Следствие 0.1 (из 5 свойства меры Лебега). $\forall A \in \mathfrak{M}^m \ \ \exists B, C$ — борелевские:

$$B \subset A \subset C \quad \lambda(C \setminus A) = 0, \lambda(A \setminus B) = 0$$

Доказательство.

$$C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_{\frac{1}{n}} \quad B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_{\frac{1}{n}}$$

□

Следствие 0.2. $\forall A \in \mathfrak{M}^m \ \ \exists B, \mathcal{N} : B$ — борелевское, $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}^m, \lambda\mathcal{N} = 0$.
Тогда $A = B \cup \mathcal{N}$

Доказательство. $\exists B$ из следствия 1, $\mathcal{N} := A \setminus B$ □

Примечание. Обозначим $|X|$ — мощность множества X.

$$\forall X \ \ |2^X| > |X|$$

$$|2^{\mathbb{R}^m}| > \text{континуум}$$

$$\mathcal{B} \subset 2^{\mathbb{R}^m} \text{ — борелевская } \sigma\text{-алгебра } \ |\mathcal{B}| = \text{континуум}$$

$$\mathfrak{M}^m > \text{континуум}$$

$\mathcal{K}$ — Канторово множество, тогда $|\mathcal{K}| =$ континуум, $\lambda\mathcal{K} = 0$

$$\forall D \subset \mathcal{K} \ \ D \in \mathfrak{M}^m, \lambda D = 0 \ \ 2^{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{M}^m$$

Следствие 0.3. $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — откр.}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{ — замкн.}}} \lambda(F) \overset{(*)}{=} \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K \text{ — комп.}}} \lambda(K)$$

Доказательство. $(*)$ следует из σ-конечности $\mathbb{R}^m = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} Q(0, n)$, где $Q(a, R) = \times_{i=1}^{n} [a_i - R, a_i + R]$ — куб с центром в a и ребром R.

$\lambda(A \cap Q(0, n)) \to \lambda A$ по непрерывности снизу, т.к. $A \cap Q(0, n)$ хорошо аппроксимируется замкнутым множеством. □

Определение. Свойства из следствия 3 называются **регулярностью** меры Лебега.

Преобразование меры Лебега при сдвигах и линейных отображениях

Лемма 1.

- $(X', \mathfrak{A}', \mu')$ — пространство с мерой.
- $(X, \mathfrak{A}, \_)$ — "заготовка" пространства с мерой
- $\exists T : X \to X'$ — биекция; $\forall A \in \mathfrak{A}\ \ TA \in \mathfrak{A}'$ и $T\varnothing = \varnothing$

Положим $\mu A = \mu'(TA)$. Тогда μ — мера.

Доказательство. Проверим счётную аддитивность $\mu : A = \bigsqcup A_i$

$$\mu A = \mu'(TA) = \mu'\left(\bigsqcup TA_i\right) = \sum \mu'(TA_i) = \sum \mu A_i$$

$\square$

Лемма 2.

- $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непр.
- $\forall E \in \mathfrak{M}^m : \lambda E = 0$ выполняется $\lambda TE = 0$

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m\ \ TA \in \mathfrak{M}^m$

Доказательство.

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N}$$

, где K_j — компакт, $\lambda\mathcal{N} = 0$

$$TA = \bigcup_{j=1}^{+\infty} TK_j \cup T\mathcal{N}$$

TK_j компакт как образ компакта при непрерывном отображении. $\Rightarrow TA$ измеримо. $\square$

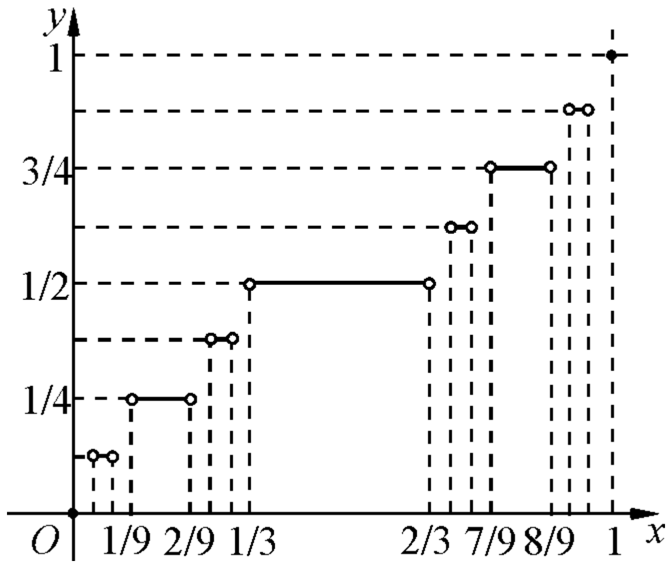
Пример (Канторова лестница).

$$\Delta = [0, 1]$$

$$\Delta_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \Delta_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$\Delta_{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \quad \Delta_{01} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \Delta_{10} = \dots, \Delta_{11} = \dots$$

$$\mathcal{K}_0 = \Delta$$



$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}_1 = \Delta_0 \cup \Delta_1\\
&\mathcal{K}_2 = \Delta_{00} \cup \Delta_{01} \cup \Delta_{10} \cup \Delta_{11}\\
&\quad \vdots\\
&\mathcal{K}_n = \bigcup_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \in \{0,1\}} \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{K} := \bigcap \mathcal{K}_n$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in \Delta \setminus \mathcal{K}_1 \\ \frac{1}{4} & , x \in \Delta_0 \setminus \mathcal{K}_2 \\ \frac{3}{4} & , x \in \Delta_1 \setminus \mathcal{K}_2 \\ \vdots & \\ \sup f(t) & , t \leq x, t \notin \mathcal{K} \end{cases}$$

$f([0,1] \setminus \mathcal{K}$ — счётное = множество двоично-рациональных чисел из $[0,1]$

$\lambda f([0,1] \setminus \mathcal{K}) = 0$

$\lambda f(\mathcal{K}) = 1$, т.к. $\forall y \in [0,1] \;\; \exists x : f(x) = y$, при этом f непрерывна, т.к. она — сюръекция.

Тогда пусть $E \subset [0,1] \notin \mathfrak{M}^m : f^{-1}(E)$ — подмножество $\mathcal{K}$ и промежутки — прообразы двоично рациональных точек $\in E$, при этом это множество измеримо, т.к. $\lambda \mathcal{K} = 0$

Ещё наблюдение: $x \notin \mathcal{K} \Rightarrow f$ — дифференцируема в x и $f' = 0$

Теорема 1.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ открыто

- $\Phi : O \to \mathbb{R}^n$
- $\Phi \in C^1(O)$

Тогда $\forall A \in O : A \in \mathfrak{M}^m \;\; \Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$, т.е. образ измеримого множества измерим.

Доказательство. Достаточно проверить свойства $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$, т.к. если оно выполняется, то работает предыдущая лемма 2

$$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \text{ шары } B_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \lambda B_i < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ из теоремы о Лебеговском продолжении меры.

$\Leftarrow$ по полноте меры Лебега.

1. $E \subset P \subset \overline{P} \subset O, \lambda E = 0$
$$L := \max_{x \in \overline{P}} ||\Phi'(x)||$$
Тогда
$$\forall x, y \in P \;\; |\Phi(x) - \Phi(y)| \le L|x - y|$$
— неравенство Лагранжа.
$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr)$$
$$B_i := B(x_i, r_i), y_i := \Phi(x_i)$$
$$E \subset \bigcup B_i \;\; \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr) \subset \bigcup Q(y_i, Lr)$$
$$\sum \lambda\Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = (2L)^m \sum r_i^m$$
Было $\sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m})^m$, стало $\sum \lambda\Phi(B_i) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m}L)^m$

2. Рассмотрим произвольный случай, то есть $E \subset O$

   $O = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — кубические ячейки, $Q_i \subset \overline{Q}_i \subset O$

   $E = \bigsqcup (E \cap Q_i)$, $\lambda(E \cap Q_i) = 0$. Тогда по пункту 1 $\lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$
$$\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda\Phi(E) = 0$$

□

Следствие 1.1. λ — инвариантно относительно сдвигов в $\mathbb{R}^m$ (и $\mathfrak{M}^m$ тоже инвариантно), т.е. $\forall a \in \mathbb{R}^m$:

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad A + a \in \mathfrak{M}^m \tag{1}$$
$$\text{и } \lambda A = \lambda(A + a) \tag{2}$$

Доказательство.

$$\Phi : x \mapsto x + a, \Phi \in C^1(\mathbb{R}^m)$$

Отсюда следует (1).

(2) следует из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

$$A \subset \bigcup P_k \Leftrightarrow A + a \subset \bigcup (P_k + a)$$

Для ячеек $\lambda P_k = \lambda(P_k + a)$

Таким образом:

$$\lambda A = \inf\left(\sum \lambda P_k\right) = \inf\left(\sum \lambda(P_k + a)\right) = \lambda(A + a)$$

□

Теорема 2. μ — мера на $\mathfrak{M}^m$:

1. μ — инвариантно относительно сдвигов:

$$\forall a \in \mathbb{R}^m \;\; \forall E \in \mathfrak{M}^m \;\; \mu(E + a) = \mu E$$

2. Для любого ограниченного $E \in \mathfrak{M}^m \;\; \mu(E) < +\infty$

Тогда $\exists k \in [0, +\infty) : \mu = k \cdot \lambda$, *(где λ — мера Лебега)* т.е.:

$$\forall E \;\; \mu E = k \cdot \lambda E$$

и пусть $0 \cdot \infty = 0$ в данном контексте.

Доказательство. Нет и не будет.

Общая идея: Как мера μ задается на рациональных ячейках?

В $\mathbb{R}^2$ Q_1 — единичная квадратная ячейка, $\mu Q_1 = v$

Q_2 — ячейка 2×2, $\mu Q_2 = 4v$. Аналогично $\mu Q_n = n^2 v, \mu Q_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} v$

Тогда $k = v$ и μ пропорционально λ. □

Примечание. $\mu A = \lambda_1 A$, если $\exists y_0 : A \subset \{(x, y_0), x \in \mathbb{R}\}$ — афинное одномерное подпространство, пересекающее ось y в точке y_0.

Эта мера — 1-Хаусдорфа в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3 (инвариантность меры лебега относительно линейного ортогонального преобразования).

- $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ортогонально, т.е. сохраняет длины векторов.

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m$:

1. $TA \in \mathfrak{M}^m$
2. $\lambda(TA) = \lambda A$

Доказательство.

1. $T \in C^1$, поэтому измеримость сохраняется.
2. $\mu A := \lambda(TA)$

   μ — мера на $\mathfrak{M}^m$ по лемме о заготовке пространства, т.к. T биективно, при этом μ инвариантно относительно сдвигов:

   $$\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \lambda(TA) = \mu A$$

   A ограничено $\Rightarrow$ TA ограничено $\Rightarrow$ $\mu A < +\infty$

   По теореме 2 $\lambda(TA) = k \cdot \lambda(A)$. Какое у нас k?

   Возьмём шар B. TB — шар того же радиуса, т.е. TB — сдвинутый B, т.е. $TB = B + x_0$.

   $$\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$$

□

Следствие 3.1. λ(прямоугольный параллелепипед) = произведение сторон.

Следствие 3.2. Любое собств. линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$ имеет меру 0

Доказательство. Достаточно доказать, что $\lambda\{x : x_m = 0\} = 0$

$$L = \{x : x_m = 0\} \simeq \mathbb{R}^{m-1} = \bigsqcup \underbrace{Q_i}_{\text{единичные кубы}}$$

$$L \subset \bigsqcup Q_i \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}\right)$$

$$\lambda\left(Q_i \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right) = \frac{2\varepsilon}{2^i}$$

□