

Теорема 1 (достаточное условие экстремума). Выполняется условие теоремы о необходимом условии экстремума, то есть:

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$: если $\Phi'(a)h = 0$, то можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$.

Пусть $G(x) = f(x) - \langle \lambda, \Phi(x) \rangle$, где λ берется из необходимого условия экстремума.

Рассмотрим квадратичную форму $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$.

Тогда:

1. Если $Q(h)$ положительно определена, a — точка минимума
2. Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — точка максимума
3. Если $Q(h)$ не знакоопределена, a — не экстремум
4. Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= G(a+h) - G(a) \\ &= dG(a, h) + \frac{1}{2}d^2G(a, h) + o(|h|^2) \\ &= \frac{1}{2}d^2G(a, \tilde{h}) + o(|h|^2) > 0 \end{aligned}$$

Объяснение переходов:

1. $a+h \in M_\Phi$
2. Формула Тейлора
3. $a+\tilde{h}$ лежит на касательной поверхности, $dG(a, h) = 0$, $h \simeq \tilde{h}$

Это нестрогое доказательство, но этого нам достаточно. □

Пример.

- $f = x^2z^2 + y^3$
- $\Phi(x, y, z) = xyz - 6$

- $a = (1, 2, 3)$
- $\lambda = 1$

Найдем экстремум.

1. a — подозрительная точка?

$$G = x^2 z^2 + y^3 - 12x - 9y - 4z - xyz + 6$$

$$G'_x = 0 \quad 2xz^2 - 12 - yz = 0 \text{ — подходит}$$

В $G'_y = 0, G'_z = 0$ — подходит

- 2.

$$\begin{aligned} d^2 G &= 2z^2 dx^2 + 2x^2 dz^2 + 6y dy^2 + 2(4xz - y) dx dz + 2(-x) dy dz - 2z dx dy \\ &\stackrel{\text{подст. } a}{=} 18dx^2 + 2dz^2 + 12dy^2 + 20dx dz - 2dy dz - 6dx dy \end{aligned}$$

Найдём знак этого выражения, если (dx, dy, dz) удовлетворяет $d\Phi = 0$

$$yz dx + xz dy + xy dz = 0 \xrightarrow{\text{в точке } a} 6dx + 3dy + 2dz = 0 \Rightarrow dz = -3dx - \frac{3}{2}dy$$

$$\begin{aligned} d^2 G \Big|_{d\Phi=0} &= 18dx^2 + 2 \left(3dx + \frac{3}{2} \right)^2 + 12dy^2 - 10dx(6dx + 3dy) + dy(6dx + 3dy) - 6dx dy \\ &= -24dx^2 + 19.5dy^2 + \dots dx dy \end{aligned}$$

Экстремума в a нет, т.к. форма неопределена, т.к. $\begin{cases} dx = 1, dy = 0 \Rightarrow d^2 G < 0 \\ dx = 0, dy = 1 \Rightarrow d^2 G > 0 \end{cases}$

Такие задачи (где параметр — функция) называются вариационное исчисление.

Функциональные последовательности и ряды

Теорема 1 (Стокса-Зайдля).

- $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- $x_0 \in X$
- f_n непрерывна в x_0

$$\bullet f_n \xrightarrow[X]{} f$$

Тогда f непрерывна в x_0 .

Доказательство. $|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$ — верно $\forall x, \forall n$

$$f_n \xrightarrow[X]{} f \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

Берем $\forall \varepsilon > 0$ возьмём любой n , для которого выполняется (1). Тогда подчеркнутые слагаемые $\leq \frac{\varepsilon}{3}$. Теперь для этого n подбираем $U(x_0) : \forall x \in U(x_0) |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Примечание. То же верно, если $f_n, f : X \rightarrow Y$, где Y — метрическое пространство.

Примечание. То же верно, если X — топологическое пространство, т.е. в нём определены открытые множества.

Следствие 1.1. Если $f_n \in C(X)$, $f_n \xrightarrow[X]{} f$, тогда $f \in C(X)$

Примечание. В теореме достаточно требовать $f_n \xrightarrow[W(x_0)]{} f$

В следствии достаточно требовать локальную равномерную сходимость, т.е.

$$\forall x \in X \exists W(x) f_n \xrightarrow[W(x)]{} f$$

Пример. $f_n(x) = x^n, x = (0, 1)$.

$f_n(x) \rightarrow 0$ точно на X

$f_n \not\xrightarrow{\text{равн.}} 0$ на X

Но есть локальная равномерная сходимость:

$$\sup_{x \in (\alpha, \beta)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (\alpha, \beta)} x^n = \beta^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[(\alpha, \beta)]{} f$$

Теорема 2.

- X компакт
- $\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$, где $f_1, f_2 \in C(X)$

Тогда пространство $C(X)$ — полное метрическое пространство с метрикой ρ .

Доказательство. f_n — фундаментальная в $C(X) \stackrel{\text{def}}{\iff}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in X$ вещественная последовательность $(f_n(x_0))$ фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) =: f(x_0)$, тогда f — поточечный предел f_n . Проверим, что $f_n \rightrightarrows f$ и $f \in C(X)$.

В (1) перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \rightrightarrows_X f \xrightarrow{\text{Стокс}} f \in C(X)$$

□

Следствие 2.1. (x_n) — последовательность в полном метрическом пространстве X , x_n сходится $\Leftrightarrow x_n$ фундаментальная.

$$f : \underbrace{X}_{\text{м.п.}} \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{м.п. полное}}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L \xLeftrightarrow[\text{критерий Больцано-Коши}] \forall \varepsilon > 0 \exists U(a) \forall x_1, x_2 \in U(a) \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

В $C(X)$ $f_n \rightrightarrows_X f \Leftrightarrow$ фундаментальность:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (2)$$

$$\sup_{x \in X} |f_n - f| < \varepsilon \quad (3)$$

- (3) \Rightarrow (2)
- (2) $\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n - f| \leq \varepsilon$, но по двойной бухгалтерии это \Leftrightarrow (3)

Предельный переход под знаком интеграла

“Теорема” $f_n \rightarrow f \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Эта теорема неверная.

Пример. $[a, b] = [0, 1]$

$$f_n(x) = nx^{n-1}(1-x^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) \equiv 0$$

$$\int_a^b f_n = \int_0^1 nx^{n-1}(1-x^n)dx \stackrel{y:=x^n}{=} \int_0^1 (1-y)dy = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x) = 0$$

Теорема 2.

- $f, f_n \in C[a, b]$
- $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$

Тогда $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Доказательство.

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a,b]} |f_n - f| (b - a) = \rho(f_n, f)(b - a) \rightarrow 0$$

□

Следствие 2.2 (Правило Лейбница).

- $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$
- f, f'_y — непр. на $[a, b] \times [c, d]$
- $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$

Тогда Φ дифференцируема на $[c, d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} &= \int_a^b \frac{f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx \\ &= \int_a^b f'_y\left(x, y + \frac{\Theta}{n}\right) dx \\ &= \int_a^b g_n(x, y) dx \end{aligned} \quad (4)$$

(4): по т. Лагранжа.

$g_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'_y(x, y)$ на $x \in [a, b]$ по теореме Кантора о равномерной непрерывности, и мы считаем y фиксированным.

Таким образом, $\Phi'(y) \leftarrow \frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \rightarrow \int_a^b f'_y(x, y) dx$

□

Теорема 3 (о предельном переходе под знаком производной).

- $f_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $f_n \rightarrow f$ поточечно на $\langle a, b \rangle$

$$\bullet f'_n \xrightarrow[\langle a, b \rangle]{} \varphi$$

Тогда $f \in C^1\langle a, b \rangle$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f \\ D \downarrow & & \vdots \downarrow \\ f'_n & \xrightarrow{\quad} & \varphi \end{array}$$

Доказательство. $\forall x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$:

$$\begin{aligned} f'_n \xrightarrow{[x_0, x_1]} \varphi &\xrightarrow{\text{теорема 2}} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ &\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f(x_1) - f(x_0) &\xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f(x_1) - f(x_0) &\rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} f - \text{первообразная } \varphi \\ \varphi - \text{непр.} \end{cases} \Rightarrow f' = \varphi$$

□

Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение.

- X — произвольное множество
- $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$

$\sum u_n(x)$ **сходится поточечно** (к сумме $S(x)$) на X , если $S_N(x) := \sum_{n=0}^N u_n(x)$, $S_N(x) \rightarrow S(x)$ поточечно на X .

Определение.

- X — произвольное множество
- Y — нормированное пространство
- $u_n : X \rightarrow Y$

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $E \subset X : S_N \xrightarrow[E]{N \rightarrow +\infty} S$

Примечание. $\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\Rightarrow \sum u_n(x)$ поточечно сходится к той же сумме.

Доказательство.

$$\sup_{x \in E} |S_N - S| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \forall x_0 \in E : |S_N(x_0) - S(x_0)| \leq \sup_{x \in E} |S_N - S| \rightarrow 0$$

□

Примечание. Остаток ряда: $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$, $S(x) = S_N(x) + R_N(x)$

Ряд сходится на $E \Leftrightarrow R_N \xrightarrow[E]{} \mathbf{0}$ — тождественный ноль.

Примечание. Необходимое условие равномерной сходимости: $\sum u_n(x)$ — сходится на $E \Rightarrow u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Доказательство. $u_n = R_{n-1} - R_n$

□