

# Математическая логика

Михайлов Максим

19 марта 2021 г.

# Оглавление

Лекция 1	12 февраля	3
0.	Мотивация	3
0.1.	Математикам	3
0.2.	Программистам	4
1.	Исчисление высказываний	4
1.1.	Язык	4
1.2.	Метаязык и предметный язык	4
1.3.	Сокращения записи	5
1.4.	Теория моделей	5
1.5.	Теория доказательств	6
1.6.	Правило Modus Ponens и доказательство	6
Лекция 2	19 февраля	7
2.	Интуиционистская логика	10
2.1.	ВНК-интерпретация	10
Лекция 3	26 февраля	11
2.2.	Естественный (натуральный) вывод	11
2.3.	Теория решеток	12
Лекция 4	5 марта	15
2.4.	Табличные модели	15
2.5.	Модели Крипке	16
Лекция 5	12 марта	18
3.	Изоморфизм Карри-Ховарда	18
3.1.	Алгебраические типы	18
3.2.	Применение восьмой аксиомы интуиционистской логики	19
4.	Исчисление предикатов	20
4.1.	Язык исчисления предикатов	20
4.2.	Теория моделей	21
4.3.	Теория доказательств	22

# Лекция 1

## 12 февраля

### 0. Мотивация

#### 0.1. Математикам

**Аксиома 1 (Архимеда).** Для любого  $k > 0$  найдётся  $n$ , такое что  $kn > 1$ .

Под эту аксиому не подходят бесконечно малые числа и это является проблемой. Например,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$ , но мы хотим уметь различать эти два числа. Ньютон предложил идею бесконечно малых чисел, откуда пошли последовательности. Возникает вопрос — что такое последовательность и что такое число?

Общепринятое определение целых чисел  $\mathbb{N}$  происходит из теории множеств. Однако эта теория содержит в себе множество фундаментальных парадоксов, от которых нельзя избавиться.

Возникает вопрос — а что такое множество? Посмотрим на некоторое множество  $A = \{x \mid x \notin x\}$ . Содержит ли оно себя,  $A \in A$ ? На этот вопрос нельзя ответить, это называется парадокс Рассела. Есть простой способ его разрешить — запретить ставить такой вопрос. Нет вопроса — нет парадокса. Существование такого парадокса ставит под вопрос существование любого множества — а существует ли  $\mathbb{N}$ ? Может быть его существование парадоксально, просто мы не нашли этот парадокс. Пришло чуть более умное решение парадокса — запретим множества, содержащие себя. Таким образом вывели аксиоматику теории множеств (Цермело — Френкеля).

*Пример.* Рассмотрим множество всех чисел, которые можно задать в  $\leq 1000$  слов русского языка. Фраза “наименьшее число, которое нельзя задать в  $\leq 1000$  слов” содержит  $\leq 1000$  слов, т.е. такое число принадлежит искомому множеству — парадокс.

Возникает идея — человеческий язык порождает парадоксы, поэтому нужно задать новый язык, который их не порождает. Этот язык и является математической логикой.

## 0.2. Программистам

Математическая логика применяется в двух областях (*для программистов*):

1. Языки программирования
2. Формальные доказательства

Для языков программирования матлогика применима как теория типов (*переменных*).

Формальные доказательства нужны например для smart-контрактов, где корректность программы критически важна, т.к. если в нём есть ошибка, у вас злоумышленник заберет все деньги, а вы не сможете этот контракт откатить.

## 1. Исчисление высказываний

### 1.1. Язык

**Определение.** Язык содержит в себе:

1. Пропозициональные переменные

$A'_i$  — большая буква начала латинского алфавита, возможно с индексом и/или штрихом.

2. Связки

Пусть  $\alpha, \beta$  — высказывания. Тогда  $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg \alpha)$  — высказывания.

$\alpha, \beta$  называются **метапеременными**.

*Примечание.* Математическая логика алгеброподобна (*а не анализоподобна*), т.к. в ней много определений и мало доказательств.

### 1.2. Метаязык и предметный язык

У нас есть два различных языка — **предметный язык** и **метаязык**. Метаязык — русский, предметный язык мы определили выше.

*Пример.*  $\alpha \rightarrow \beta$  — метавыражение;  $A \rightarrow (A \rightarrow A)$  — предметное выражение.

*Обозначение.* Метапеременные обозначаются различными способами в зависимости от того, что они обозначают:

- Буквы греческого алфавита ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi$ ) — выражения
- Заглавные буквы конца латинского алфавита ( $X, Y, Z$ ) — произвольные переменные

*Пример.*  $X \rightarrow Y \Rightarrow A \rightarrow B$  — подстановка переменных. Этот синтаксис не формален, мы будем записывать так:

$$(X \rightarrow Y)[X := A, Y := B] \equiv A \rightarrow B$$

*Соглашение.* символы логических операций не пишутся в метаязыке.

*Пример.*

$$\begin{aligned} (\alpha \rightarrow (A \rightarrow X))[\alpha := A, X := B] &\equiv A \rightarrow (A \rightarrow B) \\ (\alpha \rightarrow (A \rightarrow X))[\alpha := (A \rightarrow P), X := B] &\equiv (A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow B) \end{aligned}$$

### 1.3. Сокращения записи

- $\vee, \&, \neg$  — скобки слева направо (*лево-ассоциативные операции*) (не коммутативные)
- $\rightarrow$  — правоассоциативная.

*Примечание.* Здесь операторы записаны в порядке их приоритета

*Пример.* Расставим скобки в следующем выражении:

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \& C \rightarrow D \\ A \rightarrow ((B \& C) \rightarrow D) \end{aligned}$$

### 1.4. Теория моделей

**Модель** состоит из:

*Обозначение.*

- $P$  — некоторое множество предметных переменных
  - $\tau$  — множество высказываний предметного языка
  - $V$  — множество истинных значений. Классическое —  $\{\text{П}, \text{Л}\}$
  - $\llbracket \cdot \rrbracket : \tau \rightarrow V$  — оценка высказывания (*высказывание ставится в скобки*).
1.  $\llbracket x \rrbracket : P \rightarrow V$  — задается при оценке.
  2.  $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \star \llbracket \beta \rrbracket$ , где  $\star$  есть логическая операция ( $\vee, \&, \neg, \rightarrow$ ), а  $\star$  определено естественным образом как элемент метаязыка.

### 1.5. Теория доказательств

**Определение.** Схема высказывания — строка, соответствующая определению высказывания + метапеременные.

*Пример.*

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (A \rightarrow \alpha)))$$

10 схем аксиом:

1.  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
2.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
3.  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \ \& \ \beta$
4.  $\alpha \ \& \ \beta \rightarrow \alpha$
5.  $\alpha \ \& \ \beta \rightarrow \beta$
6.  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7.  $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8.  $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10.  $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

### 1.6. Правило Modus Ponens и доказательство

**Определение.** Доказательство (*вывод*) есть конечная последовательность высказываний  $\alpha_1 \dots \alpha_n$ , где  $\alpha_i$  — либо аксиома, либо  $\exists k, l < i : \alpha_k \equiv \alpha_l \rightarrow \alpha_i$  (*правило Modus Ponens*)

*Пример.*  $\vdash A \rightarrow A$

- |  |            |
|--|------------|
| 1. $A \rightarrow A \rightarrow A$   | сх. акс. 1 |
| 2. $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$   | сх. акс. 1 |
| 3. $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ | сх. акс. 2 |
| 4. $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$   | М.Р. 1, 3  |
| 5. $A \rightarrow A$   | М.Р. 2, 4  |

**Определение.** Доказательство  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  доказывает выражение  $\beta$ , если  $\alpha_n \equiv \beta$

## Лекция 2

### 19 февраля

**Обозначение.** Большая греческая буква середины греческого алфавита ( $\Gamma, \Delta, \Sigma$ ) — список высказываний.

**Определение (следование).**  $\alpha$  следует из  $\Gamma$  (обозначается  $\Gamma \models \alpha$ ), если  $\Gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$  и всегда, когда все  $\llbracket \gamma_i \rrbracket = \text{И}$ , то  $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$ .

**Пример.**  $\models \alpha \rightarrow \alpha$  общезначимо.

**Определение.** Теория Исчисление высказываний **корректно**, если при любом  $\alpha$  из  $\vdash \alpha$  следует  $\models \alpha$ .

**Определение.** Исчисление **полно**, если при любом  $\alpha$  из  $\models \alpha$  следует  $\vdash \alpha$ .

**Теорема 1 (о дедукции).**

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

**Доказательство.**

$\Leftarrow$  Пусть  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , т.е. существует доказательство  $\delta_1 \dots \delta_n$ , где  $\delta_n \equiv \alpha \rightarrow \beta$

Построим новое доказательство:  $\delta_1 \dots \delta_n, \alpha$  (гипотеза),  $\beta$  (М.Р.). Эта новая последовательность — доказательство  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

$\Rightarrow$  Рассмотрим  $\delta_1 \dots \delta_n, \Gamma, \alpha \vdash \beta$ . Рассмотрим последовательность  $\sigma_1 = \alpha \rightarrow \delta_1 \dots \sigma_n = \alpha \rightarrow \delta_n$ . Это не доказательство.

Но эту последовательность можно дополнить до доказательства, так что каждый  $\sigma_i$  есть аксиома, гипотеза или получается через М.Р. Докажем это.

**Доказательство. База:**  $n = 0$  — очевидно.

**Переход:** пусть  $\sigma_0 \dots \sigma_n$  — доказательство. Покажем, что между  $\sigma_n$  и  $\sigma_{n+1}$  можно добавить формулы так, что  $\sigma_{n+1}$  будет доказуемо.

У нас есть 3 варианта обоснования  $\delta_{n+1}$

1.  $\delta_{n+1}$  — аксиома или гипотеза,  $\not\equiv \alpha$

Будем нумеровать дробными числами, потому что нам ничто это не запрещает, т.к. нам нужна только упорядоченность.

$n + 0.2$   $\delta_{n+1}$  — верно, т.к. это аксиома или гипотеза

$n + 0.4$   $\delta_{n+1} \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$  (аксиома 1)

$n + 1$   $\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$  (М.Р.  $n + 0.2, n + 0.4$ )

2.  $\delta_{n+1} \equiv \alpha$

$n + 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  — доказательство  $\alpha \rightarrow \alpha$

3.  $\delta_k \equiv \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}, k, l \leq n$

$k$   $\alpha \rightarrow (\delta_l \rightarrow \delta_{n+1})$

$l$   $\alpha \rightarrow \sigma_l$

$n + 0.2$   $(\alpha \rightarrow \sigma_l) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\sigma_l \rightarrow \sigma_{n+1})) \rightarrow (\alpha \rightarrow \sigma_{n+1})$  (аксиома 2)

$n + 0.4$   $(\alpha \rightarrow \sigma_l \rightarrow \sigma_{n+1}) \rightarrow (\sigma \rightarrow \sigma_{n+1})$  (М.Р.  $n + 2, l$ )

$n + 1$   $\alpha \rightarrow \sigma_{n+1}$  (М.Р.  $n + 0.4, k$ )

□

□

**Теорема 2.** Пусть  $\vdash \alpha$ . Тогда  $\models \alpha$ .

*Доказательство.* Индукция по длине доказательства: каждая  $\llbracket \delta_i \rrbracket = \text{И}$ , если  $\delta_1 \dots \delta_n$  — доказательство  $\alpha$

Рассмотрим  $n$  и пусть  $\llbracket \delta_1 \rrbracket = \text{И}, \dots, \llbracket \delta_n \rrbracket = \text{И}$ .

Тогда рассмотрим основание  $\delta_{n+1}$

1.  $\delta_{n+1}$  — аксиома. Это упражнение.

*Пример.*  $\delta_{n+1} \equiv \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$

$$\triangleleft \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rrbracket^{\llbracket \alpha \rrbracket := a, \llbracket \beta \rrbracket := b} = \text{И}$$



$a$	$b$	$\beta \rightarrow \alpha$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
Л	Л	И	И
Л	И	Л	И
И	Л	И	И
И	И	И	И

Аналогично можно доказать для остальных аксиом.

2.  $\delta_{n+1} - \text{М.Р. } \delta_k = \delta_l \rightarrow \delta_{n+1}$

Фиксируем оценку. Тогда  $\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rrbracket = \text{И}$ . Тогда:

$\llbracket \delta_k \rrbracket$	$\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket$	$\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rrbracket \rightarrow \delta_{n+1}$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Первых трёх вариантов не может быть в силу  $\llbracket \delta_k \rrbracket = \llbracket \delta_l \rrbracket = \text{И}$ . Таким образом,  $\llbracket \delta_{n+1} \rrbracket = \text{И}$ .

□

**Теорема 3** (о полноте). Пусть  $\models \alpha$ . Тогда  $\vdash \alpha$ .

Фиксируем набор переменных из  $\alpha$ :  $P_1 \dots P_n$ .

Рассмотрим  $\llbracket \alpha \rrbracket^{P_1 := x_1 \dots P_n := x_n} = \text{И}$

**Обозначение.**  ${}_{[\beta]}\alpha \equiv \begin{cases} \alpha, & \llbracket \beta \rrbracket = \text{И} \\ \neg \alpha, & \llbracket \beta \rrbracket = \text{Л} \end{cases}$  и  ${}_{[x]}\alpha \equiv \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg \alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$

Докажем, что  $\underbrace{{}_{[x_1]}P_1, \dots, {}_{[x_n]}P_n}_{\Pi} \vdash {}_{[\alpha]}\alpha$

**Доказательство.** По индукции по длине формулы:

**База:**  $\alpha = P_i$   ${}_{[P_i]}P_i \vdash {}_{[P_i]}P_i$ , значит  $\Pi \vdash {}_{[P_i]}P_i$

**Переход:** пусть  $\eta, \zeta : \Pi \vdash {}_{[\eta]}\eta, \Pi \vdash {}_{[\zeta]}\zeta$  (по индукционному предположению). Покажем, что  $\Pi \vdash {}_{[\eta \star \zeta]}\eta \star \zeta$ , где  $\star$  — все связки

Это упражнение.

□

**Лемма 1.**  $\Gamma, \eta \vdash \zeta, \Gamma, \neg \eta \vdash \zeta$ . Тогда  $\Gamma \vdash \zeta$ .

**Доказательство.** Было в ДЗ.

□

*Доказательство теоремы о полноте.*  $\models \alpha$ , т.е.  $_{[x_1]}P_1 \dots _{[x_n]}P_n \vdash _{[\alpha]}\alpha$ . Но  $\llbracket \alpha \rrbracket = \Pi$  при любой оценке. Тогда  $_{[x_1]}P_1 \dots _{[x_n]}P_n \vdash \alpha$  при все  $x_i$ .

**Лемма 2** (об исключении допущения). Если  $_{[x_1]}P_1 \dots _{[x_n]}P_n \vdash \alpha$  и  $_{[x_1]}P_1 \dots _{[x_n]}\neg P_n \vdash \alpha$ , то  $_{[x_1]}P_1 \dots _{[x_{n-1}]}P_{n-1} \vdash \alpha$

$$\left. \begin{array}{l} _{[x_1]}P_1 \dots _{[x_{n-1}]}P_{n-1}, P_n \vdash \alpha \\ _{[x_1]}P_1 \dots _{[x_{n-1}]}P_{n-1}, \neg P_n \vdash \alpha \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{по лемме}} _{[x_1]}P_1 \dots _{[x_{n-1}]}P_{n-1} \vdash \alpha$$

□

## 2. Интуиционистская логика

### 2.1. ВНК-интерпретация

Определим выражения:

- $\alpha \& \beta$  — есть  $\alpha$  и  $\beta$
- $\alpha \vee \beta$  — есть  $\alpha$  либо  $\beta$  и мы знаем, какое
- $\alpha \rightarrow \beta$  — есть способ перестроить  $\alpha$  в  $\beta$
- $\perp$  — конструкция без построения (*bottom*)
- $\neg \alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$

**Теория доказательств** есть классическая логика без десятой схемы аксиомы, вместо нее  $\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$

**Теория моделей** — теория, в которой  $\llbracket \alpha \rrbracket$  — открытое множество в  $\Omega$  — топологическом пространстве.

В ней определено следующее:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \& \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= ((X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket) \cup \llbracket \beta \rrbracket)^\circ \\ \llbracket \perp \rrbracket &= \emptyset \\ \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= (X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket)^\circ \end{aligned}$$

# Лекция 3

## 26 февраля

### 2.2. Естественный (натуральный) вывод

Рассмотрим новый способ записи доказательств — в виде деревьев, называемый естественным выводом.

Тогда язык будет состоять из переменных  $A \dots Z, \vee, \&, \perp, \vdash, -$

У нас используются следующие правила вывода:

1.  $\frac{}{\Gamma \vdash \gamma, \gamma \in \Gamma}$  (аксиома)
2.  $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$  (введение  $\rightarrow$ )
3.  $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}$  (введение  $\&$ )
4.  $\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$  (удаление  $\rightarrow$ )
5.  $\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$  (удаление  $\&$ )
6.  $\frac{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi}$  (удаление  $\&$ )
7.  $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi}$  (введение  $\vee$ )
8.  $\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi}$  (введение  $\vee$ )
9.  $\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$  (удаление  $\perp$ )

$$10. \frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho}$$

$$\text{Пример. } \frac{\overline{A \vdash A} \text{ (акс.)}}{\vdash A \rightarrow A} \text{ (введение } \rightarrow \text{)}$$

$$\text{Пример. } \frac{\overline{A \& B \vdash A \& B} \text{ (акс.)} \quad \overline{A \& B \vdash A \& B} \text{ (акс.)}}{\overline{A \& B \vdash B} \quad \overline{A \& B \vdash A}} \frac{A \& B \vdash B \& A}{\vdash A \& B \rightarrow B \& A} \text{ (введение } \rightarrow \text{)}$$

### 2.3. Теория решеток

**Определение.**

- **Частичный порядок** — рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение.
- **Линейный порядок** — сравнимы любые два элемента.
- **Наименьший элемент**  $S$  — такой  $k \in S$ , что если  $x \in S$ , то  $k \leq x$
- **Минимальный элемент**  $S$  — такой  $k \in S$ , что нет  $x \in S$ , что  $x \leq k$
- **Множество верхних граней**  $a$  и  $b$ :  $\{x \mid a \leq x \& b \leq x\}$ .
- **Множество нижних граней**  $a$  и  $b$ :  $\{x \mid x \leq a \& x \leq b\}$ .
- $a+b$  — наименьший элемент множества верхних граней (может не существовать).
- $a \cdot b$  — наибольший элемент множества нижних граней.
- **Решетка** — множество + отношение, где для любых  $a, b$  есть как  $a+b$ , так и  $a \cdot b$ .
- **Дистрибутивная решетка** — если всегда  $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

**Лемма 3.** В дистрибутивной решетке  $a+b \cdot c = (a+b)(a+c)$

**Определение.**

- **Псевдодополнение**  $a$  и  $b$  обозначается  $a \rightarrow b$  и равно наибольшему элементу множества  $\{c \mid a \cdot c \leq b\}$
- **Импликативная решетка** — решетка, где  $\forall a, b \exists a \rightarrow b$
- $0$  — наименьший элемент решетки.
- $1$  — наибольший элемент решетки.
- **Псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга)** — импликативная решетка с нулём.
- **Булева алгебра** — псевдобулева алгебра, такая что  $a + (a \rightarrow 0) = 1$

*Пример.*

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot b = b$$

$$a \cdot b = 0$$

$$a + b = 1$$

**Лемма 4.** В импликативной решетке всегда есть 1.

*Доказательство.* Возьмём  $a \rightarrow a = 1$  для некоторого  $a$ .

$$a \rightarrow a = \mathbf{n}\{x \mid a \cdot x \leq a\} = \mathbf{n}(A)$$

Таким образом,  $A$  имеет наибольший элемент и это  $a \rightarrow a$  □

**Теорема 4.**

- Любая алгебра Гейтинга — модель интуиционистского исчисления высказываний.
- Любая булева алгебра — модель классического исчисления высказываний.

**Определение (топология).** Рассмотрим множество  $X$ , называемое “носитель” и  $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$  — подмножество подмножеств  $X$ , называемое “топология”, такое что:

1.  $\bigcup_{\alpha} x_i \in \Omega$ , где  $x_i \in \Omega$
2.  $\bigcap_{i=1}^n x_i \in \Omega$ , где  $x_i \in \Omega$
3.  $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$

*Пример.* Пусть  $X$  — узлы дерева,  $\Omega$  — все множества узлов, которые содержат узлы вместе со всеми потомками.

**Теорема 5.** Пусть  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство,  $a + b = a \cup b$ ,  $a \cdot b = a \cap b$ ,  $a \rightarrow b = ((X \setminus a) \subset b)^\circ$ ,  $a \leq b \Leftrightarrow a \subset b$ , тогда  $(\Omega, \leq)$  есть алгебра Гейтинга.

*Пример.* Дискретная топология —  $\Omega = \mathcal{P}(X)$ . Тогда  $(\Omega, \leq)$  — булева алгебра.

1.  $X^0 = X$
2.  $a \rightarrow 0 = (X \setminus a \cup \emptyset) = X \setminus a$

Таким образом,  $a + (a \rightarrow 0) = a + X \setminus a = X$

**Определение.** Пусть  $X$  — все формулы логики. Определим отношение порядка  $\alpha \leq \beta$  это  $\alpha \vdash \beta$ . Будем говорить, что  $\alpha \approx \beta$ , если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\beta \vdash \alpha$ .

$(X/\approx, \leq)$  есть алгебра Гейтинга.

**Определение.**  $(X/\approx, \leq)$  — алгебра Линденбаума, где  $X, \approx$  из интуиционистской логики.

**Теорема 6.** Алгебра Гейтинга — полная модель интуиционистской логики.

*Доказательство.*  $\models \alpha$  — истинно в любой алгебре Гейтинга, в частности в  $(X/\approx, \leq)$ .  $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$ , т.е.  $\llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket A \rightarrow A \rrbracket$ , т.е.  $\alpha \in [A \rightarrow A]_{\approx}$ , т.е.  $A \rightarrow A \vdash \alpha$ .  $\square$

# Лекция 4

## 5 марта

**Определение.** Полный порядок — линейный, где в каждом подмножестве есть наименьший элемент. Множество с полным порядком называют **вполне упорядоченным**.

*Пример.*  $\mathbb{N}$  — вполне упорядоченное множество

$\mathbb{R}$  — не вполне упорядоченное множество, т.к.  $(a, b)$  не имеет наименьшего  $\forall a, b$ . Кроме того,  $\mathbb{R}$  не имеет наименьшего.

**Определение.** Предпорядок — транзитивное, рефлексивное отношение.

Как мы знаем из домашнего задания, по предпорядку можно построить частичный порядок, сжав компоненты связности в классы эквивалентности.

### 2.4. Табличные модели

**Определение.** Табличная модель для интуиционистского исчисления высказываний:

- $V$  — множество истинностных значений
- $f_{\rightarrow}, f_{\&}, f_{\vee} : V^2 \rightarrow V$
- Выделенное истинное значение  $T \in V$
- Оценка переменных  $\llbracket P_i \rrbracket \in V, f_{\mathcal{P}} : P_i \rightarrow V$

И  $\llbracket P_i \rrbracket = f_{\mathcal{P}}(P_i), \llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket), \llbracket \neg \alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$

$\models \alpha$  означает, что  $\llbracket \alpha \rrbracket = T$  при любой  $f_{\mathcal{P}}$

**Определение.** Конечная табличная модель — табличная модель с конечным  $V$ .

**Теорема 7.** У интуиционистского исчисления высказываний не существует корректной полной табличной модели.

Неформально эта теорема говорит, что нельзя считать, что в интуиционистской логике есть три значения — истинна, ложь и “неизвестно”.

## 2.5. Модели Крипке

Идея моделей Крипке следующая: общезначимое утверждение истинно во всех мирах.

**Определение (модели Крипке).**

1.  $W = \{W_i\}$  — множество миров
2.  $\leq$  — частичный порядок на  $W$
3. Отношение вынужденности  $W_j \Vdash P_i$ , где  $P_i$  — переменная, т.е.  $(\Vdash) \subset W \times \mathcal{P}$

При этом, если  $W_j \Vdash P_i$  и  $W_j \leq W_k$ , то  $W_k \Vdash P_i$

**Определение.**

- $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \Vdash \beta$ , тогда (*и только тогда*)  $W_i \Vdash \alpha \& \beta$
- $W_i \Vdash \alpha$  или  $W_i \Vdash \beta$ , тогда (*и только тогда*)  $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$
- Пусть во всех  $W_i \leq W_j$  всегда, когда  $W_j \Vdash \alpha$ , имеет место  $W_j \Vdash \beta$ . Тогда  $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$
- $W_i \Vdash \neg \alpha$  значит, что  $\alpha$  не вынуждено нигде, начиная с  $W_i$ :  $W_i \leq W_j \Rightarrow W_j \nVdash \alpha$

**Теорема 8.** Если  $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \leq W_j$ , то  $W_j \Vdash \alpha$

**Определение.** Если  $W_i \Vdash \alpha$  при всех  $W_i \in W$ , то  $\models \alpha$

**Теорема 9.** ИИВ корректно в моделях Крипке.

*Доказательство.* Рассмотрим  $(W, \Omega)$  — топологию, где  $\Omega = \{w \subset W \mid \text{если } w_i \in w, w_i \leq w_j, \text{ то } w_j \in w\}$ . Это можно представить как множество подлесов, где любая вершина входит со своими потомками.

$\{W_k \mid W_k \Vdash P_j\}$  — открытое множество, что очевидно из определения  $\Omega$  и  $\Vdash$ .

Примем  $\llbracket P_i \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash P_i\}$  и аналогично  $\llbracket \alpha \rrbracket = \{W_k \mid W_k \Vdash \alpha\}$ . Корректность этого определения докажем в ДЗ.

Поскольку любая топология является корректной моделью ИИВ, искомое доказано.  $\square$

*Доказательство теоремы о нетабличности.* Предположим обратное, т.е. существует конечная табличная модель,  $|V| = n$ .

Рассмотрим следующую формулу:

$$\varphi_n = \bigvee_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} (P_i \rightarrow P_j \& P_j \rightarrow P_i)$$



1.  $\not\models \varphi_n$ . Почему? Рассмотрим последовательность миров, таких что  $W_i \models P_i$ , состоящую из  $n + 1$  мира. Тогда  $W_i \not\models (P_i \rightarrow P_j) \& (P_k \rightarrow P_j)$ , таким образом  $\not\models (P_i \rightarrow P_j) \& (P_k \rightarrow P_j)$  и  $\not\models \bigvee (P_i \rightarrow P_j) \& (P_k \rightarrow P_j)$ , а значит  $\not\models \varphi_n$
2.  $\models \varphi_n$  в  $V$  по принципу Дирихле:  $\exists i \neq j : \llbracket P_i \rrbracket = \llbracket P_j \rrbracket$ , а значит  $\llbracket P_i \rightarrow P_j \rrbracket = \text{И}$ , и соответственно  $\llbracket \varphi_n \rrbracket = \text{И}$ .

Т.к.  $\models \varphi_n$ , то  $\vdash \varphi_n$ , но это не так — противоречие.  $\square$

**Определение.** Дизъюнктивность ИИВ:  $\vdash \alpha \vee \beta$  влечет  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \beta$

**Определение.** Алгебра Гёделя — алгебра Гейтинга, в которой из  $a + b = 1$  следует  $a = 1$  или  $b = 1$

**Определение.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра Гейтинга. Тогда  $\Gamma(\mathcal{A})$  получается переименовыванием 1 в  $\omega$  и добавлением нового элемента  $1_{\Gamma(\mathcal{A})}$ , являющегося единицей для новой алгебры.

**Теорема 10.**  $\Gamma(\mathcal{A})$  есть алгебра Гейтинга и  $\Gamma(\mathcal{A})$  Гёделева.

*Доказательство.* Очевидно.  $\square$

**Определение.** Гомоморфизм алгебр Гейтинга — отображение  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — алгебры Гейтинга,  $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$ ,  $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ ,  $\varphi(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$

**Теорема 11.** Если  $a \leq b$ , то  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$

**Определение.** Пусть  $\alpha$  — формула ИИВ,  $f, g$  — оценки ИИВ, где  $f : \text{ИИВ} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $g : \text{ИИВ} \rightarrow \mathcal{B}$ . Тогда  $\varphi$  согласовано с  $f, g$ , если  $\varphi(f(\alpha)) = g(\alpha)$

**Теорема 12.** Если  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  согласована с  $f, g$  и  $\llbracket \alpha \rrbracket_g \neq 1_{\mathcal{B}}$ , то  $\llbracket \alpha \rrbracket_f \neq 1_{\mathcal{A}}$

*Доказательство.* Рассмотрим алгебру Линденбаума  $\mathcal{L}$ ,  $\Gamma(\mathcal{L})$  и  $\varphi : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$  — гомоморфизм.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1_{\mathcal{L}}, & x = \omega \\ 1_{\mathcal{L}}, & x = 1_{\Gamma(\mathcal{L})} \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть  $\vdash \alpha \vee \beta$ . Тогда  $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$ , но по Гёделеваемости  $\Gamma(\mathcal{L})$   $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$  или  $\llbracket \beta \rrbracket = 1$ .

Пусть  $\not\models \alpha$  и  $\not\models \beta$ . Тогда  $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket) \neq 1_{\mathcal{L}}$  и  $\varphi(\llbracket \beta \rrbracket) \neq 1_{\mathcal{L}}$ . Тогда  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq 1_{\mathcal{L}}$ ,  $\llbracket \beta \rrbracket \neq 1_{\mathcal{L}}$  — противоречие.  $\square$

# Лекция 5

## 12 марта

### 3. Изоморфизм Карри-Ховарда

*Примечание.* Эта тема в нашем курсе рукомахательная.

Пусть  $p$  — программа, т.е. функция, принимающая  $\alpha$  и возвращающая  $\beta$ , т.е.  $p : \alpha \rightarrow \beta$

Можем посмотреть на это с другой стороны:  $p$  доказательство, что из  $\alpha$  следует  $\beta$ , например в Haskell `f a = a` гласит, что `f` доказывает, что  $A \rightarrow A$ , где подразумевается  $\forall A$ .

Такое сопоставление программам доказательств и высказываниям типов называется изоморфизмом Карри-Ховарда:

логическое исчисление	типизированное $\lambda$ -исчисление
логическая формула	тип
доказательство	программа
доказуемая формула	обитаемый тип
$\rightarrow$	функция
$\&$	упорядоченная пара
$\vee$	алгебраический тип ( <i>тип-сумма</i> )

*Примечание.* Обитаемый тип — тип, у которого есть хотя бы один экземпляр.

Несложно заметить, что логика, соответствующая  $\lambda$ -исчислению, является интуиционистской, поэтому мы её в основном изучаем.

#### 3.1. Алгебраические типы

Рассмотрим следующее определение списка в Pascal:

```
type list : record
  nul : boolean;
```

```

    case nul of
      true: ;
      false: next ^list
    end
end;

```

Рассмотрим то же самое в C, опустив bool и скажем, что `nul = (next == null)` (это в какой-то степени костыльно):

```

struct list {
    next: *list;
}

```

Определим таким же способом дерево:

```

struct tree {
    tree* left;
    tree* right;
    int value;
}

```

Это ещё более костыльно, т.к. то, является ли вершина листом, закодировано в неявном виде.

**Определение.** Отмеченное (*дизъюнктивное*) объединение множеств  $A, B$  обозначается  $A \sqcup B$  или  $A \uplus B$ <sup>1</sup> и равно  $\{\langle "A", a \rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle "B", b \rangle \mid b \in B\}$ .

*Примечание.* Это определение интуиционистское по своей сути, т.к. если дано  $s \in A \sqcup B$ , то мы знаем, из какого множества  $s$ .

**Определение.** Тип, соответствующий такому объединению множеств, называется алгебраическим

*Пример.* В C++ такой тип реализован как `std::variant<...>`

*Пример.* Список в Haskell:

```

data List a = nil | Cons a (List a)

```

### 3.2. Применение восьмой аксиомы интуиционистской логики

Вспомним восьмую аксиому интуиционистской<sup>2</sup> логики и запишем её как правило натурального вывода:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$$

<sup>1</sup> или ещё десятком других символов

<sup>2</sup> и классической

Рассмотрим программу в Haskell, которая преобразует список в строку:

```
let rec string_of_list l =
  match l with
  | Nil -> "Nil"
  | Cons(head, tail) -> head ^ ":" ^ string_of_list tail
```

Подставим в рассматриваемую аксиому соответствующие значения:

$$\frac{\Gamma \vdash Nil \rightarrow string \quad \Gamma \vdash list \rightarrow string \quad \Gamma \vdash Nil \vee list}{\Gamma \vdash string}$$

Несложно заметить, что эта аксиома описывает match в Haskell — мы даем выражения после “->”, т.е. правила Nil -> string, list -> string и элемент Nil или list, а match возвращает string.

## 4. Исчисление предикатов

### 4.1. Язык исчисления предикатов

Выражения в этом языке бывают двух видов:

1. Логические выражения, называемые “предикаты” или “формулы”
2. Предметные выражения, называемые “термы”

$\theta$  — метaperменная для термов.

Термы бывают двух видов:

- Атомы:
  - Предметные переменные обозначаются буквами  $a, b, c \dots$
  - Метaperменные обозначаются буквами  $x, y, z$
- Применение функциональных символов:
  - Функциональные символы:  $f, g, h$  и записывается  $f(\theta_1 \dots \theta_n)$
  - Метaperменная тоже обозначается  $f$

Логические выражения:

- Применение предикатных символов  $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , где  $P$  — метaperменная для предикатных символов, а предикатный символ —  $A, B, C \dots$
- Связки  $\&, \vee, \neg, \rightarrow$  с правилами из языка классической логики.
- Кванторы <sup>3</sup>  $\forall x.\varphi$  или  $\exists x.\varphi$ , где  $\varphi$  — любое логическое выражение.

<sup>3</sup> По записи кванторов нет общепринятого соглашения.

Мы используем жадность кванторов.<sup>4</sup> Это значит, что квантор берет в  $\varphi$  все, пока не встретит конец выражения или скобку, которая оканчивает этот квантор.

Пример.  $\forall x.P(x) \& \forall y.P(y) \equiv \forall x.(P(x) \& (\forall y.P(y)))$

## 4.2. Теория моделей

Определим оценку формулы в исчислении предикатов:

1. Фиксируем  $D$  — предметное множество,  $V = \{И, Л\}$
2. Каждому  $f_i(x_1 \dots x_n)$  сопоставим функцию  $f_{f_n} : D^n \rightarrow D$
3. Каждому  $P_j(x_1 \dots x_n)$  сопоставим функцию<sup>5</sup>  $f_{p_n} : D^n \rightarrow V$
4. Каждой  $x_i$  сопоставим  $f_{x_i} \in D$ 
  - $\llbracket x \rrbracket = f_{x_i}$
  - $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket$  — так же, как в исчислении высказываний.
  - $\llbracket P_i(\theta_1 \dots \theta_n) \rrbracket = f_{p_i}(\llbracket \theta_1 \rrbracket \dots \llbracket \theta_n \rrbracket)$
  - $\llbracket f_j(\theta_1 \dots \theta_n) \rrbracket = f_{f_j}(\llbracket \theta_1 \rrbracket \dots \llbracket \theta_n \rrbracket)$
  - $\llbracket \forall x.\varphi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \varphi \rrbracket = И \text{ при всех } k \in D \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$
  - $\llbracket \exists x.\varphi \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \varphi \rrbracket = И \text{ при некотором } k \in D \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$

Пример.  $\forall x.\forall y.E(x, y)$

Пусть  $D = \mathbb{N}$ ,  $E(x, y) = \begin{cases} И, & x = y \\ Л, & x \neq y \end{cases}$

$\llbracket \forall x.\forall y.E(x, y) \rrbracket_{x:=1, y:=2} = Л$ , т.к.  $\llbracket E(x, y) \rrbracket = Л$ .

Вспомним определение предела последовательности из матанализа:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |a_n - a| < \varepsilon$$

Перепишем это определение с богомерзкого языка матанализа на православный язык исчисления предикатов.<sup>6</sup>

<sup>4</sup> В отношении жадности кванторов также нет соглашения; встречается запись, где квантор — унарная операция, аналогичная  $\neg$

<sup>5</sup>, называемую предикат

<sup>6</sup> Это термины лектора, все претензии от адептов матанализа и других религий — к нему.

Пусть  $(>)(a, b) = G(a, b)$ ,  $|a| = m_+(a)$ ,  $(-)(a, b) = m_-(a, b)$ ,  $m_a : n \mapsto a_n$ ,  $0() = m_0$

$$\forall \varepsilon. \varepsilon \rightarrow 0 \exists N. \forall n. (n > N) \rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon. \varepsilon \rightarrow 0 \exists N. \forall n. (n > N) \rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

$$\forall e. G(e, m_0) \exists n_0. \forall n. G(n, n_0) \rightarrow G(e, m_+(m_-(m_a(n), a))) < \varepsilon$$

### 4.3. Теория доказательств

Все аксиомы исчисления высказываний + Modus Ponens + две схемы аксиом + два правила:

$$1. (\forall x. \varphi) \rightarrow \psi[x := \theta]$$

$$2. \varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x. \varphi$$

Обе эти схемы применимы только если  $\theta$  свободен для подстановки вместо  $x$  в  $\varphi$ , т.е. никакое свободное вхождение  $x$  в  $\theta$  не станет связным.

*Пример.*

```
int f(int x) {
    x = y;
}
```

После замены  $y := x$  код станет следующим:

```
int f(int x) {
    x = x;
}
```

И код потеряет свой смысл.

Правила следующие:

$$1. \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x. \psi} \text{ (правило } \forall \text{)}$$

$$2. \frac{\psi \rightarrow \varphi}{\exists x. \psi \rightarrow \varphi} \text{ (правило } \exists \text{)}$$