

Основные вопросы

1. Уравнение с разделяющимися переменными: общее решение, общая схема исследования.

Уравнение с разделенными переменными имеет вид:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0$$

У него решение имеет вид:

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

Доказательство.

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = \int X(x)dx + \int Y(y)y'dx = \int (X(x) + Y(y)y')dx = \int 0dx = C$$

□

При этом мы получаем общее решение, когда находим такие C , что ответ $\in C^1$.

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Если поделить на $p_2(x)q_1(y)$, то получим уравнение с разделенными переменными. При этом необходимо убедиться, что мы не делим на ноль.

Если $\exists y_0 : q_1(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$ — решение исходного уравнения. Исключив y_0 , мы разбиваем область возможных решений на две подобласти.

Аналогично для x .

После разбиения нужно на каждой области найти решение.

2. Линейное уравнение 1-го порядка: общее решение ЛОУ, общее решение ЛНУ. Метод Лагранжа и метод интегрирующего множителя.

Линейное уравнение первого порядка это

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Если $q \equiv 0$, то это уравнение **однородно**, иначе **неоднородно**.

Общее решение ЛОУ это $y = Ce^{\int p}$, $C \in \mathbb{R}$

Доказательство. Заметим, что $y \equiv 0$ — решение. По теореме о единственности оно не является особым. т.к. мы рассматриваем $p \in C(a, b)$.

$y > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= p(x)dx \\ \ln y &= \int p(x)dx + C \\ y &= e^C e^{\int p(x)dx}\end{aligned}$$

По теореме об общем решении уравнения с разделенными переменными это семейство всех решений исходного уравнения при $y > 0$.

Аналогично при $y < 0$

□

Общее решение ЛНУ это

$$y = \left(C + \int q e^{-\int p} \right) e^{\int p}$$

Доказательство. Подстановкой легко показать, что это решение. Покажем, что нет других решений.

Пусть есть решение φ на (α, β) , не подходящее под искомую формулу.

Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и $\varphi(x_0) = y_0$.

Функция

$$C = \left(y_0 e^{-\int p} - \int q e^{-\int p} dx \right) \Big|_{x=x_0}$$

подходит под искомую формулу, но при этом является решением задачи Коши $y(x_0) = y_0$, поэтому $y \equiv \varphi$ — противоречие. □

Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной) — постоянную C считают функцией от x и получают дифур относительно C .

3. Равностепенно непрерывные функции. Лемма Арцела–Асколи.

Множество функций F , определенных на D , **равностепенно непрерывно**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in F \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Лемма 1. Пусть функции последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничены ($\exists C : \forall n, x |f_n(x)| < C$) и равностепенно непрерывны на $[a, b]$. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть M ограничивает (равномерно) f_n :

$$M := \sup_{n,x} |f_n(x)|$$

$$\delta_k = \frac{M}{2^{k+1}}$$

$$\forall \varepsilon_k > 0 \exists \delta_k > 0 \forall f \in F \forall x_1, x_2 \in D |x_2 - x_1| < \delta_k \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon_k$$

Поделим всю область $[a, b] \times (-M, M)$ на прямоугольники со стороной ε_1 и δ_1 .

Рассмотрим первый столбец. Возьмём два произвольных соседних прямоугольника, таких что по ним проходит бесконечное число f . Вырежем все f , которые по этим прямоугольникам не подходят. Сделаем то же самое для каждого столбца. Получим в итоге (бесконечную) подпоследовательность F_1^* .

Повторим то же самое для всех ε_n, δ_n .

$$\forall f, g \in F_i^* \forall x \in [a, b] |f(x) - g(x)| < 2\varepsilon_n$$

Нам нужно показать, что $\forall \varepsilon > 0 \forall N, k \forall x \in [a, b] |f_N^*(x) - f_{N+k}^*(x)| < \varepsilon$

Тогда возьмём $N : 2\varepsilon_N < \varepsilon$ и все получится, т.к. $F_N^* \supset F_{N+k}^*$ □

4. ЗК для нормальной системы. Лемма о равносильном интегральном уравнении. Лемма: свойства ломаной Эйлера, определённой на отрезке Пеано.

Задача Коши для нормальной системы — нахождение решения, подходящего под условие $r(t_0) = r_0$

$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, тогда φ — решение на $[a, b]$ интегрального уравнения

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau)) d\tau$$

, если:

1. $\varphi \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$
2. $\varphi(t) \equiv r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$ на $[a, b]$

Лемма 2. φ — решение задачи Коши $\dot{r} = f(t, r), r$ эквивалентно тому, что φ — решение

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau)) d\tau$$

Доказательство.

\Rightarrow Проинтегрируем $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ от t_0 до t

\Leftarrow Продифференцируем интегральное уравнение.

□

Определение (Отрезок Пеано). $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $(t_0, r_0) \in G$. Т.к. G открыто, $\exists a, b > 0$, такие что параллелепипед с центром в (t_0, r_0) и сторонами a, b ($|t - t_0| \leq a, |r - r_0| \leq b$) лежит в G .

По теореме Вейерштрасса на компакте есть максимум, т.е. $\exists M = \max_{\Pi} |f|$. Пусть $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Тогда отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$ — **отрезок Пеано**

Рассмотрим некоторый отрезок Пеано и поделим его правую часть на N равных частей точками t_k .

Пусть ломаная Эйлера E_N определена рекурсивно:

1. $E_N(t_0) = r_0$
2. $E_N(t) = E_N(t_k) + f(t_k, E_N(t_k))(t - t_k)$, если $t \in (t_k, t_{k+1}]$

Лемма 3. $\forall t \in [t_0, t_0 + h]$:

1. $\exists E_N(t)$
2. $|E_N(t) - r_0| \leq M(t - t_0)$, т.е. оно лежит в треугольнике.

Доказательство. Докажем по индукции, что это верно при $t \in [t_0, t_k]$ для всех k .

При $k = 1$ E_N действительно определена, т.к. $E_N(t) = r_0 + f(t_0, r_0)(t - t_0)$

$$|E_N(t) - r_0| = |f(t_0, r_0)(t - t_0)| \leq M(t - t_0)$$

Переход индукции:

$$|E_N(t_k) - r_0| \leq M(t_k - t_0) \leq Mh \leq M \frac{b}{M} = b$$

Таким образом мы лежим в Π , все определено.

$$\begin{aligned} |E_N(t) - r_0| &= |E_N(t) - E_N(t_0)| \leq |E_N(t) - E_N(t_0)| + |E_N(t_k) - E_N(t_0)| \leq \\ &|f(t_k, E_N(t_k))(t - t_k)| + M(t_k - t_0) \leq M(t - t_k) + M(t_k - t_0) = M(t - t_0) \end{aligned}$$

□

5. Теорема Пеано о существовании решения ЗК.

Теорема 1. $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда задача Коши имеет решение, определенное на отрезке Пеано для (t_0, r_0) .

Доказательство. Пусть $t_0 = 0, r_0 = 0$ (сдвиг координат). Пусть $[-h, h]$ — искомый отрезок Пеано. Докажем для $[0, h]$, для другой части аналогично. Объединить оба решения можно по лемме о гладкой стыковке решений.

Построим бесконечную последовательность ломаных Эйлера. Мы знаем, что $|E_N(t)| \leq b$, т.е. она равномерно ограничена.

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_N(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{E}_N(\tau)| dt$$

Мы знаем, что $|\dot{E}_N(t)| \leq M$, поэтому:

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{E}_N(\tau)| dt \leq M(t_2 - t_1)$$

Пусть $|t_2 - t_1| < \delta$, тогда $|E_N(t_2) - E_N(t_1)| < M\delta$ и пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, тогда $|E_N(t_2) - E_N(t_1)| < \varepsilon$, т.е. E_N равномерно непрерывна. По лемме Арцела–Асколи у этой последовательности есть подпоследовательность, равномерно сходящаяся к некоторой функции φ . Покажем, что φ — решение задачи Коши. Для этого достаточно показать, что:

$$\varphi(t) \equiv \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \text{ на } [0, h]$$

Пусть теперь E_N — подпоследовательность исходной последовательности.

По формуле Ньютона–Лейбница для отображений:

$$E_N(t) = \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau$$

$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau$$

Таким образом, надо показать, что

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Покажем, что

$$\Delta_N = \left| \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau - \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau \right| \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}\Delta_N &\leq \int_0^t |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \int_0^h |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau = \\ &\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau\end{aligned}$$

f равномерно непрерывна на параллелепипеде, поэтому $|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| < \delta \Rightarrow |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| < \varepsilon$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau < \varepsilon h$$

Тогда по двойной бухгалтерии $\Delta_N \rightarrow 0$.

Но мы не доказали, что $|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| < \delta$.

$$\begin{aligned}|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| &\leq |(t_k, E_N(t_k)) - (t_k, \varphi(t_k))| + |(t_k, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(t_k))| + |(\tau, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| \\ &= |E_N(t_k) - \varphi(t_k)| + |t_k - \tau| + |\varphi(t_k) - \varphi(\tau)|\end{aligned}$$

При достаточно больших N все три слагаемых $< \frac{\delta}{3}$

□

6. Достаточное условие того, что функция удовлетворяет локальному условию Липшица по заданной переменной.

Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $f'_r \in M_{m,n}(C(G))$. Тогда $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$

Кроме того, если $K \subset G$ — выпуклый компакт, то $M_1 := \max_{(t,r) \in K} |f'_r(t, r)|$, то:

$$\forall (t, r_1), (t, r_2) \in K \quad |f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq n M_1 |r_2 - r_1|$$

Доказательство. Докажем, что на выпуклом компакте $f \in \text{Lip}_r(K)$.

Зададим $g(s) = f(t, r_1 + s(r_2 - r_1))$ (т.к. K выпуклый, функция везде определена)

$$f(t, r_2) - f(t, r_1) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds = \int_0^1 f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))(r_2 - r_1) ds$$

По лемме об оценке нормы произведения матриц (вектор — тоже матрица)

$$\begin{aligned}|f(t, r_2) - f(t, r_1)| &\leq \left| \int_0^1 f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))(r_2 - r_1) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))(r_2 - r_1)| ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 n |f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))| |(r_2 - r_1)| ds \\
&\leq \int_0^1 n M_1 |(r_2 - r_1)| ds \\
&\leq n M_1 |r_2 - r_1|
\end{aligned}$$

Тогда константа Липшица nM_1 и искомое выполнено.

Почему $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$? Потому что можно для каждой точки взять параллелепипед K (выпуклый компакт) вокруг этой точки и тогда в $\text{Int}K$ выполняется условие Липшица. \square

7. Достаточное условие того, что функция удовлетворяет глобальному условию Липшица по заданной переменной.

Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$, $K \subset G$ — компакт. Тогда $f \in \text{Lip}_r(K)$

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $\forall N \in \mathbb{N} \exists (t_N, r_N), (t_N, \tilde{r}_N) \in K$, для которых $|f(t_N, r_N) - f(t_N, \tilde{r}_N)| > N|r_N - \tilde{r}_N|$

Т.к. K компакт, то он секвенциальный компакт, т.е. в (t_N, r_N) и (t_N, \tilde{r}_N) есть сходящиеся подпоследовательности. Пусть они сходятся к (t, r) и (t, \tilde{r}) соответственно.

Либо $r = \tilde{r}$, либо нет.

1. $r = \tilde{r}$

$\exists U(t, r) : f \in \text{Lip}_r(U)$, т.к. f лок. Липшицева, т.е. $\exists L : |f(t', r') - f(t', r'')| \leq L|r' - r''|$

Пусть $N > L$, тогда $|f(t', r') - f(t', r'')| > N|r' - r''| > L|r' - r''|$ — противоречие.

Пусть теперь $r \neq \tilde{r}$. Выберем непересекающиеся параллелепипеды $R = [a, b] \times X$ и $\tilde{R} = [a, b] \times \tilde{X}$, для которых точки (t, r) и (t, \tilde{r}) соответственно являются внутренними. Рассмотрим функцию

$$g(t, x, y) := \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|},$$

определённую на компакте $[a, b] \times X \times \tilde{X}$, где она непрерывна, а значит, ограничена некоторым числом L . Выбирая номер $N > L$, такой что $(t_N, r_N) \in R$ и $(t_N, \tilde{r}_N) \in \tilde{R}$, из (4.9) получаем

$$g(t_N, r_N, \tilde{r}_N) > N > L.$$

2. Это противоречие завершает доказательство леммы. □

□

8. Лемма Гронуолла. Теорема Пикара (доказательство единственности решения).

Лемма 4 (Гронуолл). $\varphi \in C[a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, $\lambda, \mu \geq 0$ и

$$\forall t \in [a, b] \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right|$$

Тогда

$$\forall t \in [a, b] \quad \varphi(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}$$

Доказательство. Рассмотрим $t \geq t_0$ без потери общности.

Рассмотрим случай $\lambda > 0$ и пусть $v(t) = \lambda + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$. Тогда $v'(t) = \mu \varphi(t) \leq \mu v(t)$.

Таким образом, $\frac{v'(t)}{v(t)} \leq \mu$. Проинтегрировав по $[t_0, t]$, получаем $v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)}$. Таким образом, $\varphi(t) \leq v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)} = \lambda e^{\mu(t-t_0)}$

Рассмотрим $\lambda = 0$, тогда для любого λ_1 верно $\varphi(t) \leq \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau < \lambda_1 + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$, для этого уже доказали.

При $\lambda_1 \rightarrow 0$ получаем $\varphi(t) \leq 0$. □

Теорема 2. $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда на отрезке Пеано существует решение задачи Коши $\dot{r} = f(t, r)$, $r(t_0) = r_0$ и оно единственно.

Доказательство. Мы доказываем последний пункт, что решение φ единственно.

Пусть ψ_1 и ψ_2 — решения на (a, b) . По лемме об эквивалентном интегральном уравнении:

$$\psi_1(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_1(\tau)) d\tau \quad \psi_2(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_2(\tau)) d\tau$$

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))| d\tau$$

Пусть $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $a < 0, b > 0$.

Т.к. графики ψ_1 и ψ_2 на $[\alpha, \beta]$ компактны, $f(\tau, \psi_1(t))$ и то же самое для 2 Липшицевы, поэтому:

$$|f(\tau, \psi_1(t)) - f(\tau, \psi_2(t))| \leq \tilde{L} |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|$$

Итого:

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \tilde{L} \int_0^t |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)| d\tau$$

По лемме Гронуолла $|\psi_1(t) - \psi_2(t)|$, т.к. $\lambda = 0$, таким образом ψ_1 и ψ_2 совпадают на $[\alpha, \beta]$, а в силу произвольности они совпадают и на (a, b) \square

9. Теорема Пикара (доказательство существования решения).

Доказательство. Без потери общности $t_0 = 0, r_0 = 0$. Рассмотрим правую часть отрезка Пеано $[0, h]$, для левой аналогично и решения можно сшить. Возьмём Π, M, h из определения отрезка Пеано.

Рассмотрим последовательность функций:

- $\varphi_0(t) = 0$
- $\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$

У нас будет три этапа (*в этом билете*):

1. Докажем, что последовательность верно определена, т.е. $(t, \varphi_k(t)) \in G$.
 2. Докажем, что последовательность равномерно сходится на $[0, h]$ к некоторой φ
 3. Докажем, что φ решает интегральное уравнение, эквивалентное искомому.
1. Докажем по индукции. База тривиальна. Переход:

$$|\varphi_{k+1}(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))| d\tau \leq Mt \leq Mh \leq \frac{Mb}{M} = b$$

2. Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall t, m > N, k \quad |\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \varepsilon$

По лемме о достаточном условии Липшица $f \in \text{Lip}_r(\Pi)$ с константой L . Докажем по индукции, что

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{ML^m t^{m+1}}{(m+1)!}$$

, тогда искомое будет доказано, т.к. $t < h$ и дробь $\rightarrow 0$.

База очевидна:

$$|\varphi_k(t) - \varphi_0(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))| d\tau \leq Mt$$

Переход:

$$\begin{aligned} |\varphi_{m+1+k}(t) - \varphi_{m+1}(t)| &\leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - f(\tau, \varphi_m(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L |(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - (\tau, \varphi_m(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L \frac{ML^m \tau^{m+1}}{(m+1)!} d\tau \\ &\leq \frac{ML^{m+1} t^{m+2}}{(m+2)!} \end{aligned}$$

3.

$$\varphi(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau$$

Т.к. $(t, \varphi_m(t)) \in \Pi$, то и $(t, \varphi(t)) \in \Pi$. Таким образом:

$$|f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| \leq L |\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)|$$

В силу равномерной сходимости φ_m мы получаем, что $f(t, \varphi_m(t)) \rightarrow f(t, \varphi(t))$ при $m \rightarrow +\infty$ равномерно. Тогда мы можем внести предел под знак интеграла по теореме о предельном переходе под знаком интеграла.

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

По лемме об эквивалентном интегральном уравнении получаем, что φ — решение искомого уравнения.

□

10. Теорема существования и единственности решения ЗК для уравнения n -го порядка. Следствие с более простыми условиями.

Теорема 3. $G \subset \mathbb{R}_{t,y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}}^{n+1}$ — область, $f \in C(G)$, $f \in \text{Lip}_{(y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}),loc}(G)$, $(t_0, y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда в некоторой окрестности t_0 есть решение задачи Коши для уравнения $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$

Доказательство. Рассмотрим эквивалентную систему. Каждое из уравнений имеет единственное решение задачи Коши по теореме Пикара. По Пикару у эквивалентной системы есть решение. \square

Следствие 3.1. $G \subset \mathbb{R}_{t,y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}}^{n+1}$ — область, $f, f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$, $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда в некоторой окрестности есть единственное решение задачи Коши для уравнения $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$.

Доказательство. Была лемма, по которой $f \in \text{Lip}_{(y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}),loc}(G)$ и по теореме в этом билете. \square

11. Критерий продолжимости.

Теорема 4. $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Тогда решение φ уравнения $\dot{r} = f(t, r)$ на промежутке $[a, b)$ продолжимо вправо $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = \tilde{r}$ и при этом $(b, \tilde{r}) \in G$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть ψ — продолжение вправо φ .

Т.к. ψ непрерывна, то $\varphi(b-0) = \psi(b-0) = \psi(b)$. Т.к. $b \in \text{dom} \psi$, $(b, \psi(b)) \in G$.

\Leftarrow Доопределим φ на $[a, b]$. На $[a, b)$:

$$\varphi(t) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^t \varphi'(\tau) d\tau = \int_{t_1}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Пусть $t_1 \rightarrow b$.

$$\varphi(t) = \tilde{r} + \int_b^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

По лемме об экв. интегральном уравнении φ — решение задачи $\dot{r} = f(t, r)$, $r(b) = \tilde{r}$

По теореме Пеано есть решение ϑ на $[b-h, b+h]$. Тогда можем сшить ϑ , φ и получить ψ , это будет решение $[a, b+h]$.

\square

12. Теорема существования и единственности максимального решения.

Теорема 5. $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in \text{Lip}_{r,\text{loc}}(G)$, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$

Тогда максимальное решение задачи Коши существует и единственно.

Доказательство. Пусть все решения задачи Коши на интервалах образуют множество S . По теореме Пеано $|S| \neq 0$. Пусть для $\varphi \in S$ область определения (a_φ, b_φ) . Пусть $(A, B) := \bigcup_{\varphi \in S} (a_\varphi, b_\varphi)$

Для $t \in (a_\varphi, b_\varphi)$ пусть $\psi(t) := \varphi(t)$. Т.к. все решения задачи Коши совпадают (*теорема Пикара*), функция задана однозначно. Вполне очевидно, что ψ — максимальное решение.

Другого решения ϑ нет, т.к. если $\text{dom } \vartheta \neq \text{dom } \psi$, то одно из них не максимально, а иначе они равны. \square

13. Теорема о выходе интегральной кривой за пределы любого компакта.

Теорема 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,\text{loc}}(G)$, φ — максимальное решение на (a, b) уравнения $\dot{r} = f(t, r)$, $K \subset G$ — компакт. Тогда найдется $\Delta > 0$, такое что $(t, \varphi(t)) \notin K$ при всех $t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b)$.

Доказательство. Заметим, что расстояние $\rho = \rho(K, \partial G)$ от компакта K до границы ∂G области G положительно (иначе можно было бы построить последовательность точек из K , сходящейся к точке на границе, но $\partial G \cap K = \emptyset$). Если $\rho < +\infty$, положим $c = \frac{\rho}{2}$, иначе пусть $c = 1$.

Вокруг каждой точки $(t', r') \in K$ построим содержащийся внутри G параллелепипед

$$\Pi(t', r') = \{(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t'| \leq c, |r - r'| \leq c\}$$

и рассмотрим множество

$$K_c = \bigcup_{(t', r') \in K} \Pi(t', r')$$

Поскольку K — компакт, то максимум нормы достигается, пусть это d . Если (t, r) — произвольная точка из K_c , то для некоторой точки $(t', r') \in K$ будет $(t, r) \in \Pi(t', r')$, поэтому

$$|(t, r)| \leq |(t, r) - (t', r')| + |(t', r')| \leq c + d$$

Значит, множество K_c ограничено.

Докажем его замкнутость. Рассмотрим последовательность $\{(t_{m_k}, r_{m_k})\}$ точек из K_c , сходящуюся к $(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Для каждой такой точки найдется параллелепипед $\Pi(t'_{m_k}, r'_{m_k})$, которому она принадлежит. Раз K — компакт, то существует подпоследовательность $\{(t'_{m_k}, r'_{m_k})\}$, сходящаяся к некоторой точке $(t', r') \in K$. Переходя к пределу в неравенствах

$$|t_{m_k} - t'_{m_k}| \leq c, \quad |r_{m_k} - r'_{m_k}| \leq c$$

находим $|t - t'| \leq c$ и $|r - r'| \leq c$. Следовательно $(t, r) \in K_c$.

Таким образом, K_c — компакт, и функция f достигает на нем максимального значения

$$M = \max_{(t,r) \in K_c} |f(t, r)|$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть $\Delta = \frac{h}{2}$, где $h = \min\{c, \frac{c}{M}\}$. Тогда при некотором $t_0 \in (b - \frac{h}{2}, b)$ будет $(t_0, \varphi(t_0)) \in K$.

Рассмотрим ЗК $\dot{r} = f(t, r)$, $r(t_0) = \varphi(t_0)$. По теореме Пеано она имеет решение ψ на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Пусть

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t \in (a, t_0) \\ \psi(t), & \text{если } t \in [t_0, t_0 + h] \end{cases}$$

По лемме о гладкой стыковке решений $\tilde{\varphi}$ — решение уравнения $\dot{r} = f(t, r)$ на $(a, t_0 + h)$. Функция $\tilde{\varphi} \equiv \varphi$ на $(a, b) \cap (a, t_0 + h)$ по теореме Пикара. Но

$$t_0 + h > b - \frac{h}{2} + h = b + \frac{h}{2} > b$$

то есть $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ вправо за точку b . Так как φ по условию является максимальным решением, приходим к противоречию. \square

14. Признак продолжимости решения системы, сравнимой с линейной. Теорема о существовании и единственности максимального решения ЛС.

Теорема 7. Пусть $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}(G)$, функции $u, v \in C(a, b)$ таковы, что для любых $(t, r) \in G$

$$|f(t, r)| \leq u(t)|r| + v(t)$$

Тогда каждое максимальное решение уравнения $\dot{r} = f(t, r)$ определено на (a, b) .

Доказательство. По теореме о существовании и единственности максимального решения любая задача Коши с начальными данными $(t_0, r_0) \in G$ имеет единственное максимальное решение φ , заданное на некотором интервале (α, β) . Докажем, что границы

интервала (α, β) совпадают с границами интервала (a, b) . Пойдем от противного. Пусть, например, $\beta < b$. Принимая во внимание лемму о равносильном интегральном уравнении, при $t \in [t_0, \beta)$ находим

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq |r_0| + \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq |r_0| + \int_{t_0}^t |u(\tau)| |\varphi(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t |v(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Из непрерывности функций u и v вытекает их ограниченность на отрезке $[t_0, \beta]$. Следовательно, найдутся такие числа $\lambda, \mu \geq 0$, что при $t \in [t_0, \beta)$

$$|\varphi(t)| \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^t |\varphi(s)| ds$$

Тогда по лемме Гронуолла

$$|\varphi(t)| \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)} \leq L$$

где $L = \lambda e^{\mu(\beta-t_0)}$. Отсюда следует, что график решения φ не покидает компакт

$$K = \{(t, r) \in G \mid t \in [t_0, \beta], |r| \leq L\} \subset G$$

при $t \in [t_0, \beta)$, что противоречит теореме о выходе интегральной кривой за пределы компакта. \square

Определение. Линейной системой дифференциальных уравнений называют систему вида

$$\dot{r} = P(t)r + q(t) \quad (1)$$

где $P \in M_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

Теорема (существование и единственность максимального решения ЛС). Пусть $P \in M_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in (a, b)$, $r_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда максимальное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{r} = P(t)r + q(t) \\ r(t_0) = r_0 \end{cases} \quad (2)$$

существует, единственно и определено на интервале (a, b) .

Доказательство. Заметим, что правая часть системы $f(t, r) = P(t)r + q(t)$ и ее производная $f'_r = P(t)$ непрерывны в области $(a, b) \times \mathbb{R}^n$. Тогда существует единственное максимальное решение задачи (2) по теореме о $!$ максимального решения.

Имеем

$$|f(t, r)| \leq |P(t)r| + |q(t)| \leq n|P(t)||r| + |q(t)|$$

Так как функции $u(t) = n|P(t)|$ и $v(t) = |q(t)|$ непрерывны на (a, b) , то по признаку продолжимости системы, сравнимой с линейной, решение задачи (2) продолжимо на интервал (a, b) .

15. Формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС.

Определение. Если $q \equiv 0$ на (a, b) , то система (1), то есть

$$\dot{r} = P(t)r \quad (3)$$

называется **однородной**, в противном случае **неоднородной**.

Определение. Определителем Вронского (вронскианом) вектор-функций $\{r_k\}_{k=1}^n$, где $r_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})^T$, называют определитель

$$W(t) = \det(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС). Пусть $t, t_0 \in (a, b)$, $P \in M_n(C(a, b))$, r_1, r_2, \dots, r_n — решения системы (3). Тогда их вронскиан

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \operatorname{tr} P(\tau) d\tau$$

Доказательство. Пусть X — матрица со столбцами r_1, r_2, \dots, r_n , а R_k — ее k -ая строка. Используя формулу полного разложения определителя, нетрудно убедиться, что

$$\dot{W} = \det \begin{pmatrix} \dot{R}_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dot{R}_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ \dot{R}_n \end{pmatrix}$$

Так как

$$\dot{X} = (\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n) = (Pr_1, Pr_2, \dots, Pr_n) = PX$$

то k -ая строка матрицы \dot{X} совпадает с k -ой строкой матрицы PX , то есть

$$\dot{R}_k = \sum_{j=1}^n p_{kj} R_j$$

где p_{kj} — элемент матрицы P в k -ой строке и j -ом столбце.

Подставляя выражение для \dot{R}_k в формулу для \dot{W} и используя свойства определителя, находим

$$\dot{W} = p_{11} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + p_{22} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \dots + p_{nn} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = W \operatorname{tr} P$$

Интегрируя полученное уравнение, приходим к требуемой формуле.

16. Общее решение ЛОС. Лемма о множестве фундаментальных матриц. Лемма об оцеществлении.

Теорема (Общее решение ЛОС). Пусть $P \in M_n(C(a, b))$. Тогда множество решений системы $\dot{r} = P(t)r$ образуют n -мерное линейное пространство.

Доказательство. Пусть $t_0 \in (a, b)$, $\{a_k\}_{k=1}^n$ — базис в \mathbb{R}^n . Тогда для любого $k \in [1 : n]$ существует r_k — решение задачи Коши $\dot{r} = P(t)r$, $r(t_0) = a_k$. Вронскиан этих решений $W(t_0) = \det(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$. Тогда функции $\{r_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы.

Рассмотрим произвольное решение r системы $\dot{r} = P(t)r$. Пусть $\{c_k\}_{k=1}^n$ — координаты вектора $r(t_0)$ в базисе $\{a_k\}_{k=1}^n$. Положим

$$\varphi = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_n r_n$$

Ясно, что φ — решение системы $\dot{r} = P(t)r$, при этом $\varphi(t_0) = r_0$. Тогда $r \equiv \varphi$ в силу теоремы о единственности максимального решения ЛС.

Таким образом, функции $\{r_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы, и любое решение есть их линейная комбинация. Значит, $\{r_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве решений. \square

Определение. Фундаментальной системой решений системы уравнений $\dot{r} = P(t)r$ называется совокупность ее n линейно независимых решений.

Определение. Фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$ — матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

Лемма (о множестве фундаментальных матриц). Пусть Φ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$. Тогда $\{\Phi A \mid A \in M_n(\mathbb{R}), \det A \neq 0\}$ — множество всех фундаментальных матриц этой системы.

Доказательство. Пусть Ψ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$. Тогда каждый ее столбец, будучи решением этой системы, является линейной комбинацией столбцов матрицы Φ . Записывая коэффициенты разложения в столбцы матрицы A , имеем $\Psi = \Phi A$. А так как $\det \Psi \neq 0$ и $\det \Phi \neq 0$, то и $\det A \neq 0$.

Обратно, пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ — произвольная невырожденная матрица. Тогда матрица ΦA состоит из решений, а ее определитель не обращается в ноль. Следовательно, эти решения линейно независимы, поэтому ΦA — фундаментальная матрица. \square

Лемма (Об овеществлении). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\Phi = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$, при этом $r_1 = \bar{r}_2$. Тогда

$$\Psi = (\Re r_1, \Im r_1, r_3, \dots, r_n)$$

— фундаментальная матрица той же системы.

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned}\Re r_1 &= \frac{1}{2}(r_1 + \bar{r}_1) = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 \\ \Im r_1 &= \frac{1}{2i}(r_1 - \bar{r}_1) = \frac{1}{2i}r_1 - \frac{1}{2i}r_2\end{aligned}$$

то

$$\Psi = \Phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}$$

где E_{n-2} — единичная матрица порядка $n-2$. По лемме о множестве фундаментальных матриц матрица Ψ является фундаментальной. \square

17. Теорема о фундаментальной системе решений ЛОС с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса общего вида). Определение и свойства матричной экспоненты (без доказательств). Решение задачи Коши при помощи матричной экспоненты.

Определение. Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называют линейную систему вида

$$\dot{r} = Ar = q(t)$$

где $A \in M_n(\mathbb{C})$, $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n)$.

Лемма. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, h_1, h_2, \dots, h_k — жорданова цепочка, соответствующая $\lambda \in \text{spec } A$. Тогда функции

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{\lambda t} h_1 \\ \varphi_2(t) &= e^{\lambda t} \left(\frac{t}{1!} h_1 + h_2 \right) \\ &\dots \\ \varphi_k(t) &= e^{\lambda t} \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h_1 + \dots + \frac{t}{1!} h_{k-1} + h_k \right)\end{aligned}$$

являются решениями системы $\dot{r} = Ar$.

Доказательство. Принимая во внимание определение жордановой цепочки, при $j \in [1 : k]$ имеем

$$\begin{aligned} A\varphi_j &= e^{\lambda t} \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} Ah_m = e^{\lambda t} \left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \lambda h_1 + \sum_{m=2}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} (\lambda h_m + h_{m-1}) \right) = \\ &= e^{\lambda t} \left(\lambda \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} h_m + \sum_{m=2}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} h_{m-1} \right) \end{aligned}$$

Это же выражение получается при дифференцировании вектор-функции φ_j . Значит, $\dot{\varphi}_j = A\varphi_j$, что и требовалось доказать.

Теорема (Случай жорданова базиса общего вида). Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, базис пространства \mathbb{C}^n состоит из жордановых цепочек

$$\lambda_1 \sim h_1, h_2, \dots, h_k$$

...

$$\lambda_d \sim u_1, u_2, \dots, u_m$$

соответствующих $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \text{spec } A$. Тогда вектор-функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\lambda_1 t} h_1, \quad \dots, \quad \varphi_k(t) = e^{\lambda_1 t} \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h_1 + \dots + \frac{t}{1!} h_{k-1} + h_k \right) \\ &\dots \\ \psi_1(t) &= e^{\lambda_d t} u_1, \quad \dots, \quad \psi_m(t) = e^{\lambda_d t} \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} u_1 + \dots + \frac{t}{1!} u_{m-1} + u_m \right) \end{aligned}$$

образуют фундаментальную систему решений системы $\dot{r} = Ar$.

Доказательство. По вышедшей лемме каждая из вектор-функций

$$\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots, \psi_1, \dots, \psi_m$$

является решением. Их вронскиан

$$W(0) = \det(h_1, \dots, h_k, \dots, u_1, \dots, u_m) \neq 0$$

Тогда вектор-функции $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots, \psi_1, \dots, \psi_m\}$ линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений.

Определение. Матричной экспонентой называется сумма ряда

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Свойства матричной экспоненты. Пусть $A, B, J, T \in M_n(\mathbb{C})$, $\det T \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

1. ряд, определяющий e^A , сходится
2. если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$
3. $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$
4. если $A = T J T^{-1}$, то $e^A = T e^J T^{-1}$
5. если $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_d)$, то $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, e^{A_2}, \dots, e^{A_d})$
6. если $J_s(\lambda)$ — жорданова клетка размера s :

$$J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

то

$$e^{J_s(\lambda)t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема. Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$. Тогда матрица e^{At} является фундаментальной матрицей системы $\dot{r} = Ar$.

Доказательство. По свойствам матричной экспоненты будет $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$. Следовательно, каждый столбец матрицы e^{At} — решение системы $\dot{r} = Ar$. Соответствующий вронскиан

$$W(0) = \det e^{A \cdot 0} = \det E_n = 1$$

где E_n — единичная матрица порядка n . Отсюда следует, что e^{At} — фундаментальная матрица.

Следствие. Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 \in \mathbb{C}^n$. Тогда решением задачи

$$\dot{r} = Ar, \quad r(t_0) = r_0$$

является вектор-функция $\varphi(t) = e^{A(t-t_0)} r_0$

18. Общее решение ЛНС и метод вариации постоянных.

Теорема (Общее решение ЛНС). Пусть $P \in M_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$, φ — решение системы

$$\dot{r} = P(t)r + q(t) \quad (4)$$

Φ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{r} = P(t)r$$

Тогда общее решение неоднородной системы (4) имеет вид

$$r = \Phi C + \varphi, \quad C \in \mathbb{R}^n$$

Доказательство. Пусть r — произвольное решение (4). Тогда

$$\dot{r} = Pr + q$$

Функция φ удовлетворяет такому же соотношению:

$$\dot{\varphi} = P\varphi + q$$

Вычитая эти равенства, находим

$$(r - \varphi)' = P(r - \varphi)$$

Значит, найдется вектор-столбец $C \in \mathbb{R}^n$, такой что

$$r - \varphi = \Phi C$$

Верно и обратное: любая функция вида $\Phi C + \varphi$ являются решением (4), что проверяется непосредственной подстановкой.

Теорема (метод вариации постоянных для ЛНС). Пусть Φ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$, $P \in M_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Тогда если вектор-функция C пробегает все решения системы

$$\Phi \dot{C} = q$$

то $r = \Phi C$ пробегает все решения системы (4)

Доказательство. Опираясь на формулу для обратной матрицы, использующей алгебраические дополнения, заключаем, что $\Phi^{-1} \in M_n(C(a, b))$. Поэтому

$$C(t) = \int \Phi^{-1} q + A$$

где A — вектор произвольных постоянных. Тогда требуется доказать, что общее решение системы (4) имеет вид

$$r = \Phi A + \Phi \int \Phi^{-1} q$$

По теореме об общем решении ЛНС достаточно показать, что второе слагаемое в правой части — частное решение системы (4). Убедимся в этом подстановкой:

$$\dot{\Phi} \int \Phi^{-1} q + \Phi \Phi^{-1} q = P(t) \Phi \int \Phi^{-1} q + q$$

Это верное тождество, поскольку $P(t)\Phi = \dot{\Phi}$.

19. Теорема об изоморфизме решений ЛОС и ЛОУ, формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОУ. Метод вариации постоянных для ЛНУ.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = q(t) \quad (5)$$

где $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$.

Определение. Если $q \equiv 0$ на (a, b) , то уравнение (5), то есть

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = 0 \quad (6)$$

называется **однородным**, в противном случае — **неоднородным**.

Лемма (О равносильной ЛС). Если функция y — решение уравнения (5) на (a, b) , то вектор-функция $\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ — решение системы

$$\dot{r} = P(t)r + Q(t) \quad (7)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

И наоборот, если $r = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — решение системы (7), то y_1 — решение (5) на (a, b) и $r = \Lambda_n y_1$.

Теорема (Об изоморфизме). Пусть $p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \in C(a, b)$. Тогда множество решений однородного уравнения (6) является линейным пространством, изоморфным пространству решений системы

$$\dot{y} = P(t)y$$

где матрица P та же, что и в лемме о равносильной ЛС. При этом изоморфизм устанавливается отображением Λ_n .

Доказательство. Любое решение уравнения (6) по теореме о существовании и единственности максимального решения ЛУ является элементом линейного пространства $C^n(a, b)$. Кроме того, сумма двух решений, а также решение, умноженное на произвольное число, также являются решениями. Поэтому множество всех решений само образует линейное пространство.

Лемма о равносильной ЛС устанавливает биекцию между решениями уравнения и равносильной системы. Отображение Λ_n линейно. Таким образом, Λ_n — изоморфизм.

Определение. Определителем Вронского (или вронскианом) функций $y_1, y_2, \dots, y_n \in C^{n-1}(a, b)$ называют

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема (Формула Остроградского-Лиувилля для решений ЛОУ). Пусть $t, t_0 \in (a, b)$, $p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \in C(a, b)$, $\{y_k\}_{k=1}^n$ — решения линейного однородного уравнения (6). Тогда вронскиан этих решений

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t (-p_{n-1}(\tau)) d\tau$$

Доказательство. Принимая во внимание формулу Остроградского-Лиувилля для решений ЛОС и лемму о равносильной ЛС, находим

$$\begin{aligned} W(y_1, \dots, y_n) &= W(\Lambda y_1, \dots, \Lambda y_n) = \\ &= W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{tr } P(\tau) d\tau = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t (-p_{n-1}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Теорема (метод вариации постоянных для ЛНУ). Пусть $\{y_k\}_{k=1}^n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (6). Тогда если функции $\{C_k\}$ пробегает все

решения системы

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dots & \dot{y}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \\ \dots \\ \dot{C}_{n-1} \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

то $y = \sum_{k=1}^n C_k y_k$ пробегает все решения уравнения (5).

Доказательство. По теореме о методе вариации постоянных для ЛС общее решение системы, равносильной уравнению (5), имеет вид

$$r = \sum_{k=1}^n C_k \Lambda y_k$$

где функции C_1, \dots, C_n удовлетворяют системе

$$(\Lambda y_1, \dots, \Lambda y_n) \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dots \\ \dot{C}_{n-1} \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

По лемме о равносильной ЛС первая строка вектора r — общее решение уравнения (5).

20. Общее решение ЛОУ с постоянными коэффициентами.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называют уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = f(t) \quad (8)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $f \in C(a, b)$.

В дальнейшем для краткости используется обозначение

$$Ly = \frac{d^n}{dt^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_1\frac{d}{dt}y + a_0y = \left(\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} \right) y$$

где $a_n = 1$. При помощи оператора L уравнение (8) записывается в виде

$$Ly = f(t)$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Ly = 0 \quad (9)$$

Применяя оператор L к функции $e^{\lambda t}$, находим

$$L(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}$$

Определение. Многочлен

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

называется **характеристическим многочленом** уравнения (8), а его корни — **характеристическими числами** уравнения (8).

Если λ — корень характеристического многочлена, то получаем $L(e^{\lambda t}) \equiv 0$. Верно и обратное: если $e^{\lambda t}$ — решение однородного уравнения (15), то λ — корень многочлена p . Докажем более общее утверждение.

Лемма. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — корни кратности $m \in \mathbb{N}$ характеристического многочлена уравнения (15). Тогда функции

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$$

являются решениями (15).

Доказательство. Убедимся подстановкой в уравнение (15), что указанные функции являются решениями.

Пусть $k \in [0 : m - 1]$. Считая λ переменной, в силу бесконечной дифференцируемости функции $e^{\lambda t}$ при любом $j \in \mathbb{Z}_+$ будет

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^j}{\partial t^j} e^{\lambda t}$$

Тогда

$$L(t^k e^{\lambda t}) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} L(e^{\lambda t})$$

Применяя формулу Лейбница, имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (p(\lambda) e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^k C_k^j p^{(j)}(\lambda) \frac{\partial^{k-j}}{\partial \lambda^{k-j}} e^{\lambda t}$$

Подставляя вместо λ корень кратности m многочлена p , получаем ноль, поскольку при $j \in [0 : k]$ обнуляются значения $p^{(j)}(\lambda)$.

Лемма (Линейная независимость квазиодночленов). Пусть $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ при $j \in [1 : n]$, $\{(k_j, \lambda_j)\}_{j=1}^n$ — различные пары чисел. Тогда функции $\{t^{k_j} e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^n$ линейно независимы на любом промежутке из \mathbb{R} .

Доказательство. Разобьем множество пар $(k_1, \lambda_1), \dots, (k_n, \lambda_n)$ на группы с одинаковым вторым элементом. Если такая группа одна, то линейная независимость следует из линейной независимости одночленов.

Допустим, что линейная независимость доказана, если количество групп равно m . Предположим, что в случае $m + 1$ группы некоторая нетривиальная линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю. Объединяя слагаемые с одинаковыми экспонентами и изменяя нумерацию чисел λ_i , имеем

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + p_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} \equiv 0$$

где p_i — многочлены, а числа λ_i различны. Деля обе части на $e^{\lambda_{m+1} t}$, получаем

$$p_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_{m+1})t} + p_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_{m+1})t} + \dots + p_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m+1})t} + p_{m+1}(t) \equiv 0$$

Дифференцируя это тождество $\deg p_{m+1} + 1$ раз, находим

$$q_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_{m+1})t} + q_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_{m+1})t} + \dots + q_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m+1})t} \equiv 0 \quad (10)$$

где при всех $i \in [1 : m]$ многочлен q_i имеет ту же степень, что и p_i .

Значит, если для некоторого i будет $p_i \not\equiv 0$, то и $q_i \not\equiv 0$. Следовательно, в левой части тождества (10) находится нетривиальная линейная комбинация квазиодночленов. Это противоречит индукционному предположению.

Теорема (Общее решение ЛОУ с постоянными коэффициентами). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ — характеристические числа уравнения (15) кратностей $m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{N}$. Тогда функции

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ & \dots \\ & e^{\lambda_s t}, t e^{\lambda_s t}, \dots, t^{m_s-1} e^{\lambda_s t} \end{aligned}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (15).

Доказательство. Указанные функции являются решениями (15), а по лемме о линейной независимости квазиодночленов они линейно независимы. Так как сумма всех кратностей равна порядку уравнения, то эти функции образуют фундаментальную систему решений.

21. Теорема об устойчивости ЛОС с постоянными коэффициентами.

Определение. Точкой покоя, или положением равновесия, или стационарным состоянием системы $\dot{r} = f(r)$ называют точку r_0 , такую что $f(r_0) = 0$.

Определение. Положение равновесия $r = 0$ автономной системы $\dot{r} = f(r)$ называется **устойчивым (по Ляпунову)**, если для любой ε -окрестности нуля найдется такая δ -окрестность нуля, что любое решение, выходящее из этой δ -окрестности, во все будущие моменты времени отличается от нуля менее, чем на ε . То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |r_0| < \delta \implies \forall t \geq 0 |r(t, 0, r_0)| < \varepsilon$$

В противном случае положение равновесия называется **неустойчивым**.

Определение. Положение равновесия $r = 0$ автономной системы $\dot{r} = f(r)$ называется **асимптотически устойчивым**, если

- $r = 0$ устойчиво
- все решения, начинающиеся в некоторой окрестности нуля, в будущем стремятся к нулю, то есть

$$\exists \delta > 0 : |r_0| < \delta \implies r(t, 0, r_0) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty$$

Лемма Пусть φ — решение системы $\dot{r} = f(t, r)$. Тогда φ устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение $s = 0$ системы

$$\dot{s} = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi)$$

Доказательство. Положим $s = r - \varphi$. Пусть $\dot{r} = f(t, r)$, тогда

$$\dot{s} = \dot{r} - \dot{\varphi} = f(t, r) - f(t, \varphi) = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi)$$

Получаем, что $s = 0$ — решение системы $\dot{s} = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi)$. Остается сопоставить определение устойчивости (асимптотической устойчивости) для решения φ исходной и решения $s = 0$ новой системы.

Из вышедодказанной леммы следует, что решение φ линейной системы

$$\dot{r} = P(t)r + q(t)$$

устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение $r = 0$ соответствующей линейной однородной системы

$$\dot{r} = P(t)r$$

Отсюда, в частности, вытекает, что все решения линейной системы имеют одинаковый характер устойчивости, поэтому можно говорить об устойчивости линейной системы.

Теорема (Устойчивость ЛОС с постоянными коэффициентами). Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тогда система

$$\dot{r} = Ar \quad (11)$$

1. асимптотически устойчива, если $\operatorname{Re} \lambda < 0$ для всех $\lambda \in \operatorname{spec} A$
2. устойчива, если для каждого $\lambda \in \operatorname{spec} A$ либо $\operatorname{Re} \lambda < 0$, либо $\operatorname{Re} \lambda = 0$ и алгебраическая кратность числа λ совпадает с геометрической
3. неустойчива, если найдется $\lambda \in \operatorname{spec} A$, такое что либо $\operatorname{Re} \lambda > 0$, либо $\operatorname{Re} \lambda = 0$ и алгебраическая кратность числа λ больше геометрической

Доказательство. Через T обозначим матрицу перехода к жорданову базису матрицы A , J — жорданова форма матрицы A .

Любое решение системы (11) имеет вид

$$r(t) = e^{At}r(0) = Te^{Jt}T^{-1}r(0)$$

Принимая во внимание лемму о норме матрицы, получаем

$$|r(t)| \leq n^3 |T| |e^{Jt}| |T^{-1}| |r(0)| = K |e^{Jt}| |r(0)| \quad (12)$$

где $K > 0$ не зависит от t . Обозначим через $a_{ij}(t)$ элементы матрицы e^{Jt} .

1. Каждая функция $a_{ij}(t)$ имеет вид $Ce^{\lambda t t^k}$, где λ — одно из собственных чисел. Поскольку $\operatorname{Re} \lambda < 0$, то для всех i, j будет $a_{ij}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, следовательно,

$$|e^{Jt}| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty$$

Тогда из оценки (12) следует устойчивость и асимптотическая устойчивость нулевого решения.

2. Каждая функция $a_{ij}(t)$ имеет вид $Ce^{\lambda t t^k}$, но теперь $k = 0$, если $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Следовательно, существует такое число M , что при всех $t \leq 0$

$$|e^{Jt}| < M$$

Поэтому из оценки (12) следует устойчивость нулевого решения.

3. Пусть существует собственное число $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha > 0$. Обозначим через h соответствующий собственный вектор. Тогда вектор-функция

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} h$$

является комплексным решением (11).

Если же имеется собственное число $\lambda = i\beta$, $\beta \neq 0$, алгебраическая кратность которого больше геометрической, то система (11) имеет комплексное решение

$$\varphi(t) = e^{i\beta t}(th_1 + h_2)$$

где h_1, h_2 — собственный и присоединенный вектор, соответствующие числу λ .

Заметим, что в обоих случаях $|\varphi(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, хотя бы одна из вектор-функций, $Re\varphi(t)$ или $Im\varphi(t)$, является неограниченным вещественным решением (11). Пусть таковой является $Re\varphi(t)$. Тогда выбирая в качестве начального условия

$$r(0) = \mu Re\varphi(0)$$

при достаточно малом μ , получаем неограниченное решение с начальным значением в сколь угодно малой окрестности нуля. Отсюда следует, что нулевое решение неустойчиво.

22. Классификация точек покоя ЛОС 2-го порядка (случай вещественных корней).

Исследуем подробно поведение траекторий в окрестности точки покоя линейной системы

$$\dot{r} = Ar$$

если $A \in M_2(\mathbb{R})$. Пусть $\det A \neq 0$, тогда имеется единственное положение равновесия $r = 0$ и собственные числа λ_1, λ_2 матрицы A отличны от нуля.

Случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Перейдем в систему координат u, v , связанную с собственным базисом h_1, h_2 . Подставляя в уравнение $r = Ts$, где $s = (u, v)^T$, $T = (h_1, h_2)$, получаем

$$T\dot{s} = ATs$$

Умножая слева на T^{-1} , находим

$$\dot{s} = T^{-1}ATs$$

Так как $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, то в новых координатах система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u \\ \dot{v} = \lambda_2 v \end{cases}$$

Ее решение $u = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $v = C_2 e^{\lambda_2 t}$.

Если одна, и только одна из констант C_1 и C_2 равна нулю, то получаем параметрическое задание одной из полуосей. Заметим еще, что изменение знака одной из констант

преобразует фазовую траекторию в симметричную ей относительно координатной оси. Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет только в первой четверти.

Пусть $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Выражая t через u и подставляя в выражение для v , находим

$$v = C_2 \left(\frac{u}{C_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = C u^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

При $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ получается семейство парабол. Функции u и v возрастают, следовательно, фазовые траектории расходятся от начала координат. Отражая траектории относительно координатных осей, получаем фазовый портрет во всей плоскости (см. [рисунок](#)). Такая точка покоя называется **неустойчивый узел**.



Рис. 1: Неустойчивый узел в старой и новой системе координат

При возвращении к прежней системе координат фазовый портрет исказится, но качественное поведение траекторий не изменится. Это замечание относится и ко всем последующим случаям.

Если $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, то уравнение фазовых траекторий не меняется, но изменяется направление движения. Теперь фазовые точки стремятся к началу координат. Соответствующее положение равновесия — **устойчивый узел** (см. [рисунок](#)).



Рис. 2: Устойчивый узел

Если $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, то $v = Cu^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ — уравнение гиперболы. Соотношения $u = C_1 e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$, $v = C_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$ дают представление о направлении движения вдоль фазовых траекторий. Точка покоя называется **седло** (см. [рисунок](#)), она неустойчива. Асимптоты фазовых траекторий называют **сепаратрисами седла**. В старой системе координат сепаратрисы проходят вдоль собственных векторов матрицы коэффициентов.



Рис. 3: Седло

Случай $\lambda_1 = \lambda_2$

Если геометрическая кратность собственного числа $\lambda = \lambda_{1,2}$ равна двум, то $A = \text{diag}(\lambda, \lambda)$. Тогда решения системы $x = C_1 e^{\lambda t}$, $y = C_2 e^{\lambda t}$. Исключая отсюда параметр t получаем, что фазовые траектории — лучи, входящие в начало координат при $\lambda < 0$, и выходящие из него, если $\lambda > 0$. Соответствующая точка покоя — устойчивый или неустойчивый дикритический узел (см. [рисунок](#)).



Рис. 4: Устойчивый и неустойчивый дикритический узел

Пусть собственное число λ имеет геометрическую кратность 1. Подставляя в систему $\dot{r} = Ts$, где T — матрица перехода к жорданову базису, получаем

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} s$$

Тогда

$$s = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Следовательно, $u = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$, $v = C_2 e^{\lambda t}$.

Заметим, что одновременная замена знака у постоянных C_1 и C_2 переводит фазовую траекторию в симметричную ей относительно начала координат. При $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ функции u и v определяют полуоси координатной оси u . Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет при $v > 0$.

Выражая параметр t через v и подставляя его в выражение для u , находим уравнение траекторий

$$u = C v + \frac{\ln v}{\lambda} v$$

где $C = \frac{C_1}{C_2}$. Производная u'_v указывает на то, что все фазовые траектории касаются оси u при $v \rightarrow 0$ (см. [рисунок](#)). Соответствующая точка покоя — вырожденный узел (устойчивый при $\lambda < 0$ и неустойчивый при $\lambda > 0$).



Рис. 5: Устойчивый и неустойчивый вырожденный узел

23. Классификация точек покоя ЛОС 2-го порядка (случай комплексных корней).

Исследуем подробно поведение траекторий в окрестности точки покоя линейной системы

$$\dot{r} = Ar$$

если $A \in M_2(\mathbb{R})$. Пусть $\det A \neq 0$, тогда имеется единственное положение равновесия $r = 0$ и собственные числа λ_1, λ_2 матрицы A отличны от нуля.

Случай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$

Поскольку матрица A вещественная, то $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. Пусть $\lambda = \lambda_1$, h — соответствующий собственный вектор. Тогда $\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h$ — базис в \mathbb{R}^2 . Поскольку

$$\operatorname{Re} h = \frac{h + \bar{h}}{2}, \quad \operatorname{Im} h = \frac{h - \bar{h}}{2i} = \frac{-ih + i\bar{h}}{2}$$

то матрица перехода T к базису $\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h$ представима в виде

$$T = (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) = \frac{1}{2}(h, \bar{h}) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Пусть $H = (h, \bar{h})$ — матрица перехода к собственному базису. Подставляя $r = Ts$ в уравнение $\dot{r} = Ar$, находим

$$\frac{1}{2}H \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = A \frac{1}{2}H \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} s$$

Сокращая на множитель $\frac{1}{2}$ и умножая слева на H^{-1} , получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = H^{-1}AH \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} s \quad (13)$$

Поскольку $H^{-1}AH = \operatorname{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$, то система (13) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \lambda(u - iv) \\ \dot{u} + i\dot{v} = \bar{\lambda}(u + iv) \end{cases}$$

Уравнения этой системы равносильны: одно получается из другого при комплексном сопряжении. Поэтому достаточно рассмотреть только одно из них. Положим $z = u + iv$. Тогда второе уравнение принимает вид

$$\dot{z} = \bar{\lambda}z$$

Его решения $z = Ce^{\bar{\lambda}t}$

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $C = ae^{i\varphi}$. Тогда

$$z = ae^{\alpha t} e^{i(\varphi - \beta t)}$$

При $\alpha = 0$ получаем окружности радиуса a . Соответствующая устойчивая, но не асимптотически устойчивая точка покоя называется **центр**. Направление обхода окружностей зависит от знака β .

При $\alpha > 0$ получаем логарифмическую спираль. Модуль z возрастает, значит, точка удаляется от начала координат, при этом совершая вокруг него обороты. Данное положение равновесия называется **неустойчивый фокус**.

При $\alpha < 0$ спираль закручивается. Точка покоя — **устойчивый фокус**. Направление закручивания или раскручивания траекторий в случае фокуса зависит от знака β (см. рисунок).



Рис. 6: Центр, устойчивый и неустойчивый фокус

24. Теорема Ляпунова об устойчивости.

Рассмотрим нелинейную автономную систему $\dot{r} = f(r)$. Допустим, вектор-функция f дифференцируема. Тогда по формуле Тейлора

$$f(r) = f(0) + f'(0)r + o(r)$$

Определение. Пусть $f(0) = 0$. Тогда система

$$\dot{r} = f'(0)r$$

называется **системой первого приближения** или **линеаризацией** системы $\dot{r} = f(r)$

Теорема (Ляпунов, устойчивость по первому приближению). Пусть $f \in C^2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля, $f(0) = 0$. Тогда нулевое решение системы $\dot{r} = f(r)$

1. асимптотически устойчиво, если $\operatorname{Re} \lambda < 0$ для любого $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$
2. неустойчиво, если найдется $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$, для которого $\operatorname{Re} \lambda > 0$

Доказательство. В окрестности $r = 0$ систему $\dot{r} = f(r)$ можно записать в виде

$$\dot{r} = Ar + q(r)$$

где $q(r) = o(|r|)$ при $|r| \rightarrow 0$. Решение задачи Коши $\dot{r} = f(r)$, $r(0) = r_0$ в силу предположения в некоторой окрестности r_0 определено для всех $t > 0$. Его можно записать в виде

$$r(t) = e^{At} \cdot r_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot q(r(\tau)) d\tau$$

Если $\operatorname{Re} \lambda < 0$ для любого $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$, то найдется $\mu > 0$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda < -2\mu < 0$. Решение задачи Коши для $\dot{r} = Ar$, $r(0) = r_0$ имеет вид

$$r = e^{At} \cdot r_0$$

Покажем, что найдется такое $M > 0$, что норма матричной экспоненты

$$|e^{At}| \leq M e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0$$

Каждый элемент $a_{ij}(t)$ матрицы e^{At} является конечной суммой квазимногочленов

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m P_k^{(i,j)}(t) e^{\lambda_k t}$$

где $P_k^{(i,j)}(t)$ — многочлены, m — количество собственных чисел. Всегда найдется такое число $c_{ij} > 0$, что для всех $k \in [1 : m]$

$$|P_k^{(i,j)}(t) e^{\lambda_k t}| \leq c_{ij} e^{-\mu t}, \quad \forall t > 0$$

Тогда

$$\begin{aligned} |r(t)| &\leq |e^{At}| |r_0| = |r_0| \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t)|^2} \leq \\ &\leq |r_0| e^{-\mu t} m \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |c_{ij}|^2} = M e^{-\mu t} |r_0| \end{aligned}$$

Так как $q(r) = o(|r|)$ при $|r| \rightarrow 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $|r| < \delta$ следует $|q(r)| \leq \varepsilon |r|$. Тогда при всех $t > 0$

$$\begin{aligned} |r(t)| &\leq |e^{At} r_0| + \int_0^t |e^{A(t-\tau)} q(r(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq |e^{At}| |r_0| + \int_0^t |e^{A(t-\tau)}| |q(r(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq M e^{-\mu t} |r_0| + \varepsilon M \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} |r(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Если положить $u(t) = e^{\mu t}|r(t)|$, то отсюда находим, что

$$u(t) \leq M|r_0| + \varepsilon M \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Функция $u(t)$ удовлетворяет условиям леммы Гронуолла. Значит, что при всех $t > 0$

$$u(t) \leq M|r_0|e^{\varepsilon Mt}$$

Заменяя $u(t)$ на $e^{\mu t}|r(t)|$, получаем оценку

$$|r(t)| \leq M|r_0|e^{-(\mu-\varepsilon M)t}$$

Из полученной оценки следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$r(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$$

если фиксировать $\varepsilon > 0$, положив, например, $\varepsilon = \frac{\mu}{2M}$. Кроме того, взяв $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$, из оценки получаем, что $|r(t)| < \varepsilon$ при $|r_0| < \delta$ для всех $t > 0$.

Второй пункт теоремы следует непосредственно из доказательства теоремы об устойчивости ЛОС с постоянными коэффициентами (мб кукарек, хз как доказать).

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля. Функция $V \in C^1(\Omega)$ называется функцией Ляпунова системы $\dot{r} = f(r)$, если

- $V(r) > 0$ при всех $r \in \Omega \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$
- $V' \cdot f \leq 0$ при всех $r \in \Omega$

Теорема (Ляпунов, об устойчивости). Пусть $f \in Lip_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля, $f(0) = 0$. Если в области Ω существует функция Ляпунова системы $\dot{r} = f(r)$, то $r = 0$ — устойчивое решение.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть нулевое положение равновесия неустойчиво. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ можно выбрать такое начальное положение r_0 из δ -окрестности нуля, что будет ложным утверждение

$$\forall t \geq 0 \quad |r(t, 0, r_0)| < \varepsilon \tag{14}$$

Все числа, меньшие ε , обладают тем же свойством, что и ε . Поэтому можно считать, что ε -окрестность содержится вместе с границей в области Ω .

Ложность утверждения (14) означает одно из двух:

1. решение $r(t, 0, r_0)$ определено не при всех $t \geq 0$
2. найдется $t_\varepsilon > 0$, такое что $|r(t_\varepsilon, 0, r_0)| \geq \varepsilon$

Допустим, выполнено (1), то есть максимальное решение $r(t, 0, r_0)$ (которое существует и единственно) определено на интервале $(a, b) \ni 0$, где $b < +\infty$. Построим параллелепипед $[0, b] \times \overline{B}_\varepsilon(0)$, где $\overline{B}_\varepsilon(0)$ — замыкание ε -окрестности нуля. Интегральная кривая решения $r(t, 0, r_0)$ выйдет на его границу при некотором $t_\varepsilon < b$. Значит, верно утверждение (2).

Итак, достаточно получить противоречие, если верно (2). Будем считать, что t_ε — это точка, в которой $r(t_\varepsilon, 0, r_0) \in \partial B_\varepsilon(0)$, где $\partial B_\varepsilon(0)$ — граница ε -окрестности нуля.

Пусть $V_M = \min_{r \in \partial B_\varepsilon(0)} V(r)$. Поскольку $V(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, то можно выбрать δ так, чтобы $V(r) < \frac{V_M}{2}$ при $|r| < \delta$. Положим

$$v(t) = V(r(t, 0, r_0))$$

где r_0 выбрано из δ -окрестности нуля так, чтобы выполнялось (2).

Функция v дифференцируема

$$\begin{aligned} v(0) &= V(r_0) < \frac{V_M}{2} \\ v(t_\varepsilon) &= V(r(t_\varepsilon, 0, r_0)) \geq V_M \end{aligned}$$

Поэтому найдется точка $t_1 \in (0, t_\varepsilon)$, в которой $\dot{v}(t_1) > 0$.

Однако, исходя из второго свойства функции Ляпунова, имеем

$$\dot{v}(t_1) = V'(r(t_1, 0, r_0)) \cdot r'_t(t_1, 0, r_0) = V'(r(t_1, 0, r_0)) \cdot f(r(t_1, 0, r_0)) \leq 0$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема (Ляпунов, об асимптотической устойчивости). Если в условиях предыдущей теоремы выполнено $V' \cdot f < 0$ в области $\Omega \setminus \{0\}$, то нулевое решение системы $\dot{r} = f(r)$ асимптотически устойчиво.

Дополнительные вопросы

Уравнение 1-го порядка и его решение.

Это уравнение вида $F(x, y, y') = 0$. Функция φ — решение такого дифференциального уравнения, если:

1. $\varphi \in C^1(a, b)$
2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ на (a, b)

Пример. $y' - x = 0$, решение $y = \frac{x^2}{2} + C$.

Методов решения много, все относятся к частным случаям.

Интегральная кривая уравнения.

Это график решения уравнения.

Общее решение уравнения.

Это множество всех его решений.

Уравнение 1-го порядка, разрешённое относительно производной. Геометрический смысл.

Это уравнение вида $y' = f(x, y)$.

Пусть φ решение этого уравнения. Тогда $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, то есть тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в точке (x_0, y_0) это $f(x_0, y_0)$

Ломаная Эйлера.

См. 4

Уравнение в дифференциалах, его решение и параметрическое решение.

Уравнение в дифференциалах получается, если в уравнении, разрешенном относительно производной, записать $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Функция φ — решение такого дифференциального уравнения, если:

1. $\varphi \in C^1(a, b)$
2. $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на (a, b)

Аналогично можно определить решение вида $x = \psi(y)$.

Функция $r = (\varphi(t), \psi(t))$ — параметрическое решение такого уравнения на α, β , если:

1. $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$ и $r'(t) \neq 0$ на $t \in (\alpha, \beta)$
2. $P(\varphi(t), \psi(t)) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$ на $t \in (\alpha, \beta)$

Пример.

$$xdx + ydy = 0$$

Подстановкой тривиально можно убедиться, что $y = \sqrt{C^2 - x^2}$ — решение этого уравнения.

Параметрическое решение $(C \cos t, C \sin t)$

Особые точки уравнения в дифференциалах.

(x_0, y_0) — особая, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$

Пример.

$$x dx + y dy = 0$$

Особая точка $(0, 0)$, через нее ничто не проходит.

Геометрический смысл уравнения в дифференциалах и его решения.

Пусть $r = (x(t), y(t))$ есть параметрическое решение уравнения на (α, β) . Тогда при $t \in (\alpha, \beta)$:

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0$$

$$F(r(t))r'(t) = 0$$

Таким образом, любая интегральная кривая в каждой своей точке перпендикулярна вектору $F(x, y)$

Задача Коши (ЗК) для уравнения 1-го порядка, разрешённого относительно производной.

Задача Коши — задача поиска решения уравнения, удовлетворяющему $y(x_0) = y_0$.

Теорема 8. $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда в некоторой окрестности x_0 существует решение задачи Коши.

Теорема 9. Как в предыдущей теореме, но $f'_y \in C(G)$. Тогда решение задачи Коши единственно.

Таким образом, может быть такое, что в некоторых (или всех) точках решение не единственно.

Особое решение уравнения.

Это решение уравнения, в каждой точке которого нарушается локальная единственность решения задачи Коши.

Пример.

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

Тогда особое решение $y' \equiv 0$, его в любой точке $(x_0, 0)$ пересекает решение вида $y = (x - x_0)^3/3$

Однородное уравнение.

Функция однородна степени α , если $\forall t, x, y \quad F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y)$

Однородное уравнение — уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

, где P и Q однородные функции одной степени.

Замена $z = \frac{y}{x}$ сводит это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Геометрическое свойство решений однородного уравнения.

Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ — параметрическое решение однородного диффура. Растянем пространство в λ раз, получим $x = \lambda\varphi(t), y = \lambda\psi(t)$. При подстановке получим:

$$P(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\varphi' + Q(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\psi' = 0$$

По однородности:

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' = 0$$

Таким образом, любое растяжение (или сжатие) решения однородного уравнения приводит к другому решению однородного уравнения.

Уравнение Бернулли.

Это уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Поделив на y^α и заменив $z = y^{1-\alpha}$, получаем линейное.

Уравнение Риккати.

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Оно решается только в особых случаях (например, $\alpha = 2$), но если нашел какое-то решение φ , то замена $y = z + \varphi$ сводит к Бернулли.

Уравнение в полных дифференциалах.

Это уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

, при этом

$$\exists u : du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Решение имеет вид $u(x, y) = C$

Обязательное условие на существование u это $P'_y = Q'_x$. Если при этом $P, Q \in C^1(G)$ и G односвязна, то это условие еще и достаточно.

Если область прямоугольная, то можно решить систему $\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$ следующим образом: Решаем первое уравнение при фиксированном y , после чего заменяем $C = C(y)$ и находим C как функцию.

В таком случае u есть потенциал векторного поля (P, Q) .

Интегрирующий множитель.

Это то, на что мы домножаем уравнение, чтобы получить уравнение в полных дифференциалах.

Если μ — инт. множитель, то

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

, то есть

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

Это сложно решить, но иногда решается при $\mu'_x \equiv 0$ или $\mu'_y \equiv 0$.

Уравнение n -го порядка и его решение.

Это уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Его решение на a, b — φ , такое что:

1. $\varphi \in C^n(a, b)$
2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$ на (a, b)

ЗК для уравнения, разрешённого относительно старшей производной.

Это уравнение вида $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Задача Коши для него имеет вид $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Методы понижения порядка уравнения.

- $y^{(n)} = f(x) \implies y^{(n-1)} = \int f(x) dx$
- $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) \xrightarrow{z=y^{(k)}} F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$

- $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Тогда пусть $z = y'$, $y''_{xx} = z'_y z$, $y'''_{xxx} = z''_{yy} z^2 + z'^2_y z$ и т.д.
- Пусть F линейна по y . Тогда можно заменить $z = y'/y$
- $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \Rightarrow \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$

Нормальная система уравнений, её решение.

Нормальная система порядка n это система вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Можно ввести пару обозначений для краткости:

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \vdots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix} \quad \dot{r} = f(t, r)$$

φ — решение такой системы, если:

1. $\varphi \in C^1((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$
2. $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ на (a, b)

Интегральная кривая нормальной системы.

Это график решения, но теперь он в $(n + 1)$ -мерном пространстве.

Глобальное и локальное условие Липшица.

Функция $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица на множестве D , если $\exists L$ — константа Липшица, что для $\forall r_1, r_2 \in D$ $|f(r_2) - f(r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$

Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда $f \in \text{Lip}[1/2, 1]$, $f \notin \text{Lip}(0, 1]$, $f \in \text{Lip}_{loc}(0, 1]$

Функция $f : \mathbb{R}^{n+1}_{t,r} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по r (*равномерно по t*) на множестве D , если $\exists L$, что для $\forall (t, r_1), (t, r_2) \in D$ $|f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$, обозначается $f \in \text{Lip}_r(D)$

$f \in \text{Lip}_{loc}(D)$ локально, если $\forall x_0 \in D \exists U(x_0) f \in \text{Lip}(U(x_0))$

Приближения Пикара.

- $\varphi_0(t) = 0$
- $\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$

Сведение уравнения n-го порядка к равносильной системе.

Пусть $\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T$

Лемма 5. y — решение $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ на $(a, b) \Leftrightarrow \Lambda_n y$ — решение на (a, b)

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть y — решение первого уравнения. Тогда пусть $y_k = y^{(k-1)}$. Тогда первые $n-1$ уравнений решаются, а $\dot{y}_n = y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$, искомое верно.

\Leftarrow Пусть r — решение второго уравнения. Будем последовательно дифференцировать первое уравнение и получим искомое.

□

Максимальное решение.

Решение φ продолжимо, если есть решение ψ на большем отрезке, равное φ на $\text{dom } \varphi$.

Если у решения нет продолжения, оно максимально.

Определитель Вронского (решений ЛОС и ЛОУ) и его свойства.

Вронскиан множества вектор-функций $\{r_k\}_{k=1}^n$, где $r_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})^T$:

$$W(t) = \det(r_1(t), \dots, r_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Определение. Определителем Вронского (или вронскианом) функций $y_1, y_2, \dots, y_n \in$

$C^{n-1}(a, b)$ называют

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Фундаментальная система решений.

Определение. Фундаментальной системой решений системы уравнений $\dot{r} = P(t)r$ называется совокупность ее n линейно независимых решений.

Фундаментальная матрица.

Определение. Фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$ — матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

Метод неопределённых коэффициентов для ЛС.

$A \in M_n(\mathbb{C})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $a_j \in \mathbb{C}^n$ при $j \in [0, k] \cap \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $p_k(t)$ — многочлен от t степени k , при этом коэф. a_j .

Тогда $e^{\gamma t} q_{k+s}(t)$ есть решение системы $\dot{r} = Ar + e^{\gamma t} p_k(t)$, где $q_{k+s}(t)$ — вектор-многочлен степени $\leq k + s$, и s :

1. $= 0$, если λ не СЗ A
2. $=$ максимальный размер жордановых клеток, соответствующих γ

Характеристический многочлен ЛУ.

В дальнейшем для краткости используется обозначение

$$Ly = \frac{d^n}{dt^n} y + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y + a_0 y = \left(\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} \right) y$$

где $a_n = 1$. При помощи оператора L уравнение (8) записывается в виде

$$Ly = f(t)$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Ly = 0 \tag{15}$$

Применяя оператор L к функции $e^{\lambda t}$, находим

$$L(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}$$

Определение. Многочлен

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

называется **характеристическим многочленом** уравнения (8), а его корни — **характеристическими числами** уравнения (8).

Метод неопределённых коэффициентов для ЛУ.

Пусть в уравнении

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = f(t)$$

$f(t) = p_k(t)e^{\gamma t}$, где $p_k(t)$ — многочлен (f — *квазимногочлен*). Тогда у этого уравнения есть единственное частное решение вида

$$\varphi(t) = t^m q_k(t) e^{\gamma t}$$

, где q_k — многочлен степени k , при этом m :

1. $= 0$, если γ — не характеристическое число
2. $=$ кратность γ как хар. числа.

Автономная система.

Это система вида

$$\dot{r} = f(r)$$

Фазовое пространство автономной системы. Фазовая траектория, фазовый портрет, фазовая скорость, точка покоя.

- Фазовое пространство — $\text{dom} f$
- Расширенное фазовое пространство — $\mathbb{R} \times \text{dom} f$
- Фазовая траектория — проекция интегральной кривой на фазовое пространство параллельно оси времени
- Фазовый портрет — совокупность фазовых траекторий
- Фазовая скорость в точке r — $f(r)$

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость.

Определение. Положение равновесия $r = 0$ автономной системы $\dot{r} = f(r)$ называется **устойчивым (по Ляпунову)**, если для любой ε -окрестности нуля найдется такая δ -окрестность нуля, что любое решение, выходящее из этой δ -окрестности, во все будущие моменты времени отличается от нуля менее, чем на ε . То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |r_0| < \delta \implies \forall t \geq 0 |r(t, 0, r_0)| < \varepsilon$$

В противном случае положение равновесия называется **неустойчивым**.

Определение. Положение равновесия $r = 0$ автономной системы $\dot{r} = f(r)$ называется **асимптотически устойчивым**, если

- $r = 0$ устойчиво
- все решения, начинающиеся в некоторой окрестности нуля, в будущем стремятся к нулю, то есть

$$\exists \delta > 0 : |r_0| < \delta \implies r(t, 0, r_0) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty$$

Функция Ляпунова.

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля. Функция $V \in C^1(\Omega)$ называется **функцией Ляпунова** системы $\dot{r} = f(r)$, если

- $V(r) > 0$ при всех $r \in \Omega \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$
- $V' \cdot f \leq 0$ при всех $r \in \Omega$

Теорема об устойчивости по первому приближению.

Есть система $\dot{r} = f(r)$. Пусть f — дифф. Тогда $f(r) = f(0) + f'(0)r + o(r)$. Пусть $f(0) = 0$ (если не так, пошафлим координаты). Тогда $f(r) = f'(0)r$ есть сист $\blacklozenge\blacklozenge$ ма первого приближения.

Теорема 10. $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля, $f(0) = 0$. Тогда нулевое решение системы $\dot{r} = f(r)$:

1. Асимптотически устойчиво, если $\Re \lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \text{spec} f'(0)$
2. Неустойчиво, если $\exists \lambda \in \text{spec} f'(0) : \Re \lambda > 0$