

1. Обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как $\vdash_{\text{и}}$, а выводимость в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как $\vdash_{\text{е}}$.

Заметим, что хоть языки этих исчислений и отличаются, мы можем построить преобразование высказываний этих исчислений друг в друга: приняв $\perp \Rightarrow A \& \neg A$ и $\neg \alpha \Rightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$. Будем обозначать высказывания в гильбертовском ИИВ обычными греческими буквами, а соответствующие им высказывания в ИИВ натурального вывода — буквами с апострофами: α', β', \dots .

- (а) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$: предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для одного случая базы и одного случая перехода индукции.

Общая схема: перебираем шаги доказательства в гильбертовом стиле и добавляем соответствующие шаги в естественном выводе в зависимости от происхождения этого шага.

База: рассмотрим случай $\gamma_1 \in \Gamma$. Тогда дерево вывода $\gamma_1 : \overline{\Gamma \vdash \gamma_1, \gamma_1 \in \Gamma}$

Переход: рассмотрим случай МР. Тогда дерево вывода $\gamma_n : \frac{\overline{\Gamma \vdash \gamma_i \rightarrow \gamma_k} \quad \overline{\Gamma \vdash \gamma_i}}{\Gamma \vdash \gamma_k}$

- (b) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$.

Докажем по индукции по высоте дерева.

Доказательство. База: $n = 1$. Единственный случай — аксиома. Он очевиден.

Переход:

- i. $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$. По индукционному предположению $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ и по теореме об индукции $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- ii. $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}$. По индукционному предположению $\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi$. Объединим два доказательства, припишем аксиому $\exists \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \& \psi$ и применим дважды МР.
- iii. $\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$. По индукционному предположению $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \vdash \varphi$. Объединим два доказательства, используем МР.

Прочие случаи аналогичны. □

2. Рассмотрим \mathbb{N}_0 (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций $(+)$ и (\cdot) в данной решётке, есть ли в ней псевдодополнение, определены ли 0 или 1? Приведите несколько свойств

традиционных определений $(+)$ и (\cdot) , которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и несколько свойств, которые перестанут выполняться.

$$a + b = \max(a, b) \quad a \cdot b = \min(a, b)$$

Псевдополнения нет для произвольных элементов, т.к. $\min(a, c) \leq b$ не ограничивает сверху c для $a \leq b$. Для $a \not\leq b$ $a \rightarrow b = b$.

0 это 0, т.к. $\forall x \in \mathbb{N}_0 \quad 0 \leq x$

1 нет, т.к. $1 + 1 \not\leq 1$

Выполнены:

- (a) $a \cdot 0 = 0$
- (b) $a + 0 = a$
- (c) $a + b + c = a + (b + c)$
- (d) $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (e) $a + b = b + a$
- (f) $a \cdot b = b \cdot a$

Не выполнены:

- (a) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

3. Постройте следующие примеры:

- (a) • непустого частично-упорядоченного множества, не имеющего операций $(+)$ и (\cdot) ни для каких элементов;

Такого не существует, т.к. $\forall a \quad a \leq a$, следовательно в $a + a$ все элементы сравнимы с a и при этом $a \in (a + a)$. Таким образом, наименьший — a . Аналогично можно сказать про \cdot .

- имеющего операцию $(+)$ для всех элементов, но не имеющего (\cdot) для некоторых;

Следующий номер, но наоборот.

- имеющего операцию (\cdot) для всех элементов, но не имеющего $(+)$ для некоторых.

$\{1, 2, 3\}$, упорядоченное по делимости.

- (b) • решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой;
 \mathbb{N}_0 со стандартным порядком.

- дистрибутивной, но не импликативной решётки;

\mathbb{Z} и его конечные подмножества с отношением \subset , т.е. $\{X \mid X \subset \mathbb{Z}, |X| \in \mathbb{N}_0\}$. Дистрибутивность тривиальна из теории множеств, как и то, что это решетка. Нет $\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$, т.к. $\{c \mid \{0\} \cdot c \leq \mathbb{Z}\}$ есть все конечные подмножества, а среди них нет наибольшего.

- импликативной решётки без 0.

$$-\mathbb{N}_0, \leq$$

4. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:

- (а) ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

Тривиально из теории множеств.

- (b) монотонность: пусть $a \preceq b$ и $c \preceq d$, тогда $a + c \preceq b + d$ и $a \cdot c \preceq b \cdot d$;

$a \leq b \Rightarrow a \leq b + d, c \leq d \Rightarrow c \leq b + d$. Таким образом, $a + c \leq b + d$.

Вторая часть аналогично.

- (c) Законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;

i. $a \cdot (a + b) = a$

$a + b$ либо $= a$, либо $\leq a$. В обоих случаях $a \cdot (a + b) = a$

ii. $a + (a \cdot b) = a$

$a + b$ либо $= a$, либо $\geq a$. В обоих случаях $a + (a \cdot b) = a$

- (d) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;

$$a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow 1 \in \{c \mid a \cdot c \leq b\} \Leftrightarrow a \cdot 1 \leq b \Leftrightarrow a \leq b$$

- (e) из $a \preceq b$ следует $b \rightarrow c \preceq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \preceq c \rightarrow b$;

$$a \cdot (b \rightarrow c) \leq b \cdot (b \rightarrow c) \leq c$$

$$b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$$

$$c \cdot (c \rightarrow a) \leq a \leq b$$

$$c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$$

- (f) из $a \preceq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \preceq c$;

$$a \leq b \rightarrow c \Rightarrow \exists d : \begin{cases} d \geq a \\ b \cdot d \leq c \end{cases} \Rightarrow b \cdot a \leq c$$

Так как множество, из которого берется $b \cdot a$ есть подмножество " $b \cdot d$ "

$$(g) \ b \leq a \rightarrow b \text{ и } a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1;$$

$$\begin{aligned} b \cdot a &\leq b \\ a \cdot b &\leq b \\ b &\leq a \rightarrow b \end{aligned}$$

$a \leq b \rightarrow a$ по пункту d.

$$(h) \ a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c));$$

$$(i) \ a \leq b \rightarrow a \cdot b \text{ и } a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$$

$$(j) \ a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$$

5. Покажите, что импликативная решётка дистрибутивна.

Пусть $d = a \cdot b + a \cdot c$. Рассмотрим $a \rightarrow d$.

$$a \cdot b \leq d \tag{1}$$

$$b \leq a \rightarrow d \tag{2}$$

$$a \cdot c \leq d \tag{3}$$

$$c \leq a \rightarrow d \tag{4}$$

$$b + c \leq a \rightarrow d \tag{5}$$

$$a \cdot (b + c) \leq a \cdot (a \rightarrow d) \tag{6}$$

$$\leq d \tag{7}$$

$$= a \cdot b + a \cdot c \tag{8}$$

- (1) и (3): по построению d
- (2) и (4): по определению \rightarrow
- (5): из (2) и (4)

Итого $a \cdot (b + c) \leq a \cdot b + a \cdot c$, покажем, что $a \cdot (b + c) \geq a \cdot b + a \cdot c$

$$a \cdot b \leq a \tag{9}$$

$$a \cdot b \leq b \leq b + c \tag{10}$$

$$a \cdot b \leq a \cdot (b + c) \tag{11}$$

$$a \cdot c \leq a \cdot (b + c) \quad (12)$$

$$a \cdot b + a \cdot c \leq a \cdot (b + c) \quad (13)$$

- (12): аналогично (11)

6. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$) также выполнено и $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

$$(a + b) \cdot (a + c) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot c \quad (14)$$

$$= a + (a + b) \cdot c \quad (15)$$

$$= a + a \cdot c + b \cdot c \quad (16)$$

$$= a + b \cdot c \quad (17)$$

- (14): по дистрибутивности

7. Рассмотрим топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$, упорядочим его топологию Ω отношением \subseteq . Покажите, что такая конструкция является псевдобулевой алгеброй, а если топология — дискретная (любое подмножество X открыто), то булевой алгеброй.
8. Докажите, что ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать псевдобулеву алгебру, а функции оценок определить так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \ \& \ \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0 \\ \llbracket \perp \rrbracket &= 0 \end{aligned}$$

9. Пусть задано отношение *предпорядка* R (транзитивное и рефлексивное, но необязательно антисимметричное) на множестве A . Напомним несколько определений:

- определим отношение $R^= := \{ \langle x, y \rangle \mid xRy \text{ и } yRx \}$;
- $[a]_{R^=} := \{ x \mid aR^=x \}$ — класс эквивалентности, порождённый элементом a ;
- фактор-множество $A/R^= := \{ [a]_{R^=} \mid a \in A \}$;
- на $A/R^=$ можно перенести отношение $R^* := \{ \langle [a], [b] \rangle \mid aRb \}$.

Покажите, что: отношение $R^=$ — отношение эквивалентности; если $x \in [a]_{R^=}$, $y \in [b]_{R^=}$ и aRb , то xRy ; отношение R^* — отношение порядка на $A/R^=$.

10. Покажем, что конструкция из определения алгебры Линденбаума действительно является решёткой:

- (a) Покажите, что отношение (\approx) — отношение эквивалентности (напомним, что $\alpha \preceq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$, а $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$). Подсказка: воспользуйтесь предыдущим заданием.
- (b) Покажите, что $[\alpha]_{\approx} \cdot [\beta]_{\approx} = [\alpha \& \beta]_{\approx}$. Для этого, например, можно показать:
- $\alpha \& \beta \preceq \alpha$;
 - если $\gamma \preceq \alpha$ и $\gamma \preceq \beta$, то $\gamma \preceq \alpha \& \beta$;
 - операция однозначно определена для всех элементов решётки (то есть определена для всех классов эквивалентности и не зависит от выбора представителей). Подсказка: воспользуйтесь предыдущим заданием.
- (c) Покажите, что $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$.
- (d) Покажите, что $[\alpha] \rightarrow [\beta] = [\alpha \rightarrow \beta]$.
- (e) Найдите классы эквивалентности для 0 и 1.