma$ есть перестановка произведения для $\gamma \Rightarrow \forall \gamma$ произведение рядов имеет одинаковую сумму.

Возьмём γ такое, что оно обходит точки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ “по квадратам”, т.е. не заходит в следующий квадрат, пока не обошло предыдущий. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} AB$$

□

2.65 Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения

1. $a_n > 0$ НСНМ. Тогда $\prod 1 + a_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ сходится.
2. $\sum a_n$ сходится, $\sum a_n^2$ сходится $\Rightarrow \prod(1 + a_n)$ сходится.

Доказательство. 1. $\prod(1 + a_n)$ – сх. $\Leftrightarrow \sum \ln(1 + a_n)$ – сх. $\Leftrightarrow \sum a_n$ – сх.

2. $\ln(1 + a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(1 + a_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} o(a_n^2)}_{\text{абс.сх, т.к. } |o(a_n^2)| \le a_n^2}$$

□

2.66 Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом

$0 \le t \le n$. Тогда

$$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

Доказательство. Т.к. $y = 1 + x$ – график касательной к e^x в $x = 0$ и экспонента выпуклая:

$$1 + y \le e^y$$

Произошла коллизия переменных, x стал y.

Заменим y на $-y$:

$$1 - y \le e^{-y}$$

Возведем в степень -1:

$$(1 - y)^{-1} \ge e^y$$

Итого:

$$1 + y \le e^y \le (1 - y)^{-1}$$

$$y := \frac{t}{n}$$
$$1 + \frac{t}{n} \leq e^{\frac{t}{n}} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-1}$$
$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}$$

По правому неравенству:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} \geq 0$$

Возведем левое неравенство в степень -1:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n} \leq e^{t}$$

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} = e^{-t}\left(1 - e^{t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}\right) \leq e^{-t}\left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}\right) = e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n}\right)$$
$$e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n}\right) \overset{\text{неравенство Бернулли}}{\leq} \frac{t^2}{n}e^{-t}$$

Примечание. Неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geq 1 + an, a \geq -1$, в данном случае $a = -\frac{t^2}{n^2}$

В неравенстве Бернулли $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ предположительно в лемме $n \in \mathbb{N}$, на лекции этого не было сказано. $\square$

2.67 Формула Эйлера для Γ-функции

Лемма 2. $\prod(n, x) := \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt, x > 0$

Примечание. При $x \leq 0$ интеграл расходится.

Тогда $\prod(n, x) = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x \cdot (x+1) \cdots (x+n)} n^x$

Доказательство.

$$\prod(n, x) \overset{t=ny}{=} n^x \int\limits_0^1 (1-y)^n y^{x-1} dy =$$
$$= n^x \left((1-y)^n \frac{1}{x} y^x \Bigg|_{y=0}^{y=1} + \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1-y)^{n-1} y^x dy \right) =$$
$$= n^x \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1-y)^{n-1} y^x dy =$$

$$= n^x \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} \int\limits_0^1 (1-y)^{n-2} y^{x+1} dy =$$

$$= \ldots = n^x \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} \cdots \frac{1}{x+n-1} \int\limits_0^1 y^{x+n-1} dy$$

□

Формула Эйлера:

При $x > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x(x+1) \cdots (x+n)} n^x = \Gamma(x)$$

Доказательство.

$$\Gamma(x) - \lim \Pi(n, x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \lim \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\underbrace{\int\limits_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{x-1} dt}_{\text{I}} + \underbrace{\int\limits_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}_{\text{II}} \right) \overset{?}{=} 0$$

II $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, т.к. это “остаточный интеграл”, при $n \to +\infty$ интеграл “берется по нулевому промежутку”.

По лемме о приближении e пределом:

$$0 \le \text{I} \le \int_0^n \frac{1}{n} t^2 e^{-t} t^{x-1} dt \le \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt \le \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} dt = \frac{\Gamma(x+2)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

□

2.68 Формула Вейерштрасса для Γ-функции

При $x > 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

где $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n)$ — постоянная Эйлера.

Вывод формулы Вейерштрасса *(из формулы Эйлера)*:

Доказательство.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim n^{-x}\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!} = x\lim n^{-x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) =$$

$$= x\lim \underbrace{e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)-x\ln n}}_{e^{x(\gamma+o(1))}}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} = e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$$

□

2.69 Вычисление произведений с рациональными сомножителями

$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, P и Q — многочлены.

$\prod a_n =?$

Пусть P и Q разложены на множители, т.е:

$$P(n) = \alpha(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)$$

$$Q(n) = \beta(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_l)$$

$$a_n = \frac{\alpha}{\beta}\frac{(n+a_1)\dots(n+a_k)}{(n+b_1)\dots(n+b_l)}$$

Если $k \neq l$, то $a_n \to 0$ или $a_n \to +\infty \Rightarrow \prod a_n$ расходится. $\lhd k = l$

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\alpha}{\beta}$$

Если $\frac{\alpha}{\beta} \neq 1$, то $a_n \not\to 1 \Rightarrow \prod a_n$ расходится. $\lhd \frac{\alpha}{\beta} = 1$

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_l}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{n}(a_1+\dots+a_k-b_1-\dots-b_k) + O(\frac{1}{n^2})$$

Если $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \neq \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$, то $\prod a_n$ расходится, т.к. $\prod 1+\frac{c}{n}$ расходится, т.к. $\sum\frac{c}{n}$ расходится.
$\lhd \sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_l}{n}\right)} = \prod_{n=1}^{N}\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}}\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}}\dots\left(1+\frac{b_l}{n}\right)e^{-\frac{b_l}{n}}}$$

Равенство состоялось, т.к. $\sum a_i = \sum b_i$.

По формуле Вейерштрасса:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{ae^{\gamma a}\Gamma(a)}$$

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}}\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}}\dots\left(1+\frac{b_l}{n}\right)e^{-\frac{b_l}{n}}} \to \frac{b_1e^{\gamma b_1}\Gamma(b_1)\dots b_le^{\gamma b_l}\Gamma(b_l)}{a_1e^{\gamma a_1}\Gamma(a_1)\dots a_ke^{\gamma a_k}\Gamma(a_k)} =$$

$$= \frac{e^{\gamma b_1}\Gamma(b_1+1)\dots e^{\gamma b_l}\Gamma(b_l+1)}{e^{\gamma a_1}\Gamma(a_1+1)\dots e^{\gamma a_k}\Gamma(a_k+1)} = \frac{\Gamma(b_1+1)\dots\Gamma(b_l+1)}{\Gamma(a_1+1)\dots\Gamma(a_k+1)}$$

2.70 Единственность производной

Производный оператор единственный.

Доказательство.

$$\exists\delta>0\ \ \forall h: |h|<\delta\ \ a+h\in E$$

Возьмём $v\in\mathbb{R}^m \quad h:=tv, t<\frac{\delta}{|v|}$

По определению дифференциала:

$$F(a+tv)=F(a)+F'(a)tv+|tv|\alpha(tv)=F(a)+tF'(a)v+|t||v|\alpha(tv)$$

$$F'(a)v=\frac{F(a+tv)-F(a)}{t}-\overbrace{\underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\pm1}|v|\alpha(tv)}^{\xrightarrow[t\to0]{}\pm|v|0}$$

$$F'(a)v=\lim_{t\to0}\frac{F(a+tv)-F(a)}{t}$$

Т.к. по всем направлениям производная равна, оператор единственный. $\square$

2.71 Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций

$F:E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n \quad a\in IntE$

$F(x)=(f_1(x),f_2(x)\dots f_n(x))$. Тогда:

1. F — дифф. в $a \Leftrightarrow$ все f_i дифференциируемы в a
2. $\forall i=1\dots n \quad i$-я строка матрицы Якоби F есть матрица Якоби f_i

Доказательство.

$$F(x) = F(a) + L(x-a) + \varphi(x)|x-a|$$

$$\forall i \quad f_i(x) = f_i(a) + (L_{1i}, L_{2i}, \dots L_{mi}) \cdot (x-a) + \varphi_i(x)|x-a|$$

Очевидно оба выражения эквивалентны. □

2.72 Необходимое условие дифференцируемости.

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in IntE, f$ — дифф. a

Тогда $\exists f'_1(a), \dots, f'_m(a)$ и матрица Якоби f в точке $a = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$

Доказательство.

$$f(x) = f(a) + (l_1 \dots l_m)(x-a) + \alpha(x)|x-a|$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{|x-a|} = 0$$

Посчитаем предел по направлению $x = a + te_k, e_k = (0\dots0, 1, 0\dots0)$

$$f(a+te_k) = f(a) + l_k t + \alpha_k(t)|t| \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = l_k$$

□

2.73 ! Достаточное условие дифференцируемости

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \;\; \exists r > 0 \;\; B(a,r) \subset E$ и в этом шаре $\exists f'_1 \dots f_m$ (конечные) и они непрерывны в точке a. Тогда f дифф. в a

Доказательство. $\lhd m = 2$

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) =$$

$$= f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) + f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=}$$

$$= f'_2(x_1, \overline{x}_2)(x_2 - a_2) + f'_1(\overline{x}_1, a_2)(x_1 - a_1) =$$

$$= f'_2(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + f'_1(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \underbrace{\underbrace{(f'_2(x_1, \overline{x}_2) - f'_2(a_1, a_2))}_{\to 0} \underbrace{\frac{x_2 - a_2}{|x-a|}}_{<1}}_{\to 0} |x-a| + \text{ аналогично}$$

□

2.74 Лемма об оценке нормы линейного оператора

$A:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$ $A=(a_{ij})$. Тогда $\forall x\in\mathbb{R}^m$: $|Ax|\le C_A|x|$, где $C_a=\left(\sum\limits_{i,j}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Доказательство.

$$|Ax|^2=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}x_j\right)^2\overset{\text{КБШ}}{\le}\sum_i\left(\left(\sum_j a_{ij}^2\right)\left(\sum_j x_j^2\right)\right)=|x|^2\sum_i\sum_j a_{ij}^2$$

□

2.75 ! Дифференцирование композиции

- $F:E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$
- $G:I\subset\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$
- $F(E)\subset I$
- $a\in IntE$
- F дифф. в a
- $F(a)\in IntI$
- G дифф. в $F(a)$

Тогда $G\circ F$ дифф. в a, $(G\circ F)'(a)=G'(F(a))F'(a)$

Доказательство. $b:=F(a)$. По определению:

$$F(a+h)=\underbrace{F(a)}_{b}+\underbrace{F'(a)h+\alpha(h)|h|}_{k}$$

$$G(b+k)=G(b)+G'(b)k+\beta(k)|k|$$

$$G(F(a+h))=G(F(a))+G'(F(a))(F'(a)h+\alpha(h)|h|)+\beta(k)|k|=$$
$$=G(F(a))+G'(F(a))F'(a)h+G'(b)\alpha(h)|h|+\beta(k)|F'(a)h+\alpha(h)|h||$$

Надо доказать, что $\underbrace{G'(b)\alpha(h)|h|}_{\mathrm{I}}+\beta(k)\underbrace{|F'(a)h+\alpha(h)|h||}_{\mathrm{II}}=\gamma(h)|h|$.

$$|\mathrm{I}|=|G'(b)\alpha(h)|h||\le C_{G'(b)}|\alpha(h)||h|$$

$$|F'(a)h + \alpha(h)|h|| \leq |F'(a)h| + |\alpha(h)||h| \leq \underbrace{(C_{F'(a)} + |\alpha(h)|)}_{\text{огр.}} \underbrace{|h|}_{\to 0}$$

$$k \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$|\text{II}| \leq \underbrace{|\beta(k)|}_{\to 0} \underbrace{(C_{F'(a)} + |\alpha(h)|)}_{\text{огр.}} \underbrace{|h|}_{\to 0}$$

$$|\text{I}| + |\text{II}| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

□

2.76 Дифференцирование “произведений”

- $F, G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- $a \in IntE$
- $\lambda : E \to \mathbb{R}$
- F, G, λ дифф. в a

Тогда $\lambda F, \langle F, G \rangle$ — дифф. в a:

1. $(\lambda F)'(a)(h) = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a)h$
2. $\langle F, G \rangle'(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$

Здесь h нигде не умножается, на него действуют операторы дифференциирования.

Доказательство. 1. Для координатной функции $l = 1$:

$$\lambda f(a+h) - \lambda f(a) = (\lambda(a) + \lambda'(a)h + o(h))(f(a) + f'(a)h + o(h)) - \lambda(a)f(a) =$$

$$= (\lambda'(a)h)f(a) + \lambda(a)f'(a)h + o(h)$$

$$|(\lambda'(a)h)(f'(a)h)| \leq C_{\lambda'(a)}|h|C_{f'(a)}|h|$$

2.

$$\langle F, G \rangle = \sum_{i=1}^{l} f_i g_i$$

По линейности всего и пункту 1:

$$\langle F, G \rangle'(a)h = \sum_i (f_i g_i)'(a)h \overset{1.}{=} \sum_i f_i'(a)hg_i(a) + f(a)g_i'(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$$

□

2.77 ! Теорема Лагранжа для векторнозначных функций

$F : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \le |F'(c)|(b - a)$

Доказательство.

$$\varphi(t) := \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a)\rangle, t \in [a, b]$$

$$\varphi(a) = 0 \quad \varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$$

$$\varphi'(t) = \langle F(b) - F(a), F'(t)\rangle$$

Теорема Лагранжа *(для обычных функций)*:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$$

$$|F(b) - F(a)|^2 = (b - a)\langle F(b) - F(a), F'(c)\rangle \overset{\text{КБШ}}{\le} (b - a)|F(b) - F(a)||F'(c)|$$

□

2.78 Экстремальное свойство градиента

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, f дифф. $a \in IntE$, $\nabla f(a) \ne 0$.

Тогда $l = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ — направление наискорейшего возрастания функции, т.е.

$$\forall h \in \mathbb{R}^m : |h| = 1 \quad -|\nabla f(a)| \le \frac{\partial f}{\partial h}(a) \le |\nabla f(a)|$$

, причем “$=$” достигаеся только при $h = \pm l$, где при “$+$” достигается “$=$”

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f, h\rangle$$

$$-|\nabla f(a)||h| \le \langle \nabla f, h\rangle \le |\nabla f(a)||h|$$

$|h| = 1$ по построению:

$$-|\nabla f(a)| \le \langle \nabla f, h\rangle \le |\nabla f(a)|$$

□

2.79 Независимость частных производных от порядка дифференцирования

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in E$

$\exists r > 0 \;\; B((x_0, y_0), r) \subset E$

Пусть в этом шаре $\exists f''_{xy}, f''_{yx}$ и они непрерывны в x_0. Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Доказательство. $\Delta^2(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$

$\alpha(h) := \Delta^2(h, k)$ при фиксированном k

$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \alpha'(\overline{h})h = (f'_x(x_0 + \overline{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \overline{h}, y_0))h \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} f''_{xy}(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})hk$

$\beta(k) := \Delta^2(h, k)$ при фиксированном h

$\beta(k) = f''_{yx}(x_0 + \overline{\overline{h}}, y_0 + \overline{\overline{k}})hk$

$$f''_{xy}(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})hk = f''_{yx}(x_0 + \overline{\overline{h}}, y_0 + \overline{\overline{k}})hk$$

$$(h, k) \to (0, 0) \Rightarrow (\overline{h}, \overline{k}) \to (0, 0), (\overline{\overline{h}}, \overline{\overline{k}}) \to (0, 0)$$
$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

□

Общий вид теоремы: $f \in C^r(E) \;\; \forall k \le r$

$\forall x \in E \;\; \forall i_1 \dots i_k$: Если $(j_1 \dots j_k)$ — перестановка $(i_1 \dots i_k)$, то:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x)$$

Доказательство. По частному случаю теоремы:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x)$$

Таким образом, можно осуществить транспозицию $\Rightarrow$ можно осуществить любую перестановку. □

2.80 Полиномиальная формула

$a_i \in \mathbb{R}$ *(верно для любого кольца)*. Тогда $\forall r \in \mathbb{N}$:

$$(a_1 + \ldots + a_m)^r \overset{\text{очев}}{=} \sum_{n_1=1}^{m} \ldots \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_r} = \sum_{j:|j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Доказательство. По индукции.

База: $\triangleleft r = 1$

$$a_1 + \ldots + a_m = \frac{1!}{1!0!\ldots 0!} a_1 + \frac{1!}{0!1!\ldots 0!} a_2 + \ldots + a_m$$
$$a_1 + \ldots + a_m = a_1 + \ldots + a_m$$

Переход:

$$(a_1 + \ldots + a_m)^{r+1} = (a_1 + \ldots + a_m) \sum_{\substack{j_1 \ldots j_m \geq 0 \\ j_1 + \ldots + j_m = r}} \frac{r!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m} =$$

$$= \sum \frac{r!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1+1} \ldots a_m^{j_m} + \ldots + \sum \frac{r!}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \geq 1 \\ k_2 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r! k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{\substack{k_2 \geq 1 \\ k_1, k_3, k_4 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r! k_2}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_2 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r! k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{\substack{k_2 \geq 0 \\ k_1, k_3, k_4 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r! k_2}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{r!(k_1 + \ldots + k_m)}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} =$$

$$= \sum_{\substack{k_1 \ldots k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots k_m = r+1}} \frac{(r+1)!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}$$

□