# 1 Пределы

**Теорема 1.** Определение Коши $\Leftrightarrow$ определение Гейне.

*Доказательство.* Докажем "$\Rightarrow$".

Если дана $(x_n)$, удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

$$\text{Для этого } \delta \ \exists N \ \forall n > N \rho(x_n, a) < \delta$$

, где $x_n \in D, x_n \neq a$

$\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$ $\square$

*Доказательство.* Докажем "$\Leftarrow$"

Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \ \exists x_n \in D \ 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \ \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Построена последовательность $(x_n) : x_n \in D \ x_n \neq a \ \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \to 0 \Rightarrow x_n \to a$. Кроме того, $\rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$ — противоречит утверждению Гейне, что $f(x_n) \to A$. $\square$

**Теорема 2.** О единственности предела. $f : D \subset X \to Y$, $a$ — пред. точка $D$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A; \lim\limits_{x \to a} f(x) = B$

Тогда $A = B$

*Доказательство.* По Гейне. $\forall (x_n)$ :

- $x_n \to a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) \to A, f(x_n) \to B \xRightarrow[\text{теор. о ед. предела посл.}]{} A = B$ □

**Теорема 3.** О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.

$f : D \subset X \to Y$, $a$ — пред. точка $D$, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Тогда $\exists V(a) : f$ — огр. на $V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.

*Доказательство.* Для $\varepsilon = 1 \ \exists V(a) \ \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Если $\nexists f(a)$, ограниченность доказана. Иначе:

$\forall x \in V(a) \cap D \ \ f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A)$, где $\tilde{\varepsilon} = \max(\varepsilon, \rho(A, f(a)) + 1)$ □

**Теорема 4.** О стабилизации знака.

$f : D \subset X \to Y$, $a$ — пред. точка $D$, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Пусть $B \in Y, B \neq A$

Тогда $\exists V(a) \ \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ \ f(x) \neq B$

*Доказательство.* Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \ \ \exists V(a) \ \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$U_\varepsilon(A)$ не содержит $B$. □

*Следствие* 4.1. $f : D \subset X \to \mathbb{R}$, $a$ – пред. точка, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A > 0 \ \ B = 0$

$\exists \dot{V}(a) \cap D : f(x) \neq 0$

В доказательстве $0 < \varepsilon < A \ \ f(x) \in U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

**Теорема 5.** Об арифметических свойствах предела

$f, g : D \subset X \to Y$, $X$ — метрич. пространство, $Y$ — норм. пространство над $\mathbb{R}$, $a$ — пред. точка $D$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$

$\lambda : D \to \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = \lambda_0$

Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$
3. $\lim\limits_{x \to a} ||f(x)|| = ||A||$

4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

$a$ — пр. точка $D'$ по теореме о стабилизации знака $\exists V(a) \ \ \forall x \in V(a) \cap D \ \ g(x)$ — того же знака, что и $B$, т.е. $g(x) \neq 0$

$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$ — пред. точка для $D'$

*Доказательство.* По Гейне. $\forall (x_n)$ :

- $x_n \to a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) + g(x_n) \to^? A + B$ верно по теореме последовательности.

Аналогично прочие пункты, кроме 4.

$f(x_n) \to A$

$g(x_n) \to B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \ \ \forall n > n_0 \ \ g(x_n) \neq 0$

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ корректно задано при $n > n_0$. $\square$

*Примечание.* Для $\overline{\mathbb{R}}$

Если $Y = \overline{\mathbb{R}}$, можно “разрешить” случай $A, B = \pm\infty$

Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения $A \pm B$, $\lambda_0 A$, $\frac{A}{B}$ корректны.

Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \ \ \exists \delta_1 > 0 \ \ \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) \ \ f(x) > E_1 \ \ \forall E_2 \ \ \exists \delta_2 > 0 \ \ \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) \ \ g(x) > E_2$

Это доказательство не будет спрашиваться.

# 2 Компактные множества

**Теорема 6.** О простейших свойствах компактных множеств. $(X, \rho)$ — метрическое пространство, $K \subset X$

1. $K$ — комп. $\Rightarrow K$ — замкн., $K$ — огр.
2. $X$ — комп, $K$ — замкн. $\Rightarrow K$ — комп.

*Доказательство.* 1. $?K$ — замкн. $?K^c$ — откр.

$a \notin K$, проверим, что $\exists U(a) \subset K^c$

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \frac{1}{2}\rho(x, a))$ — откр. покрытие

$K$ — комп. $\Rightarrow \exists x_1 \dots x_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a))$ — открытое покрытие

$r := \min(\frac{1}{2}\rho(x_1, a)) \dots \frac{1}{2}\rho(x_n, a)))$

$B(a, r)$ не пересекается ни с одним $B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a)) \Rightarrow B(a, r) \subset K^c$

$?K$ — огр.

$b \in X$

$K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B(b, n) = X$

$K$ — комп. $\Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} \Rightarrow K \subset B(b, \max(n_1 \dots n_m))$

2. $?K$ — комп.

$$\begin{cases} K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — откр.} \\ K \text{ — замкн.}, K^c \text{ — откр.} \end{cases} \Rightarrow K^c \cup \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \text{ — откр. покрытие } X \Rightarrow$$

$\Rightarrow X \subset$ (может быть $K^c$) $\cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

□

**Лемма 1.** О вложенных параллелепипедах. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \;\; a_i \leq x_i \leq b_i\}$ — параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \varnothing$

Если $diam[a^n, b^n] = ||b^n - a^n|| \to 0$, тогда $\exists! c \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

*Доказательство.* $\forall i = 1 \dots m \quad [a_i^1, b_i^1] \supset [a_i^2, b_i^2] \supset \dots \quad \exists c_i \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n]$. $c = (c_1 \dots c_m)$ — общая точка всех параллелепипедов.

$|a_i^n - b_i^n| \leq ||a^n - b^n|| \to 0 \Rightarrow_{\text{т. Кантора}} \exists! c_i \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists! c = (c_1 \dots c_m)$ □

**Лемма 2.** $[a,b]$ — компактное множество в $\mathbb{R}^m$ $[a,b] \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ — откр. в $\mathbb{R}^m$

*Доказательство.* Докажем, что $\exists$ кон. $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) : [a,b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

Допустим, что не $\exists$

$[a^1, b^1] := [a,b] \Rightarrow [a^1, b^1]$ нельзя покрыть кон. набором

$[a^2, b^2] :=$ делим $[a^1, b^1]$ на $2^m$ частей, берем любую "часть", которую нельзя покрыть конечным набором $G_\alpha$

$\vdots$

$$diam = [a^n, b^n] = \frac{1}{2} diam[a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} diam[a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a,b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0} \text{ — откр.}$$

$$\exists U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad diam[a^n, b^n] \ll \varepsilon$$

$$\text{и тогда } [a^n, b^n] \subset U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$\square$

*Примечание.* $x_n \to a$

$\forall$ подпосл. $n_k \quad x_{n_k} \to a$

*Примечание.* $\{n_k\} \cap \{m_k\} = \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n_k} \to a \\ x_{m_k} \to a \end{cases} \Rightarrow x_n \to a$$

**Определение.** **Секвенциально компактным** называется множество $A \subset X : \forall$ посл. $(x_n)$ точек $A$ $\exists$ подпосл. $x_{n_k}$, которая сходится к точке из $A$

**Теорема 7.** О характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$. $K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. $K$ — замкнуто и ограничено
2. $K$ — компактно
3. $K$ — секвенциально компактно

*Доказательство.* Докажем $1 \Rightarrow 2$

$K$ — огр. $\Rightarrow$ $K$ содержится в $[a, b]$

$K$ — замкн. в $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$ — замкн. в $[a, b]$

Т.к. $[a, b]$ — комп., по простейшему свойству компактов $K$ — комп. $\square$

*Доказательство.* Докажем $2 \Rightarrow 3$

$\forall (x_n)$ — точки из $K$.

?сходящаяся последовательность

Если множество значений $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ — конечно, то $\exists$ сход. подпосл. очевидно.

Пусть $D$ — бесконечно

Если $D$ имеет предельную точку, то $x_{m_k} \to a$

Если $D$ — бесконечно и не имеет предельных точек, $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$, радиус такой, что в этом шаре нет точек $D$, кроме $x$ *(его может тоже не быть)*. Тогда $\bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$ — открытое покрытие $K$. Так как каждый шар содержит 0 или 1 точку, конечное число шаров не может покрыть $K$, т.к. в $K$ бесконечное число точек *(т.к. бесконечное число различных значений $D$)*. Таким образом, мы нашли открытое покрытие $K$, у которого нет конечного подпокрытия — противоречие.

Пусть $a \in K$ — предельная точка. Возьмём из $B(a, r_1)$ точку $x_{n_1}$. Возьмём $r_2 < r_1$ и из соответствующего шара возьмём $x_{n_2}$. При $r_n \to 0$ $x_{n_k} \to a$.

Почему вблизи $a$ будет точка из произвольной последовательности? $\square$