Теорема 1 (характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \to \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- f измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые:

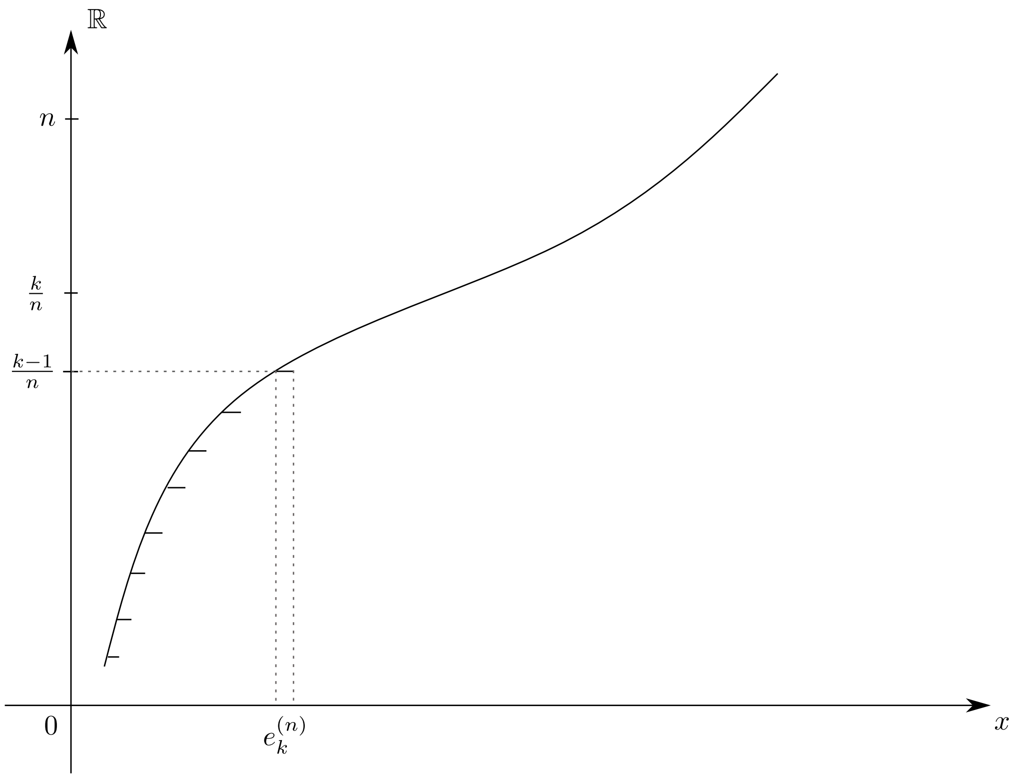
1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2. $\forall x \;\; f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

Доказательство.

$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n}\right) \quad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$



$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \le f(x)$$

Не дописано.

$\square$

Следствие 1.

- f — измеримо

Тогда $\exists f_n$ — измеримые : $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ всюду и $|f_n| \le |f|$

Доказательство. Рассмотрим срезки f^+, f^-, дальше очевидно. $\square$

Следствие 2.

- f, g — измеримо

Тогда fg — измеримо, если $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство.

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \to f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \to g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \to fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела. $\square$

Следствие 3.

- f, g — измеримо

Тогда $f + g$ измеримо.

Примечание. Считаем, что $\forall x$ не может быть одновременно $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$.

Доказательство.

$$f_n + g_n \to f + g$$

$\square$

Теорема 2 (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры).

Примечание. $A \subset X$ — **полной меры**, если $\mu(X \setminus A) = 0$.

- $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$

- f — непрерывно на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измеримо.

Доказательство. f — измеримо на E', т.к. $E'(f < a)$ открыто в E' по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e$, λ_m — полная $\Rightarrow e(f < a)$ — измеримо в E.

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, объединение измеримых множеств измеримо. □

Пример. $E = \mathbb{R}, f = \chi_{\text{Irr}}$, где Irr — множество иррациональных чисел. f непр. на Irr и разрывно на $\mathbb{R}$.

Следствие 4.

- $f : E \to \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- f измеримо на E'

Тогда можно так переопределить f на e, что полученная функция $\tilde{f}$ будет измерима.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in E' \\ \text{const}, x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f<a)} \subset \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\varnothing \text{ или } e}$$

□

Следствие 5. $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — монотонна.

Тогда f измерима.

Доказательство. f — непрерывно на $\langle a, b \rangle$ за исключением, возможно, счётного множества точек. □

Упражнение. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывна.

Доказать: $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$ — измеримо.

Упражнение. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримо.

Доказать: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ — измеримо.

Упражнение. Доказать, что $\exists$ измеримая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \lambda e = 0$, если f непрерывно на e, то полученная $\tilde{f}$ разрывна всюду.

Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верно при почти всех из E = почти всюду на E = почти везде на E = п.в. E, если:

$\exists e \in E : \mu e = 0 \;\; W(x)$ — истинно при $x \in E \setminus e$

Пример. $X = \mathbb{R}$, W = иррационально.

Пример. $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} f(x)$ при п.в. $x \in E$

Свойства.

1. - μ — полная
   - $f_n, f : X \to \overline{R}$ п.в. X
   - f_n измеримо

   Тогда f измеримо.

   Доказательство. $f_n \to f$ на X', где $e = X \setminus X'$, $\mu e = 0$

   f — измеримо на X

   μ — полная $\Rightarrow f$ измеримо на X, т.к. $X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subset e}$ $\square$

2. ???

3. Пусть $\forall n \;\; W_n(x)$ истинно при почти всех x.

   Тогда утверждение “ $\forall n \;\; W_n$ истинно” — верно при почти всех X

   Доказательство. $\triangleleft e_n : \mu(e_n) = 0$. Искомое высказывание верно при $x \in X \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} e_i\right)$, $\mu(\bigcup e_i) = 0$ $\square$

Определение. $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечны.

f_n **сходится к** f **по мере** μ, обозначается $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f : \forall \varepsilon > 0 \ \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0, т.е. предел не задан однозначно.

Упражнение. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f; f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} g$. Тогда f и g эквивалентны.

Пример.

1. $f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$

   $f_n \to f$ всюду на $(0, +\infty)$

   $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \geq \varepsilon\right) = X(x \leq \frac{1}{\varepsilon n})$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \to 0$$

2. $f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$

   $f_n(x) \to 0$ при всех x

   $f_n(x) \Longrightarrow 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\to 0$$

3. $n = 2^k + l, 0 \leq l < 2^k, X = [0, 1], \lambda$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

   $\lim f_n(x)$ не существует ни при каком x!

$$X(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \to 0 \Rightarrow f_n \underset{\lambda}{\Longrightarrow} 0$$

Теорема 3 (Лебега).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- μX конечно
- f_n, f — измеримо, п.в. конечно

- $f_n \to f$ п.в.

Тогда $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0, то есть $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon)$$

$$\bigcap X(f_n \geq \varepsilon)$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху, $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \to 0$

Рассмотрим общий случай: $f_n \to f$, $\varphi(x) := \sup\limits_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда $\varphi_n \to 0, \varphi_n \geq 0$ и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

$\square$

Теорема 4 (Рисс).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$.

Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \to f$ почти везде.

Доказательство.

$$\forall k \;\; \mu X \left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \to 0$$

$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \;\; \mu X \left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X \left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \overset{(1)}{\le} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X \left(|f_{n_j} - f| \ge \frac{1}{j} \right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \le \frac{2}{2^k} \to 0$$
$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

1: по счётной полуаддитивности меры.

Покажем, что при $x \notin E \;\; f_{n_k} \to f$.

$$x \notin E \;\; \exists N \;\; x \notin E_k \text{ при } k > N \;\; |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть $f_{n_k}(x) \to f(a)$.

Т.к. $\mu E = 0$, искомое выполнено. □

Следствие 6. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \;\; |f_n| \le g$ почти всюду. Тогда $|f| \le g$ почти всюду.

Доказательство. $\exists n_k \;\; f_{n_k} \to f$ почти всюду.

□

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \;\; \forall x \Rightarrow f_n \Longrightarrow f$$

Теорема 5 (Егорова).

- $X, \mathfrak{A}, \mu$
- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечно, измеримо

Тогда
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \underset{X \setminus e}{\rightrightarrows} f$$

Доказательство. Упражнение. □

Интеграл

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — зафиксировали.

Определение (1).

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- E_k — допустимое разбиение

- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d_{\mu(x)} := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

Свойства.

1. Не зависит от представления f в виде суммы, т.е.:

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

   Примечание. При $E_k \cap E'_j \neq \varnothing$ $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow$ можно писать любое из них.

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu(E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

2. $\underbrace{f}_{\text{ст.}} \leq \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$

Определение (2).

- $f \geq 0$
- f измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Свойства.

- Если f ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$
- $g \leq f, f$ — измеримая, g — измеримая $\Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение (3).

- f измеримо
- $\int f^+$ или $\int f^-$ конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

Теорема 6 (Тонелли).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f измерима
- Записывается как $f(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{m+n} \;\; E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ измерима на $\mathbb{R}^n$
2. Функция $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$, измерима и корректно задана.
3. $$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Примечание. Неформально говоря, можно разбить $\mathbb{R}^{m+n}$ на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.