$\triangleleft \mathbb{R}^{m+n}, (x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}, x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$

$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Теорема 1 (о неявном отображении).

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$
- O откр.
- $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$
- $\det F'_y(a, b) \neq 0$

Тогда:

1. $\exists$ откр. $P \subset \mathbb{R}^m, a \in P$

   $\exists$ откр. $Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$

   $\exists!\ \Phi : P \to Q \in C^r : \forall x \in P\ \ F(x, \Phi(x)) = 0$
2. $\Phi'(x) = -\left(F'_y(x, \Phi(x))\right)^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

В терминах системы уравнений: Дана система из n функций, $f_i \in C^r$.

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть $(a, b) = (a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n)$ — решение системы и $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)\right) \neq 0$. Тогда $\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m$ и $\exists!\ \Phi$ такие, что $\forall x \in U(a)\ x, \Phi(x)$ — тоже решение системы.

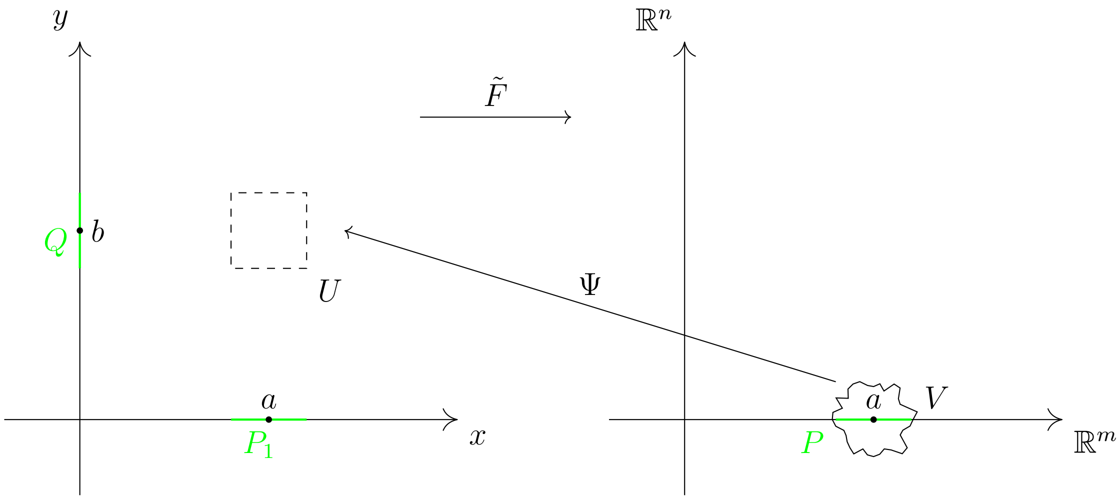
Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: $F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x))\Phi'(x) = 0$

1: $\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^{m+n} : (x, y) \mapsto (x, F(x, y)), \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$

$$\tilde{F}' = \left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array}\right)$$

Очевидно $\det \tilde{F}' \neq 0$ в (a, b), значит $\exists U(a, b) : \tilde{F}\Big|_U$ — диффеоморфизм



1. $U = P_1 \times Q$ — можно так считать
2. $V = \tilde{F}(U)$
3. $\tilde{F}$ — диффеоморфизм на $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \to U$
4. $\tilde{F}$ не меняет первые m координат $\Rightarrow \Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : V \to \mathbb{R}^n$.
5. "Ось x" $\Leftrightarrow$ "ось u", $P :=$ "ось u" $= \mathbb{R}^m \times a \cap V$, P — откр. в $\mathbb{R}^m$, $P = P_1$
6. $\Phi(x) := H(x, 0)$

   $F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$

   Единственность: $(x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$

$\square$

Определение.

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $k \in \{1 \dots m\}$

M — **простое** k**-мерное *(непрерывное)* многообразие** в $\mathbb{R}^m$, если оно гомеоморфно некоторому открытому множеству $O \subset \mathbb{R}^k$

Т.е. $\exists \underbrace{\Phi}_{\text{параметризация}} : \underbrace{O}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{сюрьекция}} M$ — непр., обратимо и Φ^{-1} непрерывно.

Определение. $M \subset \mathbb{R}^m$ — **простое k-мерное C^r-гладкое многообразие** в $\mathbb{R}^m$, если:

- $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi(O) = M$
- $\Phi \in C^r$
- $\forall x \in O \ \ \mathrm{rg}\Phi'(x) = k$

Пример.

1. Полусфера в $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$

   $\Phi : (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$

   $\Phi : B(0, r) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

   $\Phi \in C^\infty$

   $\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \mathrm{rg}\Phi' = 2$

2. Цилиндр $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, z \in (a, b)\}$

   $\Phi : [0, 2\pi] \times (0, h) \to \mathbb{R}^3$

   $(\varphi, z) \mapsto (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z)$ — не иньективно.

   Не существует $\Phi : \underbrace{O}_{\text{односвязн.}} \subset \mathbb{R}^2 \to$ цилиндр $\subset \mathbb{R}^3$, потому что топология: в цилиндре есть дырка, в O — нет.

   Если мы допускаем дырку в O, то $(x, y) \mapsto \left(\frac{rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)$ — параметризация.

3. Сфера в $\mathbb{R}^3$ без точки

   $\Phi : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$

   $(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos\varphi \cos\psi \\ R \sin\varphi \cos\psi \\ R \sin\psi \end{pmatrix}$

Теорема 2.

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $1 \leq k \leq m$ (случай $k = m$ тривиален)

- $1 \le r \le \infty$
- $p \in M$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность p в $\mathbb{R}^m$: $M \cap U$ — k-мерное C^r-гладкое многообразие.
2. $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$ и функции $f_1, f_2 \dots f_{m-k} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$, все $f_i \in C^r$

   $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \ldots = 0$, при этом $\mathrm{grad} f_1(p) \dots \mathrm{grad} f_{m-k}(p)$ — ЛНЗ.

Доказательство.

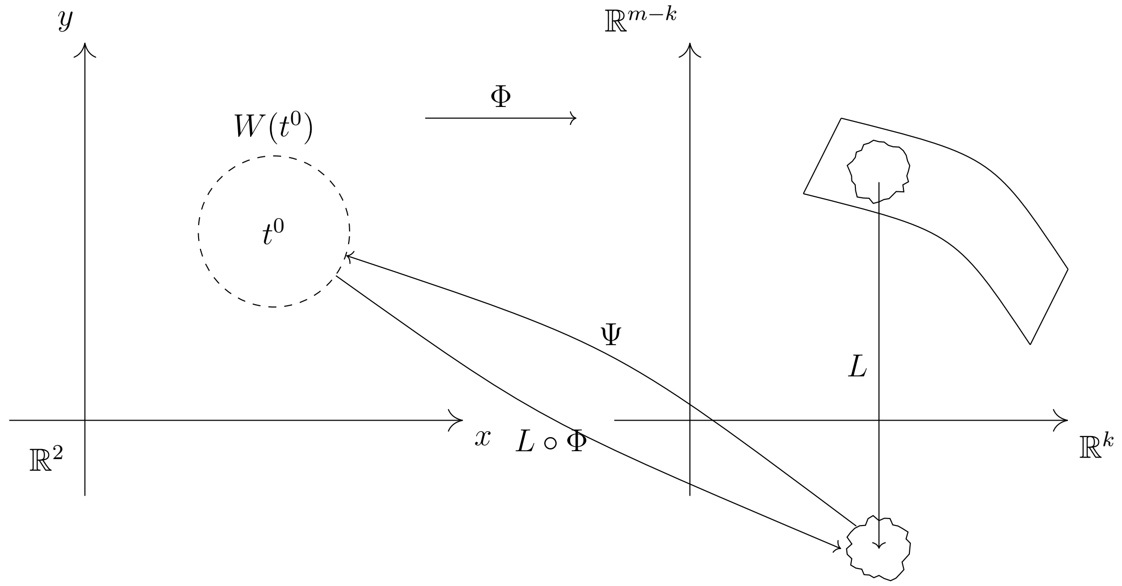
$1 \Rightarrow 2$: Φ — параметризация $O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m, \Phi \in C^r, p = \Phi(t^0)$

$\mathrm{rg}\Phi'(t^0) = k$

Пусть $\det \left(\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t^0) \right)_{i,j=1\dots k} \neq 0$

Пусть $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекция на первые k координат: $(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_k)$

Тогда $(L \circ \Phi)'$ — невырожденный оператор $\Rightarrow$ локальный диффеоморфизм. Тогда если $W(t^0)$ — окрестность точки t^0, то $L \circ \Phi : W \to V \subset \mathbb{R}^k$ — диффеоморфизм.



Множество $\Phi(W)$ — график некоторого отображения $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1}$

Берем $x' \in V$, тогда $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$, т.е. $H \in C^r$

Множество $\Phi(W)$ открыто в M по топологическому определению непрерывности $\Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$, где $\tilde{U}$ открыто в $\mathbb{R}^m$

Можно считать, что $\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$, т.к. $\mathbb{R}^{m-k}$ открыто.

Пусть $f_j : \tilde{U} \to \mathbb{R}, x \mapsto H_j(L(x)) - x_{k+j}$. Тогда $x \in M \cap \tilde{U}(= \Phi(W)) \Leftrightarrow f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{grad} f_1(p) \\ \vdots \\ \mathrm{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg} = k \Rightarrow$ ЛНЗ

$2 \Rightarrow 1$: $F := (f_1 \dots f_{m-k})$

$$I := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

Градиенты ЛНЗ $\Rightarrow \mathrm{rg} I = m - k$.

Пусть ранг реализуется на последних $m-k$ столбцах, т.е.

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1\dots m-k} \neq 0$$

$F(x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_m) = 0$ при $x \in \tilde{U}$

По т. о неявном отображении:

$\exists P$ — окр. $(x_1 \dots x_k)$ в $\mathbb{R}^m$

$\exists Q$ — окр. $(x_{k+1} \dots x_m)$ в $\mathbb{R}^{m-k}$

$\exists H \in C^r : P \to Q : F(x', H(x')) \equiv 0$ для $x' \in P$

Тогда $\Phi : P \to \mathbb{R}^m : (x_1 \dots x_k) \mapsto (x_1 \dots x_k, H_1(x_1 \dots x_k), H_2(x_1 \dots x_k) \dots H_{m-k}(x_1 \dots x_k))$

Φ — гомеоморфизм P и $M \cap \tilde{U}$, потому что Φ^{-1} — фактически проекция.

$\square$

Следствие 2.1 (о двух параметризациях).

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное C^r-гладкое многообразие
- $p \in M$
- $\exists$ две параметризации:

  $\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_1(t^0) = p$

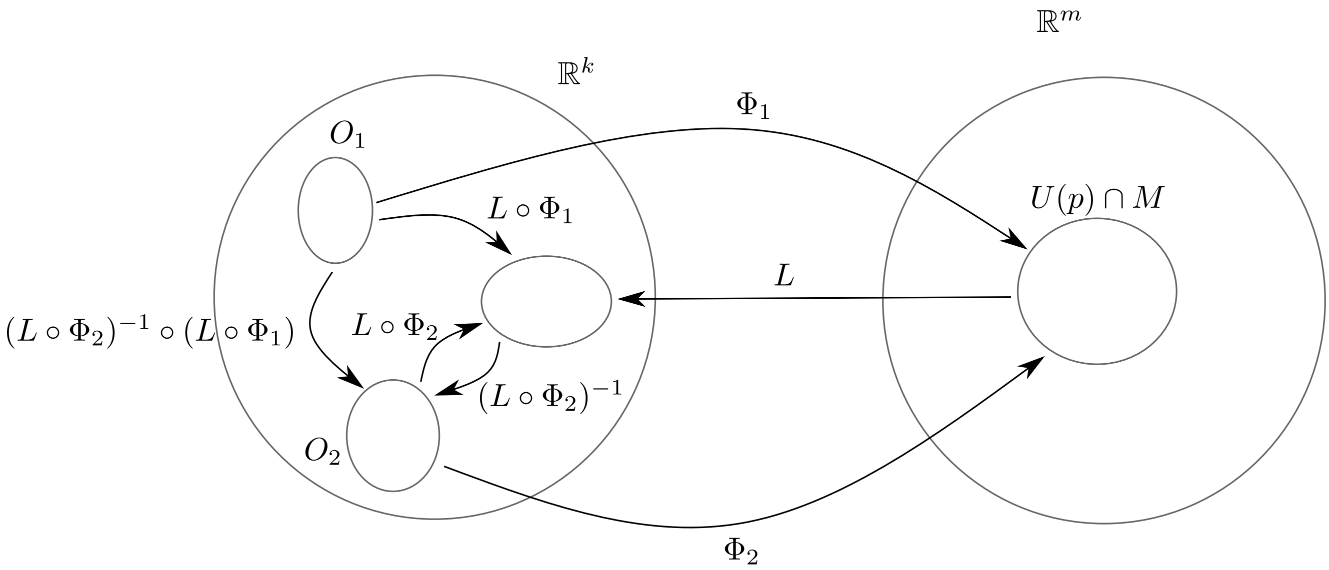
$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_2(s^0) = p$

Тогда $\exists$ диффеоморфизм $\Psi : O_1 \to O_2$, такой что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

Доказательство.

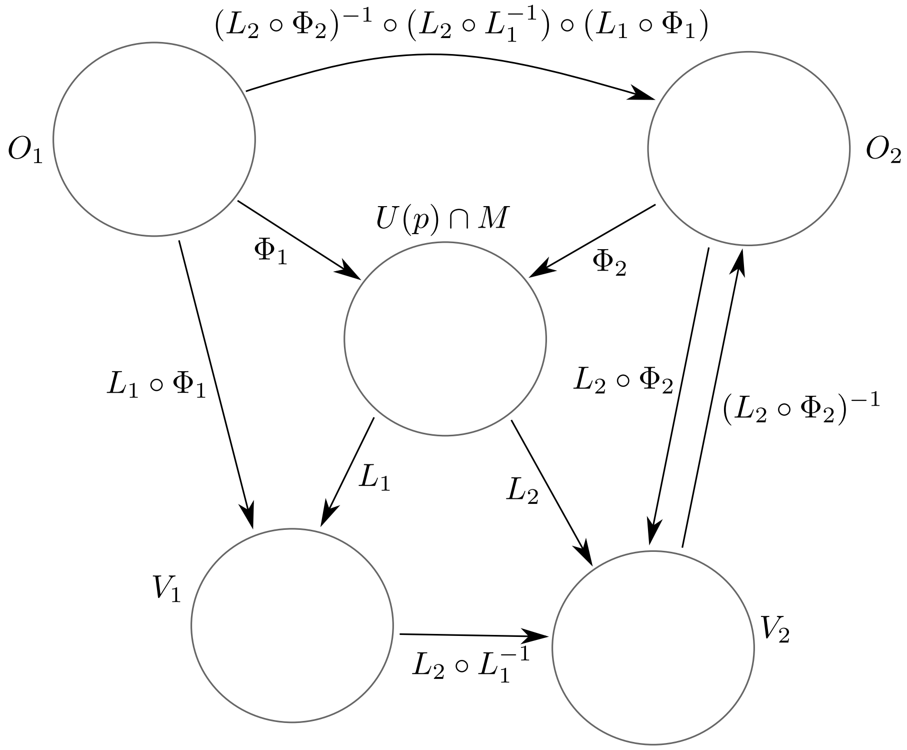
Частный случай: Пусть $\mathrm{rg}\Phi_1'(t^0), \mathrm{rg}\Phi_2'(s^0)$ достигается на первых k столбцах.

Тогда $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta\text{ — искомый диффеоморфизм}}$



Общий случай: $\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$

Кажется, в формуле ошибка — см. иллюстрацию.



$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Гладкость очевидна в силу гладкости всех элементов.

Невырожденность мы не доказали, поэтому то, что это диффеоморфизм — ещё не доказано. Возможно, это будет на следующей лекции.

$\square$