Продолжение доказательства

Доказательство. По лемме позиция выигрышна хотя бы для одного игрока. Рассмотрим случай, когда она выигрышна для белого игрока.

В точке $A = (0, k) \rightsquigarrow (0, \frac{k}{n})$

$$\left| f_1(\frac{A}{n}) - \frac{A_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

$A_1 = 0; f_1(\frac{A}{n}) \geq 0 \Rightarrow$ при $v = A$

$$f_1(\frac{v}{n}) - \frac{v_1}{n} \geq 0$$

В точке $B = (n, l) \rightsquigarrow (1, \frac{l}{n})$

$$\left| f_1\left(\frac{B}{n}\right) - \frac{B_1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

При $v = B$

$$f_1\left(\frac{v}{n}\right) - \frac{v_1}{n} \geq -\varepsilon$$

□

1 Определенный интеграл

1.1 Площадь

Определение. $\mathcal{E}$ — множество всех ограниченных фигур в $\mathbb{R}^2$ (“фигура” = подмножество $\mathbb{R}^2$)

Определение. **Площадь** это $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, такое что:

1. $A \in \mathcal{E} \quad A = A_1 \sqcup A_2 \quad \sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$ *(конечная аддитивность)*
2. $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (d - c)(b - a)$

$\sqcup$ — **дизьюнктное объединение**; если $x \in A_1$ и $x \in A_2$, то x “дважды $\in$” $A_1 \sqcup A_2$

Мы пока что не знаем, существует ли площадь.

Примечание. 1. Монотонность: $A \subset B \quad \sigma A \leq \sigma B$

2. σ(вертик. отр.) $= 0$

Определение. **Ослабленная площадь** $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$:

1. Монотонна: $E \subset D \Rightarrow \sigma E \leq \sigma D$
2. Нормирована

3. Ослабленная аддитивность: $E \in \mathcal{E} \quad E = E_1 \cup E_2 \quad E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 лежат каждый в своей полуплоскости относительно этого отрезка $\Rightarrow \sigma E = \sigma E_1 + \sigma E_2$

Отрезок вертикальный, потому что этого требует определение определенного интеграла.

Пример. 1. $\sigma E = \inf \left(\sum \sigma P_i : E \subset \bigcup\limits_{\text{конечное}} P_k, P_k - \text{прямоугольники} \right)$

2. $\sigma E = \inf \left(\sum \sigma P_i : E \subset \bigcup\limits_{\text{счётн.}} P_k, P_k - \text{прямоугольники} \right)$

Это разные площади. Покажем это на примере фигуры “все точки в квадрате с рациональными координатами”. Первая площадь накрывает весь квадрат $\Rightarrow \sigma_1 = 1$. $\sigma_2 = 0$. Покажем это, накрыв n-тую точку квадратом размера $\frac{\varepsilon}{2^n} \times \frac{\varepsilon}{2^n}$. $\sum \frac{\varepsilon}{4^n} = \varepsilon \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\varepsilon}{3} \to 0 \Rightarrow \inf = 0$

Определение. $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

$f_+ := \max(f, 0)$ — **положительная срезка**

$f_- := \max(-f, 0)$ — **отрицательная срезка**

Определение. $f : [a, b] \to \mathbb{R}; f \geq 0$

$$\text{Под графиком } (\textit{ПГ})(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b]; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Определение. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \sigma\text{ПГ}(f_+, [a, b]) - \sigma\text{ПГ}(f_-, [a, b])$$

Примечание. 1. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

2. $f \equiv c \Rightarrow \int_a^b f = c(b - a)$

3. $\int_a^b -f = -\int_a^b f$ — верно, т.к. $(-f)_+ = f_-$

4. $\int_a^b 0 = 0$

Свойства интегралов:

1. Аддитивность по промежутку $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Доказательство.

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, b]) = \sigma\Pi\Gamma(f_+, [a, c]) + \sigma\Pi\Gamma(f_+, [c, b])$$

□

2. Монотонность: $f, g \in C[a, b] \quad f \leq g$. Тогда

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство.

$$\Pi\Gamma(f_+) \subset \Pi\Gamma(g_+) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_+) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+)$$

$$\Pi\Gamma(f_-) \supset \Pi\Gamma(g_-) \Rightarrow \sigma\Pi\Gamma(f_-) \geq \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

$$\sigma\Pi\Gamma(f_+) - \sigma\Pi\Gamma(f_-) \leq \sigma\Pi\Gamma(g_+) - \sigma\Pi\Gamma(g_-)$$

□

Следствие 0.1.

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq \max f \cdot (b - a)$$

3.

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Определение. $f \in C[a, b] \quad \Phi : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \Phi(x) = \int_a^x f$ — **интеграл с переменным верхним пределом**

$\Phi(a) = 0$

Теорема 1. $f \in C[a, b] \quad \Phi$ — интеграл с переменным верхним пределом. Тогда

$$\forall x \in [a, b] \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [a, b] \quad y > x, y \leq b$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{\int_a^y f - (\int_a^y f + \int_y^x f)}{y - x} = \frac{\int_x^y f}{y - x} \underset{\substack{\text{т.о.ср.} \\ \exists c \in [x, y]}}{=} \frac{f(c)(y - x)}{y - x} = f(c) \xrightarrow[y \to x+0]{} f(x)$$

$x > y$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \frac{1}{x - y} \int_y^x f = f(c) \xrightarrow[y \to x-0]{} f(x)$$

□

Теорема о существовании первообразной — следствие теоремы Барроу.

Среднее значение функции на промежутке:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Примечание.

$$\Psi(x) = \int_x^b f$$

$$\Psi'(x) = -f(x)$$

$$\left(\int_{x^2}^{10\sqrt{x}+1} f(t)dt\right)' = f(10\sqrt{x}+1)\frac{5}{\sqrt{x}} - f(x^2)2x$$

$$\left(\int_{\int_x^{\cos x} e^{-n^2}dn}^{\int_{x^2}^{e^x} \cos y^3 dy} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt\right)'$$

Этот интеграл не написать в word. Тех нормас, как видите. Это единственное, зачем этот интеграл был написан.

Теорема 2. $f \in C[a,b] \quad F$ — первообр. f

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. $\Phi(x) = \int_a^x f$ — первообр.

$\exists C : F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

□

Примечание. Все ослабленные площади совпадают на ПГ$(f, [a,b]), \quad f \in C[a,b]$

1.2 Правило Лопиталя

Лемма 1. Об ускоренной сходимости

1. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \quad a$ — предельная точка D

   $\exists U(a)$: при $x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$

   Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

Тогда

$$\forall x_k \to a \quad (x_k \neq a, x_k \in D) \quad \exists y_k \to a \quad (y_k \neq a, y_k \in D)$$

такое, что

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$$

Таким образом, $g(y_k) \to 0$ быстрее, чем $g(x_k) \to 0$

2. То же самое, но $\lim f(x) = +\infty, \lim g(x) = +\infty$

Доказательство. 1. Очевидно.

$$\forall k \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f(x_n)| < |g(x_k)|\frac{1}{k} \quad |g(x_n)| < |g(x_k)|\frac{1}{k}$$

$\varepsilon := |g(x_k)|$

$$k = 1 \quad y_1 := \text{какой-нибудь } x_n : \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < 1 \quad \left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < 1$$

$$k = 2 \quad y_2 := \text{какой-нибудь } x_n : \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{2} \quad \left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

2. (a) Частный случай: Пусть $g(x_n)$ возрастает. Берем $k : m := \min\{n : |f(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}$ или

   $|g(x_n)| \geq \sqrt{g(x_k)}\}$

   $y_k := x_{m-1} \Rightarrow |f(y_k)| \leq \sqrt{g(x_k)} \ \ |g(y_k)| \leq \sqrt{g(x_k)}$

$$\left|\frac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$\left|\frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right| \leq \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

   Зачем нужно возрастание?

   (b) Общий случай: $\tilde{g}(x_k) := \inf\{g(x_n), n = k, k+1\ldots\} \quad \tilde{g}(x_k) \to +\infty$

   $\tilde{g}(x_k) \uparrow, \tilde{g}(x_k) \leq g(x_k)$. Как в пункте (a) построим y_k

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \leq \frac{f(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$\frac{g(y_k)}{g(x_k)} \le \frac{g(y_k)}{\tilde{g}(x_k)} \le \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(x_k)}} \to 0$$

□

Теорема 3. $f, g : (a, b) \to \mathbb{R} \quad a \in \overline{\mathbb{R}}$

f, g — дифф., $g' \ne 0$ на (a, b)

Пусть $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to a+0]{} A \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность $\left\{\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{+\infty}\right\}$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство. $g' \ne 0 \Rightarrow g'$ — сохр. знак $\Rightarrow g$ — монотонна.

Для $\frac{0}{0} \quad g(x) \ne 0$ в (a, b)

По Гейне $x_k \to a \ \ (x_k \ne a, x_k \in (a, b))$

Выберем y_k по лемме об ускоренной сходимости.

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \text{ — т. Коши}$$

$$f(x_k) - f(y_k) = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}(g(x_k) - g(y_k))$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} - \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \to 0 \quad \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \to 0$$

$x_k \to a \quad y_k \to a \quad \xi_k \to a$ □

Пример. $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{g'(x)} = 1$$

$$\int_0^x e^{t^2} dt \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$$

$$\lim \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{g(x)} = \lim \frac{e^{x^2}}{g'(x)} = 1$$