

# 1 Спектральный анализ линейных операторов

## 1.1 Инвариантные пространства линейного оператора

$\varphi : X \rightarrow X$  — автоморфизм

**Определение.** Подпространство  $L$  линейного пространства  $X$  называется **инвариантным подпространством**  $\varphi$ , если

$$\forall x \in L \quad \varphi x \in L$$

*Пример.* 1.  $\varphi : X \rightarrow X$ , тогда инвариантные подпространства:

- $X$
- $\{0\}$

2.  $\varphi = \mathcal{I}$ ,  $\forall x \quad \mathcal{I}x = x \Rightarrow$  любое подпространство  $X$  — инвариантное

3.  $\varphi = \Theta$ ,  $\forall x \quad \Theta x = 0 \Rightarrow$  любое подпространство  $X$  — инвариантное

$$4. \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \triangleq \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$$

$$\langle \{e_j\} \rangle \text{ — базис } X \Rightarrow \forall j \quad A_\varphi e_j = \lambda_j e_j \quad e_j \rightarrow \mathcal{L}\{e_j\} \text{ — инв.}$$

Всего  $2^n$  инвариантных подпространств

$$5. ]X = L_1 \dot{+} L_2$$

$$\forall x! = x_1 + x_2 \quad \varphi x = \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x_1 \in L_1$$

$$L_1 \text{ — инв., } \forall x \in L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x \quad \forall \text{ подпространство } L_1 \text{ инвариантно}$$

$$L_2 \text{ — инв., } \forall x \in L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = 0 \quad \forall \text{ подпространство } L_2 \text{ инвариантно}$$

**Определение.** Инвариантом линейного оператора  $\varphi$  называется его числовая функция значений, которая не зависит от выбора базиса

*Пример.*  $\det \varphi$  — инвариант

$$\varphi^{\Lambda_n} z = \det \varphi \cdot z \quad \forall z \in \Lambda_n$$

$$\det \varphi = \det A_\varphi \text{ — в некотором фиксированном базисе}$$

$$\tilde{A}_\varphi = T^{-1} A_\varphi T \quad \det \tilde{A}_\varphi = \det T^{-1} \det A_\varphi \det T = \det A_\varphi$$

**Определение.** Характеристическим полиномом линейного оператора  $\varphi$  называется определитель следующего вида:

$$\chi_{\varphi}(\lambda) = \det(\varphi - \lambda \mathfrak{I}) \stackrel{\{e_j\}}{=} \det\{A_{\varphi} - \lambda E\}$$

$$\begin{aligned} \chi_{\varphi}(\lambda) &\stackrel{def}{=} \det \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \prod_{i=1}^n (a_{ij_i} - \delta_{i,j_i} \lambda) = \det A_{\varphi} - \lambda \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^n a_{ji} \right) (-1)^i + \dots + \lambda^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} + \lambda^n (-1)^n \\ &= (-\lambda)^n Z^{(0)} + (-\lambda)^{n-1} Z^{(1)} + \dots + (-\lambda) Z^{(n-1)} + Z^{(n)} \\ Z^{(K)} &= \sum_{(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)} M_{\vec{i}}^{\vec{i}} \end{aligned}$$

**Лемма 1.**

$$\chi_{\varphi}(\lambda) = inv$$

*Доказательство.*

$$\det(\tilde{A}_{\varphi} - \lambda E) = \det(T^{-1} A_{\varphi} T - \lambda T^{-1} T) = \det[S(A_{\varphi} - \lambda E)T] = \det T^{-1} \det(A_{\varphi} - \lambda E) \det T = \det(A_{\varphi} - \lambda E)$$

□