### 0.1 Оптимальность кода Хаффмана

**Лемма 1.** Существует оптимальный префиксный код, для которого наиболее редко встречающиеся два символа $x$ и $y$:

1. Самые глубокие листья
2. Братья

*Доказательство.* Рассмотрим самый глубокий лист в дереве Хаффмана $a$, $f_a \leq x$.

Т.к. дерево оптимально, у $a$ есть брат $b$, $f_b \leq y$.

Поменяем местами $a, b$ с $x, y$. Тогда $\sum l_i f_i = A - l_a f_a - l_b f_b - l_y f_y + l_a f_x + l_x f_a + l_b f_y + l_y + f_b = A + (l_a - l_x)(f_x - f_a) + (l_b - l_y)(f_y - f_b)$. Первая и третья скобка $\geq 0$, вторая и четвертая $\leq 0 \Rightarrow \sum l_i f_i \leq A$ , т.е. новое дерево оптимально. □

Заменим $x$ и $y$ на $z$, так что $f_x + f_y = f_z$

$$\sum f_i l_i = A - f_z l_z + f_x l_x + f_y l_y = A - f_x l_z - f_y l_z + f_x(l_z + 1) + f_y(l_y + 1) = A + f_x + f_y$$

Таким образом, оптимизация дерева с $z$ вместо $x$ и $y$ оптимизирует и дерево с $x$ и $y$, поэтому код Хаффмана оптимален.

Но это не значит, что нельзя сжимать лучше, чем Хаффман.

## 1 Арифметическое кодирование

Пусть $a$ встречается $1000$ раз, а $b - 1$. Тогда скорее всего оптимально в первый бит писать $0$, если в строке только $a$, иначе $1$, а дальше — по Хаффману.

### 1.1 Кодирование

Пусть $a$ встречается $3$ раз, $b-2$, $c-1$. Тогда закодируем строку $ababac$. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и поделим его в отношении частот символов, т.е. в точках $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$. Теперь проведем то же самое для отрезка $[0, \frac{1}{2}]$, т.е. разделим его в точках $\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{12}$. Теперь то же самое для $[\frac{1}{4}, \frac{5}{12}]$, т.к. он соответствует $b$, которая соответствует второму символу. В итоге получим некий отрезок $[l, r]$. Найдём в нем число вида $\frac{p}{2^a}$. Запишем $p$ в двоичном виде с дополнением слева нулями до длины $a$.

### 1.2 Декодирование

Из длины кодового слова можно понять $a$ — длина слова, и $p$ — перевод из двоичного представления кода. В таком случае известна дробь $\frac{p}{2^q}$ на отрезке $[0, 1]$. Как и в кодировании, делим этот отрезок на соответствующие части и спускаемся в часть, в которую попал $\frac{p}{2^q}$. Чтобы остановить построение, необходимо знать длину исходного слова.

$$\frac{f_a}{\sum f_i} \frac{f_b}{\sum f_i} \frac{f_c}{\sum f_i} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{L} f_{s[i]}}{L^L} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} f_i^{f_i}}{L^L}$$

Можно заметить, что алгоритм не работает, когда

$$\frac{1}{2^q} > len = r - l$$

Поэтому возьмем $\frac{1}{2^q} \leq len$.

$$\frac{1}{2^q} \leq \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} f_i^{f_i}}{L^L}$$

$$-q \leq \sum_{i=1}^{k} f_i \log_2 f_i - L \log_2 L = \sum_{i=1}^{k} f_i (\log_2 f_i - \log_2 L)$$

$$q \geq -L \sum_{i=1}^{k} \frac{f_0}{L} \log_2 \frac{f_i}{L} = -L \boxed{\sum_{i=1}^{k} p_i \log_2 p_i} - \text{Энтропия Шеннона} = -LH(p_1, p_2 \ldots p_k)$$

Оптимальность кодирования с учетом зависимостей между символами не определена, поэтому все рассматриваемые далее методы являются эвристиками.

## 2 Словарное кодирование

### 2.1 LZ

Используется zip.

Существует следующие виды токенов:

1. символ

2. ссылка: $abacaba \to abac(4,3)$ *(сдвинуться на 4 символа назад и вывести три символа)*, $ab(2,6) = ababab$

Оптимальное построение: Для каждого символа находим длиннейшую подстроку, начинающуюся с него. Если записать ссылку на неё, то делаем это, иначе пишем символ без оптимизации. Для оптимального времени построения нужны суффиксные деревья.

## 2.2 LZW

Каво

## 2.3 BWT

$\triangleleft abacaba\$$. Отсортируем все её циклические сдвиги.

$\$abacaba$
$a\$bacaba$
$aba\$caba$
$abacaba\$$
$acaba\$ab$
$ba\$abaca$
$bacaba\$a$
$caba\$aba$

Последний столбец — преобразование BWT.

Из того, что $x$ часто встречается как подстрока, получаем много одинаковых символов подряд.

## 2.4 MTF — move to front

Исходно код символа равен его номеру в алфавите. Когда символ встречается, его код выводится и приравнивается к 0.

$aaaaaaaazzz \to ?00000000?00$

Полученную строку можно эффективно кодировать.

## 2.5 bzip2