

Примечание. $\{x_i\}_{i=1}^k$ — ЛЗ $\Leftrightarrow \{x_i\}_{i=1}^k$ обнуляет все базисные ПЛФ из Λ^K (C_n^k штук)

$$\triangleleft C = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

$$\det C = \det\{x_1 \dots x_n\} \triangleq {}^{1\dots n}F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}$$

Определение. Рангом r матрицы $A_{m \times n}$ называется порядок её наибольшего отличного от нуля минора.

Примечание. $\text{rank}(A) = \text{rg}(A) = \text{rang}(A)$

$$\exists L_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} \neq 0, \text{ но } \exists L_{j_1 \dots j_{r+1}}^{i_1 \dots i_{r+1}} \neq 0$$

$$\triangleleft C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{n2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1. $L_1^1 = C_1 \Rightarrow \text{rg} A \geq 1$
2. $L_1^1 = C_1 C_{22} \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A \geq 2$
3. $L_1^1 = C_1 C_{22} C_{33} \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A \geq 3$
- \vdots
4. $L_{1 \dots r}^{1 \dots r+1} = \prod_{i=1}^r c_{ii} \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A \geq r$
5. $L_{1 \dots r}^{1 \dots r+1} = 0 \Rightarrow \text{rg} A = r$

$$\Rightarrow \text{rg} A \leq \min(m, n)$$

Теорема 1. О базисном миноре

1. Число ЛНЗ строк (столбцов) матрицы A равно её рангу

2. Любая строка (столбец) матрицы A может быть представлена в виде ЛК строк (столбцов), входящих в её минор наибольшего порядка, отличного от нуля (базисный минор)

Доказательство. 1. Следует из критерия ЛНЗ

2. Строки (столбцы), входящие в базисный минор, образуют максимальный ЛНЗ поднабор всех строк (столбцов) матрицы A .

□

Теорема 2. Крамера

СЛАУ: $\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi^j = b_i$, такую что $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \quad \det A \neq 0$

Тогда:

1. СЛАУ совместна и определена
2. $\xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad \Delta_j = (a_1 \dots a_{j-1}, b, a_{j+1} \dots a_n)$

Доказательство. 1. $\det A = \det\{a_1 \dots a_n\} \neq 0 \Rightarrow \{a_j\}_{j=1}^n - \text{ЛНЗ} \Rightarrow \text{базис } \mathbb{R}^n \ni b$

$$\begin{aligned} 2. \Delta_j &= \det\{a_1 \dots a_{j-1}, b, a_{j+1} \dots a_n\} = \det\{a_1 \dots a_{j-1}, \sum_{j=1}^n a_j \xi^j, a_{j+1} \dots a_n\} = \\ &= \sum_{j=1}^n \xi^j \det\{a_1 \dots a_{j-1}, a_j, a_{j+1} \dots a_n\} = \xi^k \cdot \Delta \end{aligned}$$

□

Теорема 3. Кронекера-Капелли

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b, \right] A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

$$\tilde{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \mid b]$$

$$\text{СЛАУ совместна} \Leftrightarrow \text{rg } \tilde{A} = \text{rg } A$$

Доказательство. Тривиально.

□

1 Тензорная алгебра

1.1 Преобразование координат в X и X^*

$\langle \{e_j\} - \text{базис } X$

$\triangleleft \{\tilde{e}_k\}$ — базис X^*

$$\Rightarrow \forall k \quad \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n t_k^j e_j$$

Определение. Набор $T = ||t_j^i||$ образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$

Примечание. $\triangleleft E = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n], \tilde{E} = [\tilde{e}_1 \ \tilde{e}_2 \ \dots \ \tilde{e}_n] \Rightarrow \tilde{E} = ET$

Лемма 1. $] \xi$ — координаты вектора x в базисе $\{e_j\}$

$] \tilde{\xi}$ — координаты вектора x в базисе $\{\tilde{e}_k\}$

Тогда $\xi = T\tilde{\xi}$ или $\tilde{\xi} = S\xi, S = T^{-1}$

$$\text{Доказательство. } x = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k = \sum_{k=1}^n \tilde{x}^k \sum_{j=1}^n t_k^j e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k t_k^j \right) e_j = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \Rightarrow \xi = T\tilde{\xi} \quad \square$$

Лемма 2. $] \{f^l\}$ — базис X^* , сопряженный $\{e_j\}$, т.е. $f^l(e_j) = \delta_j^l$

$] \{\tilde{f}^m\}$ — базис X^* , сопряженный $\{\tilde{e}_k\}$, т.е. $\tilde{f}^m(\tilde{e}_k) = \delta_m^k$

$$] F = [f^1 \ f^2 \ \dots \ f^n]^T, \quad \tilde{F} = [\tilde{f}^1 \ \tilde{f}^2 \ \dots \ \tilde{f}^n]^T$$

Тогда $F = T\tilde{F}$ или $f^l = \sum_{m=1}^n t_m^l \tilde{f}^m$

$$\text{Доказательство. } \triangleleft (\tilde{f}^m, \tilde{e}_k) = \delta_k^m = (\tilde{f}^m, \sum_{j=1}^n t_k^j e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j (\tilde{f}^m, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \sum_{l=1}^n a_l^m (f^l, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j a_j^m$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j^m t_k^j = \delta_k^m \text{ или } AT = I - \text{единичная матрица} \Rightarrow A = T^{-1} \quad \square$$

Лемма 3. $] \varphi$ — коэфф. ЛФ в $\{e_j\}$

$] \tilde{\varphi}$ — коэфф. ЛФ в $\{\tilde{e}_k\}$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$$

Доказательство. $] g - \text{ЛФ}, \varphi_j = g(e_j) \quad \tilde{\varphi}_k = g(\tilde{e}_k)$

$$\varphi_k = g(\tilde{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^n t_k^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n t_k^j g(e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \varphi_j$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T \quad \square$$

Итого:

$$\tilde{E} = ET \quad \tilde{F} = T^{-1}F \quad \tilde{\xi} = T^{-1}\xi \quad \tilde{\varphi} = \varphi T$$

Определение. Величины, которые преобразуются при замене базиса так же, как базисные векторы, называются **ковариантными** величинами.

Величины, которые преобразуются при замене базиса противоположным базисным векторам образом, называются **контравариантными** величинами.

Примечание. ξ — контрвариантная величина. Верхний индекс называется контравариантным, нижний — ковариантным.

$]W \in \Omega_q^p$ — ПЛФ (p, q)

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X , $\{f^k\}_{k=1}^n$ — базис X^*

$$\Rightarrow \omega_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} \stackrel{\text{def}}{=} W(e_{i_1} \dots e_{i_n} f^{j_1} \dots f^{j_n})$$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\} \quad \{f^l\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^m\}$$

Пусть в паре базисов $\{\tilde{e}_k\}$ и $\{\tilde{f}^m\}$ ПЛФ W имеет тензор $\tilde{w}_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q} = W(\tilde{e}_{s_1} \dots \tilde{e}_{s_p}, \tilde{f}^{t_1} \dots \tilde{f}^{t_q}) =$

$$\begin{aligned} &= \triangle W(t_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sigma_{j_1}^{t_1} f^{j_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}) = \\ &= t_{s_1}^{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} \sigma_{t_1}^{j_1} \dots \sigma_{t_q}^{j_q} W(e_{s_1} \dots e_{s_p}, f^{t_1} \dots f^{t_q}) \end{aligned}$$

Определение. 1. **Вектором** называется величина, преобразующаяся по контравариантному закону

2. **Линейной формой** называется величина, преобразующаяся по ковариантному закону

3. **Тензором типа (p, q)** называется величина, преобразующаяся p раз по ковариантному закону и q раз по контравариантному.

1.2 Операции с тензорами

1. $]w, v$ — тензоры типа (p, q) . Тогда $w + \alpha w$ — тензор (p, q)

Доказательство. Тривиально. □

2. Транспонирование

$$t^{(st)} : \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_s \dots j_t \dots j_q} \mapsto \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_t \dots j_s \dots j_q}$$

Примечание. Транспонировать можно только по индексам одного типа

Лемма 4. Транспонирование сохраняет тензорную природу величины.

3. Свертка:

$$\omega_{i_1 \dots i_n}^{k \wedge s j_1 \dots j_n} = \sum_{m=1}^n \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \omega_{i_{p+1} \dots i_n}^{k \wedge s j_{q+1} \dots j_n}$$

Примечание. Операцию свертки можно выполнять только по индексам разных типов

Лемма 5. Свертка сохраняет тензорную природу

Лемма 6.

$$\omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$$

Доказательство. От перестановки мест слагаемых конечная сумма не меняется. \square

4. Тензорное произведение

$$\omega(p_1, q_1); v(p_2, q_2) \quad \omega \otimes v = a$$

$$w_{i_1 \dots i_{p_1}}^{j_1 \dots j_{q_1}} \cdot v_{i_{p_1+1} \dots i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1} \dots j_{q_1+q_2}} = a_{i_1 \dots i_{p_1+p_2}}^{j_1 \dots j_{q_1+q_2}}$$

Лемма 7. Результат тензорного произведения является тензором типа $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$