Несобственные интегралы

Определение. $f : [a, b) \to \mathbb{R} \quad -\infty < a < b \leq +\infty$

f **допустима**, если f — кусочно-непрерывна на $[a, A]\ \forall A \in (a, b)$

Определение.

$$\Phi(A) := \int_a^A f$$

$$?\exists \lim_{A \to b-0} \Phi(A)$$

- Если да, то это **несобственный интеграл** $\int\limits_a^{\to b} f dx$.
- Если этот предел конечный, то тот несобственный интеграл **сходится**.
- Если этот предел бесконечный или не существует, то несобственный интеграл **расходится**.

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{A \to \infty} \int_1^A \frac{1}{x^p} dx$$

$$\int_1^A \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{A^{1-p} - 1^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \\ \ln A - \ln 1, & p = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{A \to \infty} \int_1^A \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \\ +\infty, & p = 1 \end{cases}$$

$p > 1$ — интеграл сходится, $p \leq 1$ — интеграл расходится.

Пример.

$$\int_{\to 0}^1 \frac{1}{x^p} dx$$

$$\lim_{A \to \infty} \int_A^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{кон.}, & p < 1 \\ +\infty, & p \geq 1 \end{cases}$$

Можно разбивать интеграл с > 1 причиной несобственности на части, где только одна причина:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_0^{10} + \int_{10}^{+\infty}$$

Если все интегралы в правой части сходятся, то в левой части тоже.

Пример.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{\to 0}^{1} \frac{1}{x} dx$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx = -\infty \quad \int_{\to 0}^{1} \frac{1}{x} dx = +\infty$$

Итого $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$ расходится. Хочется сократить бесконечности, особенно если посмотреть на график $\frac{1}{x}$ — он симметричен. Кажется, что $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = 0$. Однако мы все равно считаем этот интеграл расходящимся. Это можно обосновать так: если нагреть одну сторону стула до +200 градусов, а другую охладить до -170, то вы не захотите на нем сидеть, хотя средняя температура адекватная.

Свойства

Критерий Больцано-Коши

$$\lim_{A \to b-0} \int_{a}^{A} \text{ кон.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \Delta \in (a, b) \ \ \forall A, B \in (\Delta, b) \quad \left| \int_{A}^{B} f \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Тривиально из определения предела. □

Следствие 0.1. Если $\exists A_n, B_n \to b - 0$ $\int\limits_{A_n}^{B_n} f \xrightarrow[]{n \to +\infty}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!/ \quad 0$, то $\int\limits_{a}^{\to b} f$ расходится.

Пример.

$$\int_{1}^{+\infty} \sin \sqrt{x} dx$$

Это синусоида с увеличивающимся периодом.

Чтобы доказать, что интеграл расходится, возьмём A_n, B_n такие что $\int\limits_{A_n}^{B_n} \sin \sqrt{x} dx \xrightarrow[]{n \to +\infty}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!/ \quad 0$.

$$A_n := (2\pi n + \frac{\pi}{6})^2 \quad B_n := \left(2\pi(n+1) - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$\int_{A_n}^{B_n} \sin \sqrt{x} dx \geq \frac{1}{2}(B_n - A_n) \to \infty$$

Аддитивность по промежутку

f — допустима. $[a, b) \quad c \in (a, b)$

Тогда $\int_{a}^{\to b} f$ и $\int_{c}^{\to b} f$ — сходятся/расходятся одновременно и, если сходятся, $\int_{a}^{\to b} f = \int_{a}^{c} f + \int_{c}^{\to b} f$

Берем $A > c \int_a^A = \int_a^c + \int_c^A$

Следствие 0.2. f — допустима. $[a, +\infty)$, $\int_a^{+\infty} f$ — сходится. Тогда

$$\int_A^{+\infty} f \xrightarrow{A \to +\infty} 0$$

Это называется “хвост”.

Линейность

f, g — допустима $\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ — сход.

$\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда $\lambda f, f \pm g$ — допустима b $\int_a^{\to b} \lambda f, \int_a^{\to b} f \pm g$ — сходятся.

$$\int_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int_a^{\to b} f \qquad \int_a^{\to b} f \pm g = \int_a^{\to b} f \pm \int_a^{\to b} g$$

Доказательство. Тривиально. □

Интегрирование неравенств

f, g — доп., $\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ — существуют в $\overline{\mathbb{R}}$

$f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^{\to b} f \leq \int_a^{\to b} g$$

Очевидно: $\int_a^A f \leq \int_a^A g, A \to b - 0$

Интеграл произведения

f, g — дифф. $[a, b)$; f', g' — допустимы. Это эквивалентно $f, g \in C^1[a, b)$.

Тогда*

$$\int_a^{\to b} f g' = f g \Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f' g$$

* значит, что если два из трех пределов существуют, то существует третий и выполняется равенство.

Интеграл композиции

$\varphi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B\rangle, \varphi \in C^1$

$f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, f$ — непр., $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда*

$$\int_\alpha^{\to\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\to\varphi(\beta-0)} f(x)dx$$

Примечание. f — кусочно непрерывна на $[a, b]$. f можно также рассматривать на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^{\to b} f = \int_a^b f$$

Упраздняем "$\to$".

Признаки сходимости несобственных интегралов

f — допустима на $[a, b), f \geq 0, \Phi(A) = \int_a^A f dx$

$\int_a^b f$ — сходится $\Leftrightarrow$ Φ ограничена.

Доказательство. $\int_a^b f$ — сх. $\Leftrightarrow \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A)$ кон. $\Leftrightarrow \Phi$ — огр. $\square$

Лемма 1. Признак сравнения:

$f, g \geq 0$, допустимы на $[a, b)$

1. $f \leq g$ на $[a, b)$. Тогда:
   (a) $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится
   (b) $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится
2. $\exists \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l < +\infty$:
   (a) $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится
   (b) $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится

Доказательство. 1. $\Phi(A) := \int_a^A f, \Psi(A) = \int_a^A g$

$0 \leq \Phi(A) \leq \Psi(A)$

(a) $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \Psi$ огр. $\Rightarrow \Phi$ огр. $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится

(b) $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \Phi$ неогр. $\Rightarrow \Psi$ неогр. $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится

2. $l < +\infty \overset{def}{\Longrightarrow} \exists a_1 : \forall x > a_1 \quad 0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l+1 \Rightarrow f(x) \leq g(x)(l+1)$, дальше тривиально *(предположительно по пункту 1.)*

$\square$

Примечание. $l > 0$:

$$\exists a_2 : \forall x > a_2 \quad \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $\int_a^b f$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — сходится
2. $\int_a^b g$ — расходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — расходится

Следствие 0.3. Если $+\infty > l > 0$, то:

1. $\int_a^b f$ — сходится $\Leftrightarrow \int_a^b g$ — сходится
2. $\int_a^b f$ — расходится $\Leftrightarrow \int_a^b g$ — расходится

Пример.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx \text{ сходится?}$$

С трюком:

$$\frac{\cos^2 x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \arctan \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Более цинично:

$$\frac{\cos^2 x}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \text{ на } [2020, +\infty)$$

$$\int_{2020}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \text{ сходится } \Rightarrow \int_{2020}^{+\infty} f \text{ сходится}$$

Пример. Этот пример будет на экзамене.

При каких α и β сходится:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

Мы знаем, что $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

При $\alpha > 1, \beta > 0$

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^\alpha}$$

Таким же образом можно еще что-то выяснить, но мы так делать не будем. Вместо этого воспользуемся методом “**удавливание логарифма**”

1. $\alpha > 1 \quad \alpha = 1 + 2a, a > 0$

$$0 \leq \frac{1}{x^{1+2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a(\ln x)^\beta}$$

$$\beta \geq 0 \quad x^a(\ln x)^\beta \to +\infty$$

$$b := -\beta \quad \beta < 0 \quad x^a(\ln x)^\beta = \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left(\frac{x^{\frac{a}{b}}}{\ln x}\right)^b \xrightarrow[x\to\infty]{} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{\text{лопиталь}} \frac{\frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-1}}{\frac{1}{x}} \to +\infty$$

$$x^a(\ln x)^\beta \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty \Rightarrow \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a(\ln x)^\beta} < \frac{1}{x^{1+a}} - \text{сходится}$$

2. $\alpha < 1 \quad \alpha = 1 - 2a, a > 0$

$$\frac{1}{x^{1-2a}(\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{x^a}{(\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$$

3. $\alpha = 1$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \overset{y=\ln x}{=} \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$$

Сходится при $\beta > 1$, расходится при $\beta \leq 1$

Гамма-функция Эйлера

Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$$

Область определения

1. $\int_1^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$ — сходится при всех $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = e$$

$$0 \leq x^{t-1}e^{-x} \leq x^{t-1}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$x^{t-1}e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow{x\to+\infty} 0 \Rightarrow \text{ при больших } x \;\; x^{t-1}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

2. $\int_{\to 0}^1 x^{t-1}e^{-x}dx$

$$x^{t-1}e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{t-1} \quad t > 0 \text{ сходится, } t \leq 0 \text{ расходится}$$

Выпуклость

Подынтегральное выражение как функция от t является выпуклой функцией (при $x \geq 0$)

$$t \mapsto x^{t-1}e^{-x} = f_x(t)$$
$$f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha f_x(t_1) + (1-\alpha)f_x(t_2)$$
$$\int_0^{+\infty} f_x dx \leq \alpha \int_0^{+\infty} f_x(t_1)dx + (1-\alpha)\int_0^{\infty} f_x(t_2)dx$$

Определение выпуклости:

$$x^{(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)-1}e^{-x} \leq \alpha x^{t_1-1}e^{-x} + (1-\alpha)x^{t_2-1}e^{-x}$$

Зафиксируем α, t_1, t_2. Проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha\Gamma(t_1) + (1-\alpha)\Gamma(t_2)$$

Γ — выпуклая $\Rightarrow$ Γ — непрерывная

Третье свойство

$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}dx = -x^t e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx = 0 + t\Gamma(t)$$

Следствие 0.4. $\Gamma(n+1) = n!$

Доказательство.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)\cdots 1\Gamma(1) = n!$$

□

Четвертое свойство

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t\to+0}{\sim} \frac{1}{t}$$

Пятое свойство

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \overset{x=y^2}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = 2\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ — интеграл Эйлера-Пуассона}$$

Доказательство.

$$1 - x^2 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Оба неравенства следуют из неравенства $e^t \ge 1 + t \;\; \forall t$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$

$$(1-x^2)^n \le e^{-nx^2} \le \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \le \int_0^1 e^{-nx^2} \le \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Казалось бы, переход от интеграла $\int_0^1$ к $\int_0^{+\infty}$ очень грубый, но это не так.

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \overset{y=\sqrt{n}x}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} I$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \overset{x=\cos y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \overset{x=\operatorname{tg} y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^{2n-2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} y dy \le I \le \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-2} dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \text{ чет.} \\ 1, & n \text{ нечет.} \end{cases}$$

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le I \le \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}\sqrt{n}$$

По формуле Валлиса $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \to \sqrt{\pi}$:

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)\frac{n}{2n+1} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}\sqrt{n} = \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}\frac{1}{\sqrt{n-1}}} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\square$