

# Методы оптимизации

Михайлов Максим

19 февраля 2021 г.

## Оглавление

Лекция 1	10 февраля	2
1	Теория погрешности . . . . .	2
2	Задачи оптимизации. Вводное. . . . .	6
3	Одномерная минимизация функций. Прямые методы. . . . .	7
3.1	Метод дихотомии . . . . .	7
Лекция 2	17 февраля	9
3.2	Метод золотого сечения . . . . .	9
3.3	Метод Фибоначчи . . . . .	10
3.4	Метод парабол . . . . .	11
3.5	Комбинированный метод Брента . . . . .	11

# Лекция 1

## 10 февраля

Этот курс — о минимизации (*максимизации*) функционалов. Кроме конкретных методов оптимизации, планируется рассмотреть форматы хранения матриц, о методах работы с ними и рассмотреть 1-2 (*может быть 3*) СЛАУ с использованием различных форматов.

Т.к. значения, получаемые компьютерами — не точные, нам требуется теория погрешности.

### 1 Теория погрешности

Все погрешности разделяются на два класса:

1. Неустраняемая — обусловлена неточностью исходных данных. Например, неточное знание физических констант или других параметров задачи. Тем не менее, необходимо знать эту погрешность, чтобы ставить рамки погрешности для решения.
2. Устранимая — погрешность процесса решения задачи. Эту погрешность можно уменьшить выбором метода решения задачи.

(a) Погрешность модели

(b) Остаточная погрешность (*погрешность аппроксимации*)

Например, аппроксимация ряда первыми  $n$  его членами или аппроксимация по теореме Вейерштрасса квадратичной функцией.

(c) Погрешность округления

(d) Накапливаемая погрешность

**2c** и **2d** часто объединяют в вычислительную погрешность.

**Определение.** Пусть  $X^*$  — точное решение, а  $X$  — найденное (*приближенное*) решение. Тогда  $X^* - X$  называется **погрешностью**, а её модуль  $\Delta X = |X^* - X|$  — **абсолютная погрешность**.

Разумеется,  $\Delta X$  представляет сугубо теоретический интерес, т.к.  $X^*$  неизвестна и  $\Delta X$  нельзя вычислить.

**Определение.** В качестве требования к решению часто предоставляется **предельная абсолютная погрешность**  $\Delta_X \geq |X^* - X|$ .

**Определение.** Также существует **относительная погрешность**  $\delta X = \left| \frac{X^* - X}{|X|} \right|$

Относительная погрешность позволяет выражать погрешность относительно значений самой величины. Например, при измерении длины парты погрешность 1 см не очень хорошо, а при измерении расстояния между городами — приемлемо.

**Определение.** **Предельная относительная погрешность**  $\delta_X \geq \left| \frac{X^* - X}{|X|} \right|$

**Определение.** **Значащие цифры** некоторого числа — все цифры в его изображении, отличные от нуля, а также нули, если они содержатся между значащими цифрами или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряда точности.

**Определение.** Если значащая цифра приближенного значения  $a$ , находящаяся в разряде, в котором выполняется условие  $\Delta \leq 0.5 \cdot 10^k$ , т.е. абсолютное значение погрешности не превосходит половину единицы этого разряда ( $k$  — номер этого разряда), то такая цифра называется **верной в узком смысле**.

Цифра называется **верной в широком смысле**, если в определении выше используется 1 вместо 0.5.

*Пример.*  $a = 3.635$ ,  $\Delta a = 0.003$

- $k = 0 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^0 = \frac{1}{2} \geq \Delta a$
- $k = -1 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05 \geq \Delta a$
- $k = -2 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005 \geq \Delta a$
- $k = -3 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0.0005 < \Delta a$

Таким образом, цифра 5 является сомнительной, остальные — верные.

*Пример.* Рассмотрим следующие способы записи одного и того же выражения:

$$\left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^3 = (\sqrt{2} - 1)^6 = (3 - 2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$$

Посчитаем все выражения с различными приближениями  $\sqrt{2}$ :

- $\frac{7}{5} = 1.4$
- $\frac{17}{12} = 1.41666$
- $\frac{707}{500} = 1.414$
- $\sqrt{2} = 1.4142135624$

$\sqrt{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$	$(\sqrt{2}-1)^6$	$(3-2\sqrt{2})^3$	$99-70\sqrt{2}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{216} \approx 0.0046$	$\frac{64}{15625} \approx 0.0051$	$\frac{1}{125} = 0.008$	1
$\frac{17}{12}$	$\frac{125}{24389} \approx 0.00513$	$\frac{15625}{2985354} \approx 0.0052$	$\frac{1}{216} \approx 0.0046$	$-\frac{1}{6} = -0.6(6)$
$\frac{707}{500}$	$\frac{8869743}{1758416743} \approx 0.005044$	$\frac{78672340886049}{15625 \cdot 10^{12}} \approx 0.00504$	$\frac{636056}{125000000} \approx 0.00509$	0.02

$$\Delta_{(X \pm Y)} = \Delta_X + \Delta_Y$$

$$\Delta_{(X \cdot Y)} \approx |Y| \Delta_X + |X| \Delta_Y$$

$$\Delta_{(X/Y)} \approx \left| \frac{1}{Y} \right| \Delta_X + \left| \frac{X}{Y^2} \right| \Delta_Y$$

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1 \dots x_n)|$$

$$|\Delta u| \approx |df(x_1 \dots x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

$$|\delta u| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\delta_{(X \pm Y)} = \left| \frac{X}{X \pm Y} \right| \delta_X + \left| \frac{Y}{X \pm Y} \right| \delta_Y$$

$$\delta_{(X \cdot Y)} = \delta_X + \delta_Y$$

$$\delta_{(X/Y)} = \delta_X + \delta_Y$$

Вернемся к прошлому примеру и посчитаем относительную погрешность.

$$\triangleleft x = \frac{7}{5}$$

$$\delta_{f_1} = 3 \left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right| \cdot |\delta x| = 6.25|\delta x|$$

$$\delta_{f_2} = 6 \left| \frac{1}{x-1} \right| \cdot |\delta x| = 15|\delta x|$$

$$\delta_{f_3} = 6 \left| \frac{1}{3-2x} \right| \cdot |\delta x| = 30|\delta x|$$

$$\delta_{f_4} = \left| \frac{90}{99-70x} \right| \cdot |\delta x| = 70|\delta x|$$

Таким образом, наибольшую погрешность даёт  $f_4$ , наименьшую —  $f_1$ .

*Пример.*

$$y^2 - 140y + 1 = 0$$

$$y = 70 - \sqrt{4899}$$

$$\sqrt{4899} \approx 69.99$$

$$y \approx 70 - 69.99 = 0.01$$

Посчитаем другим методом — избавимся от вычитания похожих чисел.

$$y = \frac{1}{70 + \sqrt{4899}}$$

$$y = \frac{1}{139.99} \approx \frac{1}{140} = 0.00714285 \approx 0.007143$$

Можно заметить, что результат весьма точнее.

*Пример.* Рассмотрим задачу вычисления суммы  $S = \sum_{j=1}^{10^6} \frac{1}{j^2}$ .

Если суммировать по формуле  $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n^2}$ , то из-за того, что сначала суммируются большие числа, а потом малые, погрешность велика:  $\Delta = 10^6 \cdot 2^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-4}$

Если же суммировать с конца, то  $\Delta = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \approx 6 \cdot 10^{-8}$

Рекомендации для увеличения точности вычислений:

1. Если складывать или вычитать последовательность чисел, то лучше начинать с малых членов.
2. Желательно избегать вычитания двух почти равных чисел, по возможности преобразую формулу.
3. Необходимо сводить к минимуму число математических операций. Это также способствует ускорению работы алгоритма.

4. Если ЯП и компьютер позволяют использовать числа разных типов, то числа с большим числом разрядов всегда повышают точность вычислений (*в ущерб памяти*).

Дробные числа нужно сравнивать с помощью  $\varepsilon$ , т.е.  $|a - b| \leq \varepsilon$

## 2 Задачи оптимизации. Вводное.

Здесь и далее целевая функция — функция, которую мы минимизируем.

*Обозначение.* Пусть целевая функция —  $f(x)$ . Это обозначается как  $f(x) \xrightarrow{x \in U} \min$ .

$f(x) \rightarrow \max \Rightarrow -f(x) \rightarrow \min$ . Таким образом, мы без потери общности рассматриваем задачу минимизации.

**Определение.** Если  $\exists x^* \in U \quad f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in U$ , то такой  $x^*$  называется **точкой (глобального) минимума**

*Обозначение.* Множество всех точек минимума обозначается  $U^* = \{x_i^* \mid i = 1 \dots k\}$

Мы рассматриваем класс функций таких, что  $U^* \neq \emptyset$

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **унимодальной** на  $[a, b]$ , если она:

1. Непрерывна на  $[a, b]$
2.  $\exists \alpha, \beta : a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ , такие что:
  - (а) Если  $a < \alpha$ , то на  $[a, \alpha]$   $f(x)$  строго монотонно убывает.
  - (б) Если  $\beta < b$ , то на  $[\beta, b]$   $f(x)$  строго монотонно возрастает.
  - (с)  $\forall x \in [\alpha, \beta] \quad f(x) = f_* = \min_{[a, b]} f(x)$

*Свойства.*

1. Если функция унимодальна на  $[a, b]$ , то она унимодальна и на  $[c, d] \subset [a, b]$
2. Если  $f$  унимодальна на  $[a, b]$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , тогда:
  - (а) Если  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , то  $x^* \in [a, x_2]$
  - (б) Если  $f(x_1) > f(x_2)$ , то  $x^* \in [x_1, b]$

**Определение.**  $f(x)$ , заданная на  $[a, b]$ , называется **выпуклой** на этом отрезке, если

$$\forall x', x'' \in [a, b], \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x' + (1 - \alpha)x'') \leq \alpha f(x') + (1 - \alpha)f(x'')$$

*Свойства.*



Рис. 1.1:  
Вырожденные  $\alpha$  и  $\beta$ ,  
унимодальная  
функция



Рис. 1.2:  
Унимодальная  
функция

1. Если  $f(x)$  выпукло на  $[a, b]$ , то  $\forall [x', x''] \subset [a, b]$ , то её график расположен ниже хорды между  $x'$  и  $x''$
2. Всякая выпуклая функция на отрезке является унимодальной на нём.

**Определение.** Стационарные точки — точки  $x$ , для которых  $f'(x) = 0$ .

Мы будем рассматривать одномерные задачи оптимизации, т.к. многомерные задачи часто сводятся к одномерным.

### 3 Одномерная минимизация функций. Прямые методы.

Прямые методы — методы, не использующие производные целевой функции.

#### 3.1 Метод дихотомии

Этот метод — тернарный поиск.

$$x_1 = \frac{b + a - \delta}{2} \quad x_2 = \frac{b + a + \delta}{2}$$

$$\tau = \frac{b - x_1}{b - a} = \frac{x_2 - a}{b - a} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$x^* \in [a_i, b_i] \quad \forall i$$

Шаг 1: Находим  $x_1$  и  $x_2$ , вычисляем  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$

Шаг 2: Сравниваем  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .

- Если  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , переходим к отрезку  $[a, x_2]$ , т.е.  $b = x_2$
- Иначе переходим к  $[x_1, b]$ , т.е.  $a = x_1$

Шаг 3:  $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$ , где  $n$  — номер итерации.

- Если  $\varepsilon_n > \varepsilon$ , переходим к новой итерации.
- Если  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ , завершаем поиск и переходим к шагу 4.

Шаг 4:  $X^* \approx \overline{X} = \frac{a+b}{2}$

*Примечание.*  $\delta$  выбирается на интервале  $(0, 2\varepsilon)$ . Чем меньше  $\delta$ , тем больше относительное уменьшение длины отрезка на каждой итерации. При чрезмерно малом  $\delta$  сравнение  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$  будет затруднительно, т.к. они близки.

Мы можем оценить число необходимых итераций:

$$n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$$



## Лекция 2

### 17 февраля

#### 3.2 Метод золотого сечения

Рассмотрим отрезок  $[0, 1]$ . Пусть  $x_2 = \tau$ , тогда симметрично расположенная  $x_1 = 1 - \tau$ . Пусть дальше был выбран отрезок  $[0, \tau]$ , тогда пусть  $x'_2 = 1 - \tau$ . Чтобы новые точки делили отрезок в таком же соотношении, необходимо, чтобы  $\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{1-\tau} \Rightarrow \tau^2 = 1 - \tau \Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$ . Таким образом,  $x_1 = 1 - \tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

В общем случае для отрезка  $[a, b]$ :

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a), x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) \quad (1)$$

Вычислим погрешность:

$$\Delta_n = \tau^n(b - a) \quad \varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n (b - a)$$

Для заданного  $\varepsilon$  условия окончания  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ .

Результат метода:

$$x^* = \frac{a_{(n)} + b_{(n)}}{2}$$

Оценка числа шагов для достижения искомой точности:

$$n \geq \ln \left( \frac{\frac{2\varepsilon}{b-a}}{\ln \tau} \right) \approx 2 \cdot 1 \cdot \ln \left( \frac{b-a}{2\varepsilon} \right)$$

Шаг 1: Находим  $x_1$  и  $x_2$  по формуле (1), вычисляем  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .  $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$ ,  $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Шаг 2: – Если  $\varepsilon_n > \varepsilon$ , переходим к шагу 3.

– Если  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ , переходим к шагу 4.

Шаг 3: Сравниваем  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .

– Если  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , то  $b = x_2, x_2 = x_1, x_1 = b - \tau(b - a)$ . Мы запоминаем  $f(x_2)$  для следующего шага, т.к. оно равно  $f(x_1)$  на этом шаге.

– Иначе  $a = x_1, x_1 = x_2, f(x_1) = f(x_2)$ . Мы запоминаем  $f(x_1)$  для следующего шага, т.к. оно равно  $f(x_2)$  на этом шаге.

Шаг 4:  $X^* \approx \bar{X} = \frac{a(n)+b(n)}{2}$

### 3.3 Метод Фибоначчи

Мы знаем, что  $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ , а также при  $n \rightarrow +\infty$   $F_n \approx \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

Рассмотрим нулевую итерацию:

$$x_1 = a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b - a) \quad x_2 = a + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b - a)$$

Рассмотрим  $k$ -тую итерацию:

$$x_1 = a_{(k)} + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

$$x_2 = a_{(k)} + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

Пусть  $k = n$ , тогда:

$$x_1 = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b_0 - a_0) \quad x_2 = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

Условие на погрешность:

$$\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} < \varepsilon$$

Какое брать  $n$ ? Такое, что  $\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{n+2}$

Есть проблема, при большом  $n$   $\frac{F_n}{F_{n+2}}$  есть бесконечная десятичная дробь, вследствие чего образуется погрешность.

Рис. 2.1: Функция  $f(x)$  и её приближение параболой.

### 3.4 Метод парабол

Пусть  $\exists x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ , такие что  $\begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 \\ f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3) \end{cases}$

Тогда приближающая парабола имеет вид  $q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$ .

Мы имеем условия на коэффициенты этой параболы:  $\begin{cases} q(x_1) = f(x_1) = f_1 \\ q(x_2) = f(x_2) = f_2 \\ q(x_3) = f(x_3) = f_3 \end{cases}$

Коэффициенты можно найти следующим образом:

$$a_1 = f_1 \quad a_2 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \quad a_3 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left( \frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right)$$

Тогда результат итерации есть  $\bar{x} = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2} \right)$ , на следующей лекции будет рассказан переход к следующей итерации.

### 3.5 Комбинированный метод Брента

Для собственного изучения.