

Потенциальные векторные поля

Определение. Интеграл векторного поля V не зависит от пути в области O :

$\forall A, B \in O \quad \forall \gamma_1, \gamma_2$ — кусочно-гладкие из A в B :

$$\int_{\gamma_1} \sum v_i dx_i = \int_{\gamma_2} \sum v_i dx_i$$

Теорема 1 (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов).
 V — векторное поле в области O . Тогда эквивалентны следующие:

1. V — потенциально
2. $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i$ не зависит от пути в O
3. $\forall \gamma$ — кусочно-гладкий, замкнутый в O $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i = 0$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

$2 \Rightarrow 3$ γ — петля: $[a, b] \rightarrow O$. $\gamma(a) = \gamma(b) = A$

Рассмотрим постоянный путь $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O, t \mapsto A$. По свойству 2: $\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}} \langle V, \gamma' \rangle dt = 0$

$3 \Rightarrow 2$ γ_1, γ_2 — пути с общим началом и концом. Тогда $\gamma := \gamma_2^{-1} \gamma_1$ — петля. γ — кусочно гладкий $\Rightarrow 0 = \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2^{-1}} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$



$2 \Rightarrow 1$ Фиксируем $A \in O$.

$\forall x \in O$ выберем кусочно-гладкий путь γ_x из A в x . Проверим, что $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i$ — потенциал.

Достаточно проверить, что $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$ в O .

Фиксируем $x \in O$. $\gamma_0(t) = x + t h e_1, t \in [0, 1], \gamma'_0(t) = (h, 0 \dots 0) = h e_1$



$$\begin{aligned}
 f(x + h e_1) - f(x) &= \int_{\gamma_{x + h e_1}} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0} \\
 &= \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) h dt \\
 &= h V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n)
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{f(x + h e_1) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n) \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x)$$

□

Локально-потенциальные векторные поля

Лемма 1. V — гладкое, потенциальное в O

Тогда

$$\forall x \in O \quad \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x) \quad (1)$$

Доказательство. Непрерывные производные не изменяются при порядке дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x)$$

□

Упражнение. Даны 4 векторных поля в \mathbb{R}^2 : (x, y) , $(x, -y)$, (y, x) , $(-y, x)$. Вычеркните лишнее.

Ответ: $(-y, x)$, т.к. $\frac{\partial V_1}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial V_2}{\partial x} = 1$

Теорема 2 (лемма Пуанкаре).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — **выпуклая область**
- $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ — **векторное поле**
- V удовлетворяет 1, в т.ч. V — гладкое.

Тогда V — потенциальное.

Доказательство. Фиксируем $A \in O$

$$\forall x \in O \quad \gamma_x(t) := A + t(x - A), t \in [0, 1]$$

$$\gamma'_x(t) = x - A$$

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))(x_k - A_k) dt$$

Проверим, что f — потенциал.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \text{правило Лейбница} \\ &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\dots) t(x_k - A_k) dt \\ &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\dots) t(x_k - A_k) dt \\ &= \int_0^1 (tV_j(A + t(x - A)))'_t dt \\ &= tV_j(A + t(x - A)) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= V_j(x) \end{aligned} \tag{2}$$

(2): по (1).

□

Примечание. Это же доказательство проходит для “звёздных” областей — областей O , таких что $\exists A \in O$: любая точка O видна из A .

Определение. V — локально потенциальное векторное поле в O , если $\forall x \in O \exists U(x) : V$ — потенциально в $U(x)$

Следствие 2.1 (лемма Пуанкаре).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — любая область
- $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- V удовлетворяет 1.

Тогда V — локально потенциально.

Равномерная сходимость функциональных рядов (продолжение)

Теорема 3' (о дифференцировании ряда по параметру).

- $u_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$ (поточечная сходимость)
- $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$ (равномерная сходимость)

Тогда:

1. $S(x) \in C^1\langle a, b \rangle$
2. $S' = \varphi$ на $\langle a, b \rangle$

То есть $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$

Доказательство. Следует из теоремы 3.

$S_n \rightarrow S$ поточечно, $S'_n \rightrightarrows \varphi$

□

Пример. Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, x > 0$$

γ — постоянная Эйлера.

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)}_{u_k(x)}$$

Зафиксируем x_0 .

$$u'_k(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{k}} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$$

Пусть $M > x_0$. Тогда

$$\left| \frac{-x}{(x+k)k} \right| \leq \frac{M}{k^2}$$

при $x \in (0, M)$.

Тогда $\sum \frac{-x}{(x+k)k}$ равномерно сходится на $(0, M)$, значит $\ln \Gamma(x) \in C^1(0, M)$, $\frac{-x}{(x+k)k} -$ непр. $\Rightarrow \sum \frac{-x}{(x+k)k} -$ непр. $\Rightarrow \ln \Gamma(x) \in C^1(0, +\infty) \Rightarrow \Gamma(x) \in C^1(0, +\infty)$

Примечание. Фактически, теорема 3' устанавливает, что $\sum u'_n(x) -$ непр.

Примечание.

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k}$$

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x) \left(\frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k} \right)$$

Изучив равномерную сходимость $\left(\frac{x}{(x+k)k} \right)'$, получаем, что $\Gamma \in C^2(0, +\infty)$ и т.д. $\Rightarrow \Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$

Теорема 4' (о почленном предельном переходе в суммах).

- $u_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- x_0 — предельная точка E
- $\forall n \quad \exists$ конечный $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E .

Тогда:

1. $\sum a_n -$ сходится
2. $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$$

Доказательство.

1. $\sum a_n$ — сходится

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x), S_n^a = \sum_{k=1}^n a_k$$

Проверим, что S_n^a — фундаментальная:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E |S_{n+p} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Это критерий Больцано-Коши для равномерной сходимости)

Зададим ε по N , выберем $n, n+p$ и возьмём x близко к x_0 : $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|S_n^a - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выполнено 1, т.е. $|S_{n+p} - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

2. $\sum a_n \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x)$

Сведём к теореме Стокса-Зайдля.

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n, & x = x_0 \end{cases} \text{ — задано на } E \cup \{x_0\}, \text{ непрерывно в } x_0.$$

$\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится на $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна в x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n$$

$\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится, т.к.:

$$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right|}_{\rightarrow 0}$$

□

Примечание. Теорема 4' верна для случая $u_n : E \subset X \rightarrow Y$, где Y — полное нормированное пространство.

Теорема 4 (о перестановке двух предельных переходов).

- $f_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- x_0 — предельная точка E
- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} S(x)$
- $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n$

Тогда:

1. $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$

То есть пунктирные преобразования верны:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} & S(x) \\ x \rightarrow x_0 \downarrow & & \downarrow x \rightarrow x_0 \\ A_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} & A \end{array}$$

Доказательство. $u_1 = f_1, \dots, u_k = f_k - f_{k-1} \dots$

$$a_1 = A_1, \dots, a_k = A_k - A_{k-1}$$

Тогда $f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

В эти обозначениях $\sum u_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$.

$$u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_k$$

Тогда по т. 4' $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ имеет конечный предел при $n \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum a_k = A$$

□

Примечание. Здесь можно было бы вместо n рассматривать “непрерывный параметр” t .

$$f_n(x) \leftrightarrow f(x, t)$$

$$n \rightarrow +\infty \leftrightarrow t \rightarrow t_0$$

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} S \leftrightarrow f(x, t) \underset{E}{\overset{t \rightarrow t_0}{\rightrightarrows}} S(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t : 0 < |t - t_0| < \delta \quad \forall x \in E \quad |f(x, t) - S(x)| < \varepsilon$$