

1 Обратный оператор

1.1 Единица. Обратный элемент

$A(K)$ — алгебра над полем K

Определение. Единицей алгебры называется такой её элемент $e \in A$, что

$$\forall a \in A \quad a \cdot e = e \cdot a = a$$

Кроме того, существуют левая и правая единицы:

$$e_L : e_L \cdot a = a \quad e_R : a \cdot e_R = a \quad \forall a \in A$$

Лемма 1. Если в $A \exists e_L$ и $e_R \Rightarrow e_L = e_R \stackrel{\Delta}{=} e$

Доказательство.

$$e_L = e_L e_R = e_R$$

□

Лемма 2. $\exists! e$

Доказательство. Тривиально.

□

$$\triangleleft x, y \in A : x \cdot y = e$$

Определение. Если $x \cdot y = e$, то x называется левым обратным к y , а y называется правым обратным к x .

Определение. $\exists z \in A, x : xz = zx = e$, тогда x — обратный к z , обозначается $x = z^{-1}$, при этом z называется обратимым.

Лемма 3. Если $y, z \in A \exists x$ — левый обратимый и y — правый обратимый. Тогда:

1. z — обратимый
2. $z^{-1} = y \cdot x$

Доказательство. $\triangleleft z \cdot yx = e \cdot x = x$

$$\triangleleft x(zy) = x \quad (xz)y = y \Rightarrow x = y \Rightarrow z \text{ — обратимый.}$$

□

Пример. • $\mathbb{R} \quad e = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$\bullet \mathbb{C} \quad e = 1 + 0 \cdot i \quad z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

$$\bullet \mathbb{R}^4 \quad e = 1 + 0i + 0j + 0k \quad q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

1.2 Обратная матрица

$\triangleleft K_n^n$ — алгебра матриц

Определение. Единичной называется матрица E , такая что $\forall A \in K_n^n$:

$$AE = EA = A$$

Примечание. Единичная матрица — диагональна:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Определение. Обратной к матрице A называется матрица A^{-1} :

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Теорема 1. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Способы вычисления A^{-1}

1.2.1 Метод Гаусса

$$[A \mid E] \sim [E \mid A^{-1}]$$

Доказательство.

$$[A \mid E] = [T_1 A \mid T_1 E] = [T_2 T_1 A \mid T_2 T_1 E] = \dots = [T_n \dots T_1 A \mid T_n \dots T_1 E] = [E \mid T_n \dots T_1 A]$$

$$\triangleleft T_n \dots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \dots T_1$$

□

Теорема 2.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

Доказательство. $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$ — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$] \delta_{k_0}^i = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1_{k_0} \ 0 \ \dots \ 0)^T = b$$

$$\beta_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = \det A(a_j \rightarrow b)$$

□

1.3 Обратный оператор

$$\varphi : X \rightarrow X$$

Определение. Обратным к оператору φ называется оператор φ^{-1} :

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

$$\mathcal{L}(X, X) \simeq K_n^n$$

Теорема 3. Оператор φ обратим, если \exists базис, в котором его матрица невырождена

$$\text{Примечание. } \tilde{A} = T^{-1}AT \quad \det \tilde{A} = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T$$

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

Определение. Ядро φ :

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

Примечание. $\text{Ker } \varphi \subset X$

Лемма 4. $\text{Ker } \varphi$ — ЛП

Определение. Образ φ :

$$\text{Im } \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

Примечание.

$$\text{Im } \varphi \subset Y$$

Лемма 5. $\text{Im } \varphi$ — ЛП

Теорема 4. О ядре и образе

$$\varphi : X \rightarrow X \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim X$$

Доказательство.] $\dim \text{Ker } \varphi = K$

] $\{e_1 \dots e_k\}$ — базис $\text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0 \quad \forall j = 1..k$

$\triangleleft \{e_1 \dots e_k; e_{k+1} \dots e_n\}$ — базис X

$$\triangleleft x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad \triangleleft \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=k+1}^n \xi^j \varphi(e_j)$$

$\{\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)\}$ — полный для Im , т.к. любой $x \in \text{Im}$ можно по нему разложить.
Докажем ЛНЗ от обратного:

$$]\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n - \text{ЛЗ} \Rightarrow \exists \alpha^j : \sum_{j=k+1}^n \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi \left(\sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{или} \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1} \dots e_n \text{ разложима по } e_1 \dots e_k - \text{противоречие} \\ \text{или} \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ЛНЗ} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n - \text{базис } \text{Im } \varphi. \quad \square$$

О существовании φ^{-1}

$$\triangleleft \varphi : X \rightarrow Y$$

$$\varphi : \forall x \exists! y \in \text{Im } \varphi : \varphi(x) = y$$

$$\exists \varphi^{-1} : \forall y \in \text{Im } \varphi \exists! x \in X : \varphi^{-1} y = x$$

Обратный оператор существует только к изоморфизмам.

Теорема 5. $\triangleleft \varphi : X \rightarrow X$

$$\exists \varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim \text{Im } \varphi = \dim X \text{ или } \dim \text{Ker } \varphi = 0$$

Доказательство. $\dim \text{Im } \varphi = \dim X \Leftrightarrow \text{Im } \varphi \simeq X \Rightarrow \varphi - \text{сюръекция, } \dim \text{Ker } \varphi = 0 \Rightarrow$
 $\forall y \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi - \text{инъекция} \quad \square$

2 Внешняя степень ЛОП

$$\triangleleft \Lambda^p \quad \{^{i_1 \dots i_p} F\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} - \text{базис } \Lambda^p$$

$$^{i_1 \dots i_p} F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \quad \dim \Lambda^p = C_n^p$$

] $\{x_i\}_{i=1}^n$ — набор векторов

$$\det\{x_1 \dots x_n\} := {}^{1 \dots n} F(x_1 \dots x_n)$$

$\langle \Lambda_p \setminus \{e_{i_1 \dots i_p}\} \rangle_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$ — базис Λ_p

$$\dim \Lambda_p = C_n^p \quad e_{i_1 \dots i_p} F = \hat{x}_{i_1} \wedge \hat{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \hat{x}_{i_p} \simeq x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис $X \Rightarrow x_i = \xi_i^{j_i} e_{j_i}$

$$\begin{aligned} e_{j_1 \dots j_n} F &= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \\ &= \det[\xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n] (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \end{aligned}$$

Определение. Определителем набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется число $\det[x_1 \dots x_n]$, такое, что:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Лемма 6.

$$\text{от } \Lambda^p \quad \det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1 \dots x_n] \text{ от } \Lambda_p$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \det\{x_1 \dots x_n\} &= e_{j_1 \dots j_n} F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \\ &= \det\{x_1 \dots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

□

Определение. $\varphi : X \rightarrow X$

Внешней степенью φ^{Λ_p} оператора φ называется отображение:

$$\varphi^{\Lambda_p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_p)$$

Примечание.

$$\varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_p$$

$$\langle p = n$$

$$\begin{aligned} \varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) &= \varphi(e_1) \wedge \varphi(e_2) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n) = a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge \dots \wedge a_1^{j_n} e_{j_n} = \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_n}^n e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

Определение. Определителем линейного оператора φ называется число, такое что:

$$\det \varphi = \det[\varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n)] = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Примечание.

$$\forall \omega \in \Lambda_n \quad \varphi^{\Lambda_n} \omega = \det \varphi \cdot \omega$$

$$\omega \in \Lambda_n \Rightarrow \omega = \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

$$\varphi^{\Lambda_n} \omega = \alpha \varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \alpha \det \varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det \varphi \cdot \omega$$

Определение. Грассманова алгебра — алгебра по внешнему произведению

Теорема 6.

$$\det(\varphi\psi) = \det \varphi \det \psi$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \triangleleft \det(\varphi\psi)e_1 \wedge \dots \wedge e_n &= (\varphi\psi)^{\Lambda_n} e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \dots \wedge \varphi(\psi(e_n)) = \\ &= \varphi^{\Lambda_n}(\psi(e_1) \wedge \dots \wedge \psi(e_n)) = \det \varphi \det \psi e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

□