Полиномиальная формула

Определение. Мультииндекс — вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1. $|\alpha| \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$
2. $x^\alpha \overset{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\alpha! \overset{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4. $f_{(x)}^{(\alpha)} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^r = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r} = \sum_{\alpha : |\alpha| = r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha$$

Это обобщение следующих формул:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a_1 + a_2)^n = \sum\limits_{\alpha_1 + \alpha_2 = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}$ *(биномиальная формула)*

Лемма 1.

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$ — это подразумевает, что E открыто
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при $1 \le k \le r$:

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j : |j| = k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

Доказательство. Как на лекции:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2}$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \ldots \right)$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\dots\sum_{i_k=1}^{m}\frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}h_{i_1}h_{i_2}\dots h_{i_k}$$

Формальное доказательство по индукции:

Индукционное предположение:

$$\varphi^k(t) = \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\dots\sum_{i_k=1}^{m}\frac{\partial^k f(a+th)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}h_{i_1}h_{i_2}\dots h_{i_k}$$

База:

$$\varphi'(t) = \sum_{i_1=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a+th)h_{i_1}$$

Переход:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k+1)}(t) &= \left(\varphi^k(t)\right)' \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\dots\sum_{i_k=1}^{m}\frac{\partial^k f(a+th)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}h_{i_1}h_{i_2}\dots h_{i_k}\right)' \\
&= \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\dots\sum_{i_k=1}^{m}\left(\frac{\partial^k f(a+th)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}\right)' h_{i_1}h_{i_2}\dots h_{i_k} \\
&= \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\dots\sum_{i_k=1}^{m}\sum_{i_{k+1}=1}^{m}\frac{\partial^{k+1} f(a+th)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}h_{i_{k+1}}h_{i_1}h_{i_2}\dots h_{i_k}
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 1 (Формула Тейлора в терминах мультииндекса).

- $f \in C^{r+1}(E)$ — это подразумевает $E \subset \mathbb{R}^m$, $f : E \to \mathbb{R}$
- $x \in B(a,R) \subset E$

Тогда $\exists t \in (0,1)$:

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0\le|\alpha|\le r}\frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=r+1}\frac{f^{(\alpha)}(a+t(x-a))}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

Раскроем мультииндексы:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \left(\sum_{\substack{(\alpha_1 \ldots \alpha_m): \\ \alpha_i \geq 0 \\ \sum \alpha_i = k}} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!} \frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_m)^{\alpha_m}} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x_m - a_m)^{\alpha_m} \right)$$

Ещё + аналогичный остаток.

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r} \sum \ldots \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!} \frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_m)^{\alpha_m}} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \ldots h_m^{\alpha_m}$$

Тут тоже + аналогичный остаток.

Доказательство. Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$, где $h = x - a$. Тогда $\varphi(0) = f(a)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} t + \ldots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!} t^{r+1}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{o(|x-a|^r)}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha: |\alpha| = k} \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

□

Определение.

$\displaystyle\sum_{\alpha: |\alpha| = k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} k$-й **дифференциал** функции f в точке a относительно $h \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(a, h)$

Перепишем $f(x)$ через дифференциал:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + o(|h|^r)$$

$f(a)$ это $d^k f(a,h)$ при $k=0$, поэтому он зашел под сумму.

Пример. $\triangleleft k = 2$

$$d^2 f = f''_{x_1,x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_2,x_2}(a)h_2^2 + \ldots + f''_{x_m,x_m}(a)h_m^2 + 2\sum_{i<j} f''_{x_i,x_j} h_i h_j$$

Заметим, что $k!/\alpha!$ - число способов реализовать дифференцирование, т.е. в каком порядке брать частные производные.

В дифференциалах работает композиция: $d^{k+1}f = d(d^k f)$

Покажем это на примере:

$$df = f'_{x_1}h_1 + f'_{x_2}h_2 + \ldots + f'_{x_m}h_m$$

$$d^2 f = (f''_{x_1x_1}h_1 + f''_{x_1x_2}h_2 + \ldots + f''_{x_1x_m}h_m)h_1 + (f''_{x_2x_1}h_1 + f''_{x_2x_2}h_2 + \ldots + f''_{x_2x_m}h_m)h_2 + \ldots =$$
$$= (f'_{x_1})'h_1 + (f'_{x_2})'h_2 + \ldots = d(df)$$

Теорема 2 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).

$$f(a+h) = \sum_{\alpha:0\le|\alpha|\le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}h^\alpha + o(|h|^r)$$

Доказательство. Отсутствует □

Упражнение. Если $f(a+h) = \underbrace{T_r(h)}_{\text{Многочлен степени } \le r} + o(|h|^r)$, то $T_r(h)$ — многочлен Тейлора

Пример. $(0.97)^{1.02} = ?$

$f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^y$

$f(0.97, 1.02) = ?$

Здесь все производные в $(1,1)$, это не указывается ради краткости.

$$f(x,y) = f(1,1) + f'_x(x-1) + f'_y(y-1) + \frac{f''_{xx}}{2!}(x-1)^2 + \frac{f''_{yy}}{2!}(y-1)^2 + f''_{xy}(x-1)(y-1) + o(\ldots)$$

- $f'_x = yx^{y-1} \to 1$
- $f'_y = x^y \ln x \to 0$

- $f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2} \to 0$
- $f''_{yy} = x^y \ln^2 x \to 0$
- $f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \to 1$

$$f(0.97, 1.02) \approx 1 + 1(-0.03) + 1(-0.03)(0.02)$$

Определение. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ **— множество линейных отображений** $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, также обозначается $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $L_{m,n}$

Это линейное пространство:

1. $(F+G)(x) = F(x) + G(x)$
2. $(\alpha F)x = \alpha(Fx)$

Обозначение (Норма линейного оператора).

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad ||A|| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |Ax|$$

Примечание.

1. $\sup \Leftrightarrow \max$ в силу компактности сферы
2. $A = (a_{ij})$ *(оператор задается матрицей)*, тогда $||A|| \le \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ по лемме об оценке нормы линейного отображения ($||Ax|| \le C||x||$)
3. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \le ||A|| \cdot |x|$

   Доказательство.

   (a) $x = 0$ — тривиально, $0 \le 0$

   (b) $x \ne 0 \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|} \Rightarrow |\tilde{x}| = 1 \Rightarrow |Ax| \le ||A||$

   $$|Ax| = |A(|x|\tilde{x})| = ||x|A\tilde{x}| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \le ||A|| \cdot |x|$$

   □

4. Если $\exists c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \ \ |Ax| \le C|x|$, то $||A|| \le C$

Пример. 1. $m = l = 1 \quad A \leftrightarrow a_{11} \quad x \mapsto a_{11}x \quad ||A|| = a$

2. $m = 1, l$ — любое. $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l \quad A \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix} = \vec{a} \quad t \mapsto t\vec{a} \quad ||A|| = |a|$

3. m — любое, $l = 1$ $\quad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad A \leftrightarrow \vec{a} \quad x \mapsto (\vec{a}, x) \quad ||A|| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |(\vec{a}, x)| = |\vec{a}|$

4. m — любое, l — любое. $||A|| = \sup |Ax|$ — мы не знаем, как такое считать.

Лемма 2.

- X, Y — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. A — ограниченный оператор, т.е. $||A||$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно всюду в X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство.

1. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно.
2. $2 \Rightarrow 1$

   Непрерывность в 0: $\forall \varepsilon \ \ \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

   $\lhd \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left|A \frac{1}{\delta} \delta x\right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$
3. $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{||A||} \ \ \forall x_1, x_0 : |x_1 - x_0| < \delta$$
$$|Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \leq ||A|| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$$

$\square$

Теорема 3 (о пространстве линейных отображений).

1. Отображение $A \to ||A||$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — норма, т.е.:
   (a) $||A|| \geq 0$
   (b) $||A|| = 0 \Rightarrow A = 0_{n \times m}$
   (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ ||\lambda A|| = |\lambda| ||A||$
   (d) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow ||BA|| \leq ||B|| \cdot ||A||$

Доказательство.

1. $||A|| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$

   a, b, c — очевидно.

   d: $|(A+B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (||A|| + ||B||)|x|$

   По замечанию 3 $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$

2. $|BAx| = |B(Ax)| \leq ||B|| \cdot |Ax| \leq ||B|| \cdot ||A||$

$\square$

Примечание. В $\mathcal{L}(X,Y)$:

$$||A|| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x|\leq 1} |Ax| = \sup_{|x|<1} |Ax| = \sup_{|x|\neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall x \ \ |Ax| \leq C|x|\}$$