Интеграл *(продолжение)*

Определение. Если оказалось, что $\int_X f^+, \int_X f^-$ оба конечны, то f называется **суммируемой**.

Примечание.

1. Если f измеримо и $\geq$, то интеграл определения 3 = интегралу определения 2.

Определение (4).

- $E \subset X$ — измеримо
- f измеримо на X

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E$$

Примечание.

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \Rightarrow \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$
- $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g : 0 \leq g \leq f$ на E, g — ступ.$\}$ и мы считаем, что $g \equiv 0$ вне E.
- $\int_E f$ не зависит от значений f вне множества E.

Свойства. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \subset X$ — измеримо, g, f — измеримо.

1. Монотонность $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

   Доказательство.

   (a) При $f, g \geq 0$ — очевидно из определения.

   (b) При произвольных $f, g \quad f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$ *(очевидно из определения).* Из предыдущего случая $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$.

   □

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$
3. $\mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$

   Доказательство.

   (a) f — ступ. Тривиально.

   (b) f — измеримо, $f \geq 0$. $\sup 0 = 0$, поэтому искомое выполнено.

   (c) $\int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$

   □

   Примечание. f — измерима. Тогда f суммируема $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

Доказательство.

$\Leftarrow$ следует из $f^+, f^- \le |f|$

$\Rightarrow$ будет доказано позже на этой лекции.

$\square$

4. $\int_E(-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c\int_E f$

   Доказательство.

   (a) $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$, тогда искомое очевидно.

   (b) Можно считать $c > 0$ без потери общности, тогда для $f \ge 0$ тривиально.

   $\square$

5. $\exists \int_E f d\mu$. Тогда $|\int_E f d\mu| \le \int_E |f| d\mu$

   Доказательство.

$$-|f| \le f \le |f|$$

$$-\int |f| \le \int f \le \int |f|$$

$$\left|\int f\right| \le \int |f|$$

   $\square$

6. $\mu E < +\infty, a \le f \le b$. Тогда

$$a\mu E \le \int_E f \le b\mu E$$

   Следствие 1. f — измеримо на E, f — ограничено на E, $\mu E < +\infty$. Тогда f суммируемо на E

7. f суммируема на E. Тогда f почти везде конечна.

   Доказательство.

   (a) $f \ge 0$ и $f = +\infty$ на $A \subset E$. Тогда $\int_E f \ge n\mu A \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

   (b) В произвольном случае аналогично со срезками.

   $\square$

Лемма 1.

- $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ — измеримо
- g — ступенчато

- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\overset{(1)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu\end{aligned}$$

1: переставлять можно, т.к. члены суммы ≥ 0. □

Теорема 1.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на A
- $f \geq 0$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

Доказательство. Докажем, что части равенства $\leq$ и $\geq$, тогда равенство выполнено.

$\leq$ $\lhd g : 0 \leq g \leq f$

$$\int_A g \overset{(2)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$\geq$

1. $A = A_1 \sqcup A_2$

   $\lhd 0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f\chi_{A_2}$. Пусть E_k — совместное разбиение, у g_1 коэффициенты α_k, у $g_2 : \beta_k$.

$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f\chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f$$
$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \leq \int_A f$$
$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $A = \bigsqcup A_i$ тривиально по индукции.
3. $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int A_i f$$

2: по лемме об интеграле. □

Следствие 2. $f \geq 0$ — измеримо. Пусть $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\nu E := \int_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

Следствие 3 (Счётная аддитивность интеграла). f суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. Очевидно, если рассмотреть срезки. □

Следствие 4. $A \subset B, f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

Предельный переход под знаком интеграла

Пусть $f_n \to f$. Можно ли утверждать, что $\int_E f_n \to \int_E f$?

Пример (контр).

$$f_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \quad f \equiv 0 \quad f_n \to f \quad (\text{даже } f_n \rightrightarrows f)$$
$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}\lambda[0,n] = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 2 (Леви).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n измеримо
- $\forall n \;\; 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде.

- $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Примечание. f задано везде, кроме множества e меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e. Тогда f измеримо на X.

Доказательство.

$\leq$ очевидно, т.к. $\int f_n \leq f$ почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X\setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_{0} = \int_{X\setminus e} f_n \leq \int_{X\setminus e} f \leq \int_X f$$

$\geq$ достаточно проверить, что $\forall$ ступенчатой $g : 0 \leq g < f$ выполняется следующее $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$

Сильный трюк: то достаточно проверить, что $\forall c \in (0,1) \quad \lim \int_X f_n \geq c \int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \overset{(3)}{=} c \int_X g$

3: по непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$ $\square$

Теорема 3.

- $f, g \geq 0$
- f, g измеримо на E

Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые, т.е. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots \quad \lim f_n = f$

   $g \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \ldots \quad \lim g_n = g$

$$f_n + g_n \to f + g$$
$$\int_E f_n + g_n \xrightarrow{\text{т. Леви}} \int_E f + g$$
$$\int_E f_n + \int_E g_n \to \int_E f + \int_e g$$

□

Следствие 5. f, g суммируемы на E. Тогда $f + g$ суммируемо и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$. Таким образом, доказано 3.

суммируемости. $|f + g| \leq |f| + |g|$. Пусть $h = f + g$. Тогда

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$
$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$
$$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^-$$
$$\int_E h^+ - \int_E f^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-$$

□

Определение. $\mathcal{L}(X)$ — множество суммируемых функций на X

Следствие 6 (следствия). $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ это линейный функционал на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1 \ldots f_n \in \mathcal{L}(X) \ \ \forall \alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$

???

Теорема 4 (об интегрировании положительных рядов).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$ почти везде

- u_n измеримо

Тогда
$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k \quad 0 \le S_n \le S_{n+1} \le \dots$$

Пусть $S_n \to S$. Тогда $\int_E S_n \to \int_E S$

□

Следствие 7. u_n измеримо и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда ряд $\sum u_n(x)$ абсолютно сходится при почти всех x.

Доказательство.
$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$
$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произвольная последовательность, $\sum a_n$ абсолютно сходится.

Тогда $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ абсолютно сходится при почти всех x.

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде.

$$\begin{aligned}\int_{[-N,N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &= \int_{-N}^{N} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} dx \\ &= |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &\le |a_n| \int_{-N}^{N} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ & 4\sqrt{N}|a_n|\end{aligned}$$

□