1 Равномерная сходимость последовательности

Практически все задачи решаются следующим образом:

1. Находим кандидата на роль f по формуле $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Предел берется при фиксированном x. f может зависеть от x и может быть разрывным *(например, 2751.б)*

2. Проверяем, что $\rho(f, f_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, где $\rho(f, f_n) = \sup\limits_{x\in E} |f(x) - f_n(x)|$

   Методы нахождения супремума:

   (a) **Прямой**: $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)} \dfrac{1}{x+n} = \dfrac{1}{n} \to 0$

   (b) **Оценка сверху** *(доказывает равн. сходимость)*: $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\dfrac{x+x^2}{1+n+x}\right| \le \dfrac{2}{1+n} \to 0$

   (c) **Оценка снизу** *(доказывает отсутствие равн. сходимости)* — обычно подстановка конкретного x *(он может зависеть от n)*:

   $$\sup_x \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \overset{x:=n}{\ge} \sin(1) \not\to 0$$

   (d) **Оценка снизу пределом**: $\sup\limits_{g\in E} g(x) \ge \lim\limits_{x\to A} g(x)$, где A — предельная точка E.

Есть более простой признак **отсутствия** равн. сходимости:

$$f_n(x) \rightrightarrows f \implies \forall x \in E \;\; f_n(x) \to f(x)$$

2 Равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x) \quad S_N \rightrightarrows S \text{ на } E$$

Методы доказательства:

1. **По определению** *(см. равн. сходимость последовательностей)* — самый простой вариант, для него нужен способ посчитать частную сумму. Это либо телескоп, либо прогрессия. Иногда из дроби можно получить телескоп разложением на простые дроби.

2. **По абсурдности** если $u_n(x) \not\rightrightarrows 0$, то сумма не сходится.

3. **Признак Вейерштрасса**

   $\sum u_n(x), x \in E$:

   (a) $\forall x \in E : |u_n(x)| \le C_n$

   (b) $\sum C_n$ — сходится

   Тогда ряд равномерно сходится.

   Обычно берут $C_n = \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 1$, но иногда нужно думать про сходимость ряда C_n, т.к. она не очевидна. Вольфрам в помощь.

   При придумывании C_n можно найти точку экстремума максимума $|u_n(x)|$ ($x = \ldots$) через $u_n(x)'_x$ и подставить такой x.

4. **Критерий Больцано-Коши** обычно доказывает **отсутствие** равномерной сходимости, хотя его можно использовать и для обратного.

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall N \;\; \exists n > N, \exists m \in \mathbb{N}, \exists x \quad |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| > \varepsilon$$

   Тогда равномерной сходимости нет.

   Идея в том, чтобы иметь большие ($\ge \frac{C}{n}$) слагаемые, для этого надо придумать соответствующий x. Часто используется оценка суммы $|\sum_{i=n+1}^{n+m} u_i(x)| \ge \min u_i(x) \cdot m$.

   Для обратного нужно построить отрицание критерия.

5. **Признак Дирихле** для $\sum a_n(x) b_n(x)$:

   (a) Частичные суммы $\sum a_n$ равномерно ограничены:

$$\exists C_a \;\; \forall N \;\; \forall x \in E \quad \left| \sum_{k=1}^{N} a_k(x) \right| \le C_a$$

   (b) i. При фиксированном x функция $b_n(x)$ монотонна по n

   ii. $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на E при $n \to +\infty$

6. **Признак Абеля** для $\sum a_n(x) b_n(x)$:

   (a) $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на E

   (b) i. $b_n(x)$ монотонно по n

   ii. $b_n(x)$ равномерно ограничено:

$$\exists C_b \;\; \forall N \;\; \forall x \in E \;\; |b_n(x)| \le C_b$$

3 Свойства через ряды

1. • $\sum u_n(x) = f(x)$

- $u_n(x)$ непр. в x_0
- Ряд равномерно сходится в $U(x_0)$

Тогда f **непр.** в x_0

2. - $\sum u_n'(x) = \varphi(x)$
   - $\sum u_n'(x)$ равномерно сходится в $U(x_0)$

   Тогда f — **дифф.** в x_0, $f'(x) = \varphi(x)$

3. - $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$
   - u_n непр. на $[a, b]$

   Тогда $\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b u_n(x)dx$

Когда требуют равномерную сходимость в $U(x_0)\ \ \forall x_0 \in E$, можно пытаться доказать равномерную сходимость в E. Это проще сделать, но не всегда возможно.

4 Степенные ряды

Степенной ряд — ряд вида $\sum a_n(x-x_0)^n$. Он сходится при $|x - x_0| < R$, $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Верхний предел — наибольший предел из пределов всех подпоследовательностей.

Иногда ответ выдает $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, но не всегда.

И ещё возможно сходится при $x = x_0 \pm R$. Сходимость при таком x находится путём подстановки соответствующего x в ряд. Но этот ряд не простой, в нем не будет работать признак Даламбера и Коши.

Можно решать заменой на эквивалентное (возможно по модулю), если это не помогает, то применяется Лейбниц или Дирихле.

5 Разложение функции

Мы знаем, что если $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$, то это ряд Тейлора, т.е. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

У нас есть пять основных разложений:

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots
\end{aligned}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} + \dots \quad x \in (-1, 1)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1, 1]$$

Функции вида $f(x) = (x-x_0)^\alpha \cdot g(x)$, где $g = \sum a_n(x-x_0)^n$, раскладываются по формуле $f = \sum a_n(x-x_0)^{n+\alpha}$, то есть разложение можно домножить на $(x-x_0)^\alpha$.

Композиция сохраняется разложением.

Можно найти разложение производной ($f'(x)$), потом проинтегрировать и найти искомое. Константа находится подстановкой $x = x_0$, при ней ряд после интеграции $= 0$, $f(x_0)$ может не быть 0.

6 Получение функции из ряда

В общем виде задача выглядит как : $f(x) = \sum a_n x^n$, найти $f(x)$ в виде не ряда, но может быть и такой: $\sum a_n = ?$, тогда можно решить исходную задачу и найти ответ подстановкой $x = 1$. Этот метод называется методом Абеля.

Задача решается взятием производных и интегралов. При интегралах надо не забывать константу.

7 Вычисление сумм рядов

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
2. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$
3. $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$
4. Телескопические $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Трюки

1. $$\frac{t}{1+t^2} \le \frac{1}{2}$$
2. $$\left|xe^{-x^2 n}\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}$$
3. $$a + b \ge 2\sqrt{ab}$$

4. $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leq 0$
5. $$\sum \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$
6. $$\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$
7. $$\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{x}{2}$$
8. $$\left| \sum_{n=1}^{N} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{|e^{ix} - 1|}$$
9. Если $u_n(x)$ монотонно по n, то:
$$\left| \sum_{n \geq N} (-1)^n u_n(x) \right| \leq u_N(x)$$
10. Если есть равномерная сходимость ряда в $U(0)$, то $\sum u_n(x) \xrightarrow{x \to 0} \sum u_n(0)$.