Т.к. эта практика проходит до первой лекции, то сначала будет немного теории.

Мы занимаемся исчислением высказываний. В высказываниях есть:

- Переменные A, B, C *(пропозициональные)*
- Битовые операции $\vee, \&, \to, \neg$

Определение. **Пропозициональная формула**:

1. A — переменная $\Rightarrow A$ — формула
2. a, b — переменные $\Rightarrow a \vee b, a \,\&\, b, a \to b, \neg a$

Определение. **Оценка** — отображение π : переменные $\to \{T, F\}$.

Определение. **Тавтология** — формула, для любой оценки истинна.

Пример.

- $A \vee \neg A$
- $A \to A$
- $A \to (B \to A)$

Схемы аксиом:

1. $a \to (b \to a)$
2. $(a \to b) \to (a \to b \to c) \to (a \to c)$
3. $a \to b \to a \,\&\, b$
4. $a \,\&\, b \to a$
5. $a \,\&\, b \to b$
6. $a \to a \vee b$
7. $b \to a \vee b$
8. $(a \to\ ) \to (b \to c) \to (a \vee b \to c)$
9. $(a \to b) \to (a \to \neg b) \to \neg a$
10. $\neg\neg a \to a$

Примечание. $a \to b \to c \Leftrightarrow a \to (b \to c)$

Можно заметить, что все эти аксиомы — тавтологии. Это так и должно быть. Вместо a, b, c можно подставлять произвольные формулы.

Определение. **Вывод** формулы φ есть последовательность формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$, где φ_i — одна из аксиом или Modus Ponens из φ_a, φ_b, где $a, b < i$

Определение. **Modus Ponens *(правило вывода)*** из формул a и $a \to b$ есть формула b.

Корректность: можно вывести любую тавтологию.

Доказательство. Очевидно по индукции и определению Modus Ponens. □

Полнота: любую тавтологию можно вывести.

Доказательство. Будет на лекции. □

Пример. Выведем $a \to a$

$$a := x, b := x \to x, c := x$$

$$\begin{aligned} & \varphi_1 = (x \to x \to x) \to (x \to (x \to x) \to x) \to (x \to x) \\ & \varphi_2 = x \to x \to x \\ \text{M.p.} \quad & \varphi_3 = (x \to (x \to x) \to x)\textcolor{red}{???} \end{aligned}$$

Пусть Γ — какой-то набор формул.

Определение. Вывод в грамматике Γ формулы φ обозначается $\Gamma \vdash \varphi$, и его шаги могут иметь вид τ, где $\tau \in \Gamma$ *(шаги как в нормальном выводе также разрешены)*.

Лемма 1 (о дедукции). $\Gamma \cup \{a\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash a \to \varphi$

Упражнение. Указать про каждое из высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

1. $\neg A \vee \neg\neg A$

   $$\begin{aligned} \varphi_1 &= \neg A \vee A \\ \varphi_2 &= \neg A \vee \neg\neg A \end{aligned}$$

   Ответ: общезначимо, выполнимо.

2. $(A \to \neg B) \vee (B \to \neg C) \vee (C \to \neg A)$

   При подстановке $(1, 1, 1)$ не выполнено, при $(0, 0, 0)$ выполнено.

   Ответ: выполнимо, опровержимо.

3. $((P \to Q) \to P) \to P$

   При подстановке $(0, 1)$ не выполнено, при $(1, 1)$ выполнено.

   Ответ: выполнимо, опровержимо.

4. $\neg A \mathbin{\&} \neg\neg A$

   $\neg A \mathbin{\&} \neg\neg A = \neg A \mathbin{\&} A$

   Ответ: невыполнимо, опровержимо.

5. $\neg(A \mathbin{\&} \neg A)$

   Т.к. $A \mathbin{\&} \neg A$ невыполнимо, $\neg(A \mathbin{\&} \neg A)$ общезначимо.

   Ответ: общезначимо, выполнимо.

6. A

   Ответ: выполнимо ($A = 1$), опровержимо ($A = 0$).

7. $A \to A$

   Ответ: общезначимо, выполнимо *(подстановкой)*.

8. $A \to \neg A$

   Ответ: выполнимо ($A = 0$), опровержимо ($A = 1$).

9. $(A \to B) \lor (B \to A)$

   Ответ: общезначимо, выполнимо.

Доказать:

1. $\vdash A \to A$

   Было до этого.

2. $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$

$$\varphi_1 = a \to a$$
$$\varphi_2 = (a \to a \to b) \to (a \to b)$$

3. $\vdash \neg(A \mathbin{\&} \neg A)$

$$\varphi_1 = (\phi \to \psi) \to (\phi \to \neg\psi) \to \neg\phi$$
$$\varphi_2 = A \mathbin{\&} \neg A \to A$$

$$\varphi_3 = A \mathbin{\&} \neg A \rightarrow \neg A$$
$$\varphi_4 = (A \mathbin{\&} \neg A \rightarrow A) \rightarrow (A \mathbin{\&} \neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \mathbin{\&} \neg A)$$