Лемма 1 (о структуре компактного оператора).

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда $\exists$ ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

Примечание. Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

Доказательство. $W := V^* V$ — самосопряженный оператор *(матрица симметрична относительно диагонали)*.

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные *(возможно с повторениями)*
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

Примечание. Пока мы в $\mathbb{R}^m$ *(а не в $\mathbb{C}^m$)*, * есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \overset{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \overset{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- 1: т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.
- 2: из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^{m} V_{ik} V_{il}$$
$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$
$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \overset{\text{def}\, h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \overset{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \overset{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \overset{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- 3: из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- 4: т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.
- 5: при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i}\sqrt{c_i}} = 1$

Примечание. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \overset{\text{def}\,x}{=} V\left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle g_i\right) \overset{(6)}{=} \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) \overset{\text{def}\,h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

- 6: в силу линейности V

$$(\det V)^2 \overset{(7)}{=} \det(V^* V) \overset{\text{def}\,W}{=} \det W \overset{(8)}{=} c_1 \ldots c_m$$

- 7: в силу мультипликативности det и инвариантности относительно транспонирования.
- 8: т.к. det инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \ldots c_m$.

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \ldots \sqrt{c_m} = s_1 \ldots s_m$$

$\square$

Теорема 1 (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m \;\; V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

1. Если $\det V = 0 \quad \text{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E \;\; V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если $\det V \neq 0 \quad \mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти k, для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0,1]\}$ — единичный куб на векторах g_i.

$V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0,1]\}$.

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом, $k = |\det V|$

$\square$

Интеграл

Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i$ — разбиение множества.
2. $f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \;\; f\Big|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$
2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

Свойства.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые:

   $\exists$ разбиение X, допустимое и для f, и для g:

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} \quad g = \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k}$$

$$f = \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} \quad g = \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k}$$

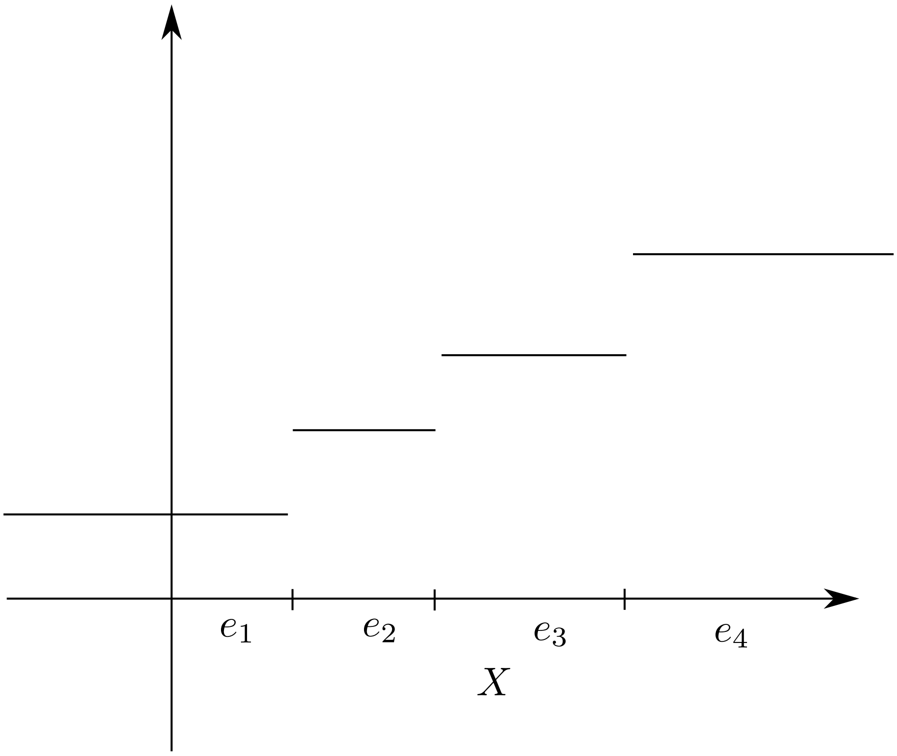

Рис. 1: Ступенчатая функция

2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$

   Тогда $f+g, \alpha f, fg, \max(f,g), \min(f,g), |f|$ — ступенчатые.

Определение. $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — лебегово множество функции f

Аналогично можно использовать $E(f \le a), E(f > a), E(f \ge a)$

Примечание.

$$E(f \ge a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \ge a)^c$$

$$E(f \le a) = \bigcap_{b > a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f **измерима** на множестве E, если $\forall a \in \mathbb{R} \;\; E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

Вместо “f измерима на X” говорят просто “измерима”.

Если $X = \mathbb{R}^m$, мера — мера Лебега, тогда f — измеримо по Лебегу.

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \;\; E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \;\; E(f \le a)$ — измеримо
3. $\forall a \;\; E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \;\; E(f \ge a)$ — измеримо

Доказательство. Тривиально по соображениям выше. □

Пример.

1. $E \subset X, E$ — измеримо $\Rightarrow \chi_E$ — измеримо.

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \varnothing, & a < 0 \\ X \setminus E, & 0 \le a \le 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывно. Тогда f — измеримо по Лебегу.

   Доказательство. $f^{-1}((-\infty, a))$ открыто по топологическому определению открытости, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

Свойства.

1. f измеримо на $E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \;\; E(f = a)$ измеримо.

   В обратную сторону неверно, пример — $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$

2. f — измеримо $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; \alpha f$ — измеримо.

   Доказательство. $E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \ge 0 \\ \varnothing, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases}$ □

3. f — измеримо на $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ измеримо на $E = \bigcup E_k$
4. f — измеримо на $E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f$ измеримо на E'

   Доказательство. $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$ □

5. $f \ne 0$, измеримо на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ измеримо на E.

6. $f \geq 0$, измеримо на $E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$ измеримо на E.

   Это неверно, т.к. при $f \equiv 0, \alpha = -1 \;\; \nexists f^\alpha$

Теорема 2. f_n — измеримо на X. Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.
2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.
3. Если $\forall x \;\; \exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \overset{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

   9:

   - $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.

     $$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

   - $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n(s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. sup и inf измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

□

Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ-конечный объем *(и даже σ-конечная мера на $\mathcal{P}^1$)*

Также можно определить для монотонной, но непрерывной g. Тогда в точках разрыва $\exists g(a + 0), g(a - 0)$. Пусть $\mu[a, b) = g(b - 0) - g(a - 0)$. Такое изменение нужно, потому что исходное μ не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру μ_g на некоторой σ—алгебре. Это мера Лебега-Стилтьеса.

Пример. $g(x) = [x]$, тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если μ_g определена на Борелевской σ-алгебре, то она называется мерой Бореля-Стилтьеса.