## Степенные ряды

*Следствие* 0.1.

- $f(z) = \sum_n a_n(z - z_0)^n$
- $|z - z_0| < R$
- $0 < R \leq +\infty$

Тогда: $f \in C^\infty(B(z_0, R))$ и все производные можно найти почленным дифференцированием.

*Доказательство.* Это очевидно из леммы о дифференцируемости степенного ряда. Если в некоторой точке $a$ нет гладкости, то она не лежит в $B(z_0, R)$ $\square$

**Теорема 1** (из ТФКП).

- $f$ комплексно дифференцируема в $z_0$ *(на самом деле, в некоторой области, но нас не волнует формальность в этой теореме).*

Тогда $f = \sum a_n(z - z_0)^n$ и $R =$ расстояние от $z_0$ до ближайшей особой точки.

*Пример.* $f = \dfrac{1}{1 + x^2}, z_0 = 0$

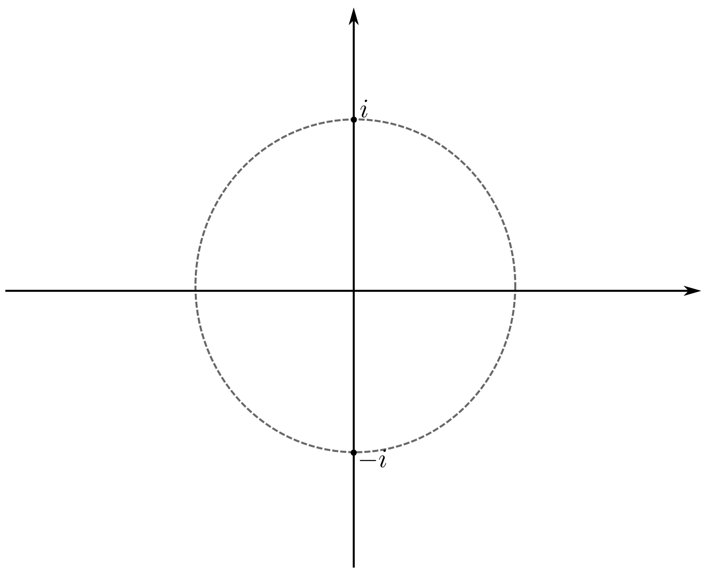



Рис. 1: Пунктиром — круг сходимости степенного ряда

*Следствие* 1.1.

- $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$
- $a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$

Тогда:

1. $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и $f$
2. $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$

*Пример.*

$$\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C$$

$$f(x) := \operatorname{arcctg} x$$

$$f' = \frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$$

Проинтегрируем:

$$\operatorname{arcctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$
$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} 0 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$
$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

То же самое можно получить, взяв определенный интеграл.

## Метод Абеля суммирования числовых рядов

**Теорема 2.**

- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ — сходится
- $c_n \in \mathbb{C}$
- $f(x) = \sum c_n x^n$
- $R \geq 1$
- $-1 < x < 1$

Тогда $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \sum c_n$

*Доказательство.* Ряд $\sum c_n x^n$ равномерно сходится на $[0,1]$ по признаку Абеля при $a_n(x) = c_n, b_n(x) = x^n$.

Функции $c_n x^n$ непрерывны на $[0,1] \xRightarrow{\text{Стокса-Зайдля}} \sum c_n x^n$ — непр. на $[0,1]$ $\square$

*Пример.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Интегрируем:

$$f'(x) = \sum \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + C$$

При $x = 0$ $C = 0$

Ещё раз интегрируем:

$$\sum \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -\int \ln(1-x)dx = (1-x)\ln(1-x) + x + C$$

При $x = 0$ $C = 0$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{x \to 1-0} (1-x)\ln(1-x) + x = 1$$

*Следствие* 2.1 (т. Абеля).

- $\sum a_n = A$
- $\sum b_n = B$
- $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$
- $\sum c_n = C$

Тогда $C = AB$

*Доказательство.* $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n, x \in [0, 1]$

При $x < 1$ есть абсолютная сходимость $f(x)$ и $g(x)$. Можно перемножать: $f(x)g(x) = h(x)$, при $x \to 1 - 0$ $\quad A \cdot B = C$ □

## Экспонента (комплексной переменной)

**Определение.**

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Свойства:

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp(z)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp z$
3. $\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$

*Доказательство.*

1. $$\exp(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

2. $$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

3. $$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k w^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \right) \\ &= \exp(z)\exp(w)\end{aligned}$$

□

Возвращаем кредит: в первом семестре говорилось, что $\exists f_0$ — показательная функция, такая что $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ и $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f_0(x)-1}{x} = 1$

$f_0(x) := \exp(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = \exp'(0) = 1$$

# Теория меры

## Системы множеств

Здесь и далее система $\iff$ множество, так говорится, чтобы избежать “множество множеств”

*Обозначение.* $A_i$ — множества. Тогда $\bigsqcup\limits_i A_i$ — дизъюнктное объединение.

$A_i$ — попарно не пересекаются $\iff$ “$A_i$ — дизъюнктно”

**Определение**. $X$ — множество, тогда $2^X$ — система всех подмножеств $X$.

$\mathcal{P} \subset 2^X$ — **полукольцо**, если:

- $\varnothing \subset \mathcal{P}$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}\ \ A \cap B \in \mathcal{P}$
- $\forall A, A' \in \mathcal{P}\ \ \exists$ кон. и дизъюнктные $B_1 \dots B_n \in \mathcal{P} : A \setminus A' = \bigsqcup\limits_i B_i$

*Пример.* 1. $2^X$ — полукольцо

2. $X = \mathbb{R}^2, \mathcal{P} =$ ограниченные подмножества, в том числе $\varnothing$

3.

*Определение.* Ячейка в $\mathbb{R}^m$ это $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i\ \ x_i \in [a_i, b_i)\}$

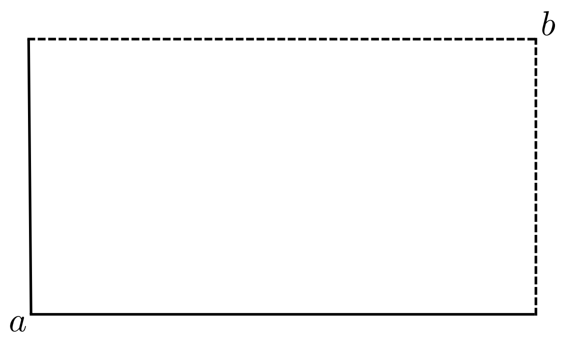



Рис. 2: $[a, b)$ — ячейка в $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{P}$ — множество ячеек в $\mathbb{R}^m$ — полукольцо.

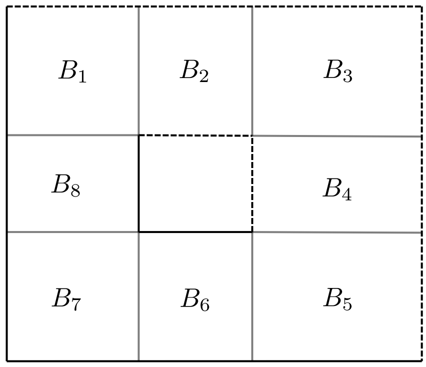
*Доказательство.* $\lhd m = 2$

(a) Очевидно

(b) $A \cap B = [a, a') \cap [b, b') = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \forall i = 1, 2 \;\; \max(a_i, b_i) \le x_i < \min(a'_i, b'_i)\}$

(c) $A \setminus A' = \bigsqcup\limits_{i=1}^{8} B_i$

$\square$




4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\forall i \;\; A_i := A$$

$$X = \bigotimes_{i=1}^{+\infty} A_i = \{(a_1, a_2, a_3, \dots), \forall i \;\; a_i \in A_i\}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall l \;\; \alpha_l \in A_{i_l}$$

$$\mathcal{P} = \{X_\sigma\}_\sigma$$

$$X_\sigma = \{a \in X : a_{i_1} = \alpha_1, \dots, a_{i_k} = \alpha_k\}$$

$\mathcal{P}$ — полукольцо

(a) $\varnothing = X_\sigma, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\sigma \cup \sigma'}$

(c) $X_\sigma \setminus X_{\sigma'}$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \sigma' = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} 1$

$X_\sigma \setminus X_{\sigma'}$ = на первой координате 6, на второй — не 1 = $X_{\sigma_2} \cap X_{\sigma_3} \cap \dots \cap X_{\sigma_6}$, $\sigma_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & k \end{pmatrix}$.

5. Ячейки с рациональными координатами.

Свойства:

1. Как показывают примеры:
   (a) $A \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{P}$
   (b) $A, B \in \mathcal{P}$, нельзя утверждать, что:
      - $A \cap B \notin \mathcal{P}$
      - $A \setminus B \notin \mathcal{P}$
      - $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \notin \mathcal{P}$
2. Модернизируем утверждение 3:

   $A, A_1 \dots A_n \in \mathcal{P}$. Тогда $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ — представимо в виде дизъюнктного объединения элементом $\mathcal{P}$

   *Доказательство.* Докажем по индукции по $n$.

   База ( $n = 1$) — аксиома 3.

   Переход:

$$
\begin{aligned}
A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n) &= (A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})) \setminus A_n \\
&= \left( \bigsqcup_{i=1}^{k} B_i \right) \setminus A_n \\
&= \bigsqcup_{i=1}^{k} (B_i \setminus A_n) \\
&= \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{j=1}^{l_i} D_{ij}
\end{aligned}
$$

□

**Определение.** $\mathfrak{A} \subset 2^X$ — **алгебра подмножеств** в $X$, если:

1. $\forall A, B \in \mathfrak{A} \;\; A \setminus B \in \mathfrak{A}$
2. $X \in \mathfrak{A}$

Свойства:

1. $\varnothing = X \setminus X \in \mathfrak{A}$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{A}$
3. $A^c = X \setminus A \in \mathfrak{A}$
4. $A \cup B \in \mathfrak{A}$, потому что $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
5. $A_1 \dots A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}$ — по индукции
6. Всякая алгебра есть полукольцо

   Обратное неверно, см. пример 2.

*Пример.* 1. $2^X$

2. $X = \mathbb{R}^2, \mathfrak{A}$ — ограниченные подмножества или их дополнения.