Теорема 1 (достаточное условие экстремума). Выполняется условие теоремы о необходимом условии экстремума, то есть:

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\mathrm{rg}\Phi'(a) = n$

$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$: если $\Phi'(a)h = 0$, то можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$.

Пусть $G(x) = f(x) - \langle \lambda, \Phi(x) \rangle$, где λ берется из необходимого условия экстремума.

Рассмотрим квадратичную форму $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$.

Тогда:

1. Если $Q(h)$ положительно определена, a — точка минимума
2. Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — точка максимума
3. Если $Q(h)$ незнакоопределена, a — не экстремум
4. Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= G(a+h) - G(a) \\ &= dG(a,h) + \frac{1}{2}d^2G(a,h) + o(|h|^2) \\ &= \frac{1}{2}d^2G(a,\tilde{h}) + o(|h|^2) > 0 \end{aligned}$$

Объяснение переходов:

1. $a + h \in M_\Phi$
2. Формула Тейлора
3. $a + \tilde{h}$ лежит на касательной поверхности, $dG(a,h) = 0$, $h \simeq \tilde{h}$

Это нестрогое доказательство, но этого нам достаточно. □

Пример.

- $f = x^2z^2 + y^3$
- $\Phi(x, y, z) = xyz - 6$

- $a = (1, 2, 3)$
- $\lambda = 1$

Найдем экстремум.

1. a — подозрительная точка?

$$\begin{aligned} &G = x^2z^2 + y^3 - 12x - 9y - 4z - xyz + 6 \\ &G'_x = 0 \quad 2xz^2 - 12 - yz = 0 \text{ — подходит} \end{aligned}$$

   В $G'_y = 0, G'_z = 0$ — подходит

2.

$$\begin{aligned} d^2G &= 2z^2dx^2 + 2x^2dz^2 + 6ydy^2 + 2(4xz - y)dxdz + 2(-x)dydz - 2zdxdy \\ &\overset{\text{подст. } a}{=} 18dx^2 + 2dz^2 + 12dy^2 + 20dxdz - 2dydz - 6dxdy \end{aligned}$$

   Найдём знак этого выражения, если (dx, dy, dz) удовлетворяет $d\Phi = 0$

$$yzdx + xzdy + xydz = 0 \xrightarrow{\text{в точке } a} 6dx + 3dy + 2dz = 0 \Rightarrow dz = -3dx - \frac{3}{2}dy$$

$$\begin{aligned} d^2G\Big|_{d\Phi=0} &= 18dx^2 + 2\left(3dx + \frac{3}{2}\right)^2 + 12dy^2 - 10dx(6dx + 3dy) + dy(6dx + 3dy) - 6dxdy \\ &= -24dx^2 + 19.5dy^2 + \ldots dxdy \end{aligned}$$

   Экстремума в a нет, т.к. форма неопределена, т.к. $\begin{cases} dx = 1, dy = 0 \Rightarrow d^2G < 0 \\ dx = 0, dy = 1 \Rightarrow d^2G > 0 \end{cases}$

Такие задачи *(где параметр — функция)* называются **вариационное исчисление**.

Функциональные последовательности и ряды

Теорема 1 (Стокса-Зайдля).

- $f_n, f : X \to \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- $x_0 \in X$
- f_n непрерывна в x_0

- $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$

Тогда f непрерывна в x_0.

Доказательство. $|f(x) - f(x_0)| \le \underline{|f(x) - f_n(x)|} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underline{|f_n(x_0) - f(x_0)|}$ — верно $\forall x, \forall n$

$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (1)

Берем $\forall \varepsilon > 0$ возьмём любой n, для которого выполняется (1). Тогда подчеркнутые слагаемые $\le \frac{\varepsilon}{3}$. Теперь для этого n подбираем $U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \ \ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Примечание. То же верно, если $f_n, f : X \to Y$, где Y — метрическое пространство.

Примечание. То же верно, если X — топологическое пространство, т.е. в нём определены открытые множества.

Следствие 1. Если $f_n \in C(X), f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, тогда $f \in C(X)$

Примечание. В теореме достаточно требовать $f_n \underset{W(x_0)}{\rightrightarrows} f$

В следствии достаточно требовать локальную равномерную сходимость, т.е.

$$\forall x \in X \ \ \exists W(x) \ \ f_n \underset{W(x)}{\rightrightarrows} f$$

Пример. $f_n(x) = x^n, x = (0, 1)$.

$f_n(x) \to 0$ точечно на X

$f_n \not\rightrightarrows 0$ на X

Но есть локальная равномерная сходимость:

$$\sup_{x \in (\alpha, \beta)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (\alpha, \beta)} x^n = \beta^n \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Rightarrow f_n \underset{(\alpha, \beta)}{\rightrightarrows} f$$

Теорема 2.

- X компакт
- $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$, где $f_1, f_2 \in C(X)$

Тогда пространство $C(X)$ — полное метрическое пространство с метрикой ρ.

Доказательство. f_n — фундаментальная в $C(X) \overset{\text{def}}{\iff}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n, m > N \;\; \forall x \in X \;\; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in X$ вещественная последовательность $(f_n(x_0))$ фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) =:$ $f(x_0)$, тогда f — поточечный предел f_n. Проверим, что $f_n \rightrightarrows f$ и $f \in C(X)$.

В (1) перейдем к пределу при $m \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \;\; \forall x \in X \;\; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \xRightarrow{\text{Стокс}} f \in C(X)$$

$\square$

Следствие 2. (x_n) — последовательность в полном метрическом пространстве X, x_n сходится $\Leftrightarrow$ x_n фундаментальная.

$f : \underbrace{X}_{\text{м.п.}} \to \underbrace{Y}_{\substack{\text{м.п.}\\ \text{полное}}}, f(x) \xrightarrow{x\to a} L \overset{\text{критерий}}{\underset{\text{Больцано-Коши}}{\iff}} \forall \varepsilon > 0 \; \exists U(a) \; \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(a) \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) <$ ε

В $C(X)$ $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow$ фундаментальность:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n, m > N \;\; \forall x \;\; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

$$\sup_{x\in X} |f_n - f| < \varepsilon \tag{3}$$

- (3) $\Rightarrow$ (2)
- (2) $\Rightarrow \sup\limits_{x\in X} |f_n - f| \leq \varepsilon$, но по двойной бухгалтерии это $\Leftrightarrow$ (3)

Предельный переход под знаком интеграла

"Теорема" $f_n \to f \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Эта теорема неверная.

Пример. $[a, b] = [0, 1]$

$$f_n(x) = nx^{n-1}(1 - x^n) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x) \equiv 0$$

$$\int_a^b f_n = \int_0^1 nx^{n-1}(1 - x^n)dx \overset{y:=x^n}{=} \int_0^1 (1 - y)dy = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x) = 0$$

Теорема 2.

- $f, f_n \in C[a, b]$
- $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$

Тогда $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Доказательство.

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b |f_n - f| \le \sup_{[a,b]} |f_n - f|(b-a) = \rho(f_n, f)(b-a) \to 0$$

□

Следствие 3 (Правило Лейбница).

- $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$
- f, f'_y — непр. на $[a, b] \times [c, d]$
- $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$

Тогда Φ дифференцируема на $[c, d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} &= \int_a^b \frac{f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx \\ &= \int_a^b f'_y\left(x, y + \frac{\Theta}{n}\right) dx \qquad (4) \\ &= \int_a^b g_n(x, y)dx\end{aligned}$$

(4): по т. Лагранжа.

$g_n(x, y) \xrightarrow[]{n\to+\infty} f'_y(x, y)$ на $x \in [a, b]$ по теореме Кантора о равномерной непрерывности, и мы считаем y фиксированным.

Таким образом, $\Phi'(y) \leftarrow \dfrac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \to \int_a^b f'_y(x, y)dx$ □

Теорема 3 (о предельном переходе под знаком производной).

- $f_n \in C^1\langle a, b\rangle$
- $f_n \to f$ поточечно на $\langle a, b\rangle$

- $f'_n \underset{\langle a,b \rangle}{\rightrightarrows} \varphi$

Тогда $f \in C^1\langle a, b\rangle$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "n\to+\infty"] \arrow[d, "D"'] & f \arrow[d, dashed] \\ f'_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \varphi \end{tikzcd}$$

Доказательство. $\forall x_0, x_1 \in \langle a, b\rangle$:

$$f'_n \overset{[x_0,x_1]}{\rightrightarrows} \varphi \xRightarrow{\text{теорема 2}} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$f(x_1) - f(x_0) \xleftarrow{n\to+\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$f(x_1) - f(x_0) \to \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Тогда $\begin{cases} f \text{ — первообразная } \varphi \\ \varphi \text{ — непр.} \end{cases} \Rightarrow f' = \varphi$ $\square$

Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение.

- X — произвольное множество
- $u_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$

$\sum u_n(x)$ **сходится поточечно** (к сумме $S(x)$) на X, если $S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} u_n(x), S_N(x) \to S(x)$ поточечно на X.

Определение.

- X — произвольное множество
- Y — нормированное пространство
- $u_n : X \to Y$

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ **равномерно** на $E \subset X : S_N \xrightarrow[E]{N \to +\infty} S$

Примечание. $\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\Rightarrow$ $\sum u_n(x)$ поточечно сходится к той же сумме.

Доказательство.

$$\sup_{x \in E} |S_N - S| \xrightarrow{N \to +\infty} 0 \Rightarrow \forall x_0 \in E : |S_N(x_0) - S(x_0)| \leq \sup_{x \in E} |S_N - S| \to 0$$

□

Примечание. Остаток ряда: $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x), S(x) = S_N(x) + R_N(x)$

Ряд сходится на $E \Leftrightarrow R_N \underset{E}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$ — тождественный ноль.

Примечание. Необходимое условие равномерной сходимости: $\sum u_n(x)$ — сходится на $E \Rightarrow u_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Доказательство. $u_n = R_{n-1} - R_n$ □