Ряды Тейлора

Пример.

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty},\ x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,\ x \in (-1, 1) \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},\ x \in (-1, 1)
\end{aligned}
$$

Теорема 1. $\forall \sigma \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\sigma}{n} x^n + \dots$$

Доказательство. При $|x| < 1$ ряд сходится по признаку Даламбера:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{\sigma!}{(n+1)!(n+1-\sigma)!} x^{n+1}}{\frac{\sigma!}{n!(n-\sigma)!} x^n} \right| = \left| \frac{(\sigma - n)x}{n+1} \right| \xrightarrow{n \to +\infty} |x| < 1$$

Обозначим сумму ряда через $S(x)$.

Наблюдение: $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} x^n + \dots$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$
\begin{aligned}
(1+x)S' &= \dots + \left(\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} n \right) x^n + \dots \\
&= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} \sigma x^n + \dots
\end{aligned}
$$

$$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} \quad f'(x) = \frac{S'(1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1}S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0$$

$\Rightarrow f = \text{const}, f(0) = 1 \Rightarrow f \equiv 1 \Rightarrow S(x) = (1+x)^\sigma$ $\square$

Следствие 1.1.

$$\arcsin x = \sum{}^{**} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in (-1, 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} (-x^2)^n \Big|_{\sigma = -\frac{1}{2}} = \sum{}^{*} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

При $n = 0$ * это 1, и тогда **: $\arcsin x = x + \dots$

Следствие 1.2.

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}}, \ |t| < 1$$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

Дифференцируем m раз, получим искомое. Слагаемые с $n < m$ пропадут, т.к. они $=$ 0 $\square$

Теорема 2. $f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$

Тогда f — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности $x_0 \iff$

$$\exists \delta, C, A > 0 \ \ \forall n \ \ \forall x : |x - x_0| < \delta \ \ |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$$

Примечание. В “Кошмарном сне” *(см. лекцию 12)* $f^{(n)} \approx n!2n! \Rightarrow f$ не раскладывается.

Доказательство.

$\Leftarrow$ формула Тейлора в $x_0 : f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$

Если

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \right| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

, то f раскладывается в ряд Тейлора. Из условия мы знаем:

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \right| \le C|A(x-x_0)|^n$$

Тогда при $C|A(x-x_0)|^n \to 0$ f раскладывается в ряд Тейлора.

$$C|A(x-x_0)|^n \to 0 \Leftrightarrow |x-x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$$

Таким образом, f раскладывается в ряд Тейлора в области $(x_0 - \min(\delta, \frac{1}{A}), x_0 + \min(\delta, \frac{1}{A}))$

$\Rightarrow \quad f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Возьмём $x_1 \neq x_0$, для которого разложение верно.

(a) при $x = x_1$, ряд сходится $\Rightarrow$ слагаемые $\to 0 \Rightarrow$ слагаемые ограничены:

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n\right| \le C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \le C_1 n! B^n$$

, где $B = \frac{1}{|x_1-x_0|}$

Таким образом, мы оценили производную в x_0, но нужно уметь оценивать и производную в окрестности x_0.

(b)

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1)\dots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m} \end{aligned}$$

Пусть $|x-x_0| < \frac{1}{2B}$

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &\le \sum \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}|x-x_0|^{n-m}\right| \\ &\le \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!}|x-x_0|^{n-m} \\ &= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!}(\underbrace{B|x-x_0|}_{<\frac{1}{2}})^{n-m} \\ &= \frac{C_1 B^m m!}{(\underbrace{1-B|x-x_0|}_{>\frac{1}{2}})^{m+1}} \qquad (1) \\ &< C_1 2^{m+1} B^m m! \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(2C_1)}_{C}(\underbrace{2B}_{A})^m m!$$

(1): по следствию 2.

Эта оценка выполняется при $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{2B}$

$\square$

Теория меры

Продолжим доказательство с прошлой лекции.

Доказательство.

2.

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \ \ A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k$$

Сделаем это множество дизъюнктным.

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) \ \ A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k$$

Но эти C_k вообще говоря $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) = \bigsqcup_{j} D_{k_j} \in \mathcal{P}$$

Тогда $A = \bigsqcup\limits_{k,j} D_{k_j} \ \ \mu A = \sum \mu D_{k_j}$

При этом $\forall k \ \ \sum\limits_{j} \mu D_{k_j} = \mu C_k \overset{\text{монот.}\mu}{\leq} \mu A_k$

Итого $\mu A = \sum\limits_{k} \sum\limits_{j} \mu D_{k_j} = \sum \mu C_k \leq \sum \mu A_k$

$\square$

Упражнение.

1. $X = \{1, 2, 3\}, \mathcal{P} = 2^X$. Задайте объем μ на $\mathcal{P}$: $\mu\{1\} = 10, \mu\{1, 2, 3\} = 2021$

2. μ — объем на алгебре $\mathfrak{A}$, $\mu X < +\infty \ \forall X$.

   Доказать: $\forall A, B, C \in \mathfrak{A} : \mu(A \cup B \cup C) = \mu A + \mu B + \mu C - \mu(A \cap B) - \mu(B \cap C) - \mu(A \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$

Определение. $\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **мера**, если μ — объем и μ счётно-аддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad \mu A = \sum_i \mu A_i$$

Примечание. $(a_\omega)_{\omega \in \Omega}$ — счётное семейство чисел *(Ω — счётно)*, $\forall \omega \ \ a_\omega \geq 0$

Тогда определена $\sum\limits_{\omega \in \Omega} a_\omega = \sup \sum\limits_{\text{кон.}} a_\omega$

Значит, можно счётную аддитивность понимать обобщенно:

$$A = \bigsqcup_{\text{кон.}} A_\omega \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_\omega$$

Примечание. Счётная аддитивность не следует из конечной аддитивности.

Пример (не меры). $X = \mathbb{R}^2, \mathcal{P} =$ ограниченные множества и их дополнения.

$$\mu A = \begin{cases} 0 & , A \text{ — огр.} \\ 1 & , A \text{ — имеет огр. дополнение} \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{R}^2 = \bigcup\limits_{\text{счётное}}$ клеток $= \bigsqcup\limits_{\text{счётное}}$ ячеек $= \bigsqcup A_i$

$\mu(\mathbb{R}^2) = 1, \sum \mu A_i = 0 \Rightarrow \mu$ — не счётно аддитивная и не мера.

Пример (меры). X — (бесконечное) множество.

$a_1, a_2, a_3 \dots$ — набор попарно различных точек.

$h_1, h_2, h_3 \dots$ — положительные числа.

Для $A \subset X$ $\mu A := \sum\limits_{k : a_k \in A} h_k$.

Физический смысл μ: каждой точке a_i сопоставляется "масса" h_i. Мера множества точек есть сумма "масс" точек.

Счётная аддитивность $\mu \Leftrightarrow$ теореме о группировке слагаемых (в ряду можно ставить скобки).

Эта мера называется дискретной.

Теорема 3. $\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем.

Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е. μ — счётно-аддитивна.
2. μ — счётно-полуаддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \;\; A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ как в предыдущей теореме, пункт 2, но вместо конечного объединения по k используется счётное.

$2 \Rightarrow 1$ $A = \bigsqcup A_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum \mu A_i$

$$\forall N \;\; A \supset \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i \;\; \mu A \geq \sum_{i=1}^{N} \mu A_i$$

$A \subset \bigcup A_i$ (на самом деле $A = \bigsqcup A_i$) $\Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$

$\Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i$

□

Следствие 3.1. $A \in \mathcal{P}, A_n \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup A_n, \mu A_n = 0, \mu$ — мера. Тогда $\mu A = 0$

Это очевидно, т.к. $\mu A \leq \sum \mu A_i = 0$

Теорема 4.

- $\mathfrak{A}$ — алгебра
- $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем.

Тогда эквивалентно:

1. μ — мера
2. μ — непрерывна снизу:

$$A, A_1, A_2 \dots \in \mathfrak{A} \;\; A_1 \subset A_2 \subset \dots, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to +\infty} \mu A_i$$

Теорема 5.

- $\mathfrak{A}$ — алгебра

- $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ — объем.
- μ — конечный объем.

Тогда эквивалентно:

1. μ — мера, т.е. μ счётно-аддитивная.
2. μ — непрерывна сверху:

$$A, A_1, A_2 \dots \in \mathfrak{A} \;\; A_1 \supset A_2 \supset \dots, A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \to +\infty} \mu A_i$$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ $B_k = A_k \setminus A_{k+1}, A_1 = \bigsqcup B_k \cup A$

$\mu A_1 = \sum \mu B_k + \mu A$

$$A_n = \bigsqcup_{k \geq n} B_k \cup A \quad \mu A_n = \sum_{k \geq n} \mu B_k + \mu A \xrightarrow{n \to +\infty} \mu A$$

$2 \Rightarrow 1$ Дана непрерывность сверху. Воспользуемся ей для случая $A = \varnothing$

Проверим, что $C = \bigsqcup C_i \overset{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum \mu C_i$.

Пусть $A_k := \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} C_i$. Тогда $A_k \in \mathfrak{A}$, т.к. $A_k = C \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i$ — конечное объединение.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad \bigcap A_k = \varnothing \Rightarrow \mu A_k \xrightarrow{k \to +\infty} \mu \varnothing = 0$$

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \sqcup A_k \;\; \mu C = \sum_{i=1}^{k} \mu C_i + \mu A_k \xrightarrow{k \to +\infty} \sum \mu C_i$$

□

Теорема о продолжении меры

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера, $\mathcal{P} \subset 2^X$

$\mu -$ σ-**конечна**, если $\exists A_1, A_2 \dots \in \mathcal{P} : X = \bigcup A_i, \mu A_i < +\infty$

Пример. $X = \mathbb{R}^m, \mathcal{P} = \mathcal{P}^m$ — полукольцо ячеек, μ — классический объем, μ — σ-конечный объем.

$$\mathbb{R}^m = \bigcup \text{Куб}(0, 2R)$$

$$= \bigcup \text{целочисл. ед. ячеек}$$

Определение. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера.

μ — **полная** в $\mathcal{P}$, если $\forall A \in \mathcal{P}\ \ \mu A = 0\ \ \forall B \subset A$ выполняется: $B \in \mathcal{P}$ и *(тогда автоматически)* $\mu B = 0$ *(по монотонности)*

Это совместное свойство μ и $\mathcal{P}$.

Должок. **Пространство с мерой** — тройка $(\underbrace{X}_{\text{множество}}, \underbrace{\mathfrak{A}}_{\sigma\text{-алгебра}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера на } \mathfrak{A}})$