

## Нильпотентный оператор. Базис Жордана

$\triangleleft \tau : L \rightarrow L$  — нильпотентный оператор

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $L \Rightarrow \tau \leftrightarrow A_\tau$

$$\tau(e_i) = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j, \|a_i^j\| = A_\tau$$

$$\tau(\tau(e_i)) = \sum_{j=1}^n a_i^j \sum_{k=1}^n a_j^k e_k = \sum_{j,k=1}^n a_i^j a_j^k e_k$$

$$0 = \tau(\dots \tau(\tau(e_i))) = \sum_{j,k,l,\dots=1}^n a_i^j a_j^k \dots a_k^l e_l$$

Если хотя бы один диагональный элемент  $a_i^i \neq 0$ , то для  $j = k = \dots = i$  получается ненулевой коэффициент при  $e_i \Rightarrow$  результат суммы не 0, что противоречит нильпотентности  $\Rightarrow a_i^i = 0$

Канонический вид матрицы нильпотентного оператора:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

**Определение.** Линейный оператор, который в некотором базисе имеет своей матрицей (жорданову) клетку вида  $A_\tau$  называется **одноклеточным** нильпотентным оператором.

**Лемма 1.**  $p_\tau(\lambda) = \lambda^m$  — минимальный многочлен для  $\tau^m$

$$\{e_j\}_{j=1}^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_\tau(e_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_3, A_\tau(e_3) = e_2, A_\tau(e_2) = e_1, A_\tau(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$e_1$  — единственный собственный вектор для  $\tau$ , собственное значение = 0

$$\sigma_\tau = \{0^{(m)}\}$$

$\triangleleft L_j = \mathcal{L}\{e_1 \dots e_j\}$  — инвариантное подпространство  $\forall j$ , но не ультраинвариантное, т.к.  $\mathcal{L}\{e_{j+1} \dots e_n\}$  — не инвариантное подпространство.

$e_2$  — присоединенный вектор первого порядка, т.к.  $\tau e_2 = e_1$

$e_3$  — присоединенный вектор второго порядка

$\tau$  — не одноэлементный, тогда

$$\tau = \sum_{i=1}^k \tau_i = \sum_{i=1}^k \tau_i P_i$$

**Лемма 2.**  $\tau$  — нильпотентный оператор порядка  $m = \max_{i=1 \dots k} m_i$

*Доказательство.*  $\tau \leftrightarrow A_\tau = \text{diag}\{A_\tau^1, A_\tau^2 \dots A_\tau^k\}$ , где  $A_\tau^j$  — одноэлементный.

$$A^l = \text{diag}\{(A_\tau^1)^l, (A_\tau^2)^l \dots (A_\tau^k)^l\} = 0 \Leftrightarrow \forall j \ (A_\tau^j)^l = 0 \Leftrightarrow l = \max_{i=1 \dots k} m_i$$

□

$\tau : X \rightarrow X$  — нильпотентный оператор порядка  $m$ , тогда в  $X$   $\exists$  базис, в котором:

$$\tau = \sum_{i=1}^k \tau_i$$

где  $\tau_i$  — одноэлементный оператор.

*Доказательство.*  $\{L_j\}_{j=1}^k$  — ультраинвариантные для  $\tau$ ,  $k$  — число собственных векторов оператора  $\tau$ .

$L_j \rightarrow \tau_j \rightarrow T_j$  — одноэлементный оператор.

□

Таким образом, в базисе Жордана  $\varphi_j = \lambda_j I + \tau_j$

$$\varphi : X \rightarrow X, X = \sum_{j=1}^k L_j$$

$$\beta(X) \text{ — базис } X \Rightarrow \beta(X) = \{\beta(L_j)\}_{j=1}^k$$

$\beta(L_j)$  — базис Жордана в  $L_j$  (чтобы  $\varphi_j$  выглядел как выше)

$\beta(X)$  — базис Жордана в пространстве  $X$

**Определение.** Матрица оператора  $\varphi$  в базисе  $\beta(x)$  называется жордановой нормальной формой матрицы линейного оператора  $\varphi$ .

$$\varphi = \text{diag}\{\varphi_1 \dots \varphi_k\} \quad \varphi_j = \text{diag}\{\lambda_j I_1 + \tau_1, \lambda_j I_2 + \tau_2 \dots\}$$

**Теорема 1.** Гамильтона-Коши.

$$\chi_\varphi(\lambda) \in J_\varphi$$

Доказательство. Тривиально. □

$$p_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{m_j} \quad \chi_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{n_j}$$

**Определение.** •  $n_j$  — полная кратность собственных значений  $\lambda_j$

•  $n_j$  — алгебраическая кратность собственных значений  $\lambda_j$

$$n_j = \dim L_j \quad m_j = \dim \text{Ker} (\lambda - \lambda_j) \quad r_j = \text{число жордановых блоков}$$

**Лемма 3.**

$$1 \leq m_j \leq n_j, 1 \leq r_j \leq n_j$$

Частные случаи:

1.  $n_i = 1 \Rightarrow r_i = m_i = 1 \Rightarrow$  оператор с простым спектром
2.  $r_i = n_i \Leftrightarrow m_i = 1 \Rightarrow$  оператор скалярного типа
3.  $r_i = 1 \Leftrightarrow m_i = n_i \Rightarrow$  один жорданов блок

## Функции от оператора

$$\varphi : X \rightarrow X, f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$\triangleleft f(\varphi) - ?$

$$\varphi = \sum_{j=1}^k \varphi_j \Rightarrow A_\varphi = \text{diag}\{A_\varphi^{(1)}, A_\varphi^{(2)} \dots A_\varphi^{(k)}\}$$

$$f(\varphi) = \text{diag}\{f(A_\varphi^{(1)}), f(A_\varphi^{(2)}) \dots f(A_\varphi^{(k)})\}$$

$$f(\varphi_j) - ? \quad \varphi_j = \lambda_j \mathcal{I} + \tau_j, \tau_j^{m_j} = 0$$

$$\triangleleft (\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j)^m = \sum_{r=1}^m c_m^r \tau_j^r \lambda_j^{m-r}$$

Если  $r \geq m_j$ , то слагаемое = 0, т.к.  $\tau_j^{m_j} = 0$

$$\text{diag}_0(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j)^m = \{c_m^0 \lambda_j^m, c_m^0 \lambda_j^m \dots c_m^0 \lambda_j^m\}$$

$$\text{diag}_{+1}(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j)^m = \{c_m^1 \lambda_j^{m-1}, c_m^1 \lambda_j^{m-1} \dots c_m^1 \lambda_j^{m-1}\}$$

$$\vdots$$

$$diag_{+m_{j-1}}(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j) = \{c_m^{m-1} \lambda_j, c_m^{m-1} \lambda_j \dots c_m^{m-1} \lambda_j\}$$

*Примечание.*

$$diag f(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j) = \{f(\lambda_j), f(\lambda_j) \dots f(\lambda_j)\}$$

$$diag_{+1} f(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j) = \{f'(\lambda_j), f'(\lambda_j) \dots f'(\lambda_j)\}$$

$$diag_{+2} f(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j) = \{\frac{1}{2!} f''(\lambda_j), \frac{1}{2!} f''(\lambda_j) \dots \frac{1}{2!} f''(\lambda_j)\}$$

*Примечание.*

$$\tilde{A}_\varphi = S A_\varphi T \quad (\tilde{A}_\varphi)^p = S A_\varphi^p T$$

*Пример.*  $f(x) = \sin x$   $A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$$f(A_\varphi) = \begin{bmatrix} \sin \lambda & \cos \lambda & -\frac{1}{2} \sin \lambda & -\frac{1}{6} \cos \lambda \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda & -\frac{1}{2} \sin \lambda \\ 0 & 0 & \sin \lambda & \cos \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \sin \lambda \end{bmatrix}$$