

Определение. $U : X \rightarrow X$, такой что:

1. $\forall x, y \quad \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$
2. $\forall x \quad \|Ux\| = \|x\|$
3. $U^* = U^{-1} \Leftrightarrow U^*U = UU^* = I$

называется **унитарным оператором**

Теорема 1. Свойства 1,2 и 3 эквивалентны.

Доказательство. • $1 \Rightarrow 2$

$$\begin{aligned} \forall x, y \quad \langle Ux, Uy \rangle &= \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\Rightarrow} \|Ux\| = \|x\| \\ \|Ux\|^2 &= \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \end{aligned}$$

• $2 \Rightarrow 3$

$$\begin{aligned} \|Ux\| = \|x\| &\stackrel{?}{\Rightarrow} U^*U = I \\ \|Ux\|^2 &= \langle Ux, Ux \rangle = \langle U^*Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle \\ U^*U &= I \end{aligned}$$

• $3 \Rightarrow 1$

$$\begin{aligned} U^* &= U^{-1} \stackrel{?}{\Rightarrow} \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \\ \langle Ux, Uy \rangle &= \langle U^*Ux, y \rangle = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

□

Лемма 1. $|\det U| = 1$

Доказательство.

$$1 = \det I = \det(U^*U) = \det U^* \det U \stackrel{\text{def}}{=} \det \overline{U}^T \det U = \det \overline{U} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U|^2$$

□

Лемма 2. Матрица унитарного преобразования обладает свойством ортогональности по строкам и столбцам.

Доказательство. Здесь \mathcal{U} - оператор, U - его матрица:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \leftrightarrow U &= \|U_{ij}\| \\ \mathcal{U}^*\mathcal{U} &= I \Rightarrow U^+U = E \end{aligned}$$

В следующей строке подразумевается $\forall i, k$

$$\sum_{j=1}^n \bar{U}_{ji} U_{jk} = \sum_{j=1}^n (\bar{U}^T)_{ij} U_{jk} = \delta_{ik}$$

□

Пример. Матрица поворота - ортогональное преобразование.

Лемма 3. Множество унитарных операторов образует мультипликативную группу $U(n)$:

1. $U_1, U_2 \in U(n) \Rightarrow U_1 \cdot U_2 \in U(n)$
2. $\exists I : I^* = I$
3. $\forall U \exists U^{-1} = U^*$
4. $U_1(U_2 U_3) = (U_1 U_2) U_3 = U_1 U_2 U_3$

Доказательство. 1. $U_1 U_2$ - унитарный?

$$\langle U_1 U_2 x, U_1 U_2 y \rangle = \langle U_1^* U_1 U_2 x, U_2 y \rangle = \langle U_2 x, U_2 y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Остальное очевидно.

□

$U(n)$ называется **унитарной группой операторов над унитарным пространством X , $\dim X = n$**

$$\triangleleft SU(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{U \in U(n) : \det U = 1\}$$

Лемма 4. $SU(n)$ — подгруппа $U(n)$

Лемма 5. Все собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице.

$$\lambda \in \sigma_U \Rightarrow |\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = e^{i\varphi}$$

Доказательство. $]Ux = \lambda x$

$$||x|| = ||Ux|| = ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$$

□

Лемма 6. Собственные вектора U , отвечающие различным собственным значениям, являются ортогональными.

Доказательство.

□

Лемма 7. Любое инвариантное подпространство U является приводящим.

$$X = L + L^\perp \quad y \in L^\perp \Rightarrow Uy \in L^\perp$$

Доказательство.

$$\langle y \in L^\perp : 0 \langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle = 0$$

□

Теорема 2. Из собственных векторов унитарного оператора можно построить ортонормированный базис.

Доказательство. Очевидно от противного, как с эрмитовым оператором. □

Примечание. Унитарный оператор имеет скалярный тип, ортогональный оператор (унитарный, но над \mathbb{C}) может не иметь.

Теорема 3. Спектральная теорема для унитарного оператора:

$$U = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^n e^{i\varphi_j} \langle e^j, \cdot \rangle e_j$$

Теорема 4. Эрмитова матрица может быть приведена к диагональной форме унитарным преобразованием:

$$\varphi^* = \varphi \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(n) : A_\varphi^d = U^+ A_\varphi U$$

Доказательство.

$$A_\varphi^d = T^{-1} A_\varphi T$$

T — состоит из собственных векторов φ , но $\varphi^* = \varphi \Rightarrow$ столбцы T ортогональны $\Rightarrow T = U \leftrightarrow U \in \mathcal{U}(n)$ □

Примечание. φ — эрмитовский оператор $\Rightarrow e^{i\varphi}$ — унитарный оператор.

Доказательство.

$$(e^{i\varphi})^* = e^{-i\varphi^*} = e^{-i\varphi}$$

$$(e^{i\varphi})^* e^{i\varphi} = I$$

□

Квадратичные формы

X — линейное пространство

Определение. Отображение $b : X \times X \rightarrow K$ — **билинейная форма**, если выполняется следующее:

$$1. K = \mathbb{R} : b(x, y) = b(y, x) \quad b(\alpha x + y, z) = \alpha b(x, z) + b(y, z)$$

$$2. K = \mathbb{C} : b(x, y) = \overline{b(y, x)} \quad b(\alpha x + y, z) = \overline{\alpha} b(x, z) + b(y, z)$$

Примечание. $b \in \Omega_0^2$ — тензор типа $(2, 0)$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X

$$\forall x, y \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k$$

$$b(x, y) = b\left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j, \sum_{k=1}^n \eta^k e_k\right) = \sum_{k,j=1}^n \bar{\xi}^j \eta^k \cdot \underbrace{b(e_j, e_k)}_{\text{элемент тензора } b} = \sum_{k,j=1}^n \bar{\xi}^j \eta^k b_{jk}$$

Примечание. В матричной форме $b(x, y) = \xi^+ B \eta$

Определение. Квадратичной формой, соответствующей билинейной форме b , называется отображение q :

$$q(x) = b(x, x)$$

Лемма 8. $\{e_j\}_{j=1}^n \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n \Rightarrow \tilde{Q} = T^T Q T$

Доказательство. Очевидно. □

Скipped до конца лекции.