## 0 Введение

Пусть мы хотим найти y — функцию от одного аргумента.

Определение.  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  — дифференциальное уравнение

Пример. Условие задачи:

$$dy_n \approx ky_n dt$$
$$\frac{dy}{dt} \approx ky$$
$$y' = ky$$
$$y(t) = ?$$

Предположим, что y=kt — решение искомого дифференциального уравнения. Подставим y=kt в (1).

$$(kt)' = k(kt)$$
$$k = k^{2}t$$
$$1 = kt$$
$$t = \frac{1}{k}$$

Это не верно для всех t, следовательно y=kt — не решение.

Предположим, что  $y=e^{kt}$  — решение.

$$(e^{kt})' = ke^{kt}$$
$$ke^{kt} = ke^{kt}$$
$$e^{kt} = e^{kt}$$

Это верно  $\forall t \in (-\infty, +\infty).$ 

Кроме того,  $y = Ce^{kt}$  — решение  $\forall C \in \mathbb{R}$ 

 $\mbox{\it Пример.}$  Груз массой m подвешен к пружине. Пусть его положение — функция x(t).

В положении равновесия:

$$mg = -kx_0$$

Второй закон Ньютона:

$$F_{\Sigma} = ma$$
  
$$mg + (-k(x - x_0)) = m\ddot{x}$$

Примечание.  $\ddot{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2x}{dt^2}$  (вторая производная x no t)

$$-kx_0 - kx + kx_0 = m\ddot{x}$$
$$-kx = m\ddot{x}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка.

Ответ:

$$x(t) = A\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \phi_0\right)$$

 $A, \phi_0$  — произвольные постоянные.

# 1 Уравнения первого порядка. Основные понятия.

#### 1.1 Уравнение первого порядка и его решения

Определение. F(x,y,y')=0 — уравнение первого порядка

Определение. Решением уравнения первого порядка на (a,b) называется функция  $\varphi \in C^1(a,b)$ :

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

(a и b могут быть  $\infty$ )

Пример.

$$\forall y'=x$$
 
$$y=\frac{x^2}{2}+C$$
 Частные решения: 
$$\begin{cases} \varphi(x)=\frac{x^2}{2}-\text{решение на }(-\infty,+\infty)\\ \varphi(x)=\frac{x^2}{2}+1 \end{cases}$$

Определение. Общее решение — множество всех решений.

Определение. Общий интеграл — соотношение вида F(x,y,C)=0, которое при любом допустимом C неявно задаёт решение.

Пример.

$$y-rac{x}{2}+C=0$$
 — общий интеграл

Определение. Интегральная кривая уравнения — график его решения.

#### 1.2 Формы записи уравнения первого порядка

Определение. y' = f(x,y) — уравнение, разерешенное относительно производной (нормальная форма).

Пример.

Кроме того, можно решить относительно x:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$
 
$$x = \sqrt{1-y} - \text{решение на } y \in (-1,1)$$
 
$$x = -\sqrt{1-y} - \text{решение на } y \in (-1,1)$$

Определение. P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 — уравнение в дифференциалах

Определение. Решением уравнения в дифференциалах называется функция  $y(x) \in C^1(a,b)$ , такая что:

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Аналогично определяется решение x(y).

Определение. Параметрическим решением уравнения в дифференциалах называется пара  $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$ , такая что:

1. 
$$|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0$$

2. 
$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

*Примечание.* Первое условие гарантирует, что в графике нет изломов, т.к. мы всегда "движемся" хотя бы по одной из осей.

Определение. Интегральная кривая уравнения в дифференциалах — кривая, параметризация которой является параметрическим решением.

Пример.

$$ydy + xdx = 0$$

Параметрическое решение: 
$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

### 1.3 Поле направлений и приближенные решения

$$\triangleleft y' = f(x, y)$$

G — область в  $\mathbb{R}^2$ 

$$f \in C(G)$$

Пусть  $\varphi$  — решение на (a,b), т.е.  $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x)) \quad \forall x\in(a,b)$ 

$$y_0 := \varphi(x_0)$$

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

 $(1,f(x_0,y_0))$  — касательный вектор к y(x) в точке  $x_0$ 

Построив множество касательных векторов, можно увидеть, как должны идти искомые кривые, т.к. они должны касаться этих векторов.

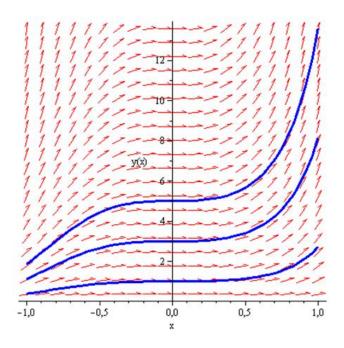


Рис. 1: Поле направлений с ломаными Эйлера

Определение (Ломаная Эйлера).  $\sphericalangle y' = f(x,y), (x_0,y_0)$  — начальная точка,  $\Delta x$  — постоянный шаг.

Вершины ломаной Эйлера: 
$$\begin{cases} x_k = x_0 + k \Delta x \\ y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1}) \Delta x \end{cases}$$

## 1.4 Задача Коши

Определение. Задача Коши (начальная задача) для уравнения y'=f(x,y)- задача отыскать его решения, удовлетворяющие начальному условию  $y(x_0)=y_0$ , где  $x_0,y_0-$  начальные данные задачи.

Пример.

$$y' = 2x \quad y(1) = 2$$

Решение:

$$y = x^2 + C$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

Ответ:  $y = x^2 + 1, x \in (-\infty, +\infty)$