Лемма 1.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- Φ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M — гладкое k-мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ есть k-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Оно не зависит от Φ.

$\Phi'(t^0)$ — **касательное пространство** к M в точке p, обозначается T_pM.

Доказательство. $\mathrm{rg}\Phi'(t^0) = k$ по определению параметризации $\Rightarrow$ искомое очевидно. Если взять другую параметризацию Φ_1, то по следствию о двух параметризациях

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

$$\Phi' = \Phi_1'\Psi'$$

$\Psi'(t^0)$ — невырожденный оператор $\Rightarrow$ образ Φ' = образ Φ_1' □

Пример. M — окружность в $\mathbb{R}^2$, задается параметризацией $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t^0 := \frac{\pi}{4}$

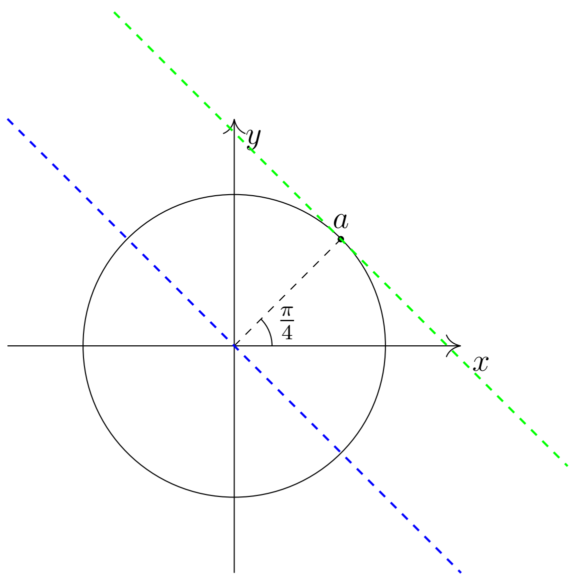


Рис. 1: Синим — касательное пространство к окружности в a.
Зеленым — афинное (“сдвинутое”) линейное подпространство.

$$\Phi'(t^0) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

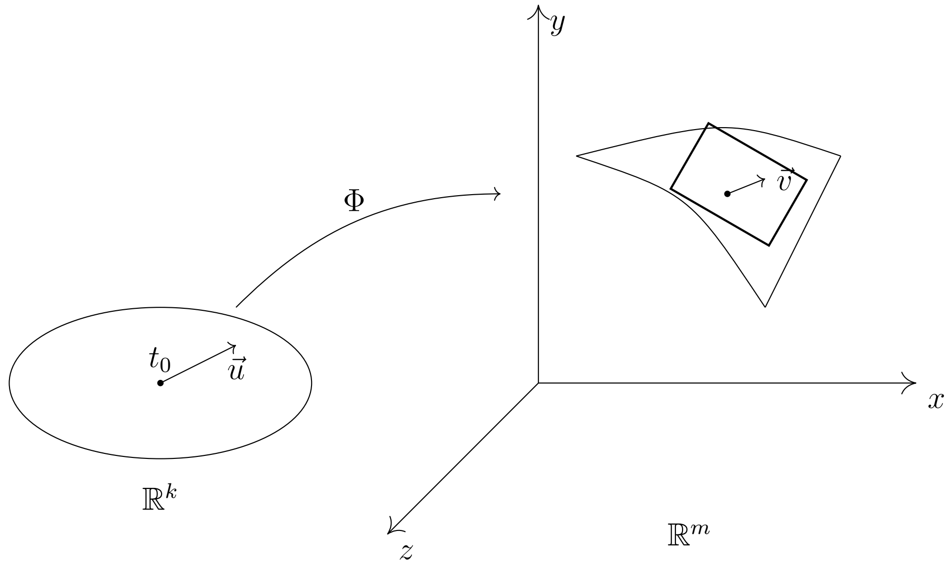
Тогда $h \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} h$ — касательное подпространство.

Определение. Афинное подпространство $\{p + v, v \in T_pM\}$ называется **афинным касательным подпространством**.

Примечание.

1. $v \in T_pM$. Тогда $\exists$ путь $\gamma_v : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$, такой что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

   Доказательство. $u := (\Phi'(t_0))^{-1}(v)$



   Определим путь в $\mathbb{R}^k$:

$$\tilde{\gamma}_v(s) := t_0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

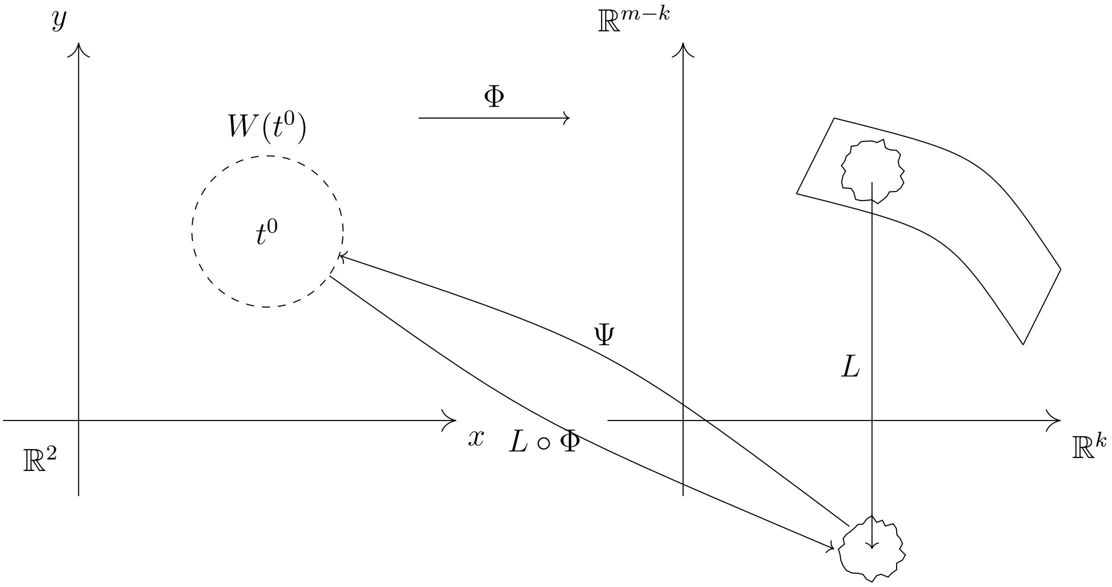
   Отобразим этот путь в M и проверим, что такой путь подходит под условие:

$$\gamma_v(s) := \Phi(\tilde{\gamma}_v(s))$$

$$\gamma_v'(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0)) \cdot \tilde{\gamma}_v'(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0)) \cdot u = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0)) (\Phi'(t_0))^{-1}(v) = v$$

$\square$

2. Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M, \gamma(0) = p$ — гладкий путь. Тогда $\gamma'(0) \in T_pM$



Доказательство. Из иллюстрации очевидно:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

$$\gamma'(0) = \Phi'(\Psi(L(\gamma(0))))\Psi'(L(\gamma(0)))L'(\gamma(0))\gamma'(0)$$

Очевидно, что мы попадаем в образ $\Phi'(\dots)$, поэтому $\gamma'(0) \in T_pM$ □

3. $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, f \in C(O), y = f(x)$ — поверхность в $\mathbb{R}^{m+1}$, задается точками (x, y).

   Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке (a, b) задается уравнением

$$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

   Доказательство. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$

   $\Phi(x) = (x, f(x))$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix}$$

   Рассмотрим произвольный вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$. В каких случаях он принадлежит образу Φ'?

$$\Phi'\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \ldots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор принадлежит образу, если $\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \ldots + \alpha_m f'_{x_m}$

Сместив на a, b, получаем искомое. □

4. $\Phi(x_1 \ldots x_m) = 0$

   $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

   $\Phi(a) = 0$

   Тогда уравнение касательной плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

   Доказательство. γ — путь в $M : \Phi(\gamma(s)) = 0, \Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$. По предыдущим утверждениям такой путь есть, кроме того, любому вектору x в касательном пространстве можно сопоставить $\gamma : \gamma'(s) = x$. Поэтому любой касательный вектор от точки a должен быть подчинём искомому отношению.

   Альтернативное доказательство:

   По определению дифференцируемости Φ в точке a:

   $$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(x_1 - a_1) + \ldots + \Phi'_{x_m}(x_m - a_m) + \cancel{o()}$$

   Мы игнорируем o, потому что оно скомпенсируется тем, что мы берем не с поверхности Φ, а с касательной плоскости. Это нестрогое утверждение. □

Примечание. $y(x) = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m) \Leftrightarrow$ дифференцирование, но без o.

Таким образом, $f(x) - y(x) = o(x - a)$

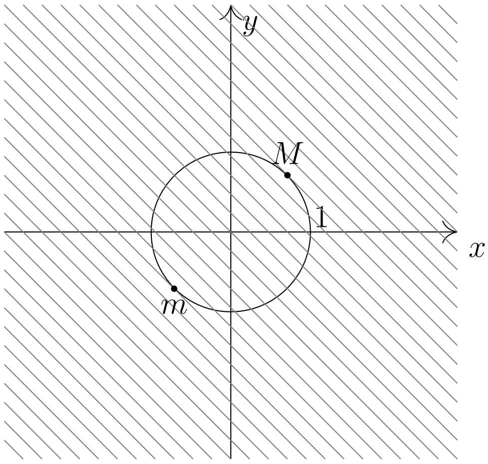
Относительный экстремум

Пример. Найти наибольшее/наименьшее значение выражения $f(x, y) = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Рассмотрим линии уровня, т.е. $f(x, y) = C$:

M и m — точки минимума и максимума, т.к. M — точка, в которой $f = \max$ и линия уровня касаются. Если они пересекаются, но не касаются, то есть точка больше. Аналогичное верно для минимума.

В более формальных терминах: пусть условие $\Phi(x, y) = 0$.



$\Phi'_x(x-a)+\Phi'_y(y-b)=0$

(Φ'_x,Φ'_y) — вектор нормали к касательной прямой. Тогда (f'_x,f'_y) и (Φ'_x,Φ'_y) — параллельны.

Определение.

- $f: O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x)=0\}$
- $x_0 \in M_\Phi$

x_0 — точка **локального относительного** max, min, строгий max, строгий min, экстремума, если $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n} : \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi \ \ f(x_0) \geq f(x)$, остальные — аналогично.

Уравнения $\Phi(x)=0$ называются **уравнениями связи**.

Как решать задачу нахождения локального относительного чего-то?

Если $\text{rg}\Phi'(x_0)=n$, *то есть rg максимален*, то выполнено условие теоремы о неявном отображении.

Теорема 1 (необходимое условие относительного экстремума).

- $f: O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x)=0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a)=0$
- $\text{rg}\Phi'(a)=n$

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f'(a)+\lambda\Phi'(a)=0 \\ \Phi(a)=0 \end{cases}$

Второе условие дописано для удобства, оно не содержательно, т.к. оно уже дано.

В координатах: $\begin{cases} f'_{x_1} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} + \ldots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} + \ldots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$

Здесь неизвестны $a_1 \ldots a_{m+n}, \lambda_1 \ldots \lambda_n$, поэтому, если уравнения не вырождены, то решение есть.

Доказательство. $\mathrm{rg}\Phi'(a) = n$. Пусть ранг реализуется на столбцах $x_{m+1} \ldots x_{m+n}$.

Обозначим $y_1 = x_{m+1} \ldots y_n = x_{m+n}$.

$(x_1 \ldots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y), a \leftrightarrow (a_x, a_y)$.

$\det \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(a) \neq 0$. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists U(a_x)\ \exists V(a_y)\ \exists \varphi : U(a_x) \to V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ и отображение $x \mapsto (x, \varphi(x))$ есть параметризация простого гладкого многообразия $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$.

a — точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ — точка локального экстремума функции $g(x) = f(x, \varphi(x))$, потому что $(x, \varphi(x)) \in U(a)$.

Необходимое свойство экстремума для a_x:

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi')(a_x) = 0$$

Примечание. Здесь и далее в этом доказательстве в функции и производные операторы подставляется a и a_x, но не записывается ради краткости и запутанности.

$$\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$$
$$\Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' = 0$$

Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda\Phi'_x + \lambda\Phi'_y \cdot \varphi' = 0$$

$$f'_x + \lambda\Phi'_x + (f'_y + \lambda\Phi'_y)\varphi' = 0$$

(??) это (??) + (??)

Пусть $\lambda = -f'_y \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}$.

Тогда $f'_y + \lambda\Phi'_y = f'_y - f'_y(\Phi'_y(a))^{-1}\Phi'_y(a) = 0$ и $f'_x + \lambda\Phi'_y = 0$ в силу (??). Итого (??) выполнено, мы предъявили λ, подходящее под искомое. $\square$

Определение. $G := f - \lambda_1\Phi_1 - \lambda_2\Phi_2 - \ldots - \lambda_n\Phi_n$ — **функция Лагранжа.**

$$f'(a) - \lambda\Phi'(a) = 0 \Leftrightarrow G'(a) = 0$$

Примечание. В определении выше можно писать “$+$” вместо “$-$”.

Пример. $A = (a_{ij})$ — матрица $m \times n$, симметричная и вещественная.

$f(x) := \langle Ax, x\rangle, x \in \mathbb{R}^m$ — квадратичная форма.

Найдём max $f(x)$, когда $x \in S^{m-1}$ *(единичной сфере в* $\mathbb{R}^m$*).*

Такой max $\exists$ по теореме Вейерштрасса.

$$G(x) = \sum_i^m \sum_j^n a_{ij}x_ix_j - \lambda\left(\sum_{i=1}^m x_i^2 - 1\right)$$

$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_m \end{pmatrix}$. На сфере $\text{rg}\Phi' = 1$.

$$G'_{x_k} = 2\sum_{j=1}^m a_{kj}x_j - 2\lambda x_k \quad \forall k = 1\ldots m = 0$$

То есть $Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda$ — собственное число A, x — собственный единичный вектор.

$f(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda x^2 = \lambda$

Теорема 2.

- $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Тогда $||A|| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda$ — собственное число $A^TA\}$

Такое число существует, т.к. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^Ty\rangle \Rightarrow \langle A^TAx, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$.

Доказательство. $\sphericalangle x \in S^{m-1}$.

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle \underbrace{A^TA}_{\text{симм.}} x, x\rangle$$

$$\max |Ax|^2 = \max\langle A^TAx, x\rangle = \lambda_{\max}$$

$\square$

Функциональные последовательности и ряды

Равномерная сходимость последовательностей и функций

Определение. **Последовательность функций** : $\mathbb{N} \to \mathcal{F}$ — пространство функций, $n \mapsto f_n$

Определение. $\mathcal{F} = \{f : \underbrace{X}_{\substack{\text{метрическое}\\ \text{пространство}}} \to \mathbb{R}\}$

Определение. Пусть $E \subset X$. Последовательность f_n **сходится поточечно** к f на множестве E, если $\forall x \in E \quad f_n(x) \to f(x)$, т.е.:

$$\forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Пример. $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

Если $E = [0,1] \Rightarrow f_n(x) \to 0$ — тождественный ноль, не ноль.

Если $E \cap (1, +\infty) \neq \varnothing$, то нет поточечной сходимости ни к какой функции.

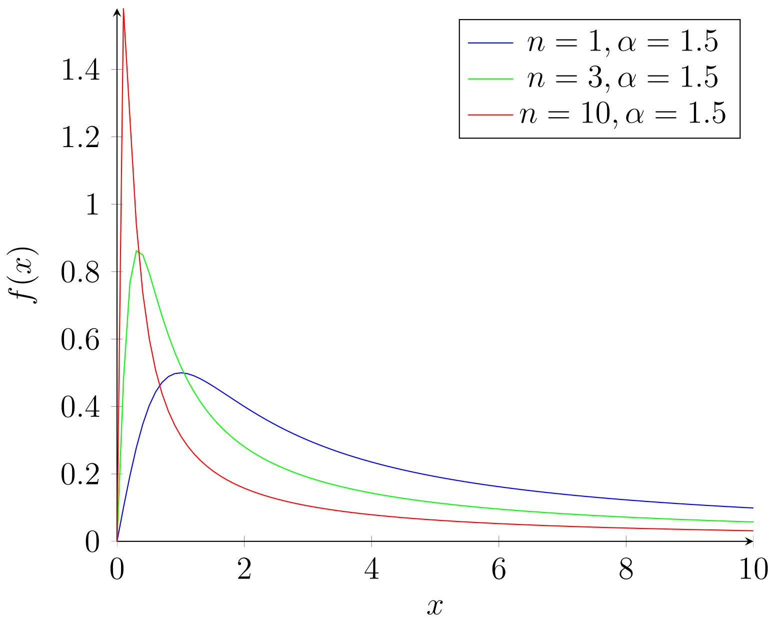
Пример. $f_n = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}, x \in [0,1], 0 < \alpha < 2$.

Ясно, что $f_n(x) \to 0 \ \ \forall\alpha$, поточечно сходится на $[0,1]$.

$$\max_{x\in[0,1]} \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2} = n^\alpha \max \frac{x}{1+n^2x^2} = n^\alpha \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}n^{\alpha-1}$$

При $\alpha > 1 \ \ \frac{1}{2}n^{\alpha-1} \to +\infty$. Это странно.

Теперь мы видим, что функции стремятся к тождественному нулю, хотя $\exists x : f(x) \to +\infty$. Придумаем определение, которое это запрещает.



Определение. f_n **равномерно сходится** к f на $E \subset X$, если $M_n := \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

$$\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n > N \ \ 0 \leq M_n < \varepsilon \text{ т.е. } \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Примечание.

- $x_0 \in E$
- $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Тогда $f_n(x_0) \to f(x_0)$. То есть равномерная сходимость $\Rightarrow$ поточечная сходимость и предел.

Примечание.

- $E_0 \subset E$
- $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Тогда $f_n \underset{E_0}{\rightrightarrows} f$

Примечание.

- $\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R} - \text{огр. функции}\}$

Тогда $\rho(f_1, f_2) := \sup\limits_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ — метрика в $\mathcal{F}$. Называется Чебышевское расстояние.

Доказательство. 1. $\rho(f_1, f_2) \geq 0$, $\rho(f_1, f_2) = 0 \Leftrightarrow f_1 \neq f_2$ — очевидно

2. $\rho(f_1, f_2) = \rho(f_2, f_1)$ — очевидно
3. $\rho(f_1, f_2) \le \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$

   $\triangleleft \varepsilon > 0 \ \exists x$

$$\begin{aligned}\rho(f_1, f_2) - \varepsilon = \sup|f_1 - f_2| - \varepsilon \\ &< |f_1(x) - f_2(x)| \\ &\le |f_1(x) - f_3(x)| + |f_2(x) - f_3(x)| \\ &\le \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)\end{aligned}$$

$\square$

$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow f_n \to f$ по метрике ρ_E.

Можем заметить, что в $\mathcal{F}$ при различных метриках происходит различная сходимость или расходимость, в отличие от $\mathbb{R}^m$.

Примечание.

- $E = E_1 \cup E_2$

$$\left.\begin{aligned} f_n \underset{E_1}{\rightrightarrows} f \\ f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} f \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$$