Пусть мы хотим перейти в полярные координаты $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ в двойном интеграле $\iint_\Omega f dxdy$. Как расставлять пределы интегрирования? Пусть первая переменная будет r. Тогда:

$$\iint_\Omega f dxdy = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{r_0(\varphi)}^{r_1(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r dr$$

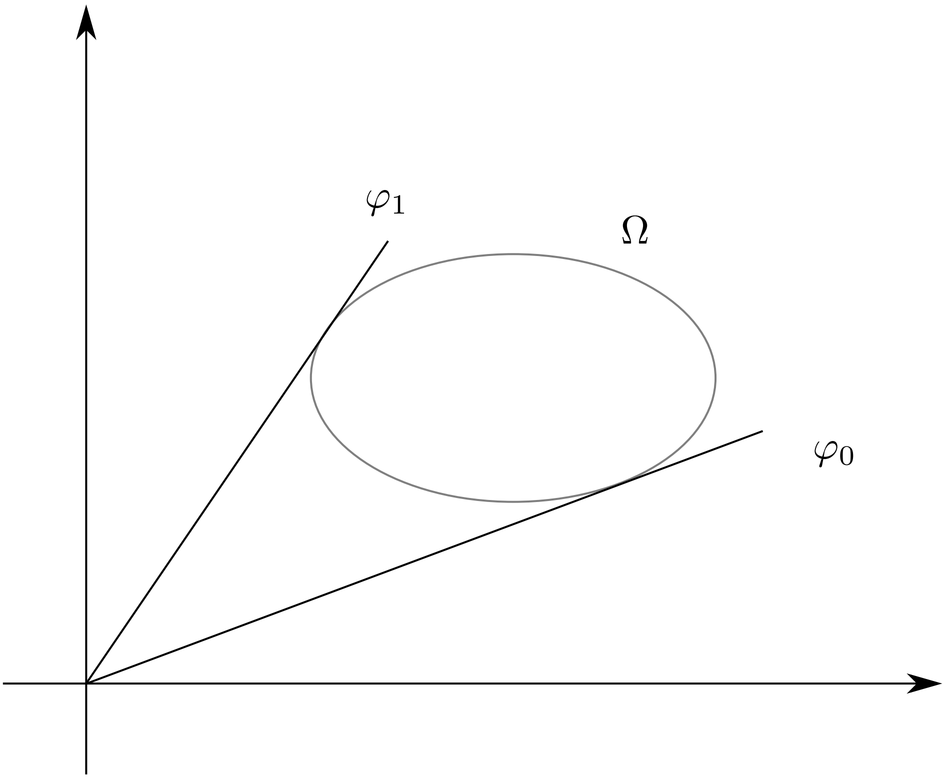

Рис. 1: Выбор φ_0, φ_1

Для первой переменной φ:

$$\iint_\Omega f dxdy = \int_{r_0}^{r_1} dr \int_{\varphi_0(r)}^{\varphi_1(r)} f r d\varphi$$

Упражнение. Пусть Ω — единичный круг

$$\iint_\Omega f dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f r dr$$

Упражнение. Пусть Ω — треугольник с вершинами $(0,0), (1,0), (1,1)$

$$\iint_\Omega f dxdy = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} dr f r = \int_0^1 dr \int_0^{\pi/4} f d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\pi/4} f d\varphi$$

Упражнение. Пусть Ω — треугольник с вершинами $(1,0),(0,1),(1,1)$

$$\iint_\Omega f dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}} f r dr$$

$$\iint_\Omega f dx dy = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} dr \int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}r} - \frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}r}} d\varphi f r + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} d\varphi f r$$

Упражнение.

$$x^2 + y^2 \le ax$$

$$\iint_\Omega f dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f r dr = \int_0^a dr \int_{-\arccos\frac{a}{r}}^{\arccos\frac{a}{r}}$$

Упражнение.

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

$$\int_0^a dr \int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f r d\varphi$$

Упражнение (3957).

$$\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y) dy$$

Замена $u = x, v = \frac{y}{x}$

$$\int_a^b du \int_\alpha^\beta dv f J$$