Тензоры в евклидовом пространстве

1. Естественный изоморфизм X и X^*

$]X$ — линейное пространство, X^* сопряжено X

В X введена евклидова структура $\forall x, y \in X \ \ \langle x, y \rangle \in K$, удовлетворяющая свойствам *(см. прошлые лекции)*

$\lhd \langle x, y \rangle = \tilde{x}(y), \tilde{x} \in X^*$, т.е. для фиксированного x отображение $\langle x, y \rangle$ это форма $\tilde{x} \in X^*$

Лемма 1. Скалярное произведение устанавливает естественный изоморфизм пространств X и X^*:

$$x \in X \leftrightarrow \tilde{x} \in X^*$$

Доказательство. Необходимо и достаточно показать, что это биекция, сохраняющая линейную структуру *(по определению изоморфизма)*

1. Биективность: *(от противного)*
   (a) Слева направо
   $$]\exists \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in X^* : x \leftrightarrow \tilde{x}_1, x \leftrightarrow \tilde{x}_2$$
   $$\tilde{x}_1(y) - \tilde{x}_2(y) = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \Theta \Rightarrow \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$$
   (b) Справа налево
   $$]\tilde{x} \leftrightarrow x_1, \tilde{x} \leftrightarrow x_2$$
   $$0 = \tilde{x}(y) - \tilde{x}(y) = \langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle = \langle x_1 - x_2, y \rangle$$
   $$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$
2. Линейность: скипнуто

$\square$

$\lhd \{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X, $\{f^k\}$ — базис X^*, сопряженный базису $\{e_j\}$

$f^k(e_j) = \langle e^k, e_j \rangle = \delta_j^k$

Определение. $\{e_j\}_{j=1}^n, \{e^k\}_{k=1}^n$ — **биортогональные базисы** X, если:

$$\langle e^k, e_j \rangle = \delta_j^k$$

Разложим $\{e_i\}$ по $\{e^k\}$:

$$e_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} e^k$$

Домножим скалярно на e_j:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle\sum_{k=1}^n \alpha_{ik}e^k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\langle e^k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\delta^i_j = \alpha_{ij}$$

Таким образом, метрический тензор монжо получить из разложения $\{e_i\}$ по $\{e^k\}$

Лемма 2.

$$e_i = \sum_{k=1}^n g_{ik}e^k \quad e^k = \sum_{i=1}^n g^{ki}e_i$$

Доказательство. выше □

Лемма 3. О переходе в базис, биортогональный исходному.

$$x \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j, x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$$

Тогда:

$$\xi^j = \sum_{k=1}^n \xi_k g^{ki}, \xi_k = \sum_{j=1}^n \xi^j g_{jk}$$

Доказательство.

$$x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j = \sum_{j=1}^n \xi^j \sum_{k=1}^n g_{jk}e^k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \xi^j g_{jk}\right) e^k$$

□

Лемма 4.

$$x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \Rightarrow \xi^j = \langle e^i, x\rangle$$

Доказательство.

$$\langle e^i, x\rangle = \langle e^i, \sum_{j=1}^n \xi^j e_j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle e^i, e_j\rangle \xi^j = \xi^i$$

□

Примечание.

$$x = \sum_{j=1}^n \langle e^j, x\rangle e_j = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e^k$$

Лемма 5. Явный вид изоморфиза $X \simeq X^*$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle f^k$$

Примечание. Биортогональный базис к нормированному базису — он сам:

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортономированный $\Rightarrow g_{ij} = \delta_j^i \Rightarrow g^{ij} = \delta_j^i \Rightarrow e_j = \sum_{k=1}^n g_{jk} e^k = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} e^k = e^j$

2. Сопряженные и эрмитовские операторы

Определение. Оператор $\varphi^* : X \to X$ называется **сопряженными оператору** $\varphi : X \to X$, если:

$$\langle x, \varphi y \rangle = \langle \varphi^* x, y \rangle$$

Теорема 1. В конечномерном евклидовом простраснстве $\forall \varphi\ \exists! \varphi^*$

Доказательство. Рассматриваем $\mathbb{C}$, поэтому черта — комплексное сопряжение.

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j e_j$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j \quad y = \sum_{k=1}^{n} \eta^k e_k \quad \langle x, \varphi y \rangle \stackrel{?}{=} \langle \varphi^* x, y \rangle$$

$$\langle x, \varphi y \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j, \varphi \left(\sum_{k=1}^{n} \eta^k e_k \right) \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\xi}^j \eta^k \langle e_j, \varphi e_k \rangle = \sum_{i,j,k=1}^{n} \overline{\xi}^j \eta^k a_k^i \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{\delta_{ji}} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\xi}^j \eta^k a_k^j = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{a}_k^i \xi_i} \right) \eta^k = \sum_{k=1}^{n} \overline{\zeta}_k \eta^k$$

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_k^i \xi_i = \zeta^k$$

$$x \leftrightarrow \xi \Rightarrow \varphi^* x \leftrightarrow \zeta \quad \zeta = \overline{A}^T \xi$$

$$\varphi \leftrightarrow A \Rightarrow \varphi^* = \overline{A}^T \stackrel{\text{def}}{=} A^+$$

□

Свойства операции сопряжения оператора:

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$
2. $(\varphi \pm \psi)^* = \varphi^* \pm \psi^*$
3. $(\alpha\varphi)^* = \overline{\alpha}\varphi^*$
4. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$ — порядок важен, умножение операторов не коммутативно

Определение. Оператор, обладающий свойством $\varphi^* = \varphi$ называется **эрмитовским** или **самосопряженным**

Пример. $\varphi \leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 5 \end{bmatrix} \quad A^+ = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{bmatrix} = A$

Лемма 6. φ эрмитов $\Rightarrow \sigma_\varphi \subset \mathbb{R}$

Доказательство. x — СВ $\Rightarrow \varphi x = \lambda x$:

$$\langle \varphi x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle$$

$$\langle x, \varphi x \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$
$$\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

□

Лемма 7. φ эрмитов, $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_\varphi : \lambda_1 \neq \lambda_2$

Скипнуто

Определение. $\varphi : X \to X$, L — инвариантное подпространство φ

L называется **приводящим подпространством** φ, если $L^\perp$ — тоже инвариантное подпространство φ

Лемма 8. Любое инвариантное подпространство L эрмитова оператора является приводящим.

Доказательство. $x \in L, y \in L^\perp$

$$0 = \langle \varphi x, y \rangle = \langle x, \varphi y \rangle = 0 \Rightarrow L^\perp \;\; inv$$

□

Теорема 2. Эримтов оператор — скалярного типа.

Доказательство. От противного.

$\{x_j\}_{j=1}^m$ — набор собственных векторов эрмитова оператора $\varphi, m < \dim X$

$L = \mathcal{L}\{x_1 \ldots x_m\}, \dim L = m$

L — инвариантное подпространство $X \Rightarrow L$ приводящее для X

$\Rightarrow L^{\perp}$ инвариантное подпространство $\varphi \Rightarrow \exists$ хотя бы 1 собственный вектор оператора φ, $]y$ — СВ φ

$y \perp L \Rightarrow \{x_1 \dots x_m y\}$ — ЛНЗ, противоречие. □

Следствие 2.1.
1. Эрмитов оператор имеет скалярный тпип
2. $\forall \lambda : r_i = n_i$
3. Из собственных векторов эрмитова оператора можно построить ортономированный базис.

Скипнуто

Теорема 3. Спектральная теорема для эрмитова оператора

$\varphi : X \to X$, $\varphi e_j = \lambda_j e_j$, $\{e_j\}$ — ортономированный базис СВ

$$\Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, \cdot \rangle e_i$$