Лемма 1.

- $\Phi: O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- $\Phi$  параметризация многообразия  $U(p)\cap M$ , где  $p\in M, M$  гладкое k-мерное многообразие  $\Rightarrow U(p)\cap M$  простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ  $\Phi'(t^0): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$  есть k-мерное линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$ . Оно не зависит от  $\Phi$ .

 $\Phi'(t^0)$  — касательное пространство к M в точке p, обозначается  $T_pM.$ 

Доказательство.  $\operatorname{rg}\Phi'(t^0)=k$  по определению параметризации  $\Rightarrow$  искомое очевидно. Если взять другую параметризацию  $\Phi_1$ , то по следствию о двух параметризациях

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

$$\Phi' = \Phi_1' \Psi'$$

 $\Psi'(t^0)$  — невырожденный оператор  $\Rightarrow$  образ  $\Phi'$  = образ  $\Phi_1'$ 

 $\Pi$ ример. M — окружность в  $\mathbb{R}^2$ , задается параметризацией  $\Phi:t\mapsto \begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}, t^0:=\frac{\pi}{4}$ 



Рис. 1: Синим — касательное пространство к окружности в a. Зеленым — афинное ("сдвинутое") линейное подпространство.

$$\Phi'(t^0) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Тогда  $h\mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}h$  — касательное подпространство.

Определение. Афинное подпространство  $\{p+v,v\in T_pM\}$  называется афинным касательным подпространством.

Примечание.

1.  $v\in T_pM$ . Тогда  $\exists$  путь  $\gamma_v:[-\varepsilon,\varepsilon]\to M$ , такой что  $\gamma(0)=p,\gamma'(0)=v$  Доказательство.  $u:=(\Phi'(t_0))^{-1}(v)$ 



Определим путь в  $\mathbb{R}^k$ :

$$\tilde{\gamma}_v(s) := t_0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

Отобразим этот путь в M и проверим, что такой путь подходит под условие:

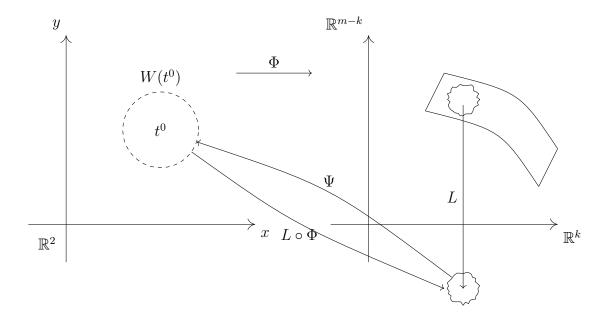
$$\gamma_{v}(s) := \Phi(\tilde{\gamma}_{v}(s))$$

$$\gamma'_{v}(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}_{v}(0)) \cdot \tilde{\gamma}'_{v}(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}_{v}(0)) \cdot u = \Phi'(\tilde{\gamma}_{v}(0)) (\Phi'(t_{0}))^{-1} (v) = v$$

2. Пусть  $\gamma:[-\varepsilon,\varepsilon]\to M, \gamma(0)=p$ — гладкий путь. Тогда  $\gamma'(0)\in T_pM$ 

M3137y2019

12.10.2020



Доказательство. Из иллюстрации очевидно:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

$$\gamma'(0) = \Phi'(\Psi(L(\gamma(0))))\Psi'(L(\gamma(0)))L'(\gamma(0))\gamma'(0)$$

Очевидно, что мы попадаем в образ  $\Phi'(\dots)$ , поэтому  $\gamma'(0) \in T_pM$ 

3.  $f:O\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, f\in C(O), y=f(x)$  — поверхность в  $\mathbb{R}^{m+1}$ , задается точками (x,y).

Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке (a,b) задается уравнением

$$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

Доказательство.  $\Phi:O\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m+1}$ 

$$\Phi(x) = (x, f(x))$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим произвольный вектор  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$ . В каких случаях он принадлежит обра-

зу  $\Phi'$ ?

$$\Phi'\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \dots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор принадлежит образу, если  $\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \ldots + \alpha_m f'_{x_m}$ 

Сместив на a,b, получаем искомое.

4. 
$$\Phi(x_1 \dots x_m) = 0$$

$$\Phi: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

$$\Phi(a) = 0$$

Тогда уравнение касательной плоскости  $\Phi'_{x_1}(a)(x_1-a_1)+\ldots+\Phi'_{x_m}(a)(x_m-a_m)=0$ 

Доказательство.  $\gamma$  — путь в  $M:\Phi(\gamma(s))=0, \Phi'(\gamma(s))\gamma'(s)=0.$  По предыдущим утверждениям такой путь есть, кроме того, любому вектору x в касательном пространстве можно сопоставить  $\gamma:\gamma'(s)=x.$  Поэтому любой касательный вектор от точки a должен быть подчинём искомому отношению.

Альтернативное доказательство:

По определению дифференцируемости  $\Phi$  в точке a:

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(x_m - a_m) + \phi(x)$$

Мы игнорируем o, потому что оно скомпенсируется тем, что мы берем не с поверхности  $\Phi$ , а с касательной плоскости. Это нестрогое утверждение.

Примечание.  $y(x) = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m) \Leftrightarrow$  дифференцирование, но без o.

Таким образом, f(x) - y(x) = o(x - a)

#### Относительный экстремум

*Пример.* Найти наибольшее/наименьшее значение выражения f(x,y) = x + y при условии  $x^2 + y^2 = 1$ .

Рассмотрим линии уровня, т.е. f(x, y) = C:

M и m — точки минимума и максимума, т.к. M — точка, в которой f = точки минимума уровня касаются. Если они пересекаются, но не касаются, то есть точка больше. Аналогичное верно для минимума.

В более формальных терминах: пусть условие  $\Phi(x, y) = 0$ .



$$\Phi'_{x}(x-a) + \Phi'_{y}(y-b) = 0$$

 $(\Phi_x',\Phi_y')$ — вектор нормали к касательной прямой. Тогда  $(f_x',f_y')$  и  $(\Phi_x',\Phi_y')$ — параллельны

#### Определение.

- $f: O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$
- $M_{\Phi} \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$
- $x_0 \in M_\Phi$

 $x_0$  — точка локального относительного max, min, строгий max, строгий min, экстремума, если  $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}: \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi \ f(x_0) \geq f(x)$ , остальные — аналогично.

Уравнения  $\Phi(x) = 0$  называются уравнениями связи.

Как решать задачу нахождения локального относительного чего-то?

Если  $\operatorname{rg}\Phi'(x_0)=n$ , то есть  $\operatorname{rg}$  максимален, то выполнено условие теоремы о неявном отображении.

Теорема 1 (необходимое условие относительного экстремума).

- $f:O\subset\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}$  гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x: \Phi(x) = 0\}$  гладкое в O
- $a \in O$  точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $rg\Phi'(a) = n$

Тогда 
$$\exists \lambda=(\lambda_1\dots\lambda_n)\in\mathbb{R}^n: egin{cases} f'(a)+\lambda\Phi'(a)=0\\ \Phi(a)=0 \end{cases}$$

Второе условие дописано для удобства, оно не содержательно, т.к. оно уже дано.

В координатах: 
$$\begin{cases} f'_{x_1} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} + \ldots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} + \ldots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Здесь неизвестны  $a_1 \dots a_{m+n}, \lambda_1 \dots \lambda_n$ , поэтому, если уравнения не вырождены, то решение есть.

Доказательство.  $\operatorname{rg}\Phi'(a)=n$ . Пусть ранг реализуется на столбцах  $x_{m+1}\dots x_{m+n}$ .

Обозначим  $y_1 = x_{m+1} \dots y_n = x_{m+n}$ .

$$(x_1 \dots x_{m+n}) \leftrightarrow (x,y), a \leftrightarrow (a_x,a_y).$$

 $\det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a) \neq 0.$  Тогда по теореме о неявном отображении  $\exists U(a_x) \; \exists V(a_y) \; \exists \varphi : U(a_x) \to V(a_y) : \; \Phi(x,\varphi(x)) \equiv 0$  и отображение  $x \mapsto (x,\varphi(x))$  есть параметризация простого гладкого многообразия  $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$ .

a — точка относительного локального экстремума  $\Rightarrow a_x$  — точка локального экстремума функции  $g(x)=f(x,\varphi(x))$ , потому что  $(x,\varphi(x))\in U(a)$ .

Необходимое свойство экстремума для  $a_x$ :

$$(f_x' + f_y' \cdot \varphi')(a_x) = 0 \tag{1}$$

*Примечание.* Здесь и далее в этом доказательстве в функции и производные операторы подставляется a и  $a_x$ , но не записывается ради краткости и запутанности.

$$\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$$
  
$$\Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' = 0$$

Тогда  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ :

$$\lambda \Phi_x' + \lambda \Phi_y' \cdot \varphi' = 0 \tag{2}$$

$$f_x' + \lambda \Phi_x' + (f_y' + \lambda \Phi_y') \varphi' = 0$$
(3)

(3) это (2) + (1)

Пусть 
$$\lambda = -f'_{u} \cdot (\Phi'_{u}(a))^{-1}$$
.

Тогда  $f_y' + \lambda \Phi_y' = f_y' - f_y' (\Phi_y'(a))^{-1} \Phi_y'(a) = 0$  и  $f_x' + \lambda \Phi_y' = 0$  в силу (3). Итого (3) выполнено, мы предъявили  $\lambda$ , подходящее под искомое.

Определение.  $G:=f-\lambda_1\Phi_1-\lambda_2\Phi_2-\ldots-\lambda_n\Phi_n$  — функция Лагранжа.

$$f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0 \Leftrightarrow G'(a) = 0$$

Примечание. В определении выше можно писать "+" вместо "-".

Пример.  $A = (a_{ij})$  — матрица  $m \times n$ , симметричная и вещественная.

$$f(x):=\langle Ax,x
angle,x\in\mathbb{R}^m$$
 — квадратичная форма.

Найдём  $\max f(x)$ , когда  $x \in S^{m-1}$  (единичной сфере в  $\mathbb{R}^m$ ).

Такой тах ∃ по теореме Вейерштрасса.

$$G(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{i} x_{j} - \lambda \left( \sum_{i=1}^{m} x_{i}^{2} - 1 \right)$$

$$Φ' = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_m \end{pmatrix}$$
. Ha cφepe  $\operatorname{rg} Φ' = 1$ .

$$G'_{x_k} = 2\sum_{j=1}^{m} a_{kj}x_j - 2\lambda x_k \quad \forall k = 1\dots m = 0$$

То есть  $Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda$  — собственное число A, x — собственный единичный вектор.

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda x^2 = \lambda$$

### Теорема 2.

•  $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 

Тогда  $||A|| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda - \text{собственное число } A^TA\}$ 

Такое число существует, т.к.  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^Ty \rangle \Rightarrow \langle A^TAx, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$ .

Доказательство.  $\triangleleft x \in S^{m-1}$ .

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle \underbrace{A^T A}_{\text{CHMM}} x, x \rangle$$

$$\max |Ax|^2 = \max \langle A^T Ax, x \rangle = \lambda_{\max}$$

# Функциональные последовательности и ряды

## Равномерная сходимость последовательностей и функций

Определение. Последовательность функций :  $\mathbb{N} \to \mathcal{F}$  — пространство функций,  $n \mapsto f_n$ 

Определение. 
$$\mathcal{F} = \{f: \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \to \mathbb{R} \}$$

Определение. Пусть  $E\subset X$ . Последовательность  $f_n$  сходится поточечно к f на множестве E, если  $\forall x\in E\quad f_n(x)\to f(x)$ , т.е.:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Пример.  $f_n: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ 

Если  $E = [0,1] \Rightarrow f_n(x) \to 0$  — тождественный ноль, не ноль.

Если  $E\cap (1,+\infty) \neq \varnothing$ , то нет поточечной сходимости ни к какой функции.

Пример. 
$$f_n = \frac{n^{\alpha}x}{1+n^2x^2}, x \in [0,1], 0 < \alpha < 2.$$

Ясно, что  $f_n(x) \to 0 \ \forall \alpha$ , поточечно сходится на [0,1].

$$\max_{x \in [0,1]} \frac{n^{\alpha}x}{1 + n^2x^2} = n^{\alpha} \max \frac{x}{1 + n^2x^2} = n^{\alpha} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}n^{\alpha - 1}$$

При  $\alpha>1$   $\frac{1}{2}n^{\alpha-1}\to +\infty.$  Это странно.

Теперь мы видим, что функции стремятся к тождественному нулю, хотя  $\exists x: f(x) \to +\infty$ . Придумаем определение, которое это запрещает.



Определение.  $f_n$  равномерно сходится к f на  $E \subset X$ , если  $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ .

$$\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n > N \ 0 \leq M_n < \varepsilon \text{ r.e. } \forall x \in E \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается  $f_n \underset{E}{\Longrightarrow} f$ 

Примечание.

- $x_0 \in E$
- $f_n \underset{E}{\Longrightarrow} f$

Тогда  $f_n(x_0) \to f(x_0)$ . То есть равномерная сходимость  $\Rightarrow$  поточечная сходимость и предел.

Примечание.

- $E_0 \subset E$
- $f_n \Longrightarrow_E f$

Тогда  $f_n \Longrightarrow_{E_0} f$ 

Примечание.

• 
$$\mathcal{F} = \{f: X \to \mathbb{R} - \text{orp. функции}\}$$

Тогда  $\rho(f_1,f_2):=\sup_{x\in X}|f_1(x)-f_2(x)|$  — метрика в  $\mathcal F$ . Называется Чебышевское расстояние.

Доказательство. 1.  $\rho(f_1,f_2)\geq 0,$   $\rho(f_1,f_2)=0\Leftrightarrow f_1\neq f_2$  — очевидно

2. 
$$\rho(f_1, f_2) = \rho(f_2, f_1)$$
 — очевидно

3. 
$$\rho(f_1, f_2) \le \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$
  
 $\sphericalangle \varepsilon > 0 \ \exists x$ 

$$\rho(f_1, f_2) - \varepsilon = \sup |f_1 - f_2| - \varepsilon 
< |f_1(x) - f_2(x)| 
\le |f_1(x) - f_3(x)| + |f_2(x) - f_3(x)| 
\le \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

 $f_n \underset{E}{\Longrightarrow} f \Leftrightarrow f_n \to f$  по метрике  $\rho_E$ .

Можем заметить, что в  $\mathcal{F}$  при различных метриках происходит различная сходимость или расходимость, в отличие от  $\mathbb{R}^m$ .

Примечание.

• 
$$E = E_1 \cup E_2$$

$$\begin{cases}
f_n \underset{E_1}{\Longrightarrow} f \\
f_n \underset{E_2}{\Longrightarrow} f
\end{cases} \Rightarrow f_n \underset{E}{\Longrightarrow} f$$