# 1 Определения

## 1.1 Ступенчатая функция

$f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \ \ f\Big|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

## 1.2 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

Дано выше. (1.1, стр. 1)

## 1.3 ! Измеримая функция

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

$f$ **измерима** на множестве $E$, если $\forall a \in \mathbb{R} \ \ E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

## 1.4 Свойство, выполняющееся почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верно при почти всех из $E$ = почти всюду на $E$ = почти везде на $E$ = п.в. $E$, если:

$\exists e \in E : \mu e = 0 \ \ W(x)$ — истинно при $x \in E \setminus e$

## 1.5 Сходимость почти везде

## 1.6 Сходимость по мере

$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечны.

$f_n$ **сходится к** $f$ **по мере** $\mu$, обозначается $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f : \forall \varepsilon > 0 \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

### 1.7 Теорема Егорова о сходиомсти почти везде и почти равномерной сходиомсти

- $X, \mathfrak{A}, \mu$
- $\mu X < +\infty$
- $f_n, f$ — почти везде конечно, измеримо

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \underset{X \setminus e}{\rightrightarrows} f$$

### 1.8 Интеграл ступенчатой функции

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- $E_k$ — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d_{\mu(x)} := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

### 1.9 Интеграл неотрицательной измеримой функции

- $f \geq 0$
- $f$ измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

## 2 Теоремы

### 2.1 Лемма "о структуре компактного оператора"

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда $\exists$ ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

*Доказательство.* $W := V^* V$ — самосопряженный оператор *(матрица симметрична относительно диагонали)*.

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные *(возможно с повторениями)*
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

*Примечание.* Пока мы в $\mathbb{R}^m$ *(а не в $\mathbb{C}^m$)*, $^*$ есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \overset{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \overset{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- (1): т.к. $g_i$ — собственный вектор для $W$ с собственным значением $c_i$.
- (2): из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^{m} V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \overset{\text{def} \, h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \overset{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \overset{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \overset{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- (3): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- (4): т.к. $g_i$ — собственный вектор для $W$ с собственным значением $c_i$.
- (5): при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i}\sqrt{c_i}} = 1$

*Примечание.* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \overset{\text{def } x}{=} V\left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle g_i\right) \overset{(6)}{=} \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) \overset{\text{def } h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \overset{(7)}{=} \det(V^* V) \overset{\text{def } W}{=} \det W \overset{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

## 2.2 ! Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m \;\; V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

*Доказательство.*

1. Если $\det V = 0 \quad \text{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E \;\; V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если $\det V \neq 0 \quad \mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

   $$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

   $\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

   Мы хотим найти $k$, для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ — единичный куб на векторах $g_i$.

   $V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$.

   $$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

   Таким образом, $k = |\det V|$

□

(6): в силу линейности $V$
(7): в силу мультипликативности det и инвариантности относительно транспонирования.
(8): т.к. det инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \dots c_m$.

## 2.3 Теорема об измеримости пределов и супремумов

$f_n$ — измеримо на $X$. Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.
2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.
3. Если $\forall x\ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

*Доказательство.*

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \overset{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

   (9):

   - $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.
     $$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$
   - $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n(s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. sup и inf измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.
3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

$\square$

## 2.4 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия

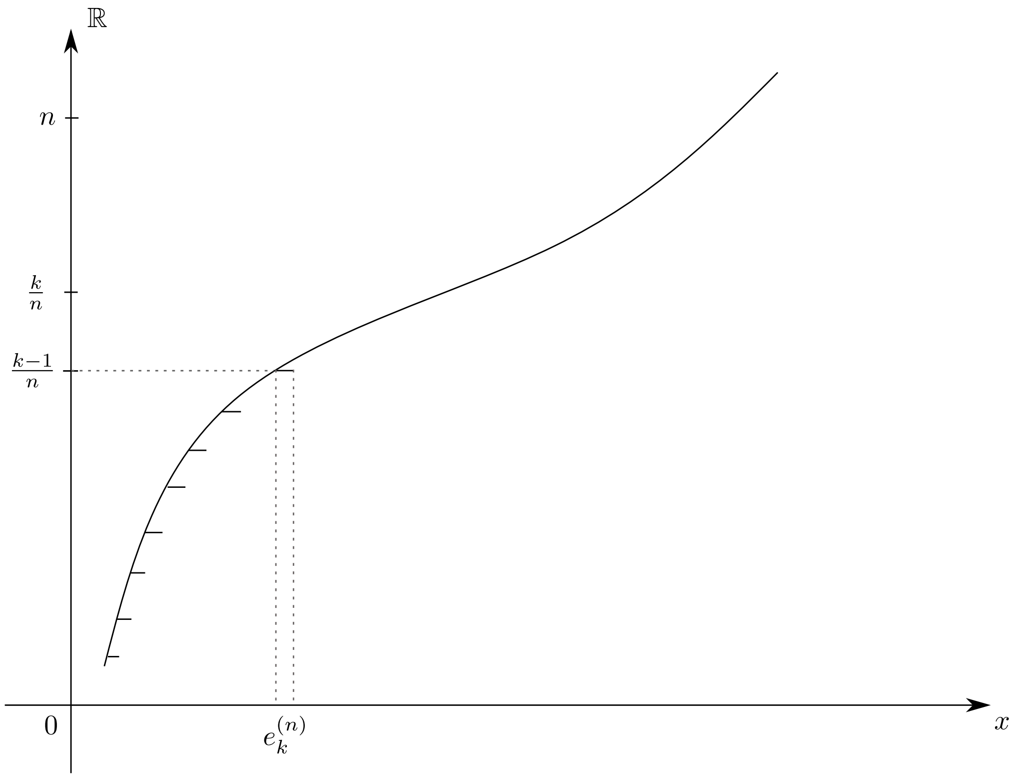
- $f : X \to \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- $f$ измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые:

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2. $\forall x\ \ f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n}\right) \quad k = 1 \dots n^2$$
$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$




$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

Не дописано.

## 2.5 Измеримость функции, непрерывной на множестве полной меры

*Примечание.* $A \subset X$ — **полной меры**, если $\mu(X \setminus A) = 0$.

- $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- $f$ — непрерывно на $E' = E \setminus e$

Тогда $f$ — измеримо.

*Доказательство.* $f$ — измеримо на $E'$, т.к. $E'(f < a)$ открыто в $E'$ по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e$, $\lambda_m$ — полная $\Rightarrow e(f < a)$ — измеримо в $E$.

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, объединение измеримых множеств измеримо. □

## 2.6 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\mu X$ конечно
- $f_n, f$ — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \to f$ п.в.

Тогда $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$

*Доказательство.* Переопределим $f_n, f$ на множестве меры $0$, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к $0$, то есть $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon)$$
$$\bigcap X(f_n \geq \varepsilon)$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху, $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \to 0$

Рассмотрим общий случай: $f_n \to f$, $\varphi(x) := \sup\limits_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда $\varphi_n \to 0, \varphi_n \geq 0$ и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$
$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

□

## 2.7 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

*Доказательство.*

$$\forall k \ \ \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \to 0$$

$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \ \ \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \overset{(10)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$

$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при $x \notin E \;\; f_{n_k} \to f$.

$$x \notin E \;\; \exists N \;\; x \notin E_k \text{ при } k > N \;\; |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть $f_{n_k}(x) \to f(a)$.

Т.к. $\mu E = 0$, искомое выполнено. $\square$

(10): по счётной полуаддитивности меры.