

**Теорема 1** (достаточное условие экстремума). Выполняется условие теоремы о необходимом условии экстремума, то есть:

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкое в  $O$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$  — гладкое в  $O$
- $a \in O$  — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ : если  $\Phi'(a)h = 0$ , то можно выразить  $h_y = \Psi(h_x)$ .

Пусть  $G(x) = f(x) - \langle \lambda, \Phi(x) \rangle$ , где  $\lambda$  берется из необходимого условия экстремума.

Рассмотрим квадратичную форму  $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$ .

Тогда:

1. Если  $Q(h)$  положительно определена,  $a$  — точка минимума
2. Если  $Q(h)$  отрицательно определена,  $a$  — точка максимума
3. Если  $Q(h)$  не знакоопределена,  $a$  — не экстремум
4. Если  $Q(h)$  положительно определена, но вырождена, недостаточно информации

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= G(a+h) - G(a) \\ &= dG(a, h) + \frac{1}{2}d^2G(a, h) + o(|h|^2) \\ &= \frac{1}{2}d^2G(a, \tilde{h}) + o(|h|^2) > 0 \end{aligned}$$

Объяснение переходов:

1.  $a+h \in M_\Phi$
2. Формула Тейлора
3.  $a+\tilde{h}$  лежит на касательной поверхности,  $dG(a, h) = 0$ ,  $h \simeq \tilde{h}$

Это нестрогое доказательство, но этого нам достаточно. □

*Пример.*

- $f = x^2z^2 + y^3$
- $\Phi(x, y, z) = xyz - 6$

- $a = (1, 2, 3)$
- $\lambda = 1$

Найдем экстремум.

1.  $a$  — подозрительная точка?

$$G = x^2 z^2 + y^3 - 12x - 9y - 4z - xyz + 6$$

$$G'_x = 0 \quad 2xz^2 - 12 - yz = 0 \text{ — подходит}$$

В  $G'_y = 0, G'_z = 0$  — подходит

- 2.

$$\begin{aligned} d^2 G &= 2z^2 dx^2 + 2x^2 dz^2 + 6y dy^2 + 2(4xz - y) dx dz + 2(-x) dy dz - 2z dx dy \\ &\stackrel{\text{подст. } a}{=} 18dx^2 + 2dz^2 + 12dy^2 + 20dx dz - 2dy dz - 6dx dy \end{aligned}$$

Найдём знак этого выражения, если  $(dx, dy, dz)$  удовлетворяет  $d\Phi = 0$

$$yz dx + xz dy + xy dz = 0 \xrightarrow{\text{в точке } a} 6dx + 3dy + 2dz = 0 \Rightarrow dz = -3dx - \frac{3}{2}dy$$

$$\begin{aligned} d^2 G \Big|_{d\Phi=0} &= 18dx^2 + 2 \left( 3dx + \frac{3}{2} \right)^2 + 12dy^2 - 10dx(6dx + 3dy) + dy(6dx + 3dy) - 6dx dy \\ &= -24dx^2 + 19.5dy^2 + \dots dx dy \end{aligned}$$

Экстремума в  $a$  нет, т.к. форма неопределена, т.к.  $\begin{cases} dx = 1, dy = 0 \Rightarrow d^2 G < 0 \\ dx = 0, dy = 1 \Rightarrow d^2 G > 0 \end{cases}$

Такие задачи (где параметр — функция) называются вариационное исчисление.

## Функциональные последовательности и ряды

Теорема 1 (Стокса-Зайдля).

- $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $X$  — метрическое пространство
- $x_0 \in X$
- $f_n$  непрерывна в  $x_0$

$$\bullet f_n \xrightarrow[X]{} f$$

Тогда  $f$  непрерывна в  $x_0$ .

*Доказательство.*  $|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$  — верно  $\forall x, \forall n$

$$f_n \xrightarrow[X]{} f \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

Берем  $\forall \varepsilon > 0$  возьмём любой  $n$ , для которого выполняется (1). Тогда подчеркнутые слагаемые  $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Теперь для этого  $n$  подбираем  $U(x_0) : \forall x \in U(x_0) |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

*Примечание.* То же верно, если  $f_n, f : X \rightarrow Y$ , где  $Y$  — метрическое пространство.

*Примечание.* То же верно, если  $X$  — топологическое пространство, т.е. в нём определены открытые множества.

*Следствие 1.1.* Если  $f_n \in C(X)$ ,  $f_n \xrightarrow[X]{} f$ , тогда  $f \in C(X)$

*Примечание.* В теореме достаточно требовать  $f_n \xrightarrow[W(x_0)]{} f$

В следствии достаточно требовать локальную равномерную сходимость, т.е.

$$\forall x \in X \exists W(x) f_n \xrightarrow[W(x)]{} f$$

*Пример.*  $f_n(x) = x^n, x = (0, 1)$ .

$f_n(x) \rightarrow 0$  точно на  $X$

$f_n \not\xrightarrow{} 0$  на  $X$

Но есть локальная равномерная сходимость:

$$\sup_{x \in (\alpha, \beta)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (\alpha, \beta)} x^n = \beta^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{(\alpha, \beta)} f$$

**Теорема 2.**

- $X$  компакт
- $\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ , где  $f_1, f_2 \in C(X)$

Тогда пространство  $C(X)$  — полное метрическое пространство с метрикой  $\rho$ .

*Доказательство.*  $f_n$  — фундаментальная в  $C(X) \stackrel{\text{def}}{\iff}$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in X$  вещественная последовательность  $(f_n(x_0))$  фундаментальная  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) =: f(x_0)$ , тогда  $f$  — поточечный предел  $f_n$ . Проверим, что  $f_n \rightrightarrows f$  и  $f \in C(X)$ .

В (1) перейдем к пределу при  $m \rightarrow +\infty$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \rightrightarrows_X f \xrightarrow{\text{Стокс}} f \in C(X)$$

□

*Следствие 2.1.*  $(x_n)$  — последовательность в полном метрическом пространстве  $X$ ,  $x_n$  сходится  $\Leftrightarrow x_n$  фундаментальная.

$$f : \underbrace{X}_{\text{м.п.}} \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{м.п. полное}}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L \xLeftrightarrow[\text{критерий Больцано-Коши}] \forall \varepsilon > 0 \exists U(a) \forall x_1, x_2 \in U(a) \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

В  $C(X)$   $f_n \rightrightarrows_X f \Leftrightarrow$  фундаментальность:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (2)$$

$$\sup_{x \in X} |f_n - f| < \varepsilon \quad (3)$$

- (3)  $\Rightarrow$  (2)
- (2)  $\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n - f| \leq \varepsilon$ , но по двойной бухгалтерии это  $\Leftrightarrow$  (3)

## Предельный переход под знаком интеграла

“Теорема”  $f_n \rightarrow f \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Эта теорема неверная.

*Пример.*  $[a, b] = [0, 1]$

$$f_n(x) = nx^{n-1}(1-x^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) \equiv 0$$

$$\int_a^b f_n = \int_0^1 nx^{n-1}(1-x^n)dx \stackrel{y:=x^n}{=} \int_0^1 (1-y)dy = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x) = 0$$

Теорема 2.

- $f, f_n \in C[a, b]$
- $f_n \rightrightarrows f$  на  $[a, b]$

Тогда  $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Доказательство.

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a,b]} |f_n - f| (b - a) = \rho(f_n, f)(b - a) \rightarrow 0$$

□

Следствие 2.2 (Правило Лейбница).

- $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$
- $f, f'_y$  — непр. на  $[a, b] \times [c, d]$
- $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$

Тогда  $\Phi$  дифференцируема на  $[c, d]$  и  $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} &= \int_a^b \frac{f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx \\ &= \int_a^b f'_y\left(x, y + \frac{\Theta}{n}\right) dx \\ &= \int_a^b g_n(x, y) dx \end{aligned} \quad (4)$$

(4): по т. Лагранжа.

$g_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'_y(x, y)$  на  $x \in [a, b]$  по теореме Кантора о равномерной непрерывности, и мы считаем  $y$  фиксированным.

Таким образом,  $\Phi'(y) \leftarrow \frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \rightarrow \int_a^b f'_y(x, y) dx$

□

Теорема 3 (о предельном переходе под знаком производной).

- $f_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $f_n \rightarrow f$  поточечно на  $\langle a, b \rangle$

$$\bullet f'_n \xrightarrow[\langle a, b \rangle]{} \varphi$$

Тогда  $f \in C^1\langle a, b \rangle$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f \\ D \downarrow & & \vdots \downarrow \\ f'_n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \varphi \end{array}$$

Доказательство.  $\forall x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$ :

$$\begin{aligned} f'_n \xrightarrow{[x_0, x_1]} \varphi &\xrightarrow{\text{теорема 2}} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ &\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f(x_1) - f(x_0) &\xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f(x_1) - f(x_0) &\rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} f - \text{первообразная } \varphi \\ \varphi - \text{непр.} \end{cases} \Rightarrow f' = \varphi$$

□

## Равномерная сходимость функциональных рядов

**Определение.**

- $X$  — произвольное множество
- $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$

$\sum u_n(x)$  **сходится поточечно** (к сумме  $S(x)$ ) на  $X$ , если  $S_N(x) := \sum_{n=0}^N u_n(x)$ ,  $S_N(x) \rightarrow S(x)$  поточечно на  $X$ .

**Определение.**

- $X$  — произвольное множество
- $Y$  — нормированное пространство
- $u_n : X \rightarrow Y$

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  сходится к  $S(x)$  равномерно на  $E \subset X : S_N \xrightarrow[E]{N \rightarrow +\infty} S$

*Примечание.*  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится  $\Rightarrow \sum u_n(x)$  поточечно сходится к той же сумме.

*Доказательство.*

$$\sup_{x \in E} |S_N - S| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \forall x_0 \in E : |S_N(x_0) - S(x_0)| \leq \sup_{x \in E} |S_N - S| \rightarrow 0$$

□

*Примечание.* Остаток ряда:  $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$ ,  $S(x) = S_N(x) + R_N(x)$

Ряд сходится на  $E \Leftrightarrow R_N \xrightarrow[E]{} \mathbf{0}$  — тождественный ноль.

*Примечание.* Необходимое условие равномерной сходимости:  $\sum u_n(x)$  — сходится на  $E \Rightarrow u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

*Доказательство.*  $u_n = R_{n-1} - R_n$

□