

## Интеграл (продолжение)

**Определение.** Если оказалось, что  $\int_X f^+, \int_X f^-$  оба конечны, то  $f$  называется суммируемой.

*Примечание.*

1. Если  $f$  измеримо и  $\geq$ , то интеграл определения 3 = интегралу определения 2.

**Определение (4).**

- $E \subset X$  — измеримо
- $f$  измеримо на  $X$

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E$$

*Примечание.*

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \Rightarrow \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$
- $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g : 0 \leq g \leq f \text{ на } E, g - \text{ступ.}\}$  и мы считаем, что  $g \equiv 0$  вне  $E$ .
- $\int_E f$  не зависит от значений  $f$  вне множества  $E$ .

**Свойства.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $E \subset X$  — измеримо,  $g, f$  — измеримо.

1. Монотонность  $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

*Доказательство.*

(а) При  $f, g \geq 0$  — очевидно из определения.

(б) При произвольных  $f, g$   $f^+ \leq g^+$  и  $f^- \geq g^-$  (очевидно из определения). Из предыдущего случая  $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$ .

□

$$2. \int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$$

$$3. \mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$$

*Доказательство.*

(а)  $f$  — ступ. Тривиально.

(б)  $f$  — измеримо,  $f \geq 0$ .  $\sup 0 = 0$ , поэтому искомое выполнено.

$$(c) \int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$$

□

*Примечание.*  $f$  — измерима. Тогда  $f$  суммируема  $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  следует из  $f^+, f^- \leq |f|$

$\Rightarrow$  будет доказано позже на этой лекции.

□

$$4. \int_E (-f) = - \int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$$

*Доказательство.*

(а)  $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$ , тогда искомое очевидно.

(б) Можно считать  $c > 0$  без потери общности, тогда для  $f \geq 0$  тривиально.

□

$$5. \exists \int_E f d\mu. \text{ Тогда } \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} -|f| &\leq f \leq |f| \\ -\int |f| &\leq \int f \leq \int |f| \\ \left| \int f \right| &\leq \int |f| \end{aligned}$$

□

$$6. \mu E < +\infty, a \leq f \leq b. \text{ Тогда}$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

*Следствие 1.*  $f$  — измеримо на  $E$ ,  $f$  — ограничено на  $E$ ,  $\mu E < +\infty$ . Тогда  $f$  суммируемо на  $E$

$$7. f \text{ суммируема на } E. \text{ Тогда } f \text{ почти везде конечна.}$$

*Доказательство.*

(а)  $f \geq 0$  и  $f = +\infty$  на  $A \subset E$ . Тогда  $\int_E f \geq n\mu A \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

(б) В произвольном случае аналогично со срезками.

□

**Лемма 1.**

- $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  — измеримо
- $g$  — ступенчато

- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu \end{aligned}$$

1: переставлять можно, т.к. члены суммы  $\geq 0$ . □

**Теорема 1.**

- $A = \sqcup A_i$  — измеримо
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримо на  $A$
- $f \geq 0$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

*Доказательство.* Докажем, что части равенства  $\leq$  и  $\geq$ , тогда равенство выполнено.

$$\leq \quad \triangleleft g : 0 \leq g \leq f$$

$$\int_A g \stackrel{(2)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$$\geq \quad 1. \quad A = A_1 \sqcup A_2$$

$\triangleleft 0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f\chi_{A_2}$ . Пусть  $E_k$  — совместное разбиение, у  $g_1$  коэффициенты  $\alpha_k$ , у  $g_2$  :  $\beta_k$ .

$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f\chi_A$$

$$\begin{aligned}\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 &= \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 &\leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} f &\leq \int_A f\end{aligned}$$

2.  $A = \bigsqcup A_i$  тривиально по индукции.

3.  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$ , где  $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

2: по лемме об интеграле. □

*Следствие 2.*  $f \geq 0$  — измеримо. Пусть  $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  и  $\nu E := \int_E f d\mu$ . Тогда  $\nu$  — мера.

*Следствие 3* (Счётная аддитивность интеграла).  $f$  суммируема на  $A = \bigsqcup A_i$  — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

*Доказательство.* Очевидно, если рассмотреть срезки. □

*Следствие 4.*  $A \subset B, f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

## Предельный переход под знаком интеграла

Пусть  $f_n \rightarrow f$ . Можно ли утверждать, что  $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$ ?

*Пример (контр).*

$$\begin{aligned}f_n &:= \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} & f &\equiv 0 & f_n &\rightarrow f & (\text{даже } f_n \rightrightarrows f) \\ \int_{\mathbb{R}} f_n &= \frac{1}{n} \lambda[0, n] = 1 & & \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f\end{aligned}$$

**Теорема 2 (Леви).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n$  измеримо
- $\forall n \ 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  почти везде.

- $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

*Примечание.*  $f$  задано везде, кроме множества  $e$  меры 0. Считаем, что  $f = 0$  на  $e$ . Тогда  $f$  измеримо на  $X$ .

*Доказательство.*

$\leq$  очевидно, т.к.  $\int f_n \leq \int f$  почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_0 = \int_{X \setminus e} f_n \leq \int_{X \setminus e} f \leq \int_X f$$

$\geq$  достаточно проверить, что  $\forall$  ступенчатой  $g : 0 \leq g < f$  выполняется следующее  $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$

Сильный трюк: то достаточно проверить, что  $\forall c \in (0, 1) \quad \lim \int_X f_n \geq c \int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$$\bigcup E_n = X, \text{ т.к. } c < 1$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

$$\text{Тогда } \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \stackrel{(3)}{=} c \int_X g$$

3: по непрерывности снизу меры  $\nu : E \mapsto \int_E g$  □

**Теорема 3.**

- $f, g \geq 0$
- $f, g$  измеримо на  $E$

$$\text{Тогда } \int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

*Доказательство.*

1.  $f, g$  — ступенчатые, т.е.  $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2.  $f \geq 0$ , измеримо.  $\exists$  ступ.  $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \quad \lim f_n = f$   
 $g \geq 0$ , измеримо.  $\exists$  ступ.  $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \quad \lim g_n = g$

$$\begin{aligned} f_n + g_n &\rightarrow f + g \\ \int_E f_n + g_n &\xrightarrow{\text{т. Леви}} \int_E f + g \\ \int_E f_n + \int_E g_n &\rightarrow \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

□

**Следствие 5.**  $f, g$  суммируемы на  $E$ . Тогда  $f + g$  суммируемо и  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ . Таким образом, доказано 3.

**суммируемости.**  $|f + g| \leq |f| + |g|$ . Пусть  $h = f + g$ . Тогда

$$\begin{aligned} h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ h^+ + f^- + g^- &= f^+ + g^+ + h^- \\ \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^- \\ \int_E h^+ - \int_E f^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^- \end{aligned}$$

□

**Определение.**  $\mathcal{L}(X)$  — множество суммируемых функций на  $X$

**Следствие 6 (следствия).**  $\mathcal{L}(X)$  — линейное пространство, а отображение  $f \mapsto \int_X f$  это линейный функционал на  $\mathcal{L}(X)$ , т.е.  $\forall f_1 \dots f_n \in \mathcal{L}(X) \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

???

**Теорема 4** (об интегрировании положительных рядов).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$  почти везде

- $u_n$  измеримо

Тогда

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

*Доказательство.* По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_k \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

Пусть  $S_n \rightarrow S$ . Тогда  $\int_E S_n \rightarrow \int_E S$

□

*Следствие 7.*  $u_n$  измеримо и  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$ . Тогда ряд  $\sum u_n(x)$  абсолютно сходится при почти всех  $x$ .

*Доказательство.*

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

*Пример.*  $x_n \in \mathbb{R}$  — произвольная последовательность,  $\sum a_n$  абсолютно сходится.

Тогда  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$  абсолютно сходится при почти всех  $x$ .

*Доказательство.* Достаточно проверить абсолютную сходимость на  $[-N, N]$  почти везде.

$$\begin{aligned} \int_{[-N, N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &= \int_{-N}^N \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} dx \\ &= |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &\leq |a_n| \int_{-N}^N \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &= 4\sqrt{N} |a_n| \end{aligned}$$

□