

# Оглавление

Лекция 1	8 февраля	2
1	Интеграл . . . . .	4
1.1	Измеримые функции . . . . .	4
1.2	Меры Лебега-Стилтьеса . . . . .	8
Лекция 2	15 февраля	9
1.3	Сходимость почти везде и по мере . . . . .	12
2	Интеграл . . . . .	16
Лекция 3	22 февраля	18
2.1	Предельный переход под знаком интеграла . . . . .	22
Лекция 4	1 марта	26
3	Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле. . . . .	31
Лекция 5	15 марта	34
4	Возвращаемся в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	36
Лекция 6	22 марта	41
4.1	Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	41
5	Произведение мер . . . . .	43

# Лекция 1

## 8 февраля

Лемма 1 (о структуре компактного оператора).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда  $\exists$  ортонормированные базисы  $g_1 \dots g_m$  и  $h_1 \dots h_m$ , а также  $\exists s_1 \dots s_m > 0$ , такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И  $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$ .

*Примечание.* Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

*Доказательство.*  $W := V^*V$  — самосопряженный оператор (матрица симметрична относительно диагонали).

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа:  $c_1 \dots c_m$  — вещественные (возможно с повторениями)
- Собственные векторы:  $g_1 \dots g_m$  — ортонормированные

*Примечание.* Пока мы в  $\mathbb{R}^m$  (а не в  $\mathbb{C}^m$ ), \* есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- (1): т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .

- (2): из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^m V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом,  $c_i > 0$ .

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \stackrel{\text{def } h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \stackrel{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \stackrel{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- (3): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- (4): т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .
- (5): при  $i \neq j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 0$  в силу ортогональности, а при  $i = j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 1$  в силу ортонормированности и  $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i} \sqrt{c_i}} = 1$

Примечание.  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  — символ Кронекера.

Таким образом,  $\{h_i\}$  ортонормирован.

$$V(x) \stackrel{\text{def } x}{=} V \left( \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i \right) \stackrel{(6)}{=} \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) \stackrel{\text{def } h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \stackrel{(7)}{=} \det(V^* V) \stackrel{\text{def } W}{=} \det W \stackrel{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

**Теорема 1** (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

---

(6): в силу линейности  $V$

(7): в силу мультипликативности  $\det$  и инвариантности относительно транспонирования.

(8): т.к.  $\det$  инвариантен по базису и в базисе собственных векторов  $\det W = c_1 \dots c_m$ .

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение

Тогда  $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$  и  $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

*Доказательство.*

1. Если  $\det V = 0$   $\text{Im}(V)$  — подпространство в  $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$  по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда  $\forall E \quad V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если  $\det V \neq 0$   $\mu E := \lambda(V(E))$  — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$  по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти  $k$ , для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например  $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$  — единичный куб на векторах  $g_i$ .

$V(g_i) = s_i h_i$ . Таким образом,  $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ .

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом,  $k = |\det V|$

□

## 1 Интеграл

### 1.1 Измеримые функции

**Определение.**

1.  $E$  — множество,  $E = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i$  — разбиение множества.
2.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \quad f|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

*Пример.*

1. Характеристическая функция множества  $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$

2.  $f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$ , где  $X = \bigsqcup e_i$

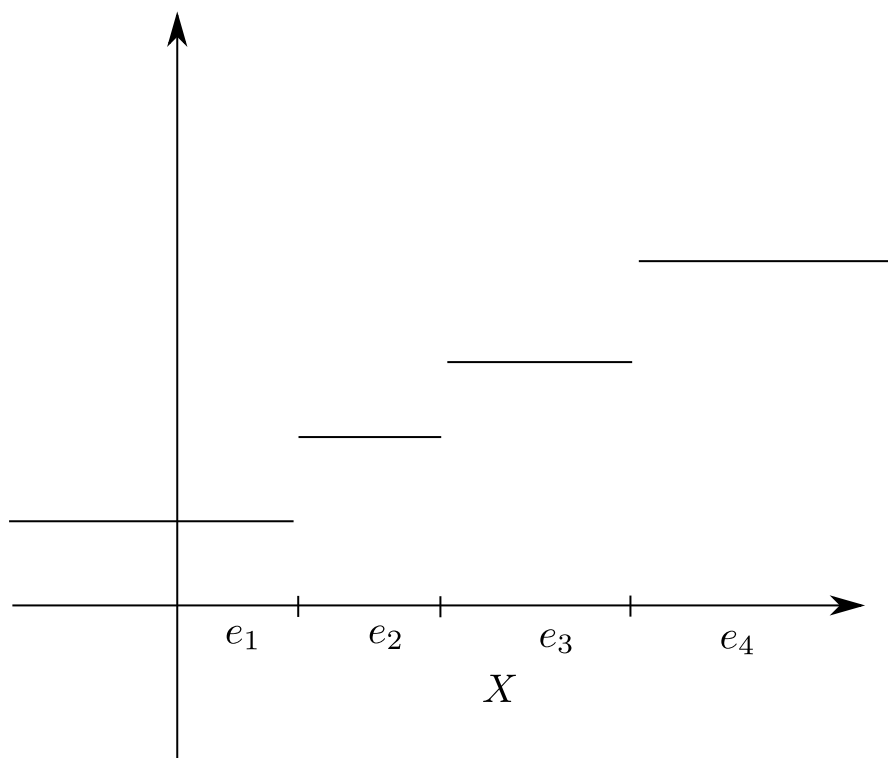


Рис. 1.1: Ступенчатая функция

Свойства.

1.  $\forall f, g$  — ступенчатые:

$\exists$  разбиение  $X$ , допустимое и для  $f$ , и для  $g$ :

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} \quad g = \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k}$$

$$f = \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} \quad g = \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k}$$

2.  $f, g$  — ступенчатые,  $\alpha \in \mathbb{R}$

Тогда  $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$  — ступенчатые.

**Определение.**  $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$  — лебегово множество функции  $f$

Аналогично можно использовать  $E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a)$

*Примечание.*

$$E(f \geq a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \geq a)^c$$

$$E(f \leq a) = \bigcap_{b>a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

**Определение.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

$f$  **измерима** на множестве  $E$ , если  $\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$  измеримо, т.е.  $\in \mathfrak{A}$

Вместо “ $f$  измерима на  $X$ ” говорят просто “измерима”.

Если  $X = \mathbb{R}^m$ , мера — мера Лебега, тогда  $f$  — измеримо по Лебегу.

*Примечание.* Эквивалентны:

1.  $\forall a \quad E(f < a)$  — измеримо
2.  $\forall a \quad E(f \leq a)$  — измеримо
3.  $\forall a \quad E(f > a)$  — измеримо
4.  $\forall a \quad E(f \geq a)$  — измеримо

*Доказательство.* Тривиально по соображениям выше. □

*Пример.*

1.  $E \subset X, E$  — измеримо  $\Rightarrow \chi_E$  — измеримо.

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \emptyset, & a < 0 \\ X \setminus E, & 0 \leq a \leq 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2.  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывно. Тогда  $f$  — измеримо по Лебегу.

*Доказательство.*  $f^{-1}((-\infty, a))$  открыто по топологическому определению открытости, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

*Свойства.*

1.  $f$  измеримо на  $E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \quad E(f = a)$  измеримо.

В обратную сторону неверно, пример —  $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$

2.  $f$  — измеримо  $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha f$  — измеримо.

$$\text{Доказательство. } E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \geq 0 \\ \emptyset, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases} \quad \square$$

3.  $f$  — измеримо на  $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$  измеримо на  $E = \bigcup E_k$

4.  $f$  — измеримо на  $E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f$  измеримо на  $E'$

$$\text{Доказательство. } E'(f < a) = E(f < a) \cap E' \quad \square$$

5.  $f \neq 0$ , измеримо на  $E \Rightarrow \frac{1}{f}$  измеримо на  $E$ .

6.  $f \geq 0$ , измеримо на  $E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$  измеримо на  $E$ .

**Это неверно**, т.к. при  $f \equiv 0, \alpha = -1 \nexists f^\alpha$

**Теорема 2.**  $f_n$  — измеримо на  $X$ . Тогда:

1.  $\sup f_n, \inf f_n$  измеримо.

2.  $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$  измеримо.

3. Если  $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$ , то  $h(x)$  измеримо.

*Доказательство.*

1.  $g = \sup f_n \quad X(g > a) \stackrel{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$  и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

(9):

•  $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(g > a)$ , то  $g(x) > a$ .

$$\sup_n f_n(x) = g(x) > a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

•  $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(f_n > a)$ , то  $f_n(x) > a$ , следовательно  $g(x) > a$ .

2.  $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$ . Т.к.  $\sup$  и  $\inf$  измерим,  $\overline{\lim} f_n$  тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если  $\exists \lim$ , то  $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

$\square$

## 1.2 Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$  —  $\sigma$ -конечный объем (и даже  $\sigma$ -конечная мера на  $\mathcal{P}^1$ )

Также можно определить для монотонной, но непрерывной  $g$ . Тогда в точках разрыва  $\exists g(a+0), g(a-0)$ . Пусть  $\mu[a, b) = g(b-0) - g(a-0)$ . Такое изменение нужно, потому что исходное  $\mu$  не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру  $\mu_g$  на некоторой  $\sigma$ -алгебре. Это мера Лебега-Стилтьеса.

*Пример.*  $g(x) = [x]$ , тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если  $\mu_g$  определена на Борелевской  $\sigma$ -алгебре, то она называется мерой Бореля-Стилтьеса.



# Лекция 2

## 15 февраля

Теорема 3 (о характеристике измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

Тогда  $\exists f_n$  — ступенчатые:

1.  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2.  $\forall x \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Доказательство.

$$e_k^{(n)} = X \left( \frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n} \right) \quad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

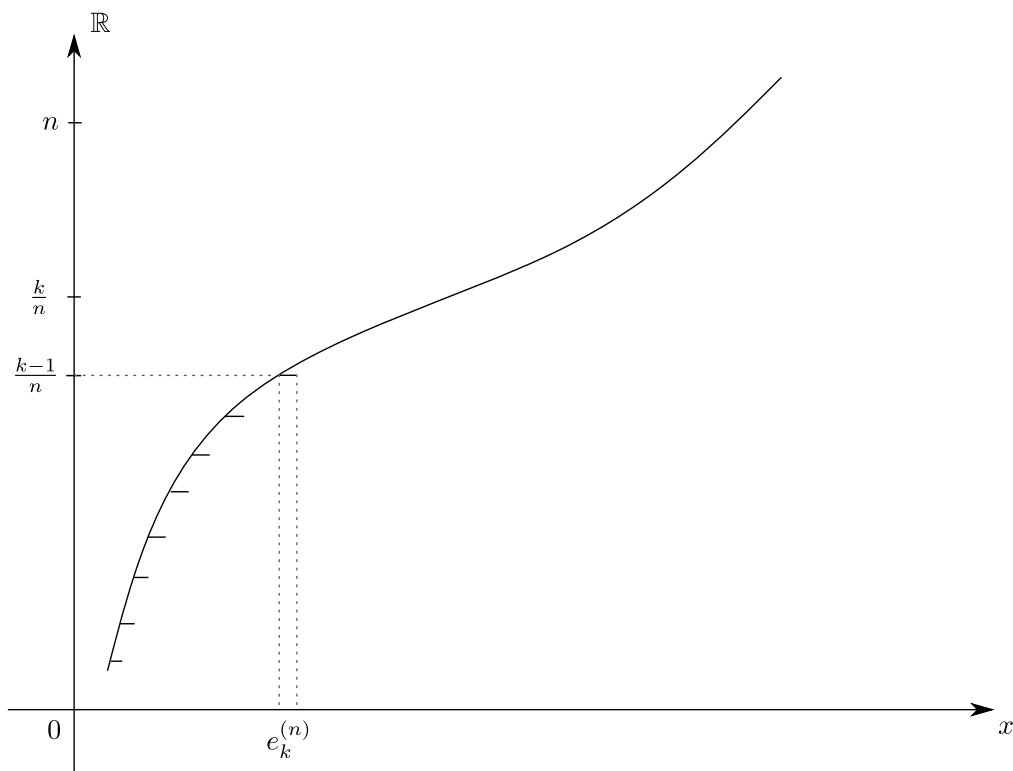
$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

Не дописано.

□

Следствие 3.1.



- $f$  — измеримо

Тогда  $\exists f_n$  — измеримые :  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  всюду и  $|f_n| \leq |f|$

*Доказательство.* Рассмотрим срезки  $f^+, f^-$ , дальше очевидно. □

*Следствие 3.2.*

- $f, g$  — измеримо

Тогда  $fg$  — измеримо, если  $0 \cdot \infty = 0$ .

*Доказательство.*

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \rightarrow fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела. □

*Следствие 3.3.*

- $f, g$  — измеримо

Тогда  $f + g$  измеримо.

*Примечание.* Считаем, что  $\forall x$  не может быть одновременно  $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$ .

*Доказательство.*

$$f_n + g_n \rightarrow f + g$$

□

**Теорема 4** (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры).

*Примечание.*  $A \subset X$  — **полной меры**, если  $\mu(X \setminus A) = 0$ .

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- $f$  — непрерывно на  $E' = E \setminus e$

Тогда  $f$  — измеримо.

*Доказательство.*  $f$  — измеримо на  $E'$ , т.к.  $E'(f < a)$  открыто в  $E'$  по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e, \lambda_m$  — полная  $\Rightarrow e(f < a)$  — измеримо в  $E$ .

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$ , объединение измеримых множеств измеримо. □

*Пример.*  $E = \mathbb{R}, f = \chi_{\text{Irr}}$ , где Irr — множество иррациональных чисел.  $f$  непр. на Irr и разрывно на  $\mathbb{R}$ .

*Следствие 4.1.*

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- $f$  измеримо на  $E'$

Тогда можно так переопределить  $f$  на  $e$ , что полученная функция  $\tilde{f}$  будет измерима.

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E' \\ \text{const}, & x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f < a)} \cup \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\emptyset \text{ или } e}$$

□

*Следствие 4.2.*  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — монотонна.

Тогда  $f$  измерима.

*Доказательство.*  $f$  — непрерывно на  $\langle a, b \rangle$  за исключением, возможно, счётного множества точек. □

*Упражнение.*  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывна.

Доказать:  $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$  — измеримо.

*Упражнение.*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримо.

Доказать:  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$  — измеримо.

*Упражнение.* Доказать, что  $\exists$  измеримая функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \lambda e = 0$ , если  $f$  непрерывно на  $e$ , то полученная  $\tilde{f}$  разрывна всюду.

### 1.3 Сходимость почти везде и по мере

**Определение.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$  — высказывание  $(x \in X)$

$W(x)$  — верно при почти всех из  $E$  = почти всюду на  $E$  = почти везде на  $E$  = п.в.  $E$ , если:

$\exists e \in E : \mu e = 0$   $W(x)$  — истинно при  $x \in E \setminus e$

*Пример.*  $X = \mathbb{R}$ ,  $W$  = иррационально.

*Пример.*  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(x)$  при п.в.  $x \in E$

**Свойства.**

1.
  - $\mu$  — полная
  - $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  п.в.  $X$
  - $f_n$  измеримо

Тогда  $f$  измеримо.

Доказательство.  $f_n \rightarrow f$  на  $X'$ , где  $e = X \setminus X'$ ,  $\mu e = 0$

$f$  — измеримо на  $X$

$\mu$  — полная  $\Rightarrow f$  измеримо на  $X$ , т.к.  $X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subset e}$  □

2. ???

3. Пусть  $\forall n \ W_n(x)$  истинно при почти всех  $x$ .

Тогда утверждение “ $\forall n \ W_n$  истинно” — верно при почти всех  $X$

Доказательство.  $\langle e_n : \mu(e_n) = 0$ . Искомое высказывание верно при  $x \in X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right)$ ,  $\mu(\bigcup e_i) = 0$  □

**Определение.**  $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — почти везде конечны.

$f_n$  сходится к  $f$  по мере  $\mu$ , обозначается  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Примечание.  $f_n$  и  $f$  можно изменить на множестве меры 0, т.е. предел не задан однозначно.

Упражнение.  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f; f_n \xrightarrow[\mu]{} g$ . Тогда  $f$  и  $g$  эквивалентны.

Пример.

1.  $f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$

$f_n \rightarrow f$  всюду на  $(0, +\infty)$

$f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \geq \varepsilon\right) = X\left(x \leq \frac{1}{\varepsilon n}\right)$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \rightarrow 0$$

2.  $f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$

$f_n(x) \rightarrow 0$  при всех  $x$

$f_n(x) \xrightarrow[\mu]{} 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\rightarrow 0$$

3.  $n = 2^k + l, 0 \leq l < 2^k, X = [0, 1], \lambda$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

$\lim f_n(x)$  не существует ни при каком  $x$ !

$$X(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[\lambda]{} 0$$

**Теорема 5 (Лебега).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\mu X$  конечно
- $f_n, f$  — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \rightarrow f$  п.в.

Тогда  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

*Доказательство.* Переопределим  $f_n, f$  на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай:  $\forall x$  последовательность  $f_n(x)$  монотонно убывает к 0, то есть  $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon)$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху,  $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

Рассмотрим общий случай:  $f_n \rightarrow f, \varphi(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда  $\varphi_n \rightarrow 0, \varphi_n \geq 0$  и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon) \\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

□

**Теорема 6 (Рисс).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ .

Тогда  $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

Доказательство.

$$\forall k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \rightarrow 0$$

$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что  $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \stackrel{(10)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\mu E_k \rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при  $x \notin E$   $f_{n_k} \rightarrow f$ .

$$x \notin E \quad \exists N \quad x \notin E_k \text{ при } k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ .

Т.к.  $\mu E = 0$ , искомое выполнено. □

Следствие 6.1.  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f \quad |f_n| \leq g$  почти всюду. Тогда  $|f| \leq g$  почти всюду.

Доказательство.  $\exists n_k \quad f_{n_k} \rightarrow f$  почти всюду. □

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \Rightarrow f_n \xrightarrow[\mu]{} f$$

**Теорема 7 (Егорова).**

- $X, \mathfrak{A}, \mu$
- $\mu X < +\infty$
- $f_n, f$  — почти везде конечно, измеримо

---

(10): по счётной полуаддитивности меры.

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \xrightarrow[X \setminus e]{} f$$

Доказательство. Упражнение. □

## 2 Интеграл

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$  — зафиксировали.

Определение (1).

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- $E_k$  — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu(x) := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть  $0 \cdot \infty = 0$

Свойства.

1. Не зависит от представления  $f$  в виде суммы, т.е.:

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

Примечание. При  $E_k \cap E'_j \neq \emptyset$   $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow$  можно писать любое из них.

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu (E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

$$2. \underbrace{f}_{\text{ст.}} \leq \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$$

Определение (2).

- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g - \text{ст.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$



Свойства.

- Если  $f$  ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$
- $g \leq f, f - \text{измеримая}, g - \text{измеримая} \Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение (3).

- $f$  измеримо
- $\int f^+$  или  $\int f^-$  конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

Теорема 8 (Тонелли).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- $f$  измерима
- Записывается как  $f(x, y)$ , где  $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{m+n} \quad E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех  $x \in \mathbb{R}^m$  функция  $y \mapsto f(x, y)$  измерима на  $\mathbb{R}^n$
2. Функция  $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$ , измерима и корректно задана.
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Примечание. Неформально говоря, можно разбить  $\mathbb{R}^{m+n}$  на  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.

# Лекция 3

## 22 февраля

**Определение.** Если оказалось, что  $\int_X f^+, \int_X f^-$  оба конечны, то  $f$  называется суммируемой.

*Примечание.*

1. Если  $f$  измеримо и  $\geq$ , то интеграл определения 3 = интегралу определения 2.

**Определение (4).**

- $E \subset X$  — измеримо
- $f$  измеримо на  $X$

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E$$

*Примечание.*

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \Rightarrow \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$
- $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g : 0 \leq g \leq f \text{ на } E, g - \text{степ.}\}$  и мы считаем, что  $g \equiv 0$  вне  $E$ .
- $\int_E f$  не зависит от значений  $f$  вне множества  $E$ .

**Свойства.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $E \subset X$  — измеримо,  $g, f$  — измеримо.

1. Монотонность  $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

*Доказательство.*

- (а) При  $f, g \geq 0$  — очевидно из определения.
- (б) При произвольных  $f, g$   $f^+ \leq g^+$  и  $f^- \geq g^-$  (очевидно из определения). Из предыдущего случая  $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$ .

□

$$2. \int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$$

$$3. \mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$$

*Доказательство.*

(a)  $f$  — ступ. Тривиально.

(b)  $f$  — измеримо,  $f \geq 0$ .  $\sup 0 = 0$ , поэтому искомое выполнено.

$$(c) \int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$$

□

*Примечание.*  $f$  — измерима. Тогда  $f$  суммируема  $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

*Доказательство.*

$$\Leftarrow \text{ следует из } f^+, f^- \leq |f|$$

$\Rightarrow$  будет доказано позже на этой лекции.

□

$$4. \int_E (-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$$

*Доказательство.*

(a)  $(-f)^+ = f^-$ ,  $(-f)^- = f^+$ , тогда искомое очевидно.

(b) Можно считать  $c > 0$  без потери общности, тогда для  $f \geq 0$  тривиально.

□

$$5. \exists \int_E f d\mu. \text{ Тогда } \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} -|f| &\leq f \leq |f| \\ -\int |f| &\leq \int f \leq \int |f| \\ \left| \int f \right| &\leq \int |f| \end{aligned}$$

□

$$6. \mu E < +\infty, a \leq f \leq b. \text{ Тогда}$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

*Следствие 8.1.*  $f$  — измеримо на  $E$ ,  $f$  — ограничено на  $E$ ,  $\mu E < +\infty$ . Тогда  $f$  суммируемо на  $E$

7.  $f$  суммируема на  $E$ . Тогда  $f$  почти везде конечна.

*Доказательство.*

(a)  $f \geq 0$  и  $f = +\infty$  на  $A \subset E$ . Тогда  $\int_E f \geq n\mu A \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

(b) В произвольном случае аналогично со срезками.

□

**Лемма 2.**

- $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  — измеримо
- $g$  — ступенчато
- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\stackrel{(11)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu \end{aligned}$$

□

**Теорема 9.**

- $A = \bigsqcup A_i$  — измеримо
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримо на  $A$
- $f \geq 0$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

---

(11): переставлять можно, т.к. члены суммы  $\geq 0$ .

*Доказательство.* Докажем, что части равенства  $\leq$  и  $\geq$ , тогда равенство выполнено.

$$\leq \quad \text{и} \quad g : 0 \leq g \leq f$$

$$\int_A g \stackrel{(12)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$$\geq \quad 1. \quad A = A_1 \sqcup A_2$$

$0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f\chi_{A_2}$ . Пусть  $E_k$  — совместное разбиение, у  $g_1$  коэффициенты  $\alpha_k$ , у  $g_2$  :  $\beta_k$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq g_1 + g_2 &\leq f\chi_A \\ \int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 &= \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 &\leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} f &\leq \int_A f \end{aligned}$$

2.  $A = \bigsqcup A_i$  тривиально по индукции.

3.  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$ , где  $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

□

*Следствие 9.1.*  $f \geq 0$  — измеримо. Пусть  $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  и  $\nu E := \int_E f d\mu$ . Тогда  $\nu$  — мера.

*Следствие 9.2* (Счётная аддитивность интеграла).  $f$  суммируема на  $A = \bigsqcup A_i$  — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

*Доказательство.* Очевидно, если рассмотреть срезки. □

*Следствие 9.3.*  $A \subset B, f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

---

(12): по лемме об интеграле.

## 2.1 Предельный переход под знаком интеграла

Пусть  $f_n \rightarrow f$ . Можно ли утверждать, что  $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$ ?

Пример (контр).

$$f_n := \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \quad f \equiv 0 \quad f_n \rightarrow f \quad (\text{даже } f_n \rightrightarrows f)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n} \lambda[0, n] = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

**Теорема 10 (Леви).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n$  измеримо
- $\forall n \quad 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  почти везде.
- $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

*Примечание.*  $f$  задано везде, кроме множества  $e$  меры 0. Считаем, что  $f = 0$  на  $e$ . Тогда  $f$  измеримо на  $X$ .

*Доказательство.*

$\leq$  очевидно, т.к.  $\int f_n \leq \int f$  почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_0 = \int_{X \setminus e} f_n \leq \int_{X \setminus e} f \leq \int_X f$$

$\geq$  достаточно проверить, что  $\forall$  ступенчатой  $g : 0 \leq g < f$  выполняется следующее  $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$

Сильный трюк: достаточно проверить, что  $\forall c \in (0, 1) \quad \lim \int_X f_n \geq c \int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$$\bigcup E_n = X, \text{ т.к. } c < 1$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

$$\text{Тогда } \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \stackrel{(13)}{=} c \int_X g$$

□

**Теорема 11.**

- $f, g \geq 0$
- $f, g$  измеримо на  $E$

Тогда  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ *Доказательство.*

1.  $f, g$  — ступенчатые, т.е.  $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2.  $f \geq 0$ , измеримо.  $\exists$  ступ.  $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \lim f_n = f$   
 $g \geq 0$ , измеримо.  $\exists$  ступ.  $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \lim g_n = g$

$$\begin{aligned} f_n + g_n &\rightarrow f + g \\ \int_E f_n + g_n &\xrightarrow{\text{т. Леви}} \int_E f + g \\ \int_E f_n + \int_E g_n &\rightarrow \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

□

**Следствие 11.1.**  $f, g$  суммируемы на  $E$ . Тогда  $f + g$  суммируемо и  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ . Таким образом, доказано 3.

*Доказательство суммируемости.*  $|f + g| \leq |f| + |g|$ . Пусть  $h = f + g$ . Тогда

$$\begin{aligned} h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ h^+ + f^- + g^- &= f^+ + g^+ + h^- \\ \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^- \\ \int_E h^+ - \int_E f^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^- \end{aligned}$$

□

---

(13): по непрерывности снизу меры  $\nu : E \mapsto \int_E g$

**Определение.**  $\mathcal{L}(X)$  — множество суммируемых функций на  $X$

*Следствие 11.2 (следствия).*  $\mathcal{L}(X)$  — линейное пространство, а отображение  $f \mapsto \int_X f$  это линейный функционал<sup>1</sup> на  $\mathcal{L}(X)$ , т.е.  $\forall f_1 \dots f_n \in \mathcal{L}(X) \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

???

**Теорема 12** (об интегрировании положительных рядов).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$  почти везде
- $u_n$  измеримо

Тогда

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

*Доказательство.* По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_k \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

Пусть  $S_n \rightarrow S$ . Тогда  $\int_E S_n \rightarrow \int_E S$

□

*Следствие 12.1.*  $u_n$  измеримо и  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$ . Тогда ряд  $\sum u_n(x)$  абсолютно сходится при почти всех  $x$ .

*Доказательство.*

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

*Пример.*  $x_n \in \mathbb{R}$  — произвольная последовательность,  $\sum a_n$  абсолютно сходится.

Тогда  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$  абсолютно сходится при почти всех  $x$ .

---

<sup>1</sup> т.е. функция функций



*Доказательство.* Достаточно проверить абсолютную сходимость на  $[-N, N]$  почти везде.

$$\begin{aligned}\int_{[-N, N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &= \int_{-N}^N \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} dx \\ &= |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &\leq |a_n| \int_{-N}^N \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &= 4\sqrt{N}|a_n|\end{aligned}$$

□

# Лекция 4

## 1 марта

**Теорема 13** (об абсолютной непрерывности интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f$  суммируемо

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E - \text{изм.}, \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

**Следствие 13.1.**  $f$  суммируемо на  $X$ ,  $E_n \subset X$ , тогда  $\mu E_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \rightarrow 0$

*Доказательство.* <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} X_n &:= X(|f| \geq n) \\ X_n \supset X_{n+1} \supset \dots &\Rightarrow \mu \left( \bigcap X_n \right) \stackrel{(14)}{=} 0 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть  $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ . Тогда при  $\mu E < \delta$ :

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| \stackrel{(16)}{=} \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{\delta} \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

<sup>1</sup> Теоремы, не следствия

(14): Т.к.  $f$  на  $\bigcap X_n$  бесконечна и  $f$  почти везде конечна.

(15): По непрерывности сверху меры  $A \mapsto \int_A |f| d\mu$

(16): Т.к.  $|f|$  на  $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$  не превосходит  $n_\varepsilon$  по построению  $X_{n_\varepsilon}$

*Примечание.* Следующие два свойства не эквивалентны:

1.  $f_n \xRightarrow[\mu]{} f \stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$
2.  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

Из 1 не следует 2: пусть  $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$ ,  $f_n = \frac{1}{nx}$ . Тогда  $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ , но  $\int |f_n - f| = +\infty$  при всех  $n$ .

Из 2 следует 1, т.к.

$$\underbrace{\mu X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Теорема 14** (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists g$ , называемое “суммируемая мажоранта”:

1.  $\forall n \quad |f_n| \stackrel{(17)}{\leq} g$  почти везде
2.  $g$  — суммируемо на  $X$

Тогда:  $f_n, f$  — суммируемы и  $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , и тем более  $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

*Примечание.* Почти везде конечность  $f_n$  и  $f$  следует из (17), поэтому в условии этого можно не требовать.

*Доказательство.*  $f_n$  — суммируемы в силу неравенства (17),  $f$  суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более  $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1.  $\mu X < +\infty$

Зафиксируем  $\varepsilon$ .  $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

$f_n \xRightarrow{\mu} f$ , т.е.  $\mu X_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq 2g \\ \int_X |f_n - f| &= \int_{X_n} + \int_{X_n^c} = \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{сл. т. об абс. непр.}} 0} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X \end{aligned} \tag{18}$$

2.  $\mu X = +\infty$

Утверждение:  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset X$ , изм., конечной меры,  $\mu A$  конечно :  $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$ .  
Докажем его.

$$\begin{aligned} \int_X g &= \sup \left\{ \int g_n, 0 \leq g_n \leq g, g_n - \text{ступ.} \right\} \\ A &:= \{x : g_n(x) > 0\} \\ 0 &\leq \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon \\ \int_X |f_n - f| d\mu &= \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{< 2\varepsilon} < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

**Теорема 15 (Лебега).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо
- $f_n \xrightarrow{(19)} f$  почти везде
- $\exists g$ , называемое “суммируемая мажоранта”:
  1.  $\forall n \ |f_n| \leq g$  почти везде
  2.  $g$  — суммируемо на  $X$

Тогда  $f_n, f$  — суммируемы,  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ , и тем более  $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$

*Доказательство.* Суммируемость  $f_n, f$ , а также утверждение “и тем более” доказываются так же, как в теореме [Лебега о предельном переходе под знаком интеграла](#).

$$\begin{aligned} h_n &:= \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \dots) \\ 0 &\stackrel{(20)}{\leq} h_n \stackrel{(21)}{\leq} 2g \end{aligned}$$

$h_n$  монотонно убывает, что очевидно по определению  $\sup$ .

$$\lim h_n \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim} |f_n - f| \stackrel{(22)}{=} 0 \text{ почти везде}$$

---

(20): по построению

(21): по (18)

(22): по (19)

$2g - h_n \geq 0$  и возрастает как последовательность функций,  $2g - h_n \rightarrow 2g$  почти везде. Тогда по теореме [Левина](#):

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

□

*Пример.*  $x > 0, x_0 > 0$

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} e^{-t} dt$$

Равенство выполнено, т.к.  $t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} t^{x_0-1} e^{-t}$  при  $t > 0$  и суммируемая мажоранта  $t^{\alpha-1} e^{-t} + t^{\beta-1} e^{-t}$ , где  $0 < \alpha < x_0, 0 < \beta$

**Теорема 16 (Фату).**

- $X, \mathfrak{A}, \mu$  — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$
- $f_n$  измеримо
- $f_n \rightarrow f$  почти везде
- $\exists C > 0 \forall n \int_X f_n \leq C$

Тогда  $\int_X f \leq C$

*Примечание.* Странность: здесь не требуется, чтобы  $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$  и это может быть неверно.

*Пример.*

$$f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \rightarrow 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \leq 1$$

По теореме [Фату](#)  $\int_{\mathbb{R}} f \leq 1$ , что верно, т.к.  $\int_{\mathbb{R}} f = 0 \leq 1$

*Пример.* Условие  $f_n \geq 0$  важно:

$$f_n = -\frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \rightarrow 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = -1 \leq -1, \text{ но } \int_{\mathbb{R}} f = 0 \not\leq -1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 g_n &:= \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \\
 0 &\leq g_n \leq g_{n+1} \\
 \lim g_n &\stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim} f_n = f \text{ п.в.} \\
 \int_X g_n &\leq \int_X f_n \leq C \\
 \int_X g_n &\stackrel{(24)}{\rightarrow} \int_X f
 \end{aligned} \tag{23}$$

Значит  $\int_X f \leq C$  по предельному переходу в (23)

□

Следствие 16.1.

- $f_n, f \geq 0$
- $f_n, f$  измеримы
- $f_n, f$  почти везде конечны
- $f_n \Rightarrow f$
- $\exists C > 0 \ \forall n \ \int_X f_n \leq C$

Тогда  $\int_X f \leq C$

Доказательство.

$$f_n \Rightarrow f \implies \exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f \text{ п.в.}$$

По теореме [Фату](#) получим искомое.

□

Следствие 16.2.

- $f_n \geq 0$
- $f_n$  измеримо

Тогда  $\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$

Доказательство. Возьмём (23) как в теореме. Выберем  $n_k : \int_X f_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$

$$\begin{aligned}
 \int_X g_{n_k} &\leq \int_X f_{n_k} \\
 \downarrow \\
 \int_X \underline{\lim} f_n &\leq \underline{\lim} \int_X f_n
 \end{aligned}$$

□

### 3 Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле.

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ ,  $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть  $\Phi$  — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

*Упражнение.* Проверить, что  $\Phi^{-1}$  —  $\sigma$ -алгебра.

Для  $E \in \mathfrak{B}$  положим  $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$ . Тогда  $\nu$  — мера:

$$\nu\left(\bigcup E_n\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigcup E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup \Phi^{-1}(E_n)\right) = \sum \mu\Phi^{-1}E_n = \sum \nu E_n$$

Мера  $\nu$  называется **образом**  $\mu$  при отображении  $\Phi$  и  $\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

*Наблюдение 1.*  $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримо относительно  $\mathfrak{B}$ . Тогда  $f \circ \Phi$  — измеримо относительно  $\mathfrak{A}$ .

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \stackrel{(25)}{\in} \mathfrak{A}$$

**Определение.**  $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$ , измеримо на  $X$ .

$$\forall B \in \mathfrak{B} \quad \nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

Тогда  $\nu$  называется “**взвешенный образ меры  $\mu$** ”,  $\omega$  называется **весом**.

**Теорема 17** (о вычислении интеграла по взвешенному образу меры).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространство с мерой
- $\Phi : X \rightarrow Y$
- $\omega \geq 0$
- $\omega$  измеримо на  $X$
- $\nu$  взвешенный образ  $\mu$  при отображении  $\Phi$  с весом  $\omega$

Тогда  $\forall$  измеримой относительно  $\mathfrak{B}$   $f$  на  $Y$ ,  $f \geq 0$  выполнено следующее:

---

(25): т.к.  $Y(f < a) \in \mathfrak{B}$

1.  $f \circ \Phi$  измеримо на  $X$  относительно  $\mathfrak{A}$

2.

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \quad (26)$$

То же самое верно для суммируемой  $f$ .

*Доказательство.* Измеримость  $f \circ \Phi$  выполнена по наблюдению 1.

0. Пусть  $f = \chi_B, B \in \mathfrak{B}$

$$(f \circ \Phi)(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

Тогда (26) это:

$$\mu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Это выполнено по определению  $\mu B$

1. Пусть  $f$  — ступенчатая

(26) следует из линейности интеграла.

2. Пусть  $f \geq 0$ , измеримая

По теореме о характеристизации измеримых функций с помощью ступенчатых и теореме Леви  $\exists \{h_i\} : 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$  — ступенчатые,  $h_i \leq f, h_i \rightarrow f$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} (26)$$

3. Пусть  $f$  измерима.

Тогда для  $|f|$  выполнено (26);  $|f|$  и  $|f \circ \Phi| \cdot \omega$  суммируемы одновременно.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega \quad (f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega$$

Таким образом, искомое выполнено для  $f_+$  и  $f_-$ , а следовательно и для  $f$ .

□

*Следствие 17.1* (об интегрировании по подмножеству). В условиях теоремы пусть:

- $B \in \mathfrak{B}$
- $f$  суммируемо на  $Y$



Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega d\mu$$

*Доказательство.* В условие теоремы подставим  $f \cdot \chi_B$

□

**Определение.** Рассмотрим частный случай:  $X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \text{id}$ . Кажется, что мы убили всю содержательность, но это не так — есть ещё  $\omega$ .

$$\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$$

В этой ситуации  $\omega$  называется **плотностью** меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$  и тогда по теореме [о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#):

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x) \omega(x) d\mu$$

# Лекция 5

## 15 марта

**Определение.**

- $X, \mathfrak{A}, \mu$  — пространство с мерой
- $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера

**Плотность меры  $\nu$  относительно  $\mu$**  есть положительная измеримая функция  $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , такая что:

$$\forall B \in \mathfrak{A} \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$$

**Теорема 18 (критерий плотности).**

- $X, \mathfrak{A}, \mu$  — пространство с мерой
- $\nu$  — мера
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $\omega \geq 0$
- $\omega$  измеримо

Тогда  $\omega$  — плотность  $\nu$  относительно  $\mu \Leftrightarrow$ :

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \sup_A \omega$$

При этом  $0 \cdot \infty$  считается  $= 0$ .

*Пример (отсутствие плотности).*  $X = \mathbb{R}, \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^1, \mu = \lambda_1$

$\nu$  — одноточечная мера:  $\nu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$

Необходимое условие существования плотности —  $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Это и достаточное условие по теореме Радона-Никодима<sup>1</sup>.

Доказательство теоремы *критерий плотности*.

“ $\Rightarrow$ ” Очевидно.

“ $\Leftarrow$ ” Рассмотрим  $\omega > 0$ . Общность не умаляется, т.к. пусть  $e = X(\omega = 0)$ , тогда  $\nu(e) \stackrel{\text{def}}{=} \int_e \omega d\mu = 0$ , поэтому в случае  $A \cap e \neq \emptyset$  всё ещё только лучше.

Фиксируем число  $q \in (0, 1)$ .

$$A_j := A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(27)}{\leq} \nu A_j \stackrel{(28)}{\leq} \mu A_j \sup_{A_j} q^{j-1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(29)}{\leq} \int_{A_j} \omega d\mu \stackrel{(30)}{\leq} \mu A_j q^{j-1}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} q \cdot \int_A \omega d\mu &\leq q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &\stackrel{(31)}{\leq} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(32)}{\leq} \underbrace{\sum \nu A_j}_{\nu A} \\ &\stackrel{(33)}{\leq} \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(34)}{\leq} \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &= \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu \end{aligned}$$

То есть:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

---

<sup>1</sup> Возможно, мы разберём её в конце семестра.

(32): по (27)

(33): по (28)

(34): по (29)

(31): по (30)

Тогда предельный переход при  $q \rightarrow 1 - 0$  дает искомое.

□

**Лемма 3.**

- $f, g$  суммируемы
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \int_A f = \int_A g$

Тогда  $f = g$  почти везде.

*Доказательство.*  $h := f - g$ . Дано:  $\forall A \quad \int_A h = 0$ ; доказать —  $h = 0$  почти везде.

$$A_+ := X(h \geq 0) \quad A_- := X(h < 0) \quad X = A_+ \sqcup A_-$$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0 \quad \int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0 \implies \int_X |h| = 0 \implies h = 0 \text{ п.в.}$$

□

*Примечание.* Если  $\mathcal{L}(X)$  — линейное пространство, отображение  $l_A : f \mapsto \int_A f$  есть линейный функционал. Таким образом, множество функционалов  $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$  разделяет точки, т.е.  $\forall f \neq g \in \mathcal{L}(X) \quad \exists A : l_A(f) \neq l_A(g)$

*Примечание.* В  $\mathbb{R}^m$   $a = (a_1 \dots a_m)$ ,  $l_a : x \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$ . Тогда  $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \exists a : l_a(x) \neq l_a(y)$ .

## 4 Возвращаемся в $\mathbb{R}^m$

**Лемма 4** (о мере образа малых кубических ячеек).

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $O$  открыто
- $a \in O$
- $\Phi \in C^1$
- $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда  $\exists \delta > 0 \quad \forall$  куба  $Q \subset B(a, \delta)$ ,  $a \in Q$  выполняется неравенство  $\lambda \Phi(Q) < c \lambda Q$

*Примечание.* Здесь можно считать, что  $Q$  — замкнутые кубы.

---

<sup>2</sup> Кажется, здесь должно быть “ $\neq$ ”

Доказательство.  $L := \Phi'(a)$  — обратимо<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a) \\ \underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} &= x + o^4(x - a)\end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар } B_{\varepsilon^5}(a) \forall x \in B_{\varepsilon}(a) |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$$

Пусть  $Q \subset B_{\varepsilon}(a)$ ,  $a \in Q$ ,  $Q$  — куб со стороной  $h$ .

При  $x \in Q$ :

$$\begin{aligned}|x - a| &\leq \sqrt{m}h \\ |\Psi(x) - x| &\stackrel{(35)}{<} \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a| \leq \varepsilon h\end{aligned}$$

Тогда  $\Psi(Q) \subset$  куб со стороной  $(1 + 2\varepsilon)h$ , т.к. при  $x, y \in Q$

$$\begin{aligned}|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| &\leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \\ &\leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \\ &\leq (1 + 2\varepsilon)h\end{aligned}$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

$\Psi$  и  $\Phi$  отличаются только сдвигом и линейным отображением.

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L|(1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Выбираем  $\varepsilon$  такое, чтобы  $|\det L|(1 + 2\varepsilon)^m < c$ , потом берём  $\delta = \text{радиус } B_{\varepsilon}(a)$  □

**Лемма 5.**

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $O$  открыто
- $f$  непрерывна

<sup>3</sup> т.к.  $\det \Phi'(a) \neq 0$

<sup>4</sup> Это не то же самое  $o$ , что строчкой выше.

<sup>5</sup> Это не радиус шара, а параметр.

(35): т.к.  $x \in B_{\varepsilon}(a)$

- $A$  измеримо
- $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$
- $Q$  — кубическая ячейка

Тогда:

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ откр. } \subset O}} \lambda(G) \cdot \sup_G f = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство. Упражнение. □

**Теорема 19.**

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi$  диффеоморфизм

Тогда

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \quad \lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Доказательство.

Обозначение.

- $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
- $\nu A := \lambda\Phi(A)$  — мера

Надо доказать, что  $J_\Phi$  — плотность  $\nu$  относительно  $\lambda$ .

Достаточно проверить условие теоремы **критерий плотности**, что  $\forall$  измеримого  $A$ :

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu(A) \stackrel{(36)}{\leq} \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$$

Достаточно проверить только правое неравенство, т.к. левое неравенство — правое неравенство для  $\Phi(A)$  и отображения  $\Phi^{-1}$

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \leq \lambda A$$

1. Проверяем (36) для случая  $A$  — кубическая ячейка,  $A \subset \overline{A} \subset O$

От противного:  $\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$

Возьмём  $C > \sup_Q J_\Phi : C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$ .

Запускаем половинное деление: режем  $Q$  на  $2^m$  более мелких кубических ячеек. Выберем “мелкую” ячейку  $Q_1 \subset Q : C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$ . Опять делим на  $2^m$  частей, берём  $Q_2 \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$  и т.д.

$$a \in \bigcap \overline{Q_i}$$

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n \quad C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \quad (37)$$

$C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi$ , в частности  $c > |\det \Phi'(a)|$ . Мы получили противоречие с леммой [о мере образа малых кубических ячеек](#): в сколько угодно малой окрестности  $a$  имеются кубы  $\overline{Q}_n$ , где выполнено (37)

2. Проверяем (36) для случая  $A$  открыто.

Это очевидно, т.к.  $A = \bigsqcup Q_j$ ,  $Q_j$  — кубическая ячейка,  $Q_j \subset \overline{Q}_j \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \cdot \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \quad (38)$$

3. По лемме [5](#) неравенство (36) выполнено для всех измеримых  $A$ :

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — кубы } Q_j \subset \overline{Q}_j \subset O, A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j}$$

$$\nu A_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \inf_G (\sup_G J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

Аналогично формуле (38) получаем  $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$

□

**Теорема 20.**

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi$  дифференцируемо

Тогда  $\forall$  измеримой  $f \geq 0$ , заданной на  $O' = \Phi(O)$ :

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda, \quad J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$$

То же самое верно для суммируемой  $f$ .

**Доказательство.** Применяем теорему [о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#) при  $X = Y = \mathbb{R}^m$ ,  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$ ,  $\mu = \lambda$ ,  $\nu(A) = \lambda(\Phi(A))$ :

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}B} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

По теореме 19  $\lambda(B) = \int_{\Phi^{-1}(O)} J_{\Phi} d\lambda$ , т.е.  $\lambda$  — взвешенный образ исходной меры по отношению к  $\Phi$   $\square$

*Пример.*

1. Полярные координаты в  $\mathbb{R}^2$ :

$$\Phi = \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \Phi : \{(r, \varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det \Phi' = r \quad J_{\Phi} = r$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d\lambda_2$$

2. Сферические координаты в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi) \\ \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix} \quad J_{\Phi} = r^2 \cos \psi$$

$$\det \Phi' = r^2 (\sin^2 \psi \cos \psi + \cos^3 \psi) = r^2 \cos \psi$$



# Лекция 6

## 22 марта

### 4.1 Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$

Координаты задаются  $r, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}$ . Зададим их по индукции:

- $\varphi_1$  — угол между  $\bar{e}_1$  и  $\overline{OX} \in [0, \pi]$
- $\varphi_2$  — угол между  $\bar{e}_2$  и  $P_{2(e_2 \dots e_n)}(x) \in [0, \pi]$
- $\vdots$
- $\varphi_{m-1}$  — полярный угол в  $\mathbb{R}^2$

$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$$

$$J = r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$$

*Примечание.* В  $\mathbb{R}^3$  “географические” координаты имеют якобиан  $J = r^2 \cos \psi$

Поймём, почему якобиан именно такой. Можно его посчитать руками, но это трудно.

1 шаг

$$x_m = \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-1} = \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1}$$

$$(x_1 \dots x_m) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1})$$

$$J = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & J_2 \end{vmatrix} = \rho_{m-1}$$

2 шаг

$$\rho_{m-1} = \rho_{m-2} \sin \varphi_{m-2}$$

$$x_{m-2} = \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2}$$

$$(x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-3}, \rho_{m-2}, \varphi_{m-2}, \varphi_{m-1})$$

последний шаг

$$(x_1 \rho_2, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r, \varphi_1 \dots \varphi_{m-1})$$

$$\rho_2 = r \sin \varphi_1$$

$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \lambda_m(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 d\lambda_m \\ &\stackrel{1 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_1} \rho_{m-1} \\ &\stackrel{2 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_2} \rho_{m-2}^2 \sin \varphi_{m-2} \\ &\stackrel{3 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_3} \rho_{m-3}^3 \sin^2 \varphi_{m-3} \sin \varphi_{m-2} \\ &= \dots \\ &= \int_{\Omega_{m-1}} r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} d\lambda \end{aligned}$$

Тогда по теореме о единственности плотности искомое верно.

## 5 Произведение мер

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu) — пространства с мерой$

**Лемма 6.**  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} — полукольца \Rightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\} — полукольцо.$

*Доказательство.* Тривиально. □

*Обозначение.*  $\mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} — называем измеримыми прямоугольниками.$

$m_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ , при этом  $0 \cdot \infty$  принимаем за 0.

**Теорема 21.**

1.  $m_0 — мера на \mathcal{P}$
2.  $\mu, \nu — \sigma\text{-конечны} \Rightarrow m_0 \text{ тоже } \sigma\text{-конечно.}$

*Доказательство.*

1. Проверим счётную аддитивность  $m_0$ , т.е.  $m_0 P = \sum_{k=1}^{+\infty} m_0 P_k^1$ , если  $A \times B = P = \bigsqcup P_k$ , где  $P_k = A_k \times B_k$

Заметим, что  $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$ .

Тогда  $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$ , где  $\forall x \in X, y \in Y \quad \chi_A(x) \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$

Проинтегрируем по  $y$  по мере  $\nu$  по пространству  $Y$ :

$$\chi_A(x) \nu B = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

Проинтегрируем по  $x$  по мере  $\mu$  по пространству  $X$ :

$$\mu A \nu B = \sum \mu A_k \nu B_k$$

Это и есть искомое.

2. Очевидно, т.к.:

- $\mu \sigma\text{-конечно} \Rightarrow X = \bigcup X_k, \mu X_k — конечно \forall k$
- $\nu \sigma\text{-конечно} \Rightarrow Y = \bigcup Y_n, \nu Y_n — конечно \forall k$

Тогда  $X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n, m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n$ . Конечное произведение конечных конечно, поэтому  $m_0 \sigma\text{-конечно.}$

□

---

<sup>1</sup> Прочие суммы/объединения также счётны в рамках данного доказательства.

**Определение.**

- $\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой
- $\mu, \nu$   $\sigma$ -конечны

Пусть  $m$  — лебеговское продолжение меры  $m_0$  на  $\sigma$ -алгебру, которую будем обозначать  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ <sup>2</sup>

Обозначение.  $m = \mu \times \nu$

$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$  — **произведение пространств с мерой**  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

**Примечание.**

- Это произведение ассоциативно.
- $\sigma$ -конечность нужна для единственности произведения.

**Теорема 22.**  $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$

**Доказательство.** Не будет. □

**Определение.**  $X, Y$  — множества,  $C \subset X \times Y$

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad C_x &:= \{y \in Y : (x, y) \in C\} \\ \forall y \in Y \quad C^y &:= \{x \in X : (x, y) \in C\} \end{aligned}$$

$C_x, C^y$  называется **сечением**.

**Примечание.**

$$\left( \bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcup (C_{\alpha})_x \quad \left( \bigcap C_{\alpha} \right)_x = \bigcap (C_{\alpha})_x \quad (C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

**Теорема 23** (принцип Кавальери<sup>3</sup>).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечны.
- $\mu, \nu$  — полные.
- $m = \mu \times \nu$

<sup>2</sup>  $\otimes$  — не тензорное произведение

<sup>3</sup> Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.

$$\bullet C \in A \otimes B$$

Тогда:

1.  $C_x \in \mathfrak{B}$  при почти всех  $x$
2.  $x \mapsto \nu(C_x)$  — измеримая<sup>4</sup> функция на  $X$
3.  $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для  $C^y$ .

Пример. ???

Доказательство. Пусть  $\mathfrak{D}$  — система множеств, для которых выполнено 1.-3.

$$1. C = A \times B \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$$

$$(a) C_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin A \\ B, x \in A \end{cases}$$

$$(b) x \mapsto \nu(C_x) — функция \nu B \cdot \chi_A$$

$$(c) \int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$$

$$2. E_i \in \mathfrak{D}, \text{ дизъюнкты } \Rightarrow \bigsqcup E_i \in \mathfrak{D}. \text{ Обозначим } E = \bigsqcup E_i$$

$$E_i \in \mathfrak{D} \Rightarrow (E_i)_x \text{ измеримо почти везде } \Rightarrow \text{ при почти всех } x \text{ все } (E_i)_x \text{ измеримы.}$$

$$\text{Тогда при } \diamond\diamond\text{-тих } x \text{ } E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B} — \text{ это 1.}$$

$$\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\substack{\text{измеримая} \\ \text{функция}}} \Rightarrow \text{Функция } x \mapsto \nu E_x \text{ измеримо — это 2.}$$

$$\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum_i mE_i = mE — \text{ это 3.}$$

$$3. E_i \in \mathfrak{D}, E_1 \supset E_2 \supset \dots, E = \bigcap_i E_i, \mu E_i < +\infty. \text{ Тогда } E \in \mathfrak{D}.$$

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x — \text{ конечно при почти всех } x.$$

$$\forall x \text{ верно } (E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots, E_x = \bigcap (E_i)_x$$

$$\text{Тогда } E_x \text{ измеримо (это 1.) и } \lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x \text{ при п.в. } x.$$

$$\text{Таким образом, } x \mapsto \nu E_x \text{ измерима — это 2.}$$

$$\int_x \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE — \text{ это 3.}$$

$$\text{По теореме Лебега } |\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_i)_x \text{ суммируемо.}$$

$$\text{Итого: Если } A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \text{ то } \bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathfrak{D}$$

<sup>4</sup> функция задана при почти всех  $X$ ; она равна п.в. некоторой измеримой функции, заданной всюду

4.  $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{D}$

$mE = \inf \{ \sum m_0 P_k : E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P} \}$  — из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

$\exists$  множество  $H$  вида  $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$ , т.е.  $H \in \mathfrak{D}$ .

$$E \subset H, mH = mE = 0$$

$$0 = mH = \int_X \underbrace{\nu H_x}_{\geq 0} d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ про почти всех } x.$$

$E_x \subset H_x, \nu$  — полная  $\Rightarrow E_x$  — измеримо при почти всех  $x$  — это 1 и  $\nu E_x = 0$  почти везде, это 2.

$$\int \nu E_x d\mu = 0 = mE \text{ — это 3.}$$

5.  $C$  — измеримо,  $mC < +\infty$ . Тогда  $C \in \mathfrak{D}$ .

$$C = H \setminus e, \text{ где } H \text{ имеет вид } \bigcap \bigcup P_{kl}, m e = 0$$

$$mC = mH$$

(a)  $C_x = H_x \setminus e_x$  — измеримо при почти всех  $x$

(b)  $\nu e_x = 0$  при почти всех  $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x \Rightarrow$  измеримо.

$$(c) \int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$$

6.  $C$  — произвольное измеримое множество в  $X \times Y \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$

$$X = \bigcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$$

$$C = \bigcup \underbrace{(C \cap (X_k \times Y_j))}_{\text{???} < +\infty} \text{ ???}$$

□

*Следствие 23.1.*  $C$  измеримо в  $X \times Y$ . Пусть  $P_1(C) = \{x \in X, C_x \neq \emptyset\}$  — проекция  $C$  на  $X$ .

Если  $P_1(C)$  измеримо, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

*Доказательство.* При  $x \notin P_1(C)$   $\nu(C_x) = 0$

□

*Примечание.*

1.  $C$  измеримо  $\nRightarrow P_1(C)$  измеримо.

2.  $C$  измеримо  $\nRightarrow \forall x$   $C_x$  измеримо.

3.  $\forall x, \forall y \ C_x, C_y$  измеримо  $\nRightarrow C$  измеримо.

Пример Серпинского.