1 Дискретная теория вероятности

Определение. Множетсво элементарных исходов обозначается Ω. Это множество не более чем счётное в дискретной теории вероятности

Определение. Дискретная вероятностная мера *(дискретная плотность вероятности)* - отображение $p : \Omega \to \mathbb{R}^+; \omega \mapsto$ вероятность исхода ω.

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

Пример. Честная монета

$$\Omega = \{0, 1\} \quad p(0) = p(1) = \frac{1}{2} \quad p(\varnothing) = 0 \quad p(\{0, 1\}) = 1 - \text{достоверное событие}$$

Пример. Нечестная монета *(распределение Бернулли)*

$$\Omega = \{0, 1\} \quad p(0) = p \quad p(1) = q \quad p + q = 1$$

Пример. Честная игральная кость

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad p(1) = p(2) = \ldots = p(6) = \frac{1}{6}$$

$$Even := \{2, 4, 6\} \quad Big := \{4, 5, 6\}$$

$$P(Even) = \frac{1}{2} \quad P(Big) = \frac{1}{2}$$

$$VeryBig := \{5, 6\} \quad P(VeryBig) = \frac{1}{3}$$

Пример. Честная колода карт

$$\Omega = \{(r, s) \mid r = 1 \ldots 13, s = 1 \ldots 4\} \quad p((r, s)) = \frac{1}{52}$$

Пример. Честная монета с ребром

$$\Omega = \{0, 1, \perp\} \quad p(0) = p(1) = \frac{1}{2} \quad p(\perp) = 0$$

Пример. Очень нечестная монета

$$p = 1 \quad q = 0$$

Определение. **Событие** — множество элементарных исходов

$$A \subset \Omega$$

$$P : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}^{+} \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} : p(\omega)$$

Определение. A и B — **независимые**, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(Even \cap Big) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$$

$$P(Even) \cdot P(Big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow Even \text{ и } Big \text{ не независимы}$$

$$P(Even \cap VeryByg) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(Even) \cdot P(VeryBig) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow Even \text{ и } VeryBig \text{ независимы}$$

$$\lhd \Omega_1, p_1, \Omega_2, p_2 \quad \Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \quad P(\omega) = p_1(\omega_1) p_2(\omega_2)$$

Определение. События $A_1 \dots A_n$ — **независимые в совокупности**, если

$$\forall I \subset \{1 \dots n\} \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Определение. События $A_1 \dots A_n$ — **независимые попарно**, если

$$\forall i, j \in \{1 \dots n\} \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j)$$

Определение. **Условная вероятность** — вероятность того, что произойдет A, если произошло B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(Big|Even) = \frac{P(Big \cap Even)}{P(Even)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$]A$ и B — независимые

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$\lhd A_1, A_2, \dots A_k$ — разбиение : $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i = \Omega \quad A_i \cap A_j = \varnothing$

Теорема 1. Формула полной вероятности:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Доказательство.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

□

Теорема 2. Формула Байеса:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)}$$