

Пример.  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0$$

$$f'(0) = ?$$

Следствие из теоремы Лагранжа:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \text{ тогда } f'(x_0) = A$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim 2 \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{4 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5} = \text{больно, не надо так}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim \frac{\frac{-6}{x^4}}{\frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{\frac{3}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim \frac{\frac{-3}{x^2}}{\frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{\frac{3}{2} x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что многочлен Тейлора этой функции при  $x \rightarrow 0$  не становится точнее при увеличении числа слагаемых, т.к. они все = 0. Таким образом, эта функция по определению неаналитическая.

Будем складывать дроби неправильно:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Это работает в неравенствах, если  $a, b, c, d > 0$

**Это неверно, т.к.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}$ , но верно следующее:**

**Лемма 1. “Неправильное” сложение дробей:**

$$a, b, c, d > 0$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Доказательство.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ba - ba + bc - ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d} \left( \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} = \frac{b}{b+d} \left( \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0$$

□

**Теорема 1.** Теорема Штольца.

Это дискретная версия правила Лопиталя.

$y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0$  — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда  $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = a$

*Примечание.* Аналогичное верно, если  $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty$

Доказательство. 1.  $a > 0$  ( $a \neq +\infty$ )

$$\forall \varepsilon > 0 \quad [\varepsilon < a] \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем  $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению: (оно применимо, т.к. все дроби положительные)

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \rightarrow +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2.  $a = +\infty$  доказывается так же

3.  $a < 0$  поменяем знак и докажем так же

4.  $a = 0$  т.к. знаки  $x_n - x_{n-1}$  и  $y_n - y_{n-1}$  фикс.,  $a = +0$  или  $a = -0$

$$\text{Для } a = +0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$$

□

$$x_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \stackrel{?}{\sim}_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{y_n - y_{n-1}} = \left[ y_n := \frac{n^2}{2} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n - \frac{1}{2}} = 1$$

$$x_n \sim \frac{n^2}{2}$$

$$x_n = 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sim z_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{z_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha - \left( \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)}{z_n - z_{n-1}}$$

$$n^\alpha - \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{\alpha+1} \right) =$$

$$= n^\alpha - \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \left( (\alpha+1) \frac{1}{n} - \frac{(\alpha+1)\alpha}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1}) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{z_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1}}{z_n - z_{n-1}}$$

Функциональные свойства определенного интеграла:

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in C[a, b]$

$$\int_a^b \alpha f + \beta g dx = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

*Доказательство.* По формуле Ньютона-Лейбница  $f \leftrightarrow F \quad g \leftrightarrow G \quad \alpha f + \beta g \leftrightarrow \alpha F + \beta G$  □

2. Замена переменных:  $f \in C[a, b]$   $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow [a, b], \varphi \in C^1$

$$[p, q] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$$

Тогда

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

Доказательство.  $f \leftrightarrow F \quad f(\varphi(t))\varphi'(t) \leftrightarrow F(\varphi(t))$  □

Примечание. (а)  $\varphi([p, q])$  может быть шире, чем  $[\varphi(p), \varphi(q)]$

(б)  $\varphi(p)$  может быть  $> \varphi(q)$

3. Интегрирование по частям

$$f|_a^b \stackrel{\text{def}}{=} f(b) - f(a)$$

$$f, g \in C^1[a, b]$$

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Доказательство.

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg' = (fg)' - f'g$$

Проинтегрируем по  $[a, b]$

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

□

Пример. Неравенство Чебышева

$f, g \in C[a, b]$  монот. возр.

$$I_f := \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

Тогда

$$I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$$

$$\int_a^b f \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

*Доказательство.*  $x, y \in [a, b] : x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y), g(x) \geq g(y)$

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по  $x$  по  $[a, b]$  и делим на  $b - a$ :

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по  $y$  по  $[a, b]$  и делим на  $b - a$ :

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

□

*Пример.*

$$\begin{aligned} H_n &:= \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt = \left[ \begin{array}{ll} f = \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n & g = \sin t \\ df = -2n \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t dt & dg = \cos t dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{n!} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t \sin t dt = \\ &= \left[ \begin{array}{ll} f = \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t & g = -\cos t \\ df = \left( -2(n-1) \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} t^2 + \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} \right) dt & dg = \sin t dt \end{array} \right] = \\ &= \left[ df = \left( -2(n-1) \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} t^2 + \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(n-1) \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} - 2(n-1) \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \right] = \\ &= \left[ df = \left( (2n-2) \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} + \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - (n-1) \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \right] = \\ &= \left[ df = \left( (2n-1) \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - (n-1) \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) dt \right] = \\ &= 0 + \frac{2}{(n-1)!} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} t (-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( (2n-1) \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2} (n-1) \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^{n-2} \right) \cos t dt = \\
& = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}
\end{aligned}$$

**Теорема 2.** Число  $\pi$  — иррационально

*Доказательство.* Пусть  $\pi = \frac{p}{q}$ ;  $H_n$  задано выше

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2}$$

$$H_0 = 2, \quad H_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right) \cos t = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = 2t(-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t = 4$$

$H_n = \dots H_1 + \dots H_0 = P_n(\pi^2)$  — многочлен с целыми коэффициентами, степень  $\leq n$

$$q^{2n} P_n \left( \frac{p^2}{q^2} \right) = \text{целое число} = q^{2n} H_n > 0 \Rightarrow q^{2n} H_n \geq 1$$

$$1 \leq \frac{q^{2n}}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt \leq \frac{q^{2n} 4^n}{n!} \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Противоречие. □

$f \leftrightarrow F$

$$\int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (t - x_0)^n dt = \frac{F^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\arcsin t = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{40}t^5 + o(t^5)$$

**Определение.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , кусочно непрерывна

$f$  — непр. на  $[a, b]$  за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

*Пример.*  $f(x) = [x], x \in [0, 2020]$

**Определение.**  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — почти первообразная кусочно непрерывной функции  $f$ :

$F$  — непр. и  $\exists F'(x) = f(x)$  всюду, кроме конечного числа точек

*Пример.*  $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$

$F := |x|$

$f$  — кус. непр.

$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

$$\int_a^b f := \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

Утверждение: Верна формула Ньютона-Лейбница  $f$  — кус. непр. на  $[a, b]$ ,  $F$  — почти первообразная

*Доказательство.*

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum_{k=1}^n F(t) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$$

□

*Пример.* Дискретное неравенство Чебышева

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

*Доказательство.*

$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \dots n$  — задана на  $(0, n]$

$g(x) = \dots b_i$

$I_f I_g \leq I_{fg}$

□

# 1 Приложение определенного интеграла

$Segm\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$  — множество всевозм. отрезков, лежащих в  $\langle a, b \rangle$

**Определение.** Функция промежутка  $\Phi : Segm\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

**Определение.** Аддитивная функция промежутка:  $\Phi$  — функция промежутка и

$$\forall [p, q] \in Segm\langle a, b \rangle \quad \forall r : p < r < q \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, r]) + \Phi([r, q])$$

*Пример.* • Цена куска колбасы от  $p$  до  $q$ .

• Цена билета от станции  $p$  до станции  $q$ .

Эти две функции обычно не аддитивны.

•  $[p, q] \rightarrow \int_p^q f$

**Определение.** Плотность аддитивной функции промежутка:  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — плотность  $\Phi$ , если:

$$\forall \delta \in Segm\langle a, b \rangle \quad \inf_{x \in \delta} f(x) \cdot len_\delta \leq \Phi(\delta) \leq \sup f \cdot len_\delta$$

**Теорема 3.** О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.  $\Phi : Segm\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f$  — плотность  $\Phi$

Тогда  $\Phi([p, q]) = \int_p^q f, \quad \forall [p, q] \in Segm\langle a, b \rangle$

*Доказательство.*

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , x = a \\ \Phi([a, x]) & , x > a \end{cases} \text{ — первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p, q]) = \Phi[a, q] - \Phi[a, p] = F(q) - F(p) = \int_p^q f$$

Докажем утверждение:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi[a, x+h] - \Phi[a, x]}{h} = \frac{\Phi[x, x+h]}{h} = [0 \leq \Theta \leq 1] = f(x+\Theta h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

□

Тут последовал пример про нахождение площади круга, но мне лень.