

**Определение.**  $U : X \rightarrow X$ , такой что:

1.  $\forall x, y \quad \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$
2.  $\forall x \quad \|Ux\| = \|x\|$
3.  $U^* = U^{-1} \Leftrightarrow U^*U = UU^* = I$

называется **унитарным оператором**

**Теорема 1.** Свойства 1,2 и 3 эквивалентны.

*Доказательство.* •  $1 \Rightarrow 2$

$$\begin{aligned} \forall x, y \quad \langle Ux, Uy \rangle &= \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\Rightarrow} \|Ux\| = \|x\| \\ \|Ux\|^2 &= \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \end{aligned}$$

•  $2 \Rightarrow 3$

$$\begin{aligned} \|Ux\| &= \|x\| \stackrel{?}{\Rightarrow} U^*U = I \\ \|Ux\|^2 &= \langle Ux, Ux \rangle = \langle U^*Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle \\ U^*U &= I \end{aligned}$$

•  $3 \Rightarrow 1$

$$\begin{aligned} U^* &= U^{-1} \stackrel{?}{\Rightarrow} \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \\ \langle Ux, Uy \rangle &= \langle U^*Ux, y \rangle = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

□

**Лемма 1.**  $|\det U| = 1$

*Доказательство.*

$$1 = \det I = \det(U^*U) = \det U^* \det U \stackrel{\text{def}}{=} \det \overline{U}^T \det U = \det \overline{U} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U|^2$$

□

**Лемма 2.** Матрица унитарного преобразования обладает свойством ортогональности по строкам и столбцам.

*Доказательство.* Здесь  $\mathcal{U}$  - оператор,  $U$  - его матрица:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \leftrightarrow U &= \|U_{ij}\| \\ \mathcal{U}^*\mathcal{U} &= I \Rightarrow U^+U = E \end{aligned}$$

В следующей строке подразумевается  $\forall i, k$

$$\sum_{j=1}^n \bar{U}_{ji} U_{jk} = \sum_{j=1}^n (\bar{U}^T)_{ij} U_{jk} = \delta_{ik}$$

□

*Пример.* Матрица поворота - ортогональное преобразование.

**Лемма 3.** Множество унитарных операторов образует мультипликативную группу  $U(n)$ :

1.  $U_1, U_2 \in U(n) \Rightarrow U_1 \cdot U_2 \in U(n)$
2.  $\exists I : I^* = I$
3.  $\forall U \exists U^{-1} = U^*$
4.  $U_1(U_2 U_3) = (U_1 U_2) U_3 = U_1 U_2 U_3$

*Доказательство.* 1.  $U_1 U_2$  - унитарный?

$$\langle U_1 U_2 x, U_1 U_2 y \rangle = \langle U_1^* U_1 U_2 x, U_2 y \rangle = \langle U_2 x, U_2 y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Остальное очевидно.

□

$U(n)$  называется **унитарной группой операторов над унитарным пространством  $X$ ,  $\dim X = n$**

$$\triangleleft SU(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{U \in U(n) : \det U = 1\}$$

**Лемма 4.**  $SU(n)$  — подгруппа  $U(n)$

**Лемма 5.** Все собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице.

$$\lambda \in \sigma_U \Rightarrow |\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = e^{i\varphi}$$

*Доказательство.*  $]Ux = \lambda x$

$$\|x\| = \|Ux\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

□

**Лемма 6.** Собственные вектора  $U$ , отвечающие различным собственным значениям, являются ортогональными.

*Доказательство.*

□

**Лемма 7.** Любое инвариантное подпространство  $U$  является приводящим.

$$X = L + L^\perp \quad y \in L^\perp \Rightarrow Uy \in L^\perp$$

*Доказательство.*

$$\langle y \in L^\perp : 0 \langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle = 0$$

□

**Теорема 2.** Из собственных векторов унитарного оператора можно построить ортонормированный базис.

*Доказательство.* Очевидно от противного, как с эрмитовым оператором. □

*Примечание.* Унитарный оператор имеет скалярный тип, ортогональный оператор (унитарный, но над  $\mathbb{C}$ ) может не иметь.

**Теорема 3.** Спектральная теорема для унитарного оператора:

$$U = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^n e^{i\varphi_j} \langle e^j, \cdot \rangle e_j$$

**Теорема 4.** Эрмитова матрица может быть приведена к диагональной форме унитарным преобразованием:

$$\varphi^* = \varphi \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(n) : A_\varphi^d = U^+ A_\varphi U$$

*Доказательство.*

$$A_\varphi^d = T^{-1} A_\varphi T$$

$T$  — состоит из собственных векторов  $\varphi$ , но  $\varphi^* = \varphi \Rightarrow$  столбцы  $T$  ортогональны  $\Rightarrow T = U \leftrightarrow U \in \mathcal{U}(n)$  □

*Примечание.*  $\varphi$  — эрмитовский оператор  $\Rightarrow e^{i\varphi}$  — унитарный оператор.

*Доказательство.*

$$(e^{i\varphi})^* = e^{-i\varphi^*} = e^{-i\varphi}$$

$$(e^{i\varphi})^* e^{i\varphi} = I$$

□

## Квадратичные формы

$X$  — линейное пространство

**Определение.** Отображение  $b : X \times X \rightarrow K$  — **билинейная форма**, если выполняется следующее:

$$1. K = \mathbb{R} : b(x, y) = b(y, x) \quad b(\alpha x + y, z) = \alpha b(x, z) + b(y, z)$$

$$2. K = \mathbb{C} : b(x, y) = \overline{b(y, x)} \quad b(\alpha x + y, z) = \overline{\alpha} b(x, z) + b(y, z)$$

*Примечание.*  $b \in \Omega_0^2$  — тензор типа  $(2, 0)$

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $X$

$$\forall x, y \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k$$

$$b(x, y) = b\left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j, \sum_{k=1}^n \eta^k e_k\right) = \sum_{k,j=1}^n \xi^j \eta^k \cdot \underbrace{b(e_j, e_k)}_{\text{элемент тензора } b} = \sum_{k,j=1}^n \xi^j \eta^k b_{jk}$$

*Примечание.* В матричной форме  $b(x, y) = \xi^+ B \eta$

**Определение.** Квадратичной формой, соответствующей билинейной форме  $b$ , называется отображение  $q$ :

$$q(x) = b(x, x)$$

**Лемма 8.**  $\{e_j\}_{j=1}^n \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n \Rightarrow \tilde{Q} = T^T Q T$

*Доказательство.* Очевидно. □

Скipped до конца лекции.