Можно заметить, что sup не определен для $\varnothing$ и неограниченных множеств. Исправим это:

$E = \varnothing \quad \sup E = -\infty \quad \sup E = +\infty$

E — не огр. сверху $\quad \sup E = +\infty$

E — не огр. снизу $\quad \inf E = -\infty$

Лемма 1. *О свойствах* $\sup, \inf$

1. $\varnothing \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$
2. $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$

   Пусть $\lambda > 0$, *тогда* $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
3. $\sup(-E) = -\inf E$

Доказательство.

1. Множество верхних границ $E \subset$ множество верхних границ D.
2. $\lambda \cdot$ Множество верхних границ $E =$ множество верхних границ λE
3. Множество верхних границ $-E = -$ множество нижних границ E

$\square$

$f : X \to \mathbb{R}$

$E \subset X$

$$\sup_E f = \sup_{x \in E} f(x) =^{def} \sup\{f(x), x \in E\}$$

$$\sup x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup x_n, n \in \mathbb{N}$$

Аксиома 1. *Аксиома, альтернативная аксиоме Кантора:*

$L, R \subset \mathbb{R}$

$$\forall l \in L \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad l \leq r$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall l, r \quad l \leq x \leq r$$

Определение. $f : X \to \mathbb{R}$

$D \subset X \quad f$ — **огр.** на множестве D, если $f(D)$ — огр. в $\mathbb{R}$

- сверху $\forall M \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$
- снизу
- огр.

Определение. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **возрастает**, если $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2)$

Если $f(x_1) < f(x_2)$, f **строго возрастает**.

Если f возрастает или убывает, то f — **монотонна**.

Если f строго возрастает или строго убывает, то f — **строго монотонна**.

Аналогичное можно утверждать для последовательностей.

Теорема 1. О пределе монотонной последовательности.

1. x_n — вещ. посл., огр. сверху, возрастает. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
2. x_n — убывает, огр. снизу. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
3. x_n — монотонна, огр. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

Секретное приложение:

1. $\lim x_n = \sup x_n$
2. $\lim x_n = \inf x_n$

Доказательство. Достаточно доказать 1.

Проверяем $\lim x_n = \sup x_n = M \in \mathbb{R}$

По определению sup:

$$\forall \varepsilon \;\; \exists N \;\; M - \varepsilon < x_N$$

$$x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq x_{N+3} \ldots \leq M$$

$$\forall \varepsilon \;\; \exists \;\; N \;\; \forall n > N \;\; M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon$$

По определению $M = \lim x_n$ □

Примечание. x_n — возр., не огр. сверху. $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$

x_n — убыв., не огр. сниху. $\Rightarrow \lim x_n = -\infty$

Пример: $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

x_n — возр., y_n — убыв.

Докажем убывание y_n.

Доказательство.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n-1})^n(\frac{n}{n+1})^{n+1} = (\frac{n^2}{n^2-1})^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} = (1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} \geq$$

$$\geq (1 + \frac{n+1}{n^2-1}) \cdot \frac{n-1}{n} = 1$$

□

$$y_n \text{ — убыв., } y_n \geq 0 \Rightarrow \exists \lim(1+\frac{1}{n})^{n+1} \in \mathbb{R} = e \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} \to e$$

Лемма 2. $x_n > 0 \quad \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = q < 1 \Rightarrow x_n \to 0$

$$\textit{Для } \varepsilon = \frac{1-q}{2} \ \exists N \ \forall n \leq N \ \frac{x_{n+1}}{x_n} < q + \varepsilon = \frac{q+1}{2} := \tilde{q}$$

$$x_{N+1} < \tilde{q}x_N$$
$$x_{N+2} < \tilde{q}x_{N+1}$$
$$\vdots$$
$$x_{N+k} < \tilde{q}x_{N+k-1}$$

Перемножим: $x_{N+k} < \tilde{q}^k x_N$

$$0 < x_{N+k} \leq \tilde{q}^k x_N$$

$$\tilde{q}^k x_N \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$$

Следствие 1.
1. $a > 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a_n} = 0$
2. $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Доказательство. Применить лемму.

1. $$x_n = \frac{n^k}{a^n} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = (\frac{n+1}{n})^k \cdot \frac{1}{a} = (1+\frac{1}{n})^k \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1$$

Аналогично для остальных. □

Можно записать $(1+\frac{1}{n})^n$"$\to$"1^∞. 1^∞ — неопределенность.

1 Компактность, принцип выбора, полнота

В этом параграфе рассматриваются метрические пространства.

Лемма 3. *Гейне-Бореля*

$$[a,b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha) \Rightarrow \exists \text{ конечн. набор: } [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i})$$

Определение. X — метрическое пространство., $K \subset X \quad K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, каждое G_α — открыто.

Это **открытое покрытие множества** K.

Определение. $K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия этого множества $\exists$ конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

$Y \subset X = (X,\rho) \Rightarrow (Y,\rho)$, Y — подпространство в X

$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$

$\rho|_{Y \times Y}$

$B^X(a,r) = \{x \in X : \rho(a,x) < r\}$

$B^Y(a,r) = \{y \in Y : \rho(a,y) < r\} = B^X(a,r) \cap Y$

Теорема 2. $Y \subset X$, X — метр.п., Y — подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. D — откр. в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — откр. в $X \quad D = G \cap Y$
2. D — замкн. в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкн. в $X \quad D = F \cap Y$

Докажем 1.

Доказательство. Докажем "$\Rightarrow$".

$\forall$ точка D внутр. в Y

$\forall x \in D\ \ \exists r_x\ \ B^Y(x, r_x) \subset D$

Очевидно $D = \bigcup\limits_{x \in D} B^Y(x, r_x) \quad G := \bigcup\limits_{X \in D} B^X(x, r_x)$ – откр. в X.

$$G \cap Y = (\bigcup_{x \in D} B^X(r, r_x)) \cap Y = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x) = D$$

Докажем "$\Leftarrow$".

G – откр. в $X \quad D := G \cap Y \quad ?D$ – откр. в Y

$x \in D$? x – внутр. точка D (в Y)

$x \in D \Rightarrow \exists B^X(x, r) \subset G \Rightarrow B^X(x, r) \cap Y = B^Y(x, r) \subset G \cap Y = D$ $\square$

Докажем 2.

Доказательство. Докажем "$\Rightarrow$"

D – замкн. в $Y \Rightarrow D^c = Y \setminus D$ – откр. в Y

$\exists G$ – откр. в X, такое что $D^c = G \cap Y$

Тогда $G^c = X \setminus G$ – замкнуто в X, кроме того $D = G^c \cap Y$, т.к. $D^c = G \cap Y$

Возьмём в качестве F G^c.

Докажем "$\Leftarrow$".

$$F \text{ – замкн. в } X$$

$$F \cap Y \text{ – замкн. в } Y?$$

$$F^c = X \setminus F \text{ – откр. в } X$$

$$F^c \cap Y \text{ – откр. в } Y$$

$$Y \setminus (F^c \cap Y) \text{ – замкн. в } Y$$

$$Y \setminus (F^c \cap Y) =^? F \cap Y$$

$$Y \setminus ((X \setminus F) \cap Y) =^? F \cap Y$$

Докажем это.

$$Y \cdot \overline{F \cdot Y} = Y \cdot (\overline{\overline{F}} + \overline{Y}) = YF + Y\overline{Y} = F \cap Y$$

□

Теорема 3. О компактности в пространстве и подпространстве.

(X, ρ) — метрич. пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$

Тогда K — комп. в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в X.

Доказательство. Докажем “$\Rightarrow$”

$$K \text{ — комп. в } X \Leftrightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — откр. в } X$$

Доказать: $\exists$ кон. $\alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \Rightarrow \exists \text{ кон. } \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (G_{\alpha_i} \cap Y)$$

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

Докажем “$\Leftarrow$”

Дано: K — комп. в X, доказать: K — комп. в Y.

$$K \in \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha, O_\alpha \text{ — откр. в } Y$$

$$\exists G_\alpha : O_\alpha = G_\alpha \cap Y (G_\alpha \textit{ — откр. в } X)$$

По двум выражениям выше:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \cap Y = Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$
$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Это открытое покрытие, K — компактно в $X \Rightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$.

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{\alpha_i}$ — конечное подпокрытие в Y. □

2 Пределы и непрерывность отображений

2.1 Предел

Определение. $(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \to Y$

$a \in X$, a — пред. точка множества D, $A \in Y$

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \ f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в X:
   (a) $x_n \to a$
   (b) $x_n \in D$
   (c) $x_n \neq a$

   $f(x_n) \to A$

Следствие 2. $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R} \quad a$ — пред. точка D.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Примечание.

1. a — пр. точка $\Rightarrow \exists x_n \to a \Rightarrow$ опр. Гейне содержательно.
2. Значение $f(a)$ *(если оно определено)* не влияет на значение предела и факт его $\exists$.
3. $f, g : D \to Y \quad f = g$ на некоторой окрестности $\dot{W}(a) \cap D \Rightarrow$ их пределы $\exists$ и $\nexists$ одновременно, и если $\exists$, то равны.
4. Существование $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Гейне: $\forall x_n$, удовл. требованиям в опред. по Гейне, $\exists \lim f(x_n)$

Предел на языке окружностей обобщим к $\pm\infty$

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \ \ f(x) > E$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \forall x \in D : x > \delta \ \ |f(x) - c| < \varepsilon$