# Математическая логика

Михайлов Максим

12 марта 2021 г.

# Оглавление

# Лекция 1

# 12 февраля

## 0. Мотивация

### 0.1. Математикам

**Аксиома 1** (Архимеда). Для любого $k > 0$ найдётся $n$, такое что $kn > 1$.

Под эту аксиому не подходят бесконечно малые числа и это является проблемой. Например, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$, но мы хотим уметь различать эти два числа. Ньютон предложил идею бесконечно малых чисел, откуда пошли последовательности. Возникает вопрос — что такое последовательность и что такое число?

Общепринятое определение целых чисел $\mathbb{N}$ происходит из теории множеств. Однако эта теория содержит в себе множество фундаментальных парадоксов, от которых нельзя избавиться.

Возникает вопрос — а что такое множество? Посмотрим на некоторое множество $A = \{x \mid x \notin x\}$. Содержит ли оно себя, $A \in A$? На этот вопрос нельзя ответить, это называется парадокс Рассела. Есть простой способ его разрешить — запретить ставить такой вопрос. Нет вопроса — нет парадокса. Существование такого парадокса ставит под вопрос существование любого множества — а существует ли $\mathbb{N}$? Может быть его существование парадоксально, просто мы не нашли этот парадокс. Пришло чуть более умное решение парадокса — запретим множества, содержащие себя. Таким образом вывели аксиоматику теории множеств *(Цермело — Френкеля)*.

*Пример.* Рассмотрим множество всех чисел, которые можно задать в $\leq 1000$ слов русского языка. Фраза “наименьшее число, которое нельзя задать в $\leq 1000$ слов” содержит $\leq 1000$ слов, т.е. такое число принадлежит искомому множеству — парадокс.

Возникает идея — человеческий язык порождает парадоксы, поэтому нужно задать новый язык, который их не порождает. Этот язык и является математической логикой.

### 0.2. Программистам

Математическая логика применяется в двух областях *(для программистов)*:

1. Языки программирования
2. Формальные доказательства

Для языков программирования матлогика применима как теория типов *(переменных)*.

Формальные доказательства нужны например для smart-контрактов, где корректность программы критически важна, т.к. если в нём есть ошибка, у вас злоумышленник заберет все деньги, а вы не сможете этот контракт откатить.

## 1. Исчисление высказываний

### 1.1. Язык

**Определение. Язык** содержит в себе:

1. **Пропозициональные переменные**

   $A_i'$ — большая буква начала латинского алфавита, возможно с индексом и/или штрихом.

2. **Связки**

   Пусть $\alpha, \beta$ — высказывания. Тогда $(\alpha \to \beta), (\alpha \mathbin{\&} \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg\alpha)$ — высказывания.

   $\alpha, \beta$ называются **метапеременными**.

*Примечание.* Математическая логика алгеброподобна *(а не анализоподобна)*, т.к. в ней много определений и мало доказательств.

### 1.2. Метаязык и предметный язык

У нас есть два различных языка — **предметный язык** и **метаязык**. Метаязык — русский, предметный язык мы определили выше.

*Пример.* $\alpha \to \beta$ — метавыражение; $A \to (A \to A)$ — предметное выражение.

*Обозначение.* Метапеременные обозначаются различными способами в зависимости от того, что они обозначают:

- Буквы греческого алфавита $(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi)$ — выражения
- Заглавные буквы конца латинского алфавита $(X, Y, Z)$ — произвольные переменные

*Пример.* $X \to Y \Rightarrow A \to B$ — подстановка переменных. Этот синтаксис не формален, мы будем записывать так:

$$(X \to Y)[X := A, Y := B] \equiv A \to B$$

*Соглашение.* символы логических операций не пишутся в метаязыке.

*Пример.*

$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := A, X := B] \equiv A \to (A \to B)$$
$$(\alpha \to (A \to X))[\alpha := (A \to P), X := B] \equiv (A \to P) \to (A \to B)$$

## 1.3. Сокращения записи

- $\vee, \&, \neg$ — скобки слева направо *(лево-ассоциативные операции) (не коммутативные)*
- $\to$ — правоассоциативная.

*Примечание.* Здесь операторы записаны в порядке их приоритета

*Пример.* Расставим скобки в следующем выражении:

$$A \to B \,\&\, C \to D$$

$$A \to ((B \,\&\, C) \to D)$$

## 1.4. Теория моделей

**Модель** состоит из:

*Обозначение.*

- $P$ — некоторое множество предметных переменных
- $\tau$ — множество высказываний предметного языка
- $V$ — множество истинных значений. Классическое — $\{\text{И}, \text{Л}\}$
- $[\![\ ]\!] : \tau \to V$ — оценка высказывания *(высказывание ставится в скобки).*

1. $[\![x]\!] : P \to V$ — задается при оценке.
2. $[\![\alpha \star \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \star [\![\beta]\!]$, где $\star$ есть логическая операция ( $\vee, \&, \neg, \to$), а $\star$ определено естественным образом как элемент метаязыка.

## 1.5. Теория доказательств

**Определение.** **Схема высказывания** — строка, соответствующая определению высказывания + метапеременные.

*Пример.*

$$(\alpha \to (\beta \to (A \to \alpha)))$$

10 схем аксиом:

1. $\alpha \to \beta \to \alpha$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \to \beta \to \alpha \,\&\, \beta$
4. $\alpha \,\&\, \beta \to \alpha$
5. $\alpha \,\&\, \beta \to \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

## 1.6. Правило Modus Ponens и доказательство

**Определение.** **Доказательство *(вывод)*** есть конечная последовательность высказываний $\alpha_1 \dots \alpha_n$, где $\alpha_i$ — либо аксиома, либо $\exists k, l < i : \alpha_k \equiv \alpha_l \to \alpha_i$ *(правило Modus Ponens)*

*Пример.* $\vdash A \to A$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \to A \to A$ | сх. акс. 1 |
| 2. | $A \to (A \to A) \to A$ | сх. акс. 1 |
| 3. | $(A \to (A \to A)) \to (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$ | сх. акс. 2 |
| 4. | $(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$ | M.P. 1, 3 |
| 5. | $A \to A$ | M.P. 2, 4 |

**Определение.** Доказательство $\alpha_1 \dots \alpha_n$ доказывает выражение $\beta$, если $\alpha_n \equiv \beta$

# Лекция 2

# 19 февраля

*Обозначение.* Большая греческая буква середины греческого алфавита ($\Gamma, \Delta, \Sigma$) — список высказываний.

**Определение** (следование). $\alpha$ следует из $\Gamma$ *(обозначается* $\Gamma \models \alpha$*)*, если $\Gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$ и всегда, когда все $[\![\gamma_i]\!] =$ И, то $[\![\alpha]\!] =$ И.

*Пример.* $\models \alpha$ — $\alpha$ общезначимо.

**Определение**. ~~Теория~~ Исчисление высказываний **корректно**, если при любом $\alpha$ из $\vdash \alpha$ следует $\models \alpha$.

**Определение**. Исчисление **полно**, если при любом $\alpha$ из $\models \alpha$ следует $\vdash \alpha$.

**Теорема 1** (о дедукции).

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$$

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, т.е. существует доказательство $\delta_1 \dots \delta_n$, где $\delta_n \equiv \alpha \to \beta$

Построим новое доказательство: $\delta_1 \dots \delta_n, \alpha$ (гипотеза) , $\beta$ (М.Р.). Эта новая последовательность — доказательство $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

$\Rightarrow$ Рассмотрим $\delta_1 \dots \delta_n, \Gamma, \alpha \vdash \beta$. Рассмотрим последовательность $\sigma_1 = \alpha \to \delta_1 \dots \sigma_n = \alpha \to \delta_n$. Это не доказательство.

Но эту последовательность можно дополнить до доказательства, так что каждый $\sigma_i$ есть аксиома, гипотеза или получается через М.Р. Докажем это.

*Доказательство.* **База**: $n = 0$ — очевидно.

**Переход**: пусть $\sigma_0 \dots \sigma_n$ — доказательство. Покажем, что между $\sigma_n$ и $\sigma_{n+1}$ можно добавить формулы так, что $\sigma_{n+1}$ будет доказуемо.

У нас есть 3 варианта обоснования $\delta_{n+1}$

1. $\delta_{n+1}$ — аксиома или гипотеза, $\not\equiv \alpha$

   Будем нумеровать дробными числами, потому что нам ничто это не запрещает, т.к. нам нужна только упорядоченность.

   $n + 0.2$ $\quad\delta_{n+1}$ — верно, т.к. это аксиома или гипотеза

   $n + 0.4$ $\quad\delta_{n+1} \to \alpha \to \delta_{n+1}$ (аксиома 1)

   $n + 1$ $\quad\alpha \to \delta_{n+1}$ (М.Р. $n + 0.2, n + 0.4$)

2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$

   $n + 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ — доказательство $\alpha \to \alpha$

3. $\delta_k \equiv \delta_l \to \delta_{n+1},\ k, l \leq n$

   $k$ $\quad\alpha \to (\delta_l \to \delta_{n+1})$

   $l$ $\quad\alpha \to \sigma_l$

   $n + 0.2$ $\quad(\alpha \to \sigma_l) \to (\alpha \to (\sigma_l \to \sigma_{n+1})) \to (\alpha \to \sigma_{n+1})$ (аксиома 2)

   $n + 0.4$ $\quad(\alpha \to \sigma_l \to \sigma_{n+1}) \to (\sigma \to \sigma_{n+1})$ (М.Р. $n + 2, l$)

   $n + 1$ $\quad\alpha \to \sigma_{n+1}$ (М.Р. $n + 0.4, k$)

$\square$

$\square$

**Теорема 2.** Пусть $\vdash \alpha$. Тогда $\models \alpha$.

*Доказательство.* Индукция по длине доказательства: каждая $[\![\delta_i]\!] =$ И, если $\delta_1 \dots \delta_n$ — доказательство $\alpha$

Рассмотрим $n$ и пусть $[\![\delta_1]\!] =$ И, $\dots [\![\delta_n]\!] =$ И.

Тогда рассмотрим основание $\delta_{n+1}$

1. $\delta_{n+1}$ — аксиома. Это упражнение.

   *Пример.* $\delta_{n+1} \equiv \alpha \to \beta \to \alpha$

$$\triangleleft [\![\alpha \to \beta \to \alpha]\!]^{[\![\alpha]\!]:=a, [\![\beta]\!]:=b} = \text{И}$$

| $a$ | $b$ | $\beta \to \alpha$ | $\alpha \to \beta \to \alpha$ |
|---|---|---|---|
| Л | Л | И | И |
| Л | И | Л | И |
| И | Л | И | И |
| И | И | И | И |

Аналогично можно доказать для остальных аксиом.

2. $\delta_{n+1}$ — М.Р. $\delta_k = \delta_l \to \delta_{n+1}$

   Фиксируем оценку. Тогда $[\![\delta_k]\!] = [\![\delta_l]\!] =$ И. Тогда:

   | $[\![\delta_k]\!]$ | $[\![\delta_{n+1}]\!]$ | $[\![\delta_k]\!] = [\![\delta_l \to \delta_{n+1}]\!]$ |
   |---|---|---|
   | Л | Л | И |
   | Л | И | И |
   | И | Л | Л |
   | И | И | И |

   Первых трёх вариантов не может быть в силу $[\![\delta_k]\!] = [\![\delta_l]\!] =$ И. Таким образом, $[\![\delta_{n+1}]\!] =$ И.

□

**Теорема 3** (о полноте). Пусть $\models \alpha$. Тогда $\vdash \alpha$.

Фиксируем набор переменных из $\alpha$: $P_1 \dots P_n$.

Рассмотрим $[\![\alpha]\!]^{P_1 := x_1 \dots P_n := x_n} =$ И

*Обозначение.* $_{[\beta]}\alpha \equiv \begin{cases} \alpha, & [\![\beta]\!] = \text{И} \\ \neg\alpha, & [\![\beta]\!] = \text{Л} \end{cases}$ и $_{[x]}\alpha \equiv \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg\alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$

Докажем, что $\underbrace{_{[x_1]}P_1, \dots {}_{[x_n]}P_n}_{\Pi} \vdash {}_{[\alpha]}\alpha$

*Доказательство.* По индукции по длине формулы:

**База**: $\alpha = P_i$ $_{[P_i]}P_i \vdash {}_{[P_i]}P_i$, значит $\Pi \vdash {}_{[P_i]}P_i$

**Переход**: пусть $\eta, \zeta : \Pi \vdash {}_{[\eta]}\eta, \Pi \vdash {}_{[\zeta]}\zeta$ *(по индукционному предположению)*. Покажем, что $\Pi \vdash {}_{[\eta \star \zeta]}\eta \star \zeta$, где $\star$ — все связки

Это упражнение. □

**Лемма 1.** $\Gamma, \eta \vdash \zeta, \Gamma, \neg\eta \vdash \zeta$. Тогда $\Gamma \vdash \zeta$.

*Доказательство.* Было в ДЗ. □

*Доказательство теоремы о полноте.* $\models \alpha$, т.е. ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_n]}P_n \vdash {}_{[\alpha]}\alpha$. Но $[\![\alpha]\!] = \text{И}$ при любой оценке. Тогда ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_n]}P_n \vdash \alpha$ при все $x_i$.

**Лемма 2** (об исключении допущения). Если ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_n]}P_n \vdash \alpha$ и ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_n]}\neg P_n \vdash \alpha$, то ${}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_{n-1}]}P_{n-1} \vdash \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} {}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_{n-1}]}P_{n-1}, P_n \vdash \alpha \\ {}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_{n-1}]}P_{n-1}, \neg P_n \vdash \alpha \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{по лемме}} {}_{[x_1]}P_1 \dots {}_{[x_{n-1}]}P_{n-1} \vdash \alpha$$

□

# 2. Интуиционистская логика

## 2.1. ВНК-интерпретация

Определим выражения:

- $\alpha \,\&\, \beta$ — есть $\alpha$ и $\beta$
- $\alpha \vee \beta$ — есть $\alpha$ либо $\beta$ и мы знаем, какое
- $\alpha \to \beta$ — есть способ перестроить $\alpha$ в $\beta$
- $\perp$ — конструкция без построения *(bottom)*
- $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$

**Теория доказательств** есть классическая логика без десятой схемы аксиомы, вместо нее $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$

**Теория моделей** — теория, в которой $[\![\alpha]\!]$ — открытое множество в $\Omega$ — топологическом пространстве.

В ней определено следующее:

$$\begin{aligned} [\![\alpha \,\&\, \beta]\!] &= [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \vee \beta]\!] &= [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \to \beta]\!] &= ((X \setminus [\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!])^\circ \\ [\![\perp]\!] &= \varnothing \\ [\![\neg\alpha]\!] &= (X \setminus [\![\alpha]\!])^\circ \end{aligned}$$

# Лекция 3

# 26 февраля

## 2.2. Естественный *(натуральный)* вывод

Рассмотрим новый способ записи доказательств — в виде деревьев, называемый естественным выводом.

Тогда язык будет состоять из переменных $A \dots Z, \vee, \&, \perp, \vdash, -$

У нас используются следующие правила вывода:

1. $\dfrac{}{\Gamma \vdash \gamma, \gamma \in \Gamma}$ (аксиома)
2. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$ (введение $\to$)
3. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}$ (введение &)
4. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$ (удаление $\to$)
5. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$ (удаление &)
6. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}{\Gamma \vdash \psi}$ (удаление &)
7. $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi}$ (введение $\vee$)
8. $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi}$ (введение $\vee$)
9. $\dfrac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$ (удаление $\perp$)

10. $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \qquad \Gamma, \psi \vdash \rho \qquad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho}$$

*Пример.* $$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{(акс.)}}{\vdash A \to A}\text{(введение \&)}$$

*Пример.* $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\text{(акс.)}}{A \,\&\, B \vdash B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\text{(акс.)}}{A \,\&\, B \vdash A}}{A \,\&\, B \vdash B \,\&\, A}}{\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A}\text{(введение }\to\text{)}$$

## 2.3. Теория решеток

**Определение.**

- **Частичный порядок** — рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение.
- **Линейный порядок** — сравнимы любые два элемента.
- **Наименьший элемент** $S$ — такой $k \in S$, что если $x \in S$, то $k \le x$
- **Минимальный элемент** $S$ — такой $k \in S$, что нет $x \in S$, что $x \le k$
- **Множество верхних граней** $a$ и $b$ : $\{x \mid a \le x \,\&\, b \le x\}$.
- **Множество нижних граней** $a$ и $b$ : $\{x \mid x \le a \,\&\, x \le b\}$.
- $a+b$ — наименьший элемент множества верхних граней *(может не существовать)*.
- $a \cdot b$ — наибольший элемент множества нижних граней.
- **Решетка** — множество + отношение, где для каждых $a, b$ есть как $a + b$, так и $a \cdot b$.
- **Дистрибутивная решетка** — если всегда $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

**Лемма 3.** В дистрибутивной решетке $a + b \cdot c = (a + b)(a + c)$

**Определение.**

- **Псевдодполнение** $a$ и $b$ обозначается $a \to b$ и равно наибольшему элементу множества $\{c \mid a \cdot c \le b\}$
- **Импликативная решетка** — решетка, где $\forall a, b \ \exists a \to b$
- $0$ — наименьший элемент решетки.
- $1$ — наибольший элемент решетки.
- **Псевдобулева алгебра *(алгебра Гейтинга)*** — импликативная решетка с нулём.
- **Булева алгебра** — псевдобулева алгебра, такая что $a + (a \to 0) = 1$

*Пример.*

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & b \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ a & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= 0 \\ 1 \cdot b &= b \\ a \cdot b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{aligned}$$

**Лемма 4.** В импликативной решетке всегда есть 1.

*Доказательство.* Возьмём $a \to a = 1$ для некоторого $a$.

$$a \to a = \text{н}\{x \mid a \cdot x \le a\} = \text{н}(A)$$

Таким образом, $A$ имеет наибольший элемент и это $a \to a$ □

**Теорема 4.**

- Любая алгебра Гейтинга — модель интуиционистского исчисления высказываний.
- Любая булева алгебра — модель классического исчисления высказываний.

**Определение** (топология). Рассмотрим множество $X$, называемое "носитель" и $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ — подмножество подмножеств $X$, называемое "топология", такое что:

1. $\bigcup_\alpha x_i \in \Omega$, где $x_i \in \Omega$
2. $\bigcap_{i=1}^n x_i \in \Omega$, где $x_i \in \Omega$
3. $\varnothing \in \Omega, X \in \Omega$

*Пример.* Пусть $X$ — узлы дерева, $\Omega$ — все множества узлов, которые содержат узлы вместе со всеми потомками.

**Теорема 5.** Пусть $(X, \Omega)$ — топологическое пространство, $a + b = a \cup b$, $a \cdot b = a \cap b$, $a \to b = ((X \setminus a) \subset b)^\circ$, $a \le b \Leftrightarrow a \le b$, тогда $(\Omega, \le)$ есть алгебра Гейтинга.

*Пример.* Дискретная топология — $\Omega = \mathcal{P}(X)$. Тогда $(\Omega, \le)$ — булева алгебра.

1. $X^0 = X$
2. $a \to 0 = (X \setminus a \cup \varnothing) = X \setminus a$

Таким образом, $a + (a \to 0) = a + X \setminus a = X$

**Определение**. Пусть $X$ — все формулы логики. Определим отношение порядка $\alpha \leq \beta$ это $\alpha \vdash \beta$. Будем говорить, что $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$.

$(X/_{\approx}, \leq)$ есть алгебра Гейтинга.

**Определение**. $(X/_{\approx}, \leq)$ — **алгебра Линденбаума**, где $X, \approx$ из интуиционистской логики.

**Теорема 6**. Алгебра Гейтинга — полная модель интуиционистской логики.

*Доказательство.* $\models \alpha$ — истинно в любой алгебре Гейтинга, в частности в $(X/_{\approx}, \leq)$. $[\![\alpha]\!] = 1$, т.е. $[\![\alpha]\!] = [\![A \to A]\!]$, т.е. $\alpha \in [A \to A]_{\approx}$, т.е. $A \to A \vdash \alpha$. $\square$

# Лекция 4

# 5 марта

**Определение.** **Полный порядок** — линейный, где в каждом подмножестве есть наименьший элемент. Множество с полным порядком называют **вполне упорядоченным**.

*Пример.* $\mathbb{N}$ — вполне упорядоченное множество

$\mathbb{R}$ — не вполне упорядоченное множество, т.к. $(a, b)$ не имеет наименьшего $\forall a, b$. Кроме того, $\mathbb{R}$ не имеет наименьшего.

**Определение.** **Предпорядок** — транзитивное, рефлексивное отношение.

Как мы знаем из домашнего задания, по предпорядку можно построить частичный порядок, сжав компоненты связности в классы эквивалентности.

## 2.4. Табличные модели

**Определение.** **Табличная модель** для интуиционистского исчисления высказываний:

- $V$ — множество истинностных значений
- $f_\to, f_\&, f_\vee : V^2 \to V$
- Выделенное истинное значение $T \in V$
- Оценка переменных $[\![P_i]\!] \in V$, $f_\mathcal{P} : P_i \to V$

И $[\![P_i]\!] = f_\mathcal{P}(P_i)$, $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_\star([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$, $[\![\neg\alpha]\!] = f_\neg([\![\alpha]\!])$

$\models \alpha$ означает, что $[\![\alpha]\!] = T$ при любой $f_\mathcal{P}$

**Определение.** **Конечная** табличная модель — табличная модель с конечным $V$.

**Теорема 7.** У интуиционистского исчисления высказываний не существует корректной полной табличной модели.

Неформально эта теорема говорит, что нельзя считать, что в интуиционистской логике есть три значения — истинна, ложь и “неизвестно”.

## 2.5. Модели Крипке

Идея моделей Крипке следующая: общезначимое утверждение истинно во всех мирах.

**Определение** (модели Крипке).

1. $W = \{W_i\}$ — множество миров
2. $\leq$ — частичный порядок на $W$
3. Отношение вынужденности $W_j \Vdash P_i$, где $P_i$ — переменная, т.е. $(\Vdash) \subset W \times \mathcal{P}$

При этом, если $W_j \Vdash P_i$ и $W_j \leq W_k$, то $W_k \Vdash P_i$

**Определение**.

- $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, тогда *(и только тогда)* $W_i \Vdash \alpha \& \beta$
- $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, тогда *(и только тогда)* $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
- Пусть во всех $W_i \leq W_j$ всегда, когда $W_j \Vdash \alpha$, имеет место $W_j \Vdash \beta$. Тогда $W_i \Vdash \alpha \to \beta$
- $W_i \Vdash \neg\alpha$ значит, что $\alpha$ не вынуждено нигде, начиная с $W_i$: $W_i \leq W_j \Rightarrow W_j \nVdash \alpha$

**Теорема 8**. Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \leq W_j$, то $W_i \Vdash \alpha$

**Определение**. Если $W_i \Vdash \alpha$ при всех $W_i \in W$, то $\models \alpha$

**Теорема 9**. ИИВ корректно в моделях Крипке.

*Доказательство.* Рассмотрим $(W, \Omega)$ — топологию, где $\Omega = \{w \subset W \mid \text{если } w_i \in w, w_i \leq w_j, \text{ то } w_j \in w\}$. Это можно представить как множество подлесов, где любая вершина входит со своими потомками.

$\{W_k \mid W_k \Vdash P_j\}$ — открытое множество, что очевидно из определения $\Omega$ и $\Vdash$.

Примем $[\![P_i]\!] = \{W_k \mid W_k \Vdash P_j\}$ и аналогично $[\![\alpha]\!] = \{W_k \mid W_k \Vdash \alpha\}$. Корректность этого определения докажем в ДЗ.

Поскольку любая топология является корректной моделью ИИВ, искомое доказано. □

*Доказательство теоремы о нетабличности.* Предположим обратное, т.е. существует конечная табличная модель, $|V| = n$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$\varphi_n = \bigvee_{\substack{1 \leq i,j \leq n+1 \\ i \neq j}} (P_i \to P_j \& P_j \to P_i)$$

1. $\nvdash \varphi_n$. Почему? Рассмотрим последовательность миров, таких что $W_i \Vdash P_i$, состоящую из $n+1$ мира. Тогда $W_i \nVdash (P_i \to P_j) \mathbin{\&} (P_k \to P_j)$, таким образом $\nVdash (P_i \to P_j) \mathbin{\&} (P_k \to P_j)$ и $\nVdash \bigvee(P_i \to P_j) \mathbin{\&} (P_k \to P_j)$, а значит $\nvdash \varphi_n$
2. $\models \varphi_n$ в $V$ по принципу Дирихле: $\exists i \neq j : [\![P_i]\!] = [\![P_j]\!]$, а значит $[\![P_i \to P_j]\!] =$ И, и соответственно $[\![\varphi_n]\!] =$ И.

Т.к. $\models \varphi_n$, то $\vdash \varphi_n$, но это не так — противоречие. □

**Определение**. Дизъюнктинвость ИИВ: $\vdash \alpha \vee \beta$ влечет $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

**Определение**. **Алгебра Гёделя** — алгебра Гейтинга, в которой из $a+b=1$ следует $a=1$ или $b=1$

**Определение**. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Гейтинга. Тогда $\Gamma(\mathcal{A})$ получается переименовыванием $1$ в $\omega$ и добавлением нового элемента $1_{\Gamma(\mathcal{A})}$, являющегося единицей для новой алгебры.

**Теорема 10**. $\Gamma(\mathcal{A})$ есть алгебра Гейтинга и $\Gamma(\mathcal{A})$ Гёделева.

*Доказательство.* Очевидно. □

**Определение**. **Гомоморфизм алгебр Гейтинга** — отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — алгебры Гейтинга, $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$, $\varphi(1_\mathcal{A}) = 1_\mathcal{B}$, $\varphi(0_\mathcal{A}) = 0_\mathcal{B}$

**Теорема 11**. Если $a \leq b$, то $\varphi(a) \leq \varphi(b)$

**Определение**. Пусть $\alpha$ — формула ИИВ, $f, g$ — оценки ИИВ, где $f$ : ИИВ $\to \mathcal{A}$, $g$ : ИИВ $\to \mathcal{B}$. Тогда $\varphi$ **согласовано** с $f, g$, если $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

**Теорема 12**. Если $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ согласована с $f, g$ и $[\![\alpha]\!]_g \neq 1_\mathcal{B}$, то $[\![\alpha]\!]_f \neq 1_\mathcal{A}$

*Доказательство.* Рассмотрим алгебру Линденбаума $\mathcal{L}$, $\Gamma(\mathcal{L})$ и $\varphi : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$ — гомоморфизм.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1_\mathcal{L}, x = \omega \\ 1_\mathcal{L}, x = 1_{\Gamma(\mathcal{L})} \\ x, \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$. Тогда $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$, но по Гёделевости $\Gamma(\mathcal{L})$ $[\![\alpha]\!] = 1$ или $[\![\beta]\!] = 1$.

Пусть $\nvdash \alpha$ и $\nvdash \beta$. Тогда $\varphi([\![\alpha]\!]) \neq 1_\mathcal{L}$ и $\varphi([\![\beta]\!]) \neq 1_\mathcal{L}$. Тогда $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_\mathcal{L}, [\![\beta]\!] \neq 1_\mathcal{L}$ — противоречие. □