**Теорема 1** (Общее решение уравнения 1-го пордяка). $\lhd p, q \in C(a,b)$

$$y = \left(C + \int q(x)e^{-\int p(x)dx}\right)e^{\int p(x)dx}, \ \ x \in (a,b), C \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.*

$$q(x)e^{-\int p(x)dx}e^{\int p(x)dx} + \underbrace{\left(C + \int q(x)e^{-\int p(x)dx}\right)e^{\int p(x)dx}}_{y}p(x) \equiv p(x)y + q \quad \forall x \in (a,b)$$

Докажем, что других решений нет.

$\lhd \varphi$ — решение на $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$. Пусть это решение проходит через $(x_0, y_0)$. Через эту точку также проходит решение $f$, описываемой теоремой.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = p(x) \in C((a,b) \times \mathbb{R}) \Rightarrow$ по теореме Пикара $y \equiv \varphi$ на $(\alpha, \beta)$. □

**Метод Лагранжа**

1. Записываем решение однородного: $y = Ce^{\int p(x)dx}$
2. Подставим $y = C(x)e^{\int p(x)dx}$ в линейное уравнение первого порядка:
$$C^1 e^{\int p(x)dx} + Ce^{\int p(x)dx}p(x) = pCe^{\int p(x)dx} + q$$
3. Подставим $C(x)$ вместо постоянной $C$.

## 2.5 Уравнение Бернулли и Риккати

**Определение** (уравнение Бернулли). $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \alpha \notin \{0, 1\}$

Замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит это уравнение к линейному:

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}$$
$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x)$$
$$\frac{z'}{1-\alpha} = p(x)z + q(x)$$

**Определение** (уравнение Риккати). $y' = \underbrace{p(x)y^2 + q(x)y + r(x)}_{\text{квадратичное по } y}$

Частный случай уравнения Риккати $y' = y^2 + x^\alpha$ интегрируется в квадратурах только при определенных $\alpha$.

Если $\varphi$ — решение уравнения Риккати, то замена $y = \varphi + z$ сводит искомое к уравнению Бернулли. $\varphi$ необходимо угадывать.

*Доказательство.*

$$(\varphi + z)' = p(\varphi + z)^2 + q(\varphi + z) + r(x)$$
$$\varphi' + z' = p\varphi^2 + q\varphi + 2p\varphi z + qz + r + pz^2$$
$$z' = 2p\varphi z + qz + pz^2$$

□

## 2.6 Уравнение в полных дифференциалах

**Определение**. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ — **уравнение в полных дифференциалах**, если $\exists u(x,y) : du = Pdx + Qdy$

**Теорема 2** (Общее решение УПД). $\lhd P, Q \in C(G)$

1. $y$ — решение на $(a,b)$

   Тогда $\exists C \in \mathbb{R} : u(x,y) = C$ неявно задает $y$.

2. $u(x,y) = C$ определяет $y \in C^1(a,b)$

   Тогда $y$ — решение.

*Доказательство.* 1. $\lhd y$ — решение на $(a,b) \Rightarrow$

$$P(x,y(x)) + Q(x,y(x)), y'(x) \equiv 0$$

Левая часть $= \dfrac{d}{dx}u(x,y(x))$

$$\frac{du(x,y)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow u(x,y(x)) \equiv C$$

2. $\lhd y' : u(x,y(x)) \equiv C$

   Продифференцируем.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}y' \equiv 0$$
$$P + Qy' \equiv 0$$

□

$u(x, y)$ находится следующим образом:

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Найдем необходимое условие для $\exists du$:

$$\begin{aligned} \lhd du &= Pdx + Qdy,\ P, Q \in C^1(G) \\ \Rightarrow P &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

Это условие и достаточно для $\exists du$, если $G$ — односвязная область.

*Пример.* $\underbrace{e^{-y}}_{P} dx \underbrace{-(2y + xe^{-y})}_{Q} dy = 0$

Решение.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y}$$

Частные производные совпали, область односвязна $\Rightarrow$ УПД.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = e^{-y} \Rightarrow U(x,y) = \int e^{-y} dy + C(y) = xe{-}y + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{-y}(-1) + C'(y) = -(2y + xe^{-y})$$

$$C'(y) = -2y$$

$$C = -y^2 + A$$

$$u(x,y) = xe^{-y} - y^2 + A$$

Ответ: $xe^{-y} - y^2 = C$

**Геометрический смысл**

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

$\lhd \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ — интегральная кривая.

$$(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$$
$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' = 0$$
$$P(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + Q(x_0, y_0)\psi'(t_0) = 0$$

Таким образом, $(\varphi', \psi')$ перпендикулярно $(P, Q)$ при $t = t_0$, т.е. мы ищем перпендикуляры к данному векторному полю.

**Определение**. $\mu(x, y)$ — **интегрирующий множитель** для уравнения $Pdx + Qdy = 0$, если $\mu \neq 0$ и $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$

Домножая на $\mu$, можно свести диффур к УПД.

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$
$$y' = p(x)y + q(x)$$
$$dy - (p(x)y + q(x))dx = 0$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial y}(-p(x)y - q(x)) + \mu(-\varphi) = \frac{\partial\mu}{\partial x}$$

Предположим, что $\mu$ зависит только от $x$.

$$\mu(-\varphi) = \mu' \Rightarrow \mu = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$\mu(dy - (p(x)y + q(x))dx) = 0$$
$$e^{-\int p(x)dx}dy - (p(x)y + q(x))e^{-\int p(x)dx}dx = 0$$
$$e^{-\int p(x)dx}dy - p(x)ye^{-\int p(x)dx}dx = q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$$

Дорешать — упражнение