

Бесконечные произведения

Определение. $\prod_{i=1}^{+\infty} p_n : \prod_N := \prod_{n=1}^N p_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_N = P$

- $P \in (0, +\infty) \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$ сходится к P
- $P = +\infty \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$ расходится к $+\infty$
- $P = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{+\infty} p_n$ расходится к 0
- $\nexists \lim \prod_n$: расходится

Пример.

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{3}{4} \frac{8}{9} \frac{15}{16} \dots$$

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \quad \prod_N = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \frac{2 \cdot 4}{3^2} \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{(N-1)(N+1)}{N^2} = \frac{N+1}{2N}$$

Пример. Формула Валлиса:

$$\frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \dots = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \frac{1}{2n}$$

Пример.

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{2^n \sin \frac{\varphi}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

Определение. $\pi_m := \prod_{n=m+1}^{+\infty} p_n$

Свойства:

1. $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall m \quad \pi_m$ сходится
2. $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится. Тогда $\pi_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$

3. $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится $\Rightarrow p_n \rightarrow 1$
4. $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ сходится

$$\pi_m = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{n=1}^N p_n}{\prod_{k=1}^m p_n} = \frac{P}{\prod_m}$$

$$\ln \left(\prod_{n=1}^{+\infty} p_n \right) = \sum_{n=1}^N \ln p_n$$

Теорема 1. 1. $a_n > 0$ НСНМ. Тогда $\prod 1 + a_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ сходится.

2. $\sum a_n$ сходится, $\sum a_n^2$ сходится $\Rightarrow \prod(1 + a_n)$ сходится.

Доказательство. 1. $\prod(1 + a_n) - \text{сх.} \Leftrightarrow \sum \ln(1 + a_n) - \text{сх.} \Leftrightarrow \sum a_n - \text{сх.}$

2. $\ln(1 + a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

$$\sum_{n=1}^N \ln(1 + a_n) = \sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 + \underbrace{\sum_{n=1}^N o(a_n^2)}_{\text{абс.сх, т.к. } |o(a_n^2)| \leq a_n^2}$$

□

Лемма 1. $\prod(n, x) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt, x > 0$

Примечание. При $x \leq 0$ интеграл расходится.

Тогда $\prod(n, x) = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x \cdot (x+1) \cdots (x+n)} n^x$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \prod(n, x) &\stackrel{t=ny}{=} n^x \int_0^1 (1-y)^n y^{x-1} dy = \\ &= n^x \left((1-y)^n \frac{1}{x} y^x \Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^x dy \right) = \\ &= n^x \frac{n}{x} \int_0^1 (1-y)^{n-1} y^x dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n^x \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} \int_0^1 (1-y)^{n-2} y^{x+1} dy = \\
&= \dots = n^x \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} \dots \frac{1}{x+n-1} \int_0^1 y^{x+n-1} dy
\end{aligned}$$

□

Лемма 2. $0 \leq t \leq n$. Тогда

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

Доказательство. Т.к. $y = 1 + x$ — график касательной к e^x в $x = 0$ и экспонента выпуклая:

$$1 + y \leq e^y$$

Произошла коллизия переменных, x стал y .

Заменим y на $-y$:

$$1 - y \leq e^{-y}$$

Возведем в степень -1 :

$$(1 - y)^{-1} \geq e^y$$

Итого:

$$\begin{aligned}
1 + y &\leq e^y \leq (1 - y)^{-1} \\
y &:= \frac{t}{n} \\
1 + \frac{t}{n} &\leq e^{\frac{t}{n}} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-1} \\
\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} &\geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

По правому неравенству:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$$

Возведем левое неравенство в степень -1 :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$$

$$\begin{aligned}
e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &= e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq e^{-t} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \\
&\leq e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \stackrel{\text{неравенство Бернулли}}{\leq} \frac{t^2}{n} e^{-t}
\end{aligned}$$

Примечание. Неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geq 1+an$, $a \geq -1$, в данном случае $a = -\frac{t^2}{n^2}$

В неравенстве Бернулли $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ **предположительно** в лемме $n \in \mathbb{N}$, на лекции этого не было сказано. \square

Теорема 2. Формула Эйлера:

При $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x(x+1) \cdots (x+n)} n^x = \Gamma(x)$$

Примечание.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Gamma(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi(n, x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{x-1} dt}_I + \underbrace{\int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}_{II} \right) \stackrel{?}{=} 0 \end{aligned}$$

$II \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, т.к. это “остаточный интеграл”, при $n \rightarrow +\infty$ интеграл “берется по нулевому промежутку”.

По лемме о приближении e пределом:

$$0 \leq I \leq \int_0^n \frac{1}{n} t^2 e^{-t} t^{x-1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} dt = \frac{\Gamma(x+2)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

\square

Теорема 3. Формула Вейерштрасса.

При $x > 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

где $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ – постоянная Эйлера.

$\prod(1 + a_k)$ сходится, если $\sum a_k$ сходится, поэтому распишем “ $1 + a_k$ ”:

$$“1 + a_k” = \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = \left(1 + \frac{x}{k}\right) \left(1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} + \dots\right) = 1 - \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$\sum -\frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ очевидно сходится, кроме того, x может быть ≤ 0 , сходимость не изменится. $\Gamma(x)$ не определено для $x < 0$, но если рассматривать формулу Вейерштрасса как определение Γ , то для $x \in \mathbb{N}^-$ $\Gamma(x) = +\infty$, т.к. $\prod 1 + a_k = 0$. Кроме того, можно подставлять и $x \in \mathbb{C}$.

Доказательство будет на следующей лекции.

Лемма 3. Об оценке нормы линейного отображения.

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ $A = (a_{ij})$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m: |Ax| \leq C_A |x|$, где $C_A = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Доказательство.

$$|Ax|^2 = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} x_j\right)^2 \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \sum_i \left(\left(\sum_j a_{ij}^2\right) \left(\sum_j x_j^2\right)\right) = |x|^2 \sum_i \sum_j a_{ij}^2$$

□

Следствие 3.1. Линейное отображение непрерывно всюду:

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| \leq C_A |x - x_0|$$

Теорема 4. • $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

- $G : I \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $F(E) \subset I$
- $a \in \text{Int} E$
- F дифф. в a
- $F(a) \in \text{Int} I$
- G дифф. в $F(a)$

Тогда $G \circ F$ дифф. в a , $(G \circ F)'(a) = G'(F(a))F'(a)$

Доказательство. $b := F(a)$. По определению:

$$F(a+h) = \underbrace{F(a)}_b + \underbrace{F'(a)h + \alpha(h)|h|}_k$$

$$G(b+k) = G(b) + G'(b)k + \beta(k)|k|$$

$$\begin{aligned} G(F(a+h)) &= G(F(a)) + G'(F(a))(F'(a)h + \alpha(h)|h|) + \beta(k)|k| = \\ &= G(F(a)) + G'(F(a))F'(a)h + G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h|| \end{aligned}$$

Надо доказать, что $\underbrace{G'(b)\alpha(h)|h|}_I + \beta(k)\underbrace{|F'(a)h + \alpha(h)|h|}_{II} = \gamma(h)|h|$.

$$|I| = |G'(b)\alpha(h)|h| \leq C_{G'(b)}|\alpha(h)||h|$$

$$|F'(a)h + \alpha(h)|h| \leq |F'(a)h| + |\alpha(h)||h| \leq \underbrace{(C_{F'(a)} + |\alpha(h)|)}_{\text{орп.}} \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0}$$

$$k \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$|II| \leq \underbrace{|\beta(k)|}_{\rightarrow 0} \underbrace{(C_{F'(a)} + |\alpha(h)|)}_{\text{орп.}} \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0}$$

$$|I| + |II| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

□

Примечание. $(F \circ G \circ H)'(x) = F'(G(H(x))) \cdot G'(H(x)) \cdot H'(x)$

$$F = (f_1, f_2 \dots f_l) \quad G = (g_1, g_2 \dots g_n) \quad H = G \circ F = (h_1 \dots h_n)$$

$$h_j(x_1 \dots x_m) = g_j(f_1(x_1 \dots x_m), f_2(x_1 \dots x_m) \dots f_l(x_1 \dots x_m))$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

$$h'(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{df_1}{dx} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \frac{df_2}{dx} + \dots \frac{\partial g}{\partial y_m} \frac{df_m}{dx}$$

Скипнуто

Лемма 4. • $F, G : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

- $a \in \text{Int}E$
- $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$

- F, G, λ дифф. в a

Тогда $\lambda F, \langle F, G \rangle$ — дифф. в a :

1. $(\lambda F)'(a)(h) = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a)h$
2. $\langle F, G \rangle'(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$

Здесь h нигде не умножается, на него действуют операторы дифференцирования.

Доказательство. 1. Для координатной функции $l = 1$:

$$\begin{aligned}\lambda f(a+h) - \lambda f(a) &= (\lambda(a) + \lambda'(a)h + o(h))(f(a) + f'(a)h + o(h)) - \lambda(a)f(a) = \\ &= (\lambda'(a)h)f(a) + \lambda(a)f'(a)h + o(h) \\ |(\lambda'(a)h)(f'(a)h)| &\leq C_{\lambda'(a)}|h|C_{f'(a)}|h|\end{aligned}$$

2.

$$\langle F, G \rangle = \sum_{i=1}^l f_i g_i$$

По линейности всего и пункту 1:

$$\langle F, G \rangle'(a)h = \sum_i (f_i g_i)'(a)h \stackrel{1.}{=} \sum_i f_i'(a)h g_i(a) + f_i(a)g_i'(a)h = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$$

□

Примечание. $m = 1$:

$$\langle F, G \rangle'(a) = \langle F'(a), G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a) \rangle$$

Теорема 5. Лагранжа для векторнозначных функций.

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \leq |F'(c)|(b - a)$

Доказательство.

$$\varphi(t) := \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a) \rangle, t \in [a, b]$$

$$\varphi(a) = 0 \quad \varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$$

$$\varphi'(t) = \langle F(b) - F(a), F'(t) \rangle$$

Теорема Лагранжа (для обычных функций):

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$$

$$|F(b) - F(a)|^2 = (b - a) \langle F(b) - F(a), F'(c) \rangle \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} (b - a) |F(b) - F(a)| |F'(c)|$$

□

Примечание. “=” не достигается, если ехать быстро и криво.

Пример. $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\cos t, \sin t) \quad F'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$a := 0, b := 2\pi$

$$F(b) - F(a) = 0 \stackrel{?}{=} |F'(c)|(b - a)$$

Нет.