

# 1 Обратный оператор

## 1.1 Единица. Обратный элемент

$A(K)$  — алгебра над полем  $K$

**Определение.** Единицей алгебры называется такой её элемент  $e \in A$ , что

$$\forall a \in A \quad a \cdot e = e \cdot a = a$$

Кроме того, существуют левая и правая единицы:

$$e_L : e_L \cdot a = a \quad e_R : a \cdot e_R = a \quad \forall a \in A$$

**Лемма 1.** Если в  $A \exists e_L$  и  $e_R \Rightarrow e_L = e_R \stackrel{\Delta}{=} e$

*Доказательство.*

$$e_L = e_L e_R = e_R$$

□

**Лемма 2.**  $\exists! e$

*Доказательство.* Тривиально.

□

$$\triangleleft x, y \in A : x \cdot y = e$$

**Определение.** Если  $x \cdot y = e$ , то  $x$  называется левым обратным к  $y$ , а  $y$  называется правым обратным к  $x$ .

**Определение.**  $\exists z \in A, x : xz = zx = e$ , тогда  $x$  — обратный к  $z$ , обозначается  $x = z^{-1}$ , при этом  $z$  называется обратимым.

**Лемма 3.** Если  $y, z \in A \exists x$  — левый обратимый и  $y$  — правый обратимый. Тогда:

1.  $z$  — обратимый
2.  $z^{-1} = y \cdot x$

*Доказательство.*  $\triangleleft z \cdot yx = e \cdot x = x$

$$\triangleleft x(zy) = x \quad (xz)y = y \Rightarrow x = y \Rightarrow z \text{ — обратимый.}$$

□

**Пример.** •  $\mathbb{R} \quad e = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$\bullet \mathbb{C} \quad e = 1 + 0 \cdot i \quad z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

$$\bullet \mathbb{R}^4 \quad e = 1 + 0i + 0j + 0k \quad q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

## 1.2 Обратная матрица

$\triangleleft K_n^n$  — алгебра матриц

**Определение.** Единичной называется матрица  $E$ , такая что  $\forall A \in K_n^n$ :

$$AE = EA = A$$

*Примечание.* Единичная матрица — диагональна:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**Определение.** Обратной к матрице  $A$  называется матрица  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

**Теорема 1.**  $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Способы вычисления  $A^{-1}$

### 1.2.1 Метод Гаусса

$$[A \mid E] \sim [E \mid A^{-1}]$$

*Доказательство.*

$$[A \mid E] = [T_1 A \mid T_1 E] = [T_2 T_1 A \mid T_2 T_1 E] = \dots = [T_n \dots T_1 A \mid T_n \dots T_1 E] = [E \mid T_n \dots T_1 A]$$

$$\triangleleft T_n \dots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \dots T_1$$

□

**Теорема 2.**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

*Доказательство.*  $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$  — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$] \delta_{k_0}^i = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1_{k_0} \ 0 \ \dots \ 0)^T = b$$

$$\beta_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = \det A(a_j \rightarrow b)$$

□

### 1.3 Обратный оператор

$$\varphi : X \rightarrow X$$

**Определение.** Обратным к оператору  $\varphi$  называется оператор  $\varphi^{-1}$ :

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

$$\mathcal{L}(X, X) \simeq K_n^n$$

**Теорема 3.** Оператор  $\varphi$  обратим, если  $\exists$  базис, в котором его матрица невырождена

$$\text{Примечание. } \tilde{A} = T^{-1}AT \quad \det \tilde{A} = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T$$

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

**Определение.** Ядро  $\varphi$  :

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

*Примечание.*  $\text{Ker } \varphi \subset X$

**Лемма 4.**  $\text{Ker } \varphi$  — ЛП

**Определение.** Образ  $\varphi$ :

$$\text{Im } \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

*Примечание.*

$$\text{Im } \varphi \subset Y$$

**Лемма 5.**  $\text{Im } \varphi$  — ЛП

**Теорема 4.** О ядре и образе

$$\varphi : X \rightarrow X \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim X$$

*Доказательство.* ]  $\dim \text{Ker } \varphi = K$

]  $\{e_1 \dots e_k\}$  — базис  $\text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0 \quad \forall j = 1..k$

$\triangleleft \{e_1 \dots e_k; e_{k+1} \dots e_n\}$  — базис  $X$

$$\triangleleft x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad \triangleleft \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=k+1}^n \xi^j \varphi(e_j)$$

$\{\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)\}$  — полный для  $\text{Im } \varphi$ , т.к. любой  $x \in \text{Im } \varphi$  можно по нему разложить.  
Докажем ЛНЗ от обратного:

$$]\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n \text{ — ЛЗ} \Rightarrow \exists \alpha^j : \sum_{j=k+1}^n \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi \left( \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1} \dots e_n \text{ разложима по } e_1 \dots e_k \text{ — противоречие} \\ \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ЛНЗ} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n \text{ — базис } \text{Im } \varphi. \quad \square$$

О существовании  $\varphi^{-1}$

$$\triangleleft \varphi : X \rightarrow Y$$

$$\varphi : \forall x \exists! y \in \text{Im } \varphi : \varphi(x) = y$$

$$\exists \varphi^{-1} : \forall y \in \text{Im } \varphi \exists! x \in X : \varphi^{-1} y = x$$

Обратный оператор существует только к изоморфизмам.

**Теорема 5.**  $\triangleleft \varphi : X \rightarrow X$

$$\exists \varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim \text{Im } \varphi = \dim X \text{ или } \dim \text{Ker } \varphi = 0$$

*Доказательство.*  $\dim \text{Im } \varphi = \dim X \Leftrightarrow \text{Im } \varphi \simeq X \Rightarrow \varphi$  — сюръекция,  $\dim \text{Ker } \varphi = 0 \Rightarrow \forall y \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi$  — инъекция  $\square$

## 2 Внешняя степень ЛОП

$$\triangleleft \Lambda^p \quad \{^{i_1 \dots i_p} F\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \text{ — базис } \Lambda^p$$

$$^{i_1 \dots i_p} F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \quad \dim \Lambda^p = C_n^p$$

]  $\{x_i\}_{i=1}^n$  — набор векторов

$$\det\{x_1 \dots x_n\} := ^{1 \dots n} F(x_1 \dots x_n)$$

$\langle \Lambda_p \setminus \{i_1 \dots i_p F\} \rangle_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$  — базис  $\Lambda_p$

$$\dim \Lambda_p = C_n^p \quad i_1 \dots i_p F = \hat{x}_{i_1} \wedge \hat{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \hat{x}_{i_p} \simeq x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $X \Rightarrow x_i = \xi_i^{j_i} e_{j_i}$

$$\begin{aligned} 1 \dots n F &= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \\ &= \det[\xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n] (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \end{aligned}$$

**Определение.** Определителем набора векторов  $\{x_i\}_{i=1}^n$  называется число  $\det[x_1 \dots x_n]$ , такое, что:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

**Лемма 6.**

$$\text{от } \Lambda^p \quad \det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1 \dots x_n] \text{ от } \Lambda_p$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \det\{x_1 \dots x_n\} &= 1 \dots n F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \\ &= \det\{x_1 \dots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

□

**Определение.**  $\varphi : X \rightarrow X$

**Внешней степенью**  $\varphi^{\Lambda_p}$  оператора  $\varphi$  называется отображение:

$$\varphi^{\Lambda_p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_p)$$

*Примечание.*

$$\varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_p$$

$$\langle p = n$$

$$\begin{aligned} \varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) &= \varphi(e_1) \wedge \varphi(e_2) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n) = a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge \dots \wedge a_1^{j_n} e_{j_n} = \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_n}^n e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

**Определение.** Определителем линейного оператора  $\varphi$  называется число, такое что:

$$\det \varphi = \det[\varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n)] = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

*Примечание.*

$$\forall \omega \in \Lambda_n \quad \varphi^{\Lambda_n} \omega = \det \varphi \cdot \omega$$

$$\omega \in \Lambda_n \Rightarrow \omega = \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

$$\varphi^{\Lambda_n} \omega = \alpha \varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \alpha \det \varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det \varphi \cdot \omega$$

**Определение.** Грассманова алгебра — алгебра по внешнему произведению

**Теорема 6.**

$$\det(\varphi\psi) = \det \varphi \det \psi$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \triangleleft \det(\varphi\psi) e_1 \wedge \dots \wedge e_n &= (\varphi\psi)^{\Lambda_n} e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \dots \wedge \varphi(\psi(e_n)) = \\ &= \varphi^{\Lambda_n}(\psi(e_1) \wedge \dots \wedge \psi(e_n)) = \det \varphi \det \psi e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

□