

Лемма 1 (о структуре компактного оператора).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда \exists ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

Примечание. Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

Доказательство. $W := V^*V$ — самосопряженный оператор (матрица симметрична относительно диагонали).

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные (возможно с повторениями)
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

Примечание. Пока мы в \mathbb{R}^m (а не в \mathbb{C}^m), $*$ есть транспонирование. В комплексном случае ещё берётся сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- 1: т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i .
- 2: из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^m V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \stackrel{\text{def } h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \stackrel{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \stackrel{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- 3: из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- 4: т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i .
- 5: при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i} \sqrt{c_i}} = 1$

Примечание. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \stackrel{\text{def}}{=} V \left(\sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i \right) \stackrel{(6)}{=} \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

- 6: в силу линейности V

$$(\det V)^2 \stackrel{(7)}{=} \det(V^* V) \stackrel{\text{def}}{=} \det W \stackrel{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

- 7: в силу мультипликативности \det и инвариантности относительно транспонирования.
- 8: т.к. \det инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \dots c_m$.

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

Теорема 1 (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m$ $V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

1. Если $\det V = 0$ $\text{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E$ $V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если $\det V \neq 0$ $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти k , для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ — единичный куб на векторах g_i .

$V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$.

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом, $k = |\det V|$

□

Интеграл

Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i$ — разбиение множества.
2. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \quad f|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$
2. $f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

Свойства.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые:

\exists разбиение X , допустимое и для f , и для g :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} & g &= \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k} \\ f &= \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} & g &= \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k} \end{aligned}$$



Рис. 1: Ступенчатая функция

2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$ — ступенчатые.

Определение. $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — лебегово множество функции f

Аналогично можно использовать $E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a)$

Примечание.

$$E(f \geq a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \geq a)^c$$

$$E(f \leq a) = \bigcap_{b > a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f измерима на множестве E , если $\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

Вместо “ f измерима на X ” говорят просто “измерима”.

Если $X = \mathbb{R}^m$, мера — мера Лебега, тогда f — измеримо по Лебегу.

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \ E(f < a) — \text{измеримо}$
2. $\forall a \ E(f \leq a) — \text{измеримо}$
3. $\forall a \ E(f > a) — \text{измеримо}$
4. $\forall a \ E(f \geq a) — \text{измеримо}$

Доказательство. Тривиально по соображениям выше. □

Пример.

1. $E \subset X, E — \text{измеримо} \Rightarrow \chi_E — \text{измеримо}.$

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \emptyset, & a < 0 \\ X \setminus E, & 0 \leq a \leq 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} — \text{непрерывно. Тогда } f — \text{измеримо по Лебегу}.$

Доказательство. $f^{-1}((-\infty, a))$ открыто по топологическому определению открытости, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

Свойства.

1. $f \text{ измеримо на } E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \ E(f = a) \text{ измеримо}.$

В обратную сторону неверно, пример — $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$

2. $f — \text{измеримо} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha f — \text{измеримо}.$

$$\text{Доказательство. } E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \geq 0 \\ \emptyset, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases}$$

□

3. $f — \text{измеримо на } E_1, E_2, \dots \Rightarrow f \text{ измеримо на } E = \bigcup E_k$

4. $f — \text{измеримо на } E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f \text{ измеримо на } E'$

Доказательство. $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$

□

5. $f \neq 0, \text{ измеримо на } E \Rightarrow \frac{1}{f} \text{ измеримо на } E.$

6. $f \geq 0$, измеримо на E , $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$ измеримо на E .

Это неверно, т.к. при $f \equiv 0$, $\alpha = -1 \nexists f^\alpha$

Теорема 2. f_n — измеримо на X . Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.
2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.
3. Если $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \stackrel{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

9:

- $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.

$$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

- $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. \sup и \inf измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

□

Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b] := g(b) - g(a)$ — σ -конечный объем (и даже σ -конечная мера на \mathcal{P}^1)

Также можно определить для монотонной, но непрерывной g . Тогда в точках разрыва $\exists g(a+0), g(a-0)$. Пусть $\mu[a, b] = g(b-0) - g(a-0)$. Такое изменение нужно, потому что исходное μ не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру μ_g на некоторой σ -алгебре. Это мера Лебега-Стилтьеса.

Пример. $g(x) = [x]$, тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если μ_g определена на Борелевской σ -алгебре, то она называется мерой Бореля-Стилтьеса.