

Пусть мы хотим перейти в полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ в двойном интеграле $\iint_{\Omega} f dx dy$. Как расставлять пределы интегрирования? Пусть первая переменная будет r . Тогда:

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{r_0(\varphi)}^{r_1(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr$$



Рис. 1: Выбор φ_0 , φ_1

Для первой переменной φ :

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_{r_0}^{r_1} dr \int_{\varphi_0(r)}^{\varphi_1(r)} f r d\varphi$$

Упражнение. Пусть Ω — единичный круг

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f r dr$$

Упражнение. Пусть Ω — треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} dr f r = \int_0^1 dr \int_0^{\pi/4} f d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\pi/4} f d\varphi$$

Упражнение. Пусть Ω — треугольник с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^{\frac{1}{\cos \varphi}} f r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^{\frac{1}{\sin \varphi}} f r dr$$

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_{\sqrt{2}/2}^1 dr \int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}r} - \frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}r}} d\varphi f r + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} d\varphi f r$$

Упражнение.

$$x^2 + y^2 \leq ax$$

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f r dr = \int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{a}{r}}^{\arccos \frac{a}{r}} d\varphi f r$$

Упражнение.

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

$$\int_0^a dr \int_{-\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}} f r d\varphi$$

Упражнение (3957).

$$\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy$$

Замена $u = x, v = \frac{y}{x}$

$$\int_a^b du \int_{\alpha}^{\beta} dv f J$$