

Методы оптимизации

Михайлов Максим

4 марта 2021 г.

Оглавление

| | | |
|-----------------|---|-----------|
| Лекция 1 | 10 февраля | 2 |
| 1 | Теория погрешности | 2 |
| 2 | Задачи оптимизации. Вводное. | 6 |
| 3 | Одномерная минимизация функций. Прямые методы. | 7 |
| 3.1 | Метод дихотомии | 7 |
| Лекция 2 | 17 февраля | 9 |
| 3.2 | Метод золотого сечения | 9 |
| 3.3 | Метод Фибоначчи | 10 |
| 3.4 | Метод парабол | 11 |
| 3.5 | Комбинированный метод Брента | 12 |
| Лекция 3 | 24 февраля | 13 |
| 3.6 | Метод равномерного перебора | 13 |
| 4 | Методы оптимизации, использующие производную | 13 |
| 4.1 | Методы средней точки | 13 |
| 4.2 | Метод хорд (<i>метод секущей</i>) | 14 |
| 4.3 | Метод Ньютона (<i>метод касательной</i>) | 15 |
| Лекция 4 | 3 марта | 16 |
| 4.4 | Модификации метода Ньютона | 18 |
| 5 | Метод минимизации многомодальных функций (<i>метод ломаных</i>) | 18 |

Лекция 1

10 февраля

Этот курс — о минимизации (*максимизации*) функционалов. Кроме конкретных методов оптимизации, планируется рассмотреть форматы хранения матриц, о методах работы с ними и рассмотреть 1-2 (*может быть 3*) СЛАУ с использованием различных форматов.

Т.к. значения, получаемые компьютерами — не точные, нам требуется теория погрешности.

1 Теория погрешности

Все погрешности разделяются на два класса:

1. Неустраняемая — обусловлена неточностью исходных данных. Например, неточное знание физических констант или других параметров задачи. Тем не менее, необходимо знать эту погрешность, чтобы ставить рамки погрешности для решения.
2. Устранимая — погрешность процесса решения задачи. Эту погрешность можно уменьшить выбором метода решения задачи.

(a) Погрешность модели

(b) Остаточная погрешность (*погрешность аппроксимации*)

Например, аппроксимация ряда первыми n его членами или аппроксимация по теореме Вейерштрасса квадратичной функцией.

(c) Погрешность округления

(d) Накапливаемая погрешность

2c и **2d** часто объединяют в вычислительную погрешность.

Определение. Пусть X^* — точное решение, а X — найденное (*приближенное*) решение. Тогда $X^* - X$ называется **погрешностью**, а её модуль $\Delta X = |X^* - X|$ — **абсолютная погрешность**.

Разумеется, ΔX представляет сугубо теоретический интерес, т.к. X^* неизвестна и ΔX нельзя вычислить.

Определение. В качестве требования к решению часто предоставляется **предельная абсолютная погрешность** $\Delta_X \geq |X^* - X|$.

Определение. Также существует **относительная погрешность** $\delta X = \left| \frac{X^* - X}{|X|} \right|$

Относительная погрешность позволяет выражать погрешность относительно значений самой величины. Например, при измерении длины парты погрешность 1 см не очень хорошо, а при измерении расстояния между городами — приемлемо.

Определение. **Предельная относительная погрешность** $\delta_X \geq \left| \frac{X^* - X}{|X|} \right|$

Определение. **Значащие цифры** некоторого числа — все цифры в его изображении, отличные от нуля, а также нули, если они содержатся между значащими цифрами или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряда точности.

Определение. Если значащая цифра приближенного значения a , находящаяся в разряде, в котором выполняется условие $\Delta \leq 0.5 \cdot 10^k$, т.е. абсолютное значение погрешности не превосходит половину единицы этого разряда (k — номер этого разряда), то такая цифра называется **верной в узком смысле**.

Цифра называется **верной в широком смысле**, если в определении выше используется 1 вместо 0.5.

Пример. $a = 3.635$, $\Delta a = 0.003$

- $k = 0 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^0 = \frac{1}{2} \geq \Delta a$
- $k = -1 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05 \geq \Delta a$
- $k = -2 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005 \geq \Delta a$
- $k = -3 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0.0005 < \Delta a$

Таким образом, цифра 5 является сомнительной, остальные — верные.

Пример. Рассмотрим следующие способы записи одного и того же выражения:

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)^3 = (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2}$$

Посчитаем все выражения с различными приближениями $\sqrt{2}$:

- $\frac{7}{5} = 1.4$
- $\frac{17}{12} = 1.41666$
- $\frac{707}{500} = 1.414$
- $\sqrt{2} = 1.4142135624$

| $\sqrt{2}$ | $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$ | $(\sqrt{2}-1)^6$ | $(3-2\sqrt{2})^3$ | $99-70\sqrt{2}$ |
|-------------------|--|--|--|--------------------------|
| $\frac{7}{5}$ | $\frac{1}{216} \approx 0.0046$ | $\frac{64}{15625} \approx 0.0051$ | $\frac{1}{125} = 0.008$ | 1 |
| $\frac{17}{12}$ | $\frac{125}{24389} \approx 0.00513$ | $\frac{15625}{2985354} \approx 0.0052$ | $\frac{1}{216} \approx 0.0046$ | $-\frac{1}{6} = -0.6(6)$ |
| $\frac{707}{500}$ | $\frac{8869743}{1758416743} \approx 0.005044$ | $\frac{78672340886049}{15625 \cdot 10^{12}} \approx 0.00504$ | $\frac{636056}{125000000} \approx 0.00509$ | 0.02 |

$$\Delta_{(X \pm Y)} = \Delta_X + \Delta_Y$$

$$\Delta_{(X \cdot Y)} \approx |Y| \Delta_X + |X| \Delta_Y$$

$$\Delta_{(X/Y)} \approx \left| \frac{1}{Y} \right| \Delta_X + \left| \frac{X}{Y^2} \right| \Delta_Y$$

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1 \dots x_n)|$$

$$|\Delta u| \approx |df(x_1 \dots x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

$$|\delta u| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\delta_{(X \pm Y)} = \left| \frac{X}{X \pm Y} \right| \delta_X + \left| \frac{Y}{X \pm Y} \right| \delta_Y$$

$$\delta_{(X \cdot Y)} = \delta_X + \delta_Y$$

$$\delta_{(X/Y)} = \delta_X + \delta_Y$$

Вернемся к прошлому примеру и посчитаем относительную погрешность.

$$\triangleleft x = \frac{7}{5}$$

$$\delta_{f_1} = 3 \left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right| \cdot |\delta x| = 6.25|\delta x|$$

$$\delta_{f_2} = 6 \left| \frac{1}{x-1} \right| \cdot |\delta x| = 15|\delta x|$$

$$\delta_{f_3} = 6 \left| \frac{1}{3-2x} \right| \cdot |\delta x| = 30|\delta x|$$

$$\delta_{f_4} = \left| \frac{90}{99-70x} \right| \cdot |\delta x| = 70|\delta x|$$

Таким образом, наибольшую погрешность даёт f_4 , наименьшую — f_1 .

Пример.

$$y^2 - 140y + 1 = 0$$

$$y = 70 - \sqrt{4899}$$

$$\sqrt{4899} \approx 69.99$$

$$y \approx 70 - 69.99 = 0.01$$

Посчитаем другим методом — избавимся от вычитания похожих чисел.

$$y = \frac{1}{70 + \sqrt{4899}}$$

$$y = \frac{1}{139.99} \approx \frac{1}{140} = 0.00714285 \approx 0.007143$$

Можно заметить, что результат весьма точнее.

Пример. Рассмотрим задачу вычисления суммы $S = \sum_{j=1}^{10^6} \frac{1}{j^2}$.

Если суммировать по формуле $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n^2}$, то из-за того, что сначала суммируются большие числа, а потом малые, погрешность велика: $\Delta = 10^6 \cdot 2^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-4}$

Если же суммировать с конца, то $\Delta = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \approx 6 \cdot 10^{-8}$

Рекомендации для увеличения точности вычислений:

1. Если складывать или вычитать последовательность чисел, то лучше начинать с малых членов.
2. Желательно избегать вычитания двух почти равных чисел, по возможности преобразую формулу.
3. Необходимо сводить к минимуму число математических операций. Это также способствует ускорению работы алгоритма.

4. Если ЯП и компьютер позволяют использовать числа разных типов, то числа с большим числом разрядов всегда повышают точность вычислений (*в ущерб памяти*).

Дробные числа нужно сравнивать с помощью ε , т.е. $|a - b| \leq \varepsilon$

2 Задачи оптимизации. Вводное.

Здесь и далее целевая функция — функция, которую мы минимизируем.

Обозначение. Пусть целевая функция — $f(x)$. Это обозначается как $f(x) \xrightarrow{x \in U} \min$.

$f(x) \rightarrow \max \Rightarrow -f(x) \rightarrow \min$. Таким образом, мы без потери общности рассматриваем задачу минимизации.

Определение. Если $\exists x^* \in U \quad f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in U$, то такой x^* называется **точкой (глобального) минимума**

Обозначение. Множество всех точек минимума обозначается $U^* = \{x_i^* \mid i = 1 \dots k\}$

Мы рассматриваем класс функций таких, что $U^* \neq \emptyset$

Определение. Функция $f(x)$ называется **унимодальной** на $[a, b]$, если она:

1. Непрерывна на $[a, b]$
2. $\exists \alpha, \beta : a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, такие что:
 - (а) Если $a < \alpha$, то на $[a, \alpha]$ $f(x)$ строго монотонно убывает.
 - (б) Если $\beta < b$, то на $[\beta, b]$ $f(x)$ строго монотонно возрастает.
 - (с) $\forall x \in [\alpha, \beta] \quad f(x) = f_* = \min_{[a, b]} f(x)$

Свойства.

1. Если функция унимодальна на $[a, b]$, то она унимодальна и на $[c, d] \subset [a, b]$
2. Если f унимодальна на $[a, b]$, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, тогда:
 - (а) Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x^* \in [a, x_2]$
 - (б) Если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x^* \in [x_1, b]$

Определение. $f(x)$, заданная на $[a, b]$, называется **выпуклой** на этом отрезке, если

$$\forall x', x'' \in [a, b], \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x' + (1 - \alpha)x'') \leq \alpha f(x') + (1 - \alpha)f(x'')$$

Свойства.



Рис. 1.1:
Вырожденные α и β ,
унимодальная
функция



Рис. 1.2:
Унимодальная
функция

1. Если $f(x)$ выпукло на $[a, b]$, то $\forall [x', x''] \subset [a, b]$, то её график расположен ниже хорды между x' и x''
2. Всякая выпуклая функция на отрезке является унимодальной на нём.

Определение. Стационарные точки — точки x , для которых $f'(x) = 0$.

Мы будем рассматривать одномерные задачи оптимизации, т.к. многомерные задачи часто сводятся к одномерным.

3 Одномерная минимизация функций. Прямые методы.

Прямые методы — методы, не использующие производные целевой функции.

3.1 Метод дихотомии

Этот метод — тернарный поиск.

$$x_1 = \frac{b + a - \delta}{2} \quad x_2 = \frac{b + a + \delta}{2}$$

$$\tau = \frac{b - x_1}{b - a} = \frac{x_2 - a}{b - a} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$x^* \in [a_i, b_i] \quad \forall i$$

Шаг 1: Находим x_1 и x_2 , вычисляем $f(x_1)$ и $f(x_2)$

Шаг 2: Сравниваем $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

- Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, переходим к отрезку $[a, x_2]$, т.е. $b = x_2$
- Иначе переходим к $[x_1, b]$, т.е. $a = x_1$

Шаг 3: $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$, где n — номер итерации.

- Если $\varepsilon_n > \varepsilon$, переходим к новой итерации.
- Если $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, завершаем поиск и переходим к шагу 4.

Шаг 4: $X^* \approx \overline{X} = \frac{a+b}{2}$

Примечание. δ выбирается на интервале $(0, 2\varepsilon)$. Чем меньше δ , тем больше относительное уменьшение длины отрезка на каждой итерации. При чрезмерно малом δ сравнение $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будет затруднительно, т.к. они близки.

Мы можем оценить число необходимых итераций:

$$n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$$

Лекция 2

17 февраля

3.2 Метод золотого сечения

Рассмотрим отрезок $[0, 1]$. Пусть $x_2 = \tau$, тогда симметрично расположенная $x_1 = 1 - \tau$. Пусть дальше был выбран отрезок $[0, \tau]$, тогда пусть $x'_2 = 1 - \tau$. Чтобы новые точки делили отрезок в таком же соотношении, необходимо, чтобы $\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{1-\tau} \Rightarrow \tau^2 = 1 - \tau \Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$. Таким образом, $x_1 = 1 - \tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

В общем случае для отрезка $[a, b]$:

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a), x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) \quad (1)$$

Вычислим погрешность:

$$\Delta_n = \tau^n(b - a) \quad \varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n (b - a)$$

Для заданного ε условия окончания $\varepsilon_n \leq \varepsilon$.

Результат метода:

$$x^* = \frac{a_{(n)} + b_{(n)}}{2}$$

Оценка числа шагов для достижения искомой точности:

$$n \geq \ln \left(\frac{\frac{2\varepsilon}{b-a}}{\ln \tau} \right) \approx 2 \cdot 1 \cdot \ln \left(\frac{b-a}{2\varepsilon} \right)$$

Шаг 1: Находим x_1 и x_2 по формуле (1), вычисляем $f(x_1)$ и $f(x_2)$. $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$, $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Шаг 2: – Если $\varepsilon_n > \varepsilon$, переходим к шагу 3.

– Если $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, переходим к шагу 4.

Шаг 3: Сравниваем $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

– Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $b = x_2, x_2 = x_1, x_1 = b - \tau(b - a)$. Мы запоминаем $f(x_2)$ для следующего шага, т.к. оно равно $f(x_1)$ на этом шаге.

– Иначе $a = x_1, x_1 = x_2, f(x_1) = f(x_2)$. Мы запоминаем $f(x_1)$ для следующего шага, т.к. оно равно $f(x_2)$ на этом шаге.

Шаг 4: $X^* \approx \bar{X} = \frac{a(n)+b(n)}{2}$

3.3 Метод Фибоначчи

Мы знаем, что $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$, а также при $n \rightarrow +\infty$ $F_n \approx \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

Рассмотрим нулевую итерацию:

$$x_1 = a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b - a) \quad x_2 = a + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b - a)$$

Рассмотрим k -тую итерацию:

$$x_1 = a_{(k)} + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

$$x_2 = a_{(k)} + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

Пусть $k = n$, тогда:

$$x_1 = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b_0 - a_0) \quad x_2 = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

Условие на погрешность:

$$\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} < \varepsilon$$

Какое брать n ? Такое, что $\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{n+2}$

Есть проблема, при большом n $\frac{F_n}{F_{n+2}}$ есть бесконечная десятичная дробь, вследствие чего образуется погрешность.

Рис. 2.1: Функция $f(x)$ и её приближение параболой.

3.4 Метод парабол

Пусть $\exists x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, такие что $\begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 \\ f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3) \end{cases}$

Тогда приближающая парабола имеет вид $q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$.

Мы имеем условия на коэффициенты этой параболы: $\begin{cases} q(x_1) = f(x_1) = f_1 \\ q(x_2) = f(x_2) = f_2 \\ q(x_3) = f(x_3) = f_3 \end{cases}$

Коэффициенты можно найти следующим образом:

$$a_0 = f_1 \quad a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \quad a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right)$$

Тогда результат итерации есть $\bar{x} = \frac{1}{2} \left(x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2} \right)$, на следующей лекции будет рассказан переход к следующей итерации.

Точки x_1, x_2, x_3 для новой итерации выбираются следующим образом:

1. (а) Если $x_1 < \bar{x} < x_2 < x_3$ и $f(\bar{x}) \geq f(x_2)$, то $x^* \in [\bar{x}, x_3]$, $x_1 = \bar{x}$, точки x_2 и x_3 не меняются.

- (b) Если $x_1 < \bar{x} < x_2 < x_3$ и $f(\bar{x}) < f(x_2)$, то $x^* \in [x_1, x_2]$, $x_3 = x_2$, $x_2 = \bar{x}$, точка x_1 не меняется.
2. (a) Если $x_1 < x_2 < \bar{x} < x_3$ и $f(\bar{x}) \leq f(x_2)$, то $x^* \in [x_2, x_3]$, $x_1 = x_2$, $x_2 = \bar{x}$, точка x_3 не меняется.
- (b) Если $x_1 < x_2 < \bar{x} < x_3$ и $f(\bar{x}) > f(x_2)$, то $x^* \in [x_1, \bar{x}]$, $x_3 = \bar{x}$, точки x_1 и x_2 не меняются.

Примечание. Метод парабол имеет квадратичную сходимость.

Примечание. Метод парабол требует гладкость функции, что неверно для предыдущих методов.

3.5 Комбинированный метод Брента

Для собственного изучения.

Лекция 3

24 февраля

3.6 Метод равномерного перебора

Шаг 1: Если $f(x_0) > f(x_0 + \delta)$, то $k = 1, x_1 = x_0 + \delta, h = \delta$

иначе $x_1 = x_0, h = -\delta$

Шаг 2: $h = 2h, x_{k+1} = x_k + h$

Шаг 3: Если $f(x_k) > f(x_{k+1})$, то $k = k + 1$ и переходим к шагу 2. Иначе прекращаем поиск и искомое лежит в $[x_{k-1}, x_{k+1}]$

4 Методы оптимизации, использующие производную

В рамках этой главы $f(x)$ — дифференцируемая или дважды дифференцируемая выпуклая функция.

Есть три классических метода, использующих производную:

- Средней точки
- Метод хорд
- Метод Ньютона

$f'(x) = 0$ — необходимое и достаточное условие глобального минимума. Таким образом, условие остановки вычислений — $f'(x) \approx 0$, т.е. $|f'(x)| \leq \varepsilon$

4.1 Методы средней точки

Средняя точка $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$.

Общая идея алгоритма:

- Если $f'(x) > 0$, то $\bar{x} \in$ участку монотонного возрастания $f(x)$ и $x^* < \bar{x}$, т.е. минимум лежит на $[a, \bar{x}]$
- Если $f'(x) < 0$, то аналогично можем вывести, что минимум лежит на $[\bar{x}, b]$
- Если $f'(x) = 0$, то мы нашли решение.

Перепишем это в виде алгоритма:

Шаг 1: $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$, вычислим $f'(\bar{x})$

Шаг 2: Если $|f'(x)| \leq \varepsilon$, то $x^* = \bar{x}$ и завершаем вычисление.

Шаг 3: Сравниваем $f'(x)$ с нулём:

- Если $f'(x) > 0$, то $x^* \in [a, \bar{x}]$ и $b = \bar{x}$
- Иначе $x^* \in [\bar{x}, b]$ и $a = \bar{x}$

Длина отрезка после n итераций есть $\Delta_n = \frac{b-a}{2^n}$

4.2 Метод хорд (метод секущей)

Если $\exists f'(x)$ на $[a, b]$, $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ и $f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists x \in (a, b) : f'(x) = 0$.

$F(x) = f'(x)$. Пусть \tilde{x} — точка пересечения хорды $F(x)$ с осью Ox на $[a, b]$



Можем тривиально вывести \tilde{x} из уравнения прямой по двум точками:

$$\tilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) \quad (2)$$

Шаг 1: Считаем \tilde{x} по (2)

Шаг 2: Если $|f'(\tilde{x})| \leq \varepsilon$, то $x^* = \tilde{x}$ и мы заканчиваем вычисление.

Иначе шаг 3.

Шаг 3: Переходим к новому отрезку:

- Если $f'(\tilde{x}) > 0$, то $x^* \in [a, \tilde{x}]$, $b = \tilde{x}$, $f'(b) = f'(\tilde{x})$, переходим к шагу 1
- иначе $x^* \in [\tilde{x}, b]$, $a = \tilde{x}$, $f'(a) = f'(\tilde{x})$, переходим к шагу 1

Примечание. Если $f'(a) \cdot f'(b) \geq 0$, то $x^* = a$ или $x^* = b$.

4.3 Метод Ньютона (*метод касательной*)

Если f выпуклая на $[a, b]$ и дважды непрерывно дифференцируемая, то уравнение $f'(x) = 0$ решается методом Ньютона.

Пусть $x_0 \in [a, b]$ — начальное приближение x^* . $F(x) = f'(x)$ линеаризуема в окрестности x_0 , т.е.

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Пусть x_1 — следующее приближение к x^* . Это будет пересечение касательной с Ox . Найдём эту точку.

$$\begin{aligned} F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0) &= 0 \\ x_1 &= x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем получить $\{x_k\}_{k=1}^n$ — итерационную последовательность.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Условие остановки такое же, как в предыдущих методах: $|f'(x_k)| \leq \varepsilon$

Лекция 4

3 марта

Пусть x_k — текущая оценка решения x^*

Рассмотрим ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x_k + p) &= f(x_k) + pf'(x_k) + \frac{1}{2}p^2 f''(x_k) + \dots \\ f(x^*) &= \min_x f(x) \\ &= \min_p f(x_k + p) \\ &= \min_p \left(f(x_k) + pf'(x_k) + \frac{1}{2}p^2 f''(x_k) + \dots \right) \\ &\approx \min_p \left(f(x_k) + pf'(x_k) + \frac{1}{2}p^2 f''(x_k) \right) \end{aligned}$$

Приравняем производную выражения под \min к нулю:

$$\begin{aligned} f'(x_k) + pf''(x_k) &= 0 \\ p &= -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \end{aligned}$$

Тогда $x^* \approx x_k + p$ и $x_{k+1} = x_k + p = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

Главное преимущество метода Ньютона — квадратичная скорость сходимости, т.е. если x_k достаточно близка к x^* и $f''(x^*) > 0$, то $|x_{k+1} - x^*| \leq \beta |x_k - x^*|^2$

Метод Ньютона может потерпеть неудачу в следующих случаях:

1. $f(x)$ плохо аппроксимируется первыми тремя членами в ряде Тейлора. Тогда x_{k+1} может быть хуже (как аппроксимация) x_k .
2. $f''(x_k) = 0$, тогда p не определен.
3. Кроме f нужно вычислять f' и f'' , что затруднительно в реальных задачах.

Мы можем аппроксимировать производную по определению:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$$

Эта формула называется правой разностной схемой, у нее есть улучшение, называемое центральной разностной схемой:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h}$$

Если $f(x)$ — квадратичная функция, то метод Ньютона сходится за один шаг при любом выборе x_0 .

Достаточное условие монотонной сходимости метода Ньютона

Пусть $x^* \in [a, b]$ и $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируемая и выпуклая на $[a, b]$ функция. Тогда $\{x_k\}$ будет сходиться к пределу x^* монотонно, если $0 < \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} < 1$

$$f'(x^*) = 0 = f'(x_k) + f''(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f'''(x)}{2}(x^* - x_k)^2$$

$$\frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \frac{x^* - x_k + \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}}{x^* - x_k} = 1 - \frac{2}{2 + \frac{f'''(x)(x^* - x_k)^2}{f'(x_k)}}$$

Последовательность итераций $\{x_k\}$ монотонна, если $\frac{f'''(x)}{f'(x_k)} > 0$, таким образом условие монотонной сходимости метода Ньютона — постоянство на $x \in [x^*, x_0]$ знака $f'''(x)$ и его совпадение с $f'(x_0)$.

Пример. $f(x) = x \cdot \arctg(x) - \frac{1}{2}$???

$$f'(x) = \arctg x \quad f''(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad f'''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x) \cdot f'''(x) < 0$, таким образом не будет монотонной сходимости.

Пусть $x_0 = 1$.

| k | x_k | $f'(x_k)$ | $f''(x_k)$ |
|-----|-------------------|-----------|---------------|
| 0 | 1 | 0.785 | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | -0.57 | -0.518 | a |
| 2 | 0.117 | 0. | |
| 4 | $9 \cdot 10^{-8}$ | | |

4.4 Модификации метода Ньютона

Метод Ньютона-Рафсона

$$x_{k+1} = x_k - \tau_k \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, 0 < \tau_k \leq 1$$

τ_k — константы. Если $\tau = 1$, то метод Ньютона-Рафсона вырождается в метод Ньютона.

Для нахождения τ_k зададим $\varphi(\tau)$:

$$\varphi(\tau) = f(x_k - \tau \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}) \rightarrow \min$$

Тогда

$$\tau_k = \frac{(f'(x_k))^2}{(f'(x_k))^2 + (f'(\tilde{x}))^2}, \text{ где } \tilde{x} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Метод Марквардта

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k) + \mu_k}$$

, где $\mu_k > 0$

μ_0 выбирают на порядок выше значения $f''(x_0)$, $\mu_{k+1} = \begin{cases} \frac{m_k}{2} & , \text{ если } f(x_{k+1}) < f(x_k) \\ \mu_{k+1} = 2\mu_k & , \text{ если } f(x_{k+1}) \geq f(x_k) \end{cases}$

5 Метод минимизации многомодальных функций (метод ломаных)

Определение. $f(x)$, $x \in [a, b]$ удовлетворяет условию Липшица, если $\forall x_1, x_2 \in [a, b] |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$

Шаг 1 Возьмём $x_1^* = \frac{1}{2L}(f(a) - f(b) + L(a + b))$ и $p_1^* = \frac{1}{2}(f(a) + f(b) + L(a - b))$. Добавим в рассматриваемое множество $x'_1 = x_1^* - \Delta_1$ и $x''_1 = x_1^* + \Delta_1$, где $\Delta_1 = \frac{1}{2L}(f(x_1^*) - p_1)$

Шаг 2 Из пар (x'_1, p_1) и (x''_1, p_1) выберем пару с минимальной $p : (x_2^*, p_2^*)$ и исключим из рассматриваемого множества.

Шаг n В результате мы получим множество из n пар (x, p) . Исключаем пару с минимальной p и вместо неё

Пример. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $[a, b] = [10, 15]$, $\varepsilon = 0.01$

Проверим условие Липшица:

$$|f'(x)| = \left| \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right| < \frac{x |\cos x| + \sin |x|}{x^2} < \frac{x + 1}{x^2} \leq 0.11$$

| n | x_n^* | p_n^* | $2L\Delta_n$ | x_n' | x_n'' | p_n |
|-----|---------|---------|-----------------------|--------|---------|--------|
| 1 | 12.056 | -0.281 | 0.240 | 10.963 | 13.149 | -0.161 |
| 2 | 10.963 | -0.161 | 0.070 | 10.646 | 11.280 | -0.126 |
| 3 | 13.149 | -0.161 | 0.203 | 12.227 | 14.701 | -0.096 |
| 4 | 10.646 | -0.126 | 0.038 | 10.474 | 10.818 | -0.107 |
| 5 | 11.280 | -0.126 | 0.041 | 11.094 | 11.466 | -0.106 |
| 6 | 10.474 | -0.107 | 0.024 | 10.364 | 10.584 | -0.095 |
| 7 | 10.818 | -0.107 | 0.160 | 10.745 | 10.891 | -0.099 |
| 8 | 11.094 | -0.106 | 0.016 | 11.020 | 11.168 | -0.098 |
| 9 | 11.466 | -0.106 | 0.028 | 11.338 | 11.594 | -0.092 |
| 10 | 10.891 | -0.099 | $0.008 < \varepsilon$ | | | |