

**Теорема 1.**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$$

*Доказательство.*

$$\exp z \cdot \exp w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum C_n$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} n! \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n z^k w^{n-k} C_n^k \\ &= \frac{(z + w)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum \frac{(z + w)^n}{n!} = \exp(z + w)$$

□

*Следствие 1.1.*  $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp z \neq 0$

$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ , потому что коэффициенты вещественные и

$$\overline{\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^N \frac{(\bar{z})^n}{n!}$$

*Примечание* (о тригонометрических функциях). Пусть  $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Тогда  $\exp(-ix) = \cos(x) - i\sin(x)$

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

Следовательно:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Пусть  $T(x) = \exp(ix)$ . Тогда  $T(x + y) = T(x)T(y)$ .

$$\cos(x + y) + i\sin(x + y) = (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y))$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

$$|T(x)|^2 = T(x)\overline{T(x)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1$$

То есть  $(\cos x, \sin x)$  — точка на единичной окружности.  $T' = iT$ , то есть  $x \mapsto T(x)$  — движение по единичной окружности с единичным вектором скорости, перпендикулярным радиус-вектору.

Мы неформально показали, что  $\cos = \cos$ ,  $\sin = \sin$ . Для более строгого доказательства см. Рудин “Основы математического анализа”.

## Ряды Тейлора

В этом параграфе все вещественно.

**Определение.**  $f$  — разлагается в степенной ряд в окрестности  $x_0$ , если:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists C_n - \text{вещ. посл.} \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x - x_0)^n \quad (1)$$

*Примечание.* Тогда  $f \in C^\infty(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

**Теорема 2** (о единственности).  $f$  разлагается в степенной ряд в окрестности  $x_0$ . Тогда разложение единственно.

*Доказательство.* Выполняется (1).

База:

$$C_0 = f(x_0) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n (x - x_0)^{n-1}$$

Переход:

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)C_n(x-x_0)^{n-k} \Rightarrow C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

□

**Определение.** Ряд Тейлора функции  $f$  в точке  $x_0$  — формальный ряд  $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

*Примечание.*

1. Ряд Тейлора может оказаться сходящимся только при  $x = x_0$
2. Ряд Тейлора может сходиться не туда.

Пример (2).

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}, f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

При  $x = 0 \quad \forall n \quad f^{(n)}(0) = 0$  — мы это доказывали в прошлом семестре.

Ряд Тейлора в  $x_0 = 0$  тождественно равен нулю. Очевидно в других точках ряд не сходится к  $f$ .

Пример (1, Кошмарный сон КПК).

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+t^2x} dx, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x} (-1)^n t^{2n} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n t^{2n} x^n e^{-x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \Gamma(n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} n! \end{aligned}$$

Этот ряд расходится при  $t \neq 0$ , поэтому все равенства неверные.

$f(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$  по обобщенному правилу Лейбница,  $s = \frac{t^2}{t^2x+1}$ ,  $f(t) = \dots \int_s^{t^2} \frac{1}{s} e^{-1/s} ds$

$$\frac{1}{1+t^2x} = 1 - t^2x + \dots + (-1)^n (t^2x)^n + \frac{(-1)^{n+1} (t^2x)^{n+1}}{1+t^2x}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n e^{-x} (-1)^k t^{2k} x^k dx + \int_0^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(t^2x)^{n+1} e^{-x}}{1+t^2x} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} e^{-x} (-1)^k t^{2k} x^k dx + (-1)^{n+1} t^{2n+2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1} e^{-x}}{1+t^2x} dx}_{\text{огр.}, \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n+1} = (n+1)!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k k! t^{2n} + O(t^{2n+2})$$

Это формула Тейлора для  $f$  в точке  $t_0 = 0.1$ , т.е.  $f^{(2n)}(0) = (-1)^n n! 2n!$

**Определение.**  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{A} \subset 2^X$ :

1.  $\mathfrak{A}$  — алгебра
2.  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

*Примечание.*  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ . Тогда  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

*Доказательство.*

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X \setminus A_i \in \mathfrak{A}$$

□

*Примечание.*  $E \in \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}$  —  $\sigma$ -алгебра

Тогда  $\mathfrak{A}_E := \{A \in \mathfrak{A} : A \subset E\}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $E$

*Пример.*

1.  $2^X$
2.  $X$  — бесконечное множество.  $\mathfrak{A}$  — не более чем счётные множества и их дополнения
3.  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathfrak{A}$  — ограниченные множества и их дополнения — не  $\sigma$ -алгебра

*Упражнение.* 1.  $A_1, A_2, \dots \subset X$

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1 \dots B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \text{ тогда } B_k \text{ — дизъюнкты. } \bigsqcup B_k \stackrel{?}{=} \bigcup A_i$$

2.  $\mathcal{P}$  — полукольцо.  $\mathfrak{A}_0 :=$  конечные объединения множеств в  $\mathcal{P}$  и их дополнений. Доказать:  $\mathfrak{A}_0$  — алгебра.
3.  $\mathcal{P}$  — полукольцо.  $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}$  — алгебра. Доказать:  $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_0$

**Определение.**  $\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — аддитивная функция множества, если:

1.  $\mu$  не должна принимать значения  $\pm\infty$  одновременно
2.  $\mu(\emptyset) = 0$

3.  $\forall A_1 \dots A_n \in \mathcal{P}$ , дизъюнкты. Если  $A = \bigsqcup A_i \in \mathcal{P}$ , то  $\mu A = \sum_{i=1}^n \mu A_i$

**Определение.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — **объем**, если  $\mu \geq 0$  и  $\mu$  — аддитивная.

**Примечание.** 1. Если  $X \in \mathcal{P}$ ,  $\mu X < +\infty$ , то говорят, что  $\mu$  — конечный объем

2.  $\mu$  — задано на  $\mathfrak{A} : 3 \leftrightarrow 3'$ :

3'  $\forall A, B \in \mathfrak{A}, A \cap B = \emptyset \quad \mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$

**Пример.**

1.  $\mathcal{P}^1$  — ячейки в  $\mathbb{R}^1$ .  $\mu[a, b) = b - a, b \geq a$

$$\triangleleft x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$[a, b) = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k)$$

$$\mu[a, b) = b - a = x_n - x_0 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_k \mu[x_{k-1}, x_k)$$

2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — возрастает, непрерывно

$\forall [\alpha, \beta) \quad \vartheta : \mathcal{P}^1 \rightarrow \mathbb{R}, \vartheta[\alpha, \beta) = g(\beta) - g(\alpha)$  — тоже объем.

3. Классический объем в  $\mathbb{R}^m$   $\mu : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

Этот объем не конечный.

4. Наглый пример.  $\triangleleft \mathbb{R}^2$

$\mathfrak{A}$  — алгебра ограниченных множеств и их дополнений.

$$\mu A = \begin{cases} 0 & , A - \text{огр.} \\ 1 & , A - \text{имеет огр. дополнение} \end{cases}$$

Наглость заключается в том, что  $\mu$  принимает значение 1, аддитивно, но не принимает значение 2. Это происходит, потому что нет двух дизъюнктивных множеств, которые имеют ограниченное дополнение.

Этот объем конечный.

**Определение.** Свойство  $A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$  называется **монотонностью объема**.

**Теорема 3.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объем. Тогда  $\mu$  имеет свойства:

1. Усиленная монотонность

$$\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}_{\text{дизъюнкты}} \in \mathcal{P} \quad \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A \quad \sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A$$

2. Конечная полуаддитивность

$$\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \mu A \leq \sum_{i=1}^n \mu A_i$$

3.  $\forall A, B \in \mathcal{P}$  пусть ещё известно  $A \setminus B \in \mathcal{P}$ ,  $\mu(B)$  — конечно. Тогда  $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$

*Примечание.* 1. В пунктах 1 и 2 не предполагается, что  $\bigcup A_i \in \mathcal{P}$

2. В пункте 3 если  $\mathcal{P}$  — алгебра, условие  $A \setminus B \in \mathcal{P}$  можно убрать.

*Доказательство.*

1. Усиление аксиомы 3 из определения полукольца:

$$A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigsqcup_{l=1}^s B_l$$

Это было доказано ранее, т.к. по теореме  $A = (\bigsqcup A_i) \cup (\bigsqcup B_l)$  — дизъюнктное объединение конечного числа множеств.

$$\mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_l \geq \sum \mu A_i$$

2.

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \quad A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k$$

Сделаем это множество дизъюнктым.

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) \quad A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k$$

Но эти  $C_k$  вообще говоря  $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) = \bigsqcup_j D_{kj} \in \mathcal{P}$$

$$\text{Тогда } A = \bigsqcup_{k,j} D_{k,j} \quad \mu A = \sum \mu D_{k,j}$$

$$\text{При этом } \forall k \quad \sum_j \mu D_{k,j} = \mu C_k \stackrel{\text{монот.}\mu}{\leq} \mu A_k$$

$$\text{Итого } \mu A = \sum_k \sum_j \mu D_{k,j} = \sum_k \mu C_k \leq \sum_k \mu A_k$$

$$3. \quad (\text{a}) \quad B \subset A \quad A = B \cup (A \setminus B) \quad \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B)$$

$$(\text{b}) \quad B \not\subset A \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \quad \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu(A \cap B) \geq \mu A - \mu B$$

□