

Теорема 1 (характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- f измеримо

Тогда $\exists f_n$ – ступенчатые:

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2. $\forall x \ f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Доказательство.

$$e_k^{(n)} = X \left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n} \right) \quad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$



$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

□

Следствие 1.

- f — измеримо

Тогда $\exists f_n$ — измеримые : $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ всюду и $|f_n| \leq |f|$

Доказательство. Рассмотрим срезки f^+, f^- , дальше очевидно.

□

Следствие 2.

- f, g — измеримо

Тогда fg — измеримо, если $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство.

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \rightarrow fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела.

□

Следствие 3.

- f, g — измеримо

Тогда $f + g$ измеримо.

Примечание. Считаем, что $\forall x$ не может быть одновременно $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$.

Доказательство.

$$f_n + g_n \rightarrow f + g$$

□

Теорема 2 (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры).

Примечание. $A \subset X$ — **полной меры**, если $\mu(X \setminus A) = 0$.

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывно на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измеримо.

Доказательство. f — измеримо на E' , т.к. $E'(f < a)$ открыто в E' по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e$, λ_m — полная $\Rightarrow e(f < a)$ — измеримо в E .

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, объединение измеримых множеств измеримо. \square

Пример. $E = \mathbb{R}$, $f = \chi_{\text{Irr}}$, где Irr — множество иррациональных чисел. f непр. на Irr и разрывно на \mathbb{R} .

Следствие 4.

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- f измеримо на E'

Тогда можно так переопределить f на e , что полученная функция \tilde{f} будет измерима.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E' \\ \text{const}, & x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f < a)} \subset \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\emptyset \text{ или } e}$$

\square

Следствие 5. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонна.

Тогда f измерима.

Доказательство. f — непрерывно на $\langle a, b \rangle$ за исключением, возможно, счётного множества точек. \square

Упражнение. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна.

Доказать: $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$ — измеримо.

Упражнение. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримо.

Доказать: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ — измеримо.

Упражнение. Доказать, что \exists измеримая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \mu e = 0$, если f непрерывно на e , то полученная \tilde{f} разрывна всюду.

Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание ($x \in X$)

$W(x)$ — верно при почти всех из E = почти всюду на E = почти везде на E = п.в. E , если:

$\exists e \in E : \mu e = 0$ $W(x)$ — истинно при $x \in E \setminus e$

Пример. $X = \mathbb{R}$, W = иррационально.

Пример. $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(x)$ при п.в. $x \in E$

Свойства.

1.
 - μ — полная
 - $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ п.в. X
 - f_n измеримо

Тогда f измеримо.

Доказательство. $f_n \rightarrow f$ на X' , где $e = X \setminus X', \mu e = 0$

f — измеримо на X

μ — полная $\Rightarrow f$ измеримо на X , т.к. $X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subset e}$ □

2. ???

3. Пусть $\forall n$ $W_n(x)$ истинно при почти всех x .

Тогда утверждение “ $\forall n$ W_n истинно” — верно при почти всех X

Доказательство. $\triangleleft e_n : \mu(e_n) = 0$. Искомое высказывание верно при $x \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right), \mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i\right) = 0$ □

Определение. $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечны.

f_n сходится к f по мере μ , обозначается $f_n \xrightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0, т.е. предел не задан однозначно.

Упражнение. $f_n \xrightarrow[\mu]{} f; f_n \xrightarrow[\mu]{} g$. Тогда f и g эквивалентны.

Пример.

$$1. f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$$

$$f_n \rightarrow f \text{ всюду на } (0, +\infty)$$

$$f_n \xrightarrow[\mu]{} f$$

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \geq \varepsilon\right) = X\left(x \leq \frac{1}{\varepsilon n}\right)$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \rightarrow 0$$

$$2. f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ при всех } x$$

$$f_n(x) \xrightarrow{\quad} 0$$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\rightarrow 0$$

$$3. n = 2^k + l, 0 \leq l < 2^k, X = [0, 1], \lambda$$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

$\lim f_n(x)$ не существует ни при каком x !

$$X(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[\lambda]{} 0$$

Теорема 3 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- μX конечно
- f_n, f — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \rightarrow f$ п.в.

Тогда $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0, то есть $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon)$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху, $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

Рассмотрим общий случай: $f_n \rightarrow f$, $\varphi(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда $\varphi_n \rightarrow 0$, $\varphi_n \geq 0$ и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon) \\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

□

Теорема 4 (Рисс).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

Доказательство.

$$\forall k \quad \mu X \left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \rightarrow 0 \\ \exists n_k : \text{при } n \geq n_k \quad \mu X \left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что $f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X \left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \quad E = \bigcap E_k \\ E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X \left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0 \\ \mu E_k \rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

1: по счётной полуаддитивности меры.

Покажем, что при $x \notin E$ $f_{n_k} \rightarrow f$.

$$x \notin E \quad \exists N \quad x \notin E_k \text{ при } k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$.

Т.к. $\mu E = 0$, искомое выполнено. □

Следствие 6. $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ $|f_n| \leq g$ почти всюду. Тогда $|f| \leq g$ почти всюду.

Доказательство. $\exists n_k \quad f_{n_k} \rightarrow f$ почти всюду. □

$$f_n \Rightarrow f \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \Rightarrow f_n \xrightarrow{\quad} f$$

Теорема 5 (Егорова).

- X, \mathfrak{A}, μ
- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечно, измеримо

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \xrightarrow[X \setminus e]{} f$$

Доказательство. Упражнение. □

Интеграл

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — зафиксировали.

Определение (1).

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- E_k — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu(x) := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

Свойства.

1. Не зависит от представления f в виде суммы, т.е.:

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

Примечание. При $E_k \cap E'_j \neq \emptyset$ $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow$ можно писать любое из них.

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu (E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

$$2. \underbrace{f}_{\text{ст.}} \leq \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$$

Определение (2).

- $f \geq 0$
- f измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g - \text{ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Свойства.

- Если f ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$
- $g \leq f, f - \text{измеримая}, g - \text{измеримая} \Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение (3).

- f измеримо
- $\int f^+$ или $\int f^-$ конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

Теорема 6 (Тонелли).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f измерима
- Записывается как $f(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{m+n} \quad E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ измерима на \mathbb{R}^n
2. Функция $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$, измерима и корректно задана.
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Примечание. Неформально говоря, можно разбить \mathbb{R}^{m+n} на \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.