Определение. $U : X \to X$, такой что:

1. $\forall x, y \quad \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$
2. $\forall x \quad ||Ux|| = ||x||$
3. $U^* = U^{-1} \Leftrightarrow U^*U = UU^* = I$

называется **унитарным оператором**

Теорема 1. Свойства 1,2 и 3 эквивалентны.

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$

$$\forall x, y \quad \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \overset{?}{\Rightarrow} ||Ux|| = ||x||$$

$$||Ux||^2 = \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle = ||x||^2$$

- $2 \Rightarrow 3$

$$||Ux|| = ||x|| \overset{?}{\Rightarrow} U^*U = I$$

$$||Ux||^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle = \langle x, x\rangle$$

$$U^*U = I$$

- $3 \Rightarrow 1$

$$U^* = U^{-1} \overset{?}{\Rightarrow} \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$$

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle U^*Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

□

Лемма 1. $|\det U| = 1$

Доказательство.

$$1 = \det I = \det(U^*U) = \det U^* \det U \overset{\text{def}}{=} \det \overline{U}^T \det U = \det \overline{U} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U|^2$$

□

Лемма 2. Матрица унитарного преобразования обладает свойством ортогональности по строкам и столбцам.

Доказательство. Здесь $\mathcal{U}$ - оператор, U - его матрица:

$$\mathcal{U} \leftrightarrow U = ||U_{ij}||$$

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U} = I \Rightarrow U^+U = E$$

В следующей строке подразумевается $\forall i, k$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{U}_{ji} U_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (\overline{U}^T)_{ij} U_{jk} = \delta ik$$

$\square$

Пример. Матрица поворота - ортогональное преобразование.

Лемма 3. Множество унитарных операторов образует мультипликативную группу $U(n)$:

1. $U_1, U_2 \in U(n) \Rightarrow U_1 \cdot U_2 \in U(n)$
2. $\exists I : I^* = I$
3. $\forall U \ \ \exists U^{-1} = U^*$
4. $U_1(U_2U_3) = (U_1U_2)U_3 = U_1U_2U_3$

Доказательство. 1. U_1U_2 - унитарный?

$$\langle U_1U_2x, U_1U_2y\rangle = \langle U_1^*U_1U_2x, U_2y\rangle = \langle U_2x, U_2y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Остальное очевидно.

$\square$

$U(n)$ называется **унитарной группой операторов над унитарным пространством** X, $\dim X = n$

$\lhd SU(n) \overset{\text{def}}{=} \{U \in U(n) : \det U = 1\}$

Лемма 4. $SU(n)$ — подгруппа $U(n)$

Лемма 5. Все собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице.

$$\lambda \in \sigma_U \Rightarrow |\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = e^{i\varphi}$$

Доказательство. $]Ux = \lambda x$

$$||x|| = ||Ux|| = ||\lambda x|| = \lambda ||x||$$

$\square$

Лемма 6. Собственные вектора U, отвечающие различным собственным значениям, являются ортогональными.

Доказательство. $\square$

Лемма 7. Любое инвариантное подпространство U является приводящим.

$$X = L + L^{\perp} \quad y \in L^{\perp} \Rightarrow Uy \in L^{+}$$

Доказательство.

$$\lhd y \in L^{\perp} : 0\langle x, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = 0$$

□

Теорема 2. Из собственных векторов унитарного оператора можно построить ортонормированный базис.

Доказательство. Очевидно от противного, как с эрмитовым оператором. □

Примечание. Унитарный оператор имеет скалярный тип, ортогональный оператор *(унитарный, но над* $\mathbb{C}$*)* может не иметь.

Теорема 3. Спектральная теорема для унитарного оператора:

$$U = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^{n} e^{i\varphi_j} \langle e^j, \cdot \rangle e_j$$

Теорема 4. Эрмитова матрица может быть приведена к диагональной формме унитарным преобразованием:

$$\varphi^* = \varphi \Rightarrow \exists \mathcal{U} \in \mathcal{U}(n) : A_{\varphi}^{d} = U^{+} A_{\varphi} U$$

Доказательство.

$$A_{\varphi}^{d} = T^{-1} A_{\varphi} T$$

T — состоит из собственных векторов φ, но $\varphi^* = \varphi \Rightarrow$ столбцы T ортогональны $\Rightarrow T = U \leftrightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{U}(n)$ □

Примечание. φ — эрмитовский оператор $\Rightarrow e^{i\varphi}$ — унитарный оператор.

Доказательство.

$$(e^{i\varphi})^* = e^{-i\varphi^*} = e^{-i\varphi}$$

$$(e^{i\varphi})^* e^{i\varphi} = I$$

□

Квадратичные формы

$]X$ — линейное пространство

Определение. Отображение $b : X \times X \to K$ — **билинейная форма**, если выполняется следующее:

1. $K = \mathbb{R} : b(x, y) = b(y, x) \;\; b(\alpha x + y, z) = \alpha b(x, z) + b(y, z)$
2. $K = \mathbb{C} : b(x, y) = \overline{b(y, x)} \;\; b(\alpha x + y, z) = \overline{\alpha} b(x, z) + b(y, z)$

Примечание. $b \in \Omega^2_0$ — тензор типа $(2, 0)$

$]\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X

$$\forall x, y \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k$$

$$b(x, y) = b(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j, \sum_{k=1}^n \eta^k e_k) = \sum_{k,j=1}^n \overline{\xi}^j \eta^k \cdot \underbrace{b(e_j, e_k)}_{\text{элемент тензора } b} = \sum_{k,j=1}^n \overline{\xi}^j \eta^k b_{jk}$$

Примечание. В матричной форме $b(x, y) = \xi^+ B \eta$

Определение. **Квадратичной формой**, соответствующей билиненой форме b, называется отображение q:

$$q(x) = b(x, x)$$

Лемма 8. $\{e_j\}_{j=1}^n \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n \Rightarrow \tilde{Q} = T^T Q T$

Доказательство. Очевидно. □

Скипнуто до конца лекции.