

Рассмотрим такой ряд:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4 \text{ раза}} + \underbrace{- \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{8 \text{ раз}} + \dots$$

Сходится ли этот ряд? Да, потому что можно разбить на скобки из 3х слагаемых (кроме 1), каждая из которых = 0.

Рассмотрим похожий ряд:

$$-1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \underbrace{+ \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}}_{4 \text{ раза}} + \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}}_{8 \text{ раз}} + \dots = -1$$

Произошла магия — сумма ряда = -1, т.к. $b_n = -a_n$, где b_n — слагаемое этого ряда, a_n — прошлого ряда. Но мы просто переставили слагаемые предыдущего ряда \Rightarrow перестановка бесконечного числа слагаемых меняет результат.

Определение. $\sum a_k, w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — биекция

$b_k := a_{w(k)}$, $\sum b_k$ называется **перестановкой** ряда $\sum a_k$

Теорема 1. Ряд A абсолютно сходится, тогда его перестановка B тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. 1. $a_k \geq 0$

$$S_n^{(b)} = b_1 + \dots + b_n = a_{w(1)} + \dots + a_{w(n)} \leq S_N^{(a)}, N = \max(w(1) \dots w(n))$$

Предельный переход: $S^{(b)} \leq S^{(a)}$

Т.к. A — перестановка B , то $S^{(a)} \leq S^{(b)} \Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$

2. Общий случай

$$a_k^+ = \max(a_k, 0), a_k^- = \max(-a_k, 0)$$

$$\sum b_k^+ \text{ — перестановка } \sum a_k^+; \sum b_k^- \text{ — перестановка } \sum a_k^-$$

Срезки сходятся по пункту 1., в силу абсолютной сходимости $\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$ конечны $\Rightarrow S^{(a)} = S^{(b)}$

□

Теорема 2. Римана.

$\sum a_k$ — сходится неабсолютно. Тогда:

1. \exists перестановка ряда A , которая не имеет предела частичной суммы

2. $\forall S \in \overline{\mathbb{R}} \exists$ перестановка ряда A с суммой S

Доказательство. 2. Т.к. $\sum a_k$ сходится неабсолютно, существует две кучи - одна из положительных a_k , другая из отрицательных. Обе кучи бесконечные и имеют бесконечную сумму. Тогда будем брать элементы из положительной кучи, пока частичная сумма $< S$, потом берем элементы из отрицательной кучи, пока сумма $> S$. Получаем ряд, осциллирующий вокруг S . Если есть нулевые элементы, то будем их добавлять в сумму, когда меняем направление.

1. Будем осциллировать не вокруг S , а между T и S . □

Пример.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots = \\ &= 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \end{aligned}$$

Разложим $f(x) = \ln(1+x)$ по Тейлору:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) x^n \\ f^{(n+1)}(c) &= \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}} \\ R_n &\leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \\ \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \end{aligned}$$

Проблема: сумма этого ряда должна быть > 1 , но мы получили обратное. Это произошло, потому что мы переставили слагаемые неабсолютно сходящегося ряда.

Произведение рядов

$$(a_1 + \dots + a_k)(b_1 + \dots + b_l) = \sum \sum a_i b_j$$

Определение. $\sum a_k, \sum b_k$

$\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биекция, $\gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$

Произведение рядов A и B — ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$

Теорема 3. Коши.

Пусть ряды $\sum a_k, \sum b_k$ абсолютно сходятся. Тогда \forall биекции $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ произведение рядов абсолютно сходится и его сумма $= AB$

Доказательство. $\sum |a_k| = A^*, \sum |b_k| = B^*, 0 \leq A^*, B^* < +\infty$

$$\sum_{k=1}^N |a_{\varphi(x)} b_{\psi(x)}| \leq \sum_{i=1}^M |a_i| \sum_{j=1}^L |b_j| \leq A^* B^*$$

$$M := \max(\varphi(1) \dots \varphi(N)) \quad N := \max(\psi(1) \dots \psi(N))$$

Итого произведение сходится абсолютно.

Произведение для $\bar{\gamma} \neq \gamma$ есть перестановка произведения для $\gamma \Rightarrow \forall \gamma$ произведение рядов имеет одинаковую сумму.

Возьмём γ такое, что оно обходит точки $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ “по квадратам”, т.е. не заходит в следующий квадрат, пока не обошло предыдущий. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$$

□

Пример. $x \in \mathbb{R}, x$ — фиксированный

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Это называется произведение степенных рядов.

Функции нескольких переменных

Лемма 1. О дифференцируемости отображения и его координатных функций.

$$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int} E$$

$F(x) = (f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x))$. Тогда:

1. F — дифф. в $a \Leftrightarrow$ все f_i дифференцируемы в a
2. $\forall i = 1 \dots n$ i -я строка матрицы Якоби F есть матрица Якоби f_i

Доказательство.

$$F(x) = F(a) + L(x - a) + \varphi(x)|x - a|$$

$$\forall i \quad f_i(x) = f_i(a) + (L_{1i}, L_{2i}, \dots, L_{mi}) \cdot (x - a) + \varphi_i(x)|x - a|$$

Очевидно оба выражения эквивалентны. □

Пример. 1. $F = \text{const} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad F \text{ дифф. в } x, F'(x) = \mathbf{0}$$

$$F(x) = F(a) + \underbrace{L}_{\mathbf{0}}(x - a) + \underbrace{\varphi(x)}_{\mathbf{0}}|x - a|$$

2. $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ — линейный оператор

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad A \text{ дифф. в } x, A'(x) = A$$

$$A(x) = Aa + A(x - a) + \underbrace{\varphi(x)}_{\mathbf{0}}|x - a|$$

3. $F(x) = v_0 + Ax$ — аффинное отображение. $F'(x) = A$

1. Частные производные

Определение. $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int}E$

Фиксируем $k \in \{1 \dots m\}$ $\varphi_k(t) := f(a_1, a_2 \dots t \dots a_m)$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_k(a_k + h) - \varphi_k(a_k)}{h} = \varphi'_k(a_k)$ называется **частной производной** функции f в точке a

$$f'_k(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = D_k f(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 \dots a_k + h \dots a_m) - f(a_1 \dots a_m)}{h}$$

Пример. 1.

$$f(x, y) = x + (y - \alpha) \arctg \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{xy} + 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{df}{dx}(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Теорема 4. Необходимое условие дифференцируемости. $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int} E, f - \text{дифф. в } a$ Тогда $\exists f'_1(a), \dots, f'_m(a)$ и матрица Якоби f в точке $a = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$ *Доказательство.*

$$f(x) = f(a) + (l_1 \dots l_m)(x - a) + \alpha(x)|x - a|$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{|x - a|} = 0$$

Посчитаем предел по направлению $x = a + te_k, e_k = (0 \dots 0, 1, 0 \dots 0)$

$$f(a + te_k) = f(a) + l_k t + \alpha_k(t)|t| \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = l_k$$

□

Следствие 1. $F : F \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l, a \in \text{Int} E, F - \text{дифф. в } a$ Тогда все координатные функции F_i дифференцируемы в a и $F'(a) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) \right)$ **Теорема 5.** Достаточное условие дифференцирования. $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \exists r > 0 \ B(a, r) \subset E$ и в этом шаре $\exists f'_1 \dots f'_m$ (конечные) и они непрерывны в точке a . Тогда f дифф. в a *Доказательство.* $m = 2$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) &= \\ &= f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) + f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \\ &= f'_2(x_1, \bar{x}_2)(x_2 - a_2) + f'_1(\bar{x}_1, a_2)(x_1 - a_1) = \\ &= f'_2(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + f'_1(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \underbrace{(f'_2(x_1, \bar{x}_2) - f'_2(a_1, a_2))}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{x_2 - a_2}{|x - a|}}_{< 1} |x - a| + \text{аналогично} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

□

Правила дифференцирования

2. Линейность

$F, G : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, дифф. в $a \in \text{Int}E$. Тогда

$F + G, \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \lambda F -$ дифф. в a

$$(F + G)'(a) = F'(a) + G'(a) \quad (\lambda F)'(a) = \lambda F'(a)$$

Доказательство. Сложить определения дифференцирования

$$F(a + h) = F(a) + F'(a)h + \alpha(h)|h|$$

$$G(a + h) = G(a) + G'(a)h + \beta(h)|h|$$

$$(F + G)(a + h) = (F + G)(a) + (F' + G')(a)h + (\alpha + \beta)(h)|h|$$

□