Теорема 1 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- f суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall E$ — изм. $\mu E < \delta : \left|\int_E f\right| < \varepsilon$

Следствие 1. ???

Доказательство.

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \subset X_{n+1} \subset \dots \quad \mu\left(\bigcap X_n\right) \stackrel{(1)}{=} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$|\int_E f| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{\delta} \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

- (??): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
- (??): Т.к. f почти везде конечна.

□

Примечание. Следующие два свойства не эквивалентны:

1. $f_n \stackrel{\mu}{\Rightarrow} f \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$

Из 1 не следует 2: пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$, $f_n = \frac{1}{nx}$. Тогда $f_n \stackrel{\lambda}{\Rightarrow} 0$, но $\int |f_n - f|$???

Теорема 2 (Лебега).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \stackrel{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g :$
    1. $\forall n \ \ |f_n| \stackrel{(2)}{\leq} g$ почти везде

2. g — суммируемо на X

Тогда: f_n, f — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируемы в силу неравенства (??), f суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \le \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$

   Зафиксируем ε. $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

   $f_n \rightrightarrows f$, т.е. $\mu X_n \to 0$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} = \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[\text{сл. т. об абс. непр.}]{n\to+\infty} 0} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$

2. $\mu X = +\infty$

$\square$

Не дописано