Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

29 февраля 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. *U, V – линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$*
Линейным отображением $\mathcal{A}$ называется $\mathcal{A} : U \to V$, обладающее свойством линейности:
$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$
$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно"выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}\mathbb{0}_U = \mathbb{0}_V$

Примеры.

1. $\mathbb{0}$ – нулевое отображение $U \to V$
   $\forall u \in U : \mathbb{0}u = \mathbb{0}_v$
2. $\mathcal{E}$ – тождественное отображение: $V \to V$
   $\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$
3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n
   $\mathcal{A} : V \to V$
   $\mathcal{A}p = p'(t)$ – дифференциальный оператор
   $\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$
   Линейное отображение $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
4. $U = \mathbb{R}^n \; V = \mathbb{R}^m$
   $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$
   $\mathcal{A} : x \in U \to y = \mathcal{A}x \in V$
   $x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$
5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K \; \mathcal{A} : U \to V$
Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение
$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$
$\mathcal{B} : U \to V \; \forall u \in U \; \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$

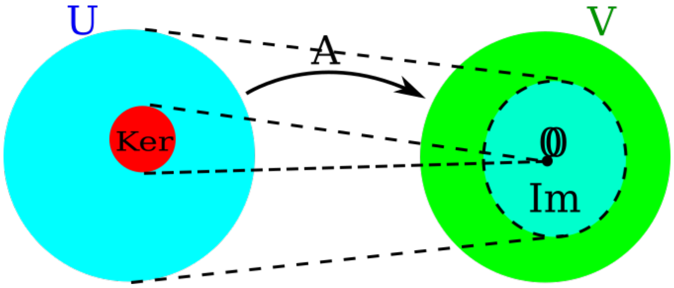
Определение 3. *Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \to V$ называется $\mathcal{C} : U \to V$*
$\forall u \in U \; \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ *– отображение противоположное $\mathcal{A}$*
$\forall u \in U \; (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$

$L(U, V) = Hom_K(U, V) = Hom(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$
$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V.
Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$
Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).
Значит $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = \mathbb{0}_v\}$ – *ядро линейного отображения.*

Определение 6. $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u\ \forall u \in U\} =$
$\{v \in V \mid \exists u \in U\ v = \mathcal{A}u\}$ – *образ линейного отображения.*



Упр: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ - это подпространства соответственно пространств U и V. То есть они замкнуты относительно линейных операций.
Если $Ker\mathcal{A}$ конечномерное подпространство U, то
$\boxed{dim\ Ker\mathcal{A} = def\mathcal{A}}$ – дефект линейного отображения.
Если $Im\mathcal{A}$ конечномерное подпространство V, то
$\boxed{dimIm\mathcal{A} = rg\mathcal{A}}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. $\mathcal{A}$ *изоморфно между* U *и* $V \Leftrightarrow$

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $Im\mathcal{A} = V$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$ *тривиально*

Доказательство. $\mathcal{A}$ изоморфно $\Leftrightarrow$ взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\mathbb{0}_u \leftrightarrow \mathbb{0}_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Пусть $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$
$v_1 = \mathcal{A}u_1\ v_2 = \mathcal{A}u_2$
$\mathbb{0} = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = \mathbb{0}$ т. к. ядро тривиально.
Сюръективность. $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. □

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
–инъективно, если $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
–сюръективно, если $Im\mathcal{A} = v$
–биективно $\equiv$ *изоморфизм, если инъекция + сюръекция.*
–эндоморфизм $\equiv$ *линейный оператор, если* $U \equiv V$
$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$
–автоморфизм $\equiv$ *эндоморфизм + изоморфизм.*
$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. *Произведением линейных отображений* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$
$\mathcal{A} \in L(W, V)\quad \mathcal{B} \in L(U, W)\quad U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$
называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$*, которое является композицией функций, определяющих отображения* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$*.*

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$

$\forall u \in U : (\mathcal{AB})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$

Очевидно, $\mathcal{C}$ – линейное отображение.

$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$

Упр:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм
2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
   $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{AB}_1 + \mathcal{AB}_2$ – дистрибутивность
3. $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$ – ассоциативность
4. $\lambda\mathcal{AB} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$ – единица $\mathcal{EA} = \mathcal{AE}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ *изоморфно.*

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \to U$

$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$

Упр: $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения $\mathcal{A}$ на линейное подпространство U_0 называется

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V \quad \forall u \in U_0 \ \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$

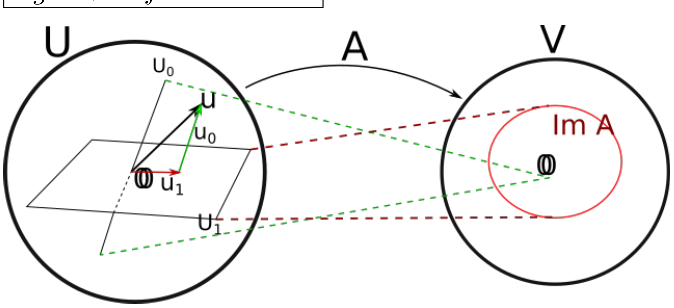
Утверждение. $\mathcal{A}$ *изоморфизм* $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ – *изоморфизм*

Примеры.

1. $\mathbb{0} : U \to U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2. $\mathcal{E} : U \to U$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \quad \mathcal{A} : P_n \to P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4. $x \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.
   Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists\mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.
   То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$



Доказательство. $U_0 = Ker\mathcal{A}$

Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U:

$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\}$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \qquad Im\mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \to Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A}_1$ – изоморфизм? $Im\mathcal{A}_1 = Im\mathcal{A}$ – сюръекция

$$\left.\begin{array}{c} \forall w \in Ker\mathcal{A}_1 \in U_1 \\ KerA_1 \subset KerA = U_0 \end{array}\right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow Ker\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong Im\mathcal{A} \Leftrightarrow dimU_1 = dim(Im\mathcal{A})$ – инъекция.

Т. к. $U = U_0 \oplus U_1$, то $dimU = dimU_0 + dimU_1 = \underset{def\mathcal{A}}{dimKer\mathcal{A}} + \underset{rg\mathcal{A}}{dimIm\mathcal{A}}$ □

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма)**.**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A}$ *изоморфно*
2. $dimU = dimV = rg\mathcal{A}$
3. $dimU = dimV$

   $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in End(V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
2. $dimV = rg\mathcal{A}$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U

$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$$\forall u \in U \ u = \sum_{i=1}^{n} u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{n} u_i\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i$ Достаточно знать, как $\mathcal{A}$ работает на базисных векторах $\xi_1 \dots \xi_n$

$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \qquad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m\times n}}$ матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ относительно базисов (ξ, η)

Частный случай: $\mathcal{A} \in End(V): \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$

$A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора

$Ae_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$

Примеры.

1. $\mathcal{E}: \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E} e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

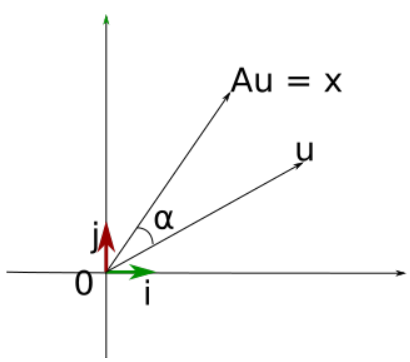
2.

$$\mathcal{E}: \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E} e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \to e'}$$

3.

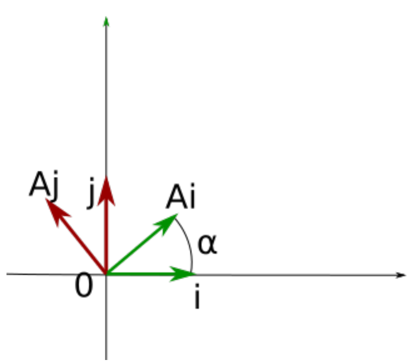


$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v = \mathcal{A} u$

Поворот векторов в плоскости на угол α.

Очевидно, линейный оператор.



$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

4. $\mathcal{A} : \overset{1,t,t^2}{p_2} \to \overset{1,t,t^2}{p_2}$

$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t}{p_1}$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности $m \times n$.

Доказательство. Изоморфизм $\equiv$ биекция + линейность.

Биекция. $\mathcal{A} \to A_{m \times n}$ – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$U\ \xi_1 \dots \xi_n$ базис $\qquad \mathcal{A} : U \to V$

$V\ \eta_1 \dots \eta_m$ базис $\qquad \mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \in V$

$\forall u \in U\ u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i$

$\mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V)\ \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$

$\forall \lambda \in K\ \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda\mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} n_j + \lambda \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m} (a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность $\Rightarrow$ изоморфизм. □

$\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$

$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$

$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$

$End(V) \cong M_{n \times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$U \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$V \eta_1 \dots \eta_m \qquad u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^{m} v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U,V) \underset{\xi,\eta}{\leftrightarrow} A$$

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} u_i a_{ji})\eta_j$$

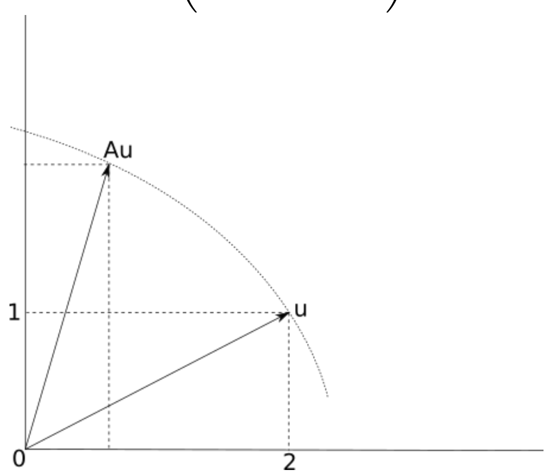
Так как координаты определяются единственным образом:

$$\boxed{v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} u_i} \leftrightarrow \quad \boxed{v = Au} \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ поворот на угол α

   $$(i,j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

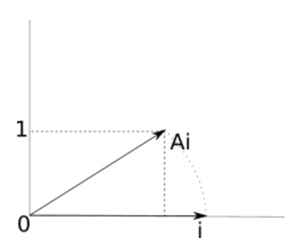
   $$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

   $$\boldsymbol{u} \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\mathcal{A}u} \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

   $$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

2. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t,t^2}{p_2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overbrace{3t^3 + 6t + 4}^{u(t)})' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 1 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi,\eta)} A$

$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$

$T_{\eta\to\eta'}$ – *матрица перехода*

$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi',\eta')} A'$

$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T^{-1}_{\eta\to\eta'} \cdot A \cdot T_{\xi\to\xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} \underset{\xi_1\dots\xi_n}{U} & \overset{\mathcal{A}}{\rightleftarrows} & \underset{\eta_1\dots\eta_m}{V} \\ \mathcal{E}_u \uparrow\downarrow & & \downarrow\uparrow \mathcal{E}_v \\ \underset{\xi'_1\dots\xi'_n}{U} & \overset{\mathcal{A}}{\to} & \underset{\eta'_1\dots\eta'_m}{V} \end{array}$$

$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T^{-1}_{\eta\to\eta'}AT_{\xi\to\xi'}$

$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$

$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$

$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T^{-1}_{\eta\to\eta'}$ Смотри пример 2 $\square$

Следствие 1.

$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1\dots e_n}{V} \to \underset{e_1\dots e_n}{V}$

$e_1 \dots e_n$ *базис* $V \leftrightarrow A$

$e'_1 \dots e'_n$ *базис* $\leftrightarrow A'$

$\mathcal{A} : \underset{e'_1\dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1\dots e'_n}{V}$

$T = T_{e\to e'}$

$\boxed{A' = T^{-1}AT}$

Замечание. В условиях теоремы $v = \mathcal{A}u \begin{array}{l} \xleftrightarrow{(\xi,\eta)} v = Au \\ \xleftrightarrow{(\xi',\eta')} v' = A'u \end{array}$

$V = T_{\eta\to\eta'}V'$

$U = T_{\xi\to\xi'}U'$
$T_{\eta\to\eta'}v' = AT_{\xi\to\xi'}u'$
$v' = \underbrace{\boxed{T^{-1}_{\eta\to\eta'}AT_{\xi\to\xi'}}}_{A'}u'$

7.3 Инварианты линейного отображения

Инвариант - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\boldsymbol{u} \leftrightarrow v = Au$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.

$v' = A'u'$

Определение 1. $A_{m\times n}$

$ImA = span(A_1, A_2, \dots A_n) = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i A_i | \alpha_i \in K\} =$
$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) | x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$

$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$rgA = dimImA$ *— ранг матрицы*

$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) | Ax = \mathbb{0}\} =$ *{множество решений СЛОУ } — ядро матрицы*

$dimKerA = n - rgA = defA$ *— дефект матрицы*

$\boxed{rgA + defA = n}$ *— аналогично теореме о ранге и дефекте*

Теорема 1. $\forall \mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{\begin{matrix} rg\mathcal{A} = rgA \\ def\mathcal{A} = defA \end{matrix}}$,

где матрица A – матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств U и V. $rg\mathcal{A}$, $def\mathcal{A}$ инвариантны относительно выбора базиса.

Доказательство. $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi,\eta)}{A}$ $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ базис U

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ базис V

$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$

$\mathcal{A}\xi_i \underset{\cong}{\overset{\leftrightarrow}{}} A_i$

Координатный изоморфизм.

Пусть $rgA = k \Rightarrow k$ столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, то из $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$ k линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dimIm\mathcal{A} = k$

$$\begin{matrix} dimU & = & rg\mathcal{A} & +def\mathcal{A} \\ \| & & \| & \\ n & & rgA & \\ & & \| & \\ & & k & \end{matrix}$$

$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim$ пространства решений $Ax = 0 = defA$ □

Следствие 1. *$\mathcal{A}$ изоморфизм $\Leftrightarrow$ A невырожденная ($\exists A^{-1}$), где A матрица в некотором базисе.*

Доказательство. Изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{matrix} defA = 0 \\ dimU = dimV \end{matrix} \Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow A$ невырожденная. □

Теорема 2. *$det\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса пространства V (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом $det\mathcal{A} = detA$, где A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.*

Доказательство. V $e_1 \dots e_n$

$det\mathcal{A} = det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (det\ n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма})$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=2}^{n} \dots \sum_{i_n=n}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}\ det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма – 2 одинаковых аргумента} \Rightarrow det = 0)$$

$$= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \underbrace{\overbrace{det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}^{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \quad det(e_1 \dots e_n)=1}}_{\text{все разные}} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = detA$$

$e'_1 \dots e'_n$ базис V

$T = T_{e \to e'}$

$det\mathcal{A} = detA' \stackrel{?}{=} detA$

$A' = T^{-1}AT$

$detA' = detT^{-1} \cdot detA \cdot detT = detA$ □

Определение 2. *A, B называются подобными, если*
$\exists$ невырожденная $C : B = C^{-1}AC$

Примеры. Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$A' = T^{-1}AT$

A, B подобны $\Rightarrow detA = detB$

Следствие 1. *f – n-форма на V*

$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in End(V)$

$\Rightarrow \boxed{f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = det\mathcal{A}\ f(\xi_1 \dots \xi_n)}$

Доказательство. $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$\underbrace{g(\xi_1 \dots \xi_n)}_{n\text{-форма}} = det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$

$det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\text{смотри док-во теоремы}} = det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$

$\mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$ □

Замечание. A – линейный оператор, $B_{n \times n}$

$AB = (AB_1\ AB_2 \dots AB_n)$

$det(AB) = det(AB_1 \dots AB_n) =$

$= detA \cdot det(B_1 \dots B_n) = detA \cdot detB$

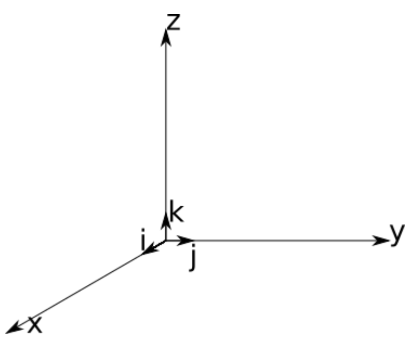
Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$
$det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Доказательство. $det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det(AB) = detA \cdot detB = det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{B}$ □

Следствие 3. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
$\Leftrightarrow det\mathcal{A} \neq 0$
Причем $det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathcal{A}}$

Доказательство. Из следствия 2
$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$
$det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{A}^{-1} = det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$ □

Примеры. V_3



$V_{abc\text{–правая тройка}} = \underset{\text{смешанное пр-е}}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}} = f(\underset{\text{3-форма}}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}})$
$\mathcal{A} \in End(V_3)$ $u \in V_3 \to v = \mathcal{A}u \in V_3$
Как поменяется объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$\mathcal{A}(V_{(\overline{a}\overline{b}\overline{c})}) = f(\mathcal{A}\overline{a}, \mathcal{A}\overline{b}, \mathcal{A}\overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot V(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$
$\lambda = |det\mathcal{A}|$ Объем увеличится в λ раз.

1. $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
   Оператор подобия
   $\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$

   $$\mathcal{A}\overline{i} = \mu\overline{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $A?$
   $$\mathcal{A}\overline{j} = \mu\overline{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

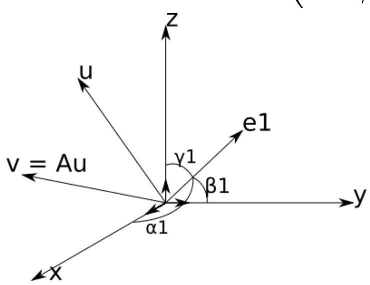
   $$\mathcal{A}\overline{k} = \mu\overline{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

   $\lambda = |det\mathcal{A}| = |detA| = |\mu^3|$

2. $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$

Оператор поворота

$$\mathcal{A}: \quad \begin{array}{l} \bar{i} \to e_1 \nearrow \\ \bar{j} \to e_2 \to \\ \bar{k} \to e_3 \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \end{array}$$



$|e_i| = 1$
$(e_i, e_j) = 0$
$i \neq j$

$$"\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})" = det\mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$detA = |\cdots| \underbrace{e_1e_2e_3}_{\text{Смешанное произведение}} = 1$$

$$(detA)^2 = detA \cdot detA^T = det(AA^T) = det \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix} = detE = 1$$

$$|detA| = 1$$

Утверждение. *A, B подобные матрицы $\Rightarrow trA = trB$*
$trace =$ след

Доказательство. A, B подобные $\Rightarrow$
$\exists\ C$ невырожденная: $C^{-1}(AC) = B$

$$trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{"-1"}(AC)ji = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{''-1''} a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_{ki}C_{ij}^{''-1''}}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = trA$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \left[\begin{array}{l} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{array}\right.} \quad CC^{-1} = E$$

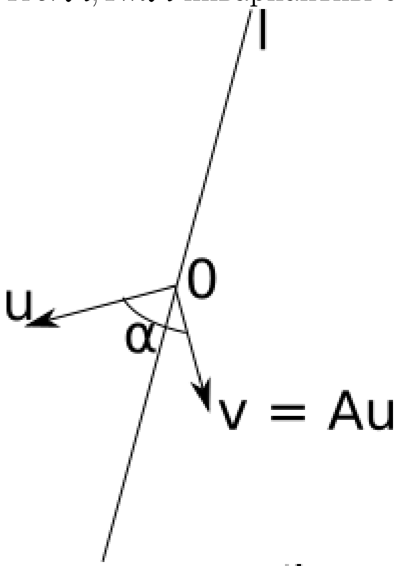
□

Определение 3. *$tr\mathcal{A} = trA$, где A – матрица оператора в некотором базисе.*
$tr\mathcal{A} = trA = trA'$ — не зависит от выбора базиса, т.к. A и A' подобны.

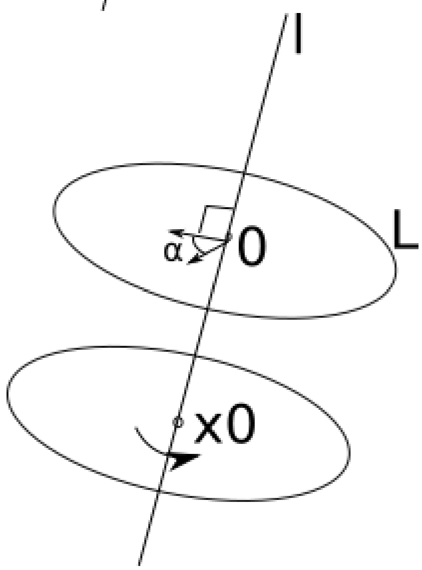
Определение 4. *$L \subset V$ L инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$ если $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$*

Примеры.

1. $\mathbb{0}, V$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$
2. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$



$\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
Поворот вектора(пр-ва) относительно оси l на угол α



Плоскость $\perp l$ инвариантна относительно $\mathcal{A}$
$P = x_0 + L$ инвариантно

Теорема 3. *$L \subset B$ $\mathcal{A} \in End(V)$. Линейное пространство инвариантно относительно $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \exists$ базис пространства V, т.ч. матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь вид: $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \mathbb{0} & A_3 \end{array}\right)$*
$A_1 k \times k$ где $k = dimL$

Доказательство. $L = \underset{\text{базис}}{span(e_1 \dots e_k)}$
Дополним до базиса $V : e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \underset{1\le i\le k}{\mathcal{A}e_i} \in L = \sum_{m=1}^{k} a_{mi}e_m + \sum_{m=k+1}^{n} 0\cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{k+1\le i\le n}{\mathcal{A}e_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1i} & \\ \vdots & A_i^1 \\ a_{ki} & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} A_i^{2,3} \\ \dots \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}} \end{pmatrix}$$ □

Следствие 1. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно* $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$ *базис пр-ва* V*, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *будет иметь* <u>*блочно-диагональный вид:*</u>

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\left(\underset{\text{размерность матрицы}}{A^i}\right) = dim L_i$$

Доказательство. $L_1 = span(\underset{\text{базис}}{e_i^1 \dots e_i^{i_k}})$

т.к. $\bigoplus$, то базис V – объединение базисов L_i

$V = span(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$ раскладываем по базису $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\underline{\overset{L_1}{1\dots i_1}}} & \multicolumn{3}{c|}{\underline{\overset{L_2}{i_1+1\dots i_2}}} & \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ отвечает позиции базисных элементов пр-ва L_iв базисе V □

Следствие 2. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} \in End(V) \Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

Доказательство. $V = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i \Rightarrow \forall\ u \in V \ \ \exists! u = \sum_{i=1}^{m} u_i \in L_i$

$Im\mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

Верно и "$\supset$"

Пусть $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$\sum_{i=1}^{m} v_i = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{m} u_i \in V) \in Im\mathcal{A}$

$Im\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$\bigoplus$ прямая?

$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$

$\sum_{i=1}^{m} v_i = \mathbb{0} \longleftarrow$

Т.к. L_i инвариантна $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$, но L_i дизъюнктны $\nwarrow \Rightarrow \forall i : v_i = \mathbb{0}$

$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i}$ дизъюнктны $\Rightarrow \bigoplus$ □

7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(v) \quad V$ линейное пространство над K

Определение 1. *$\lambda \in K$ – **собственное число** (с.ч.) линейного оператора $\mathcal{A}$, если $\exists$ $\boxed{v \in V \neq \mathbb{0}}$, который называется **собственным вектором** (с.в.), такой что* $\boxed{\mathcal{A}v = \lambda v}$

Пусть $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$

Определение 2. *$V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \{$с.в. v и $\mathbb{0}\}$ называется собственным подпространством.* $\boxed{\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda}$ *– геометрическая кратность с.ч.*

$\gamma \geq 1$

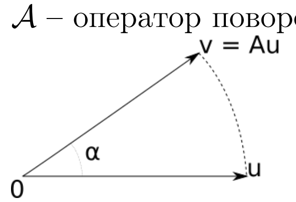
V_λ и $\gamma(\lambda)$ – инварианты относительно выбора базиса.

$v \in V_\lambda \ \ \mathcal{A}v = \lambda v \overset{?}{\in} V_\lambda$

$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda\mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ – оператор подобия:
   $\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$
   μ с.ч. $\quad V_\lambda = V$
2. $\mathcal{A}$ – оператор поворота на плоскости на угол α



$\alpha \neq \pi k \Rightarrow$ нет с.в.

3. Пусть λ с.ч.$= 0$ $\quad \mathcal{A}v = \mathbb{0}$ с.в. $\neq \mathbb{0} \quad \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow Ker\mathcal{A}$ нетривиально $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ не автоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ необратимо $\Leftrightarrow det\mathcal{A} = 0$
4. $\mathcal{A} : V \to V$

   $v_1 \dots v_n$ базис, т.ч. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$

   Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч. $\lambda_1 \dots \lambda_n$

   $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

   λ – с.ч. v с.в. $\neq \mathbb{0} \Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ нетривиально $\Leftrightarrow det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$

Определение 3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – *характеристический многочлен оператора* $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$ базис $\quad \mathcal{A} \leftrightarrow A$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = det(A - tE)$ т.к. det оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}(\underbrace{a_{11} + \ldots + a_{nn}}_{trA = tr\mathcal{A}})t^{n-1} + \ldots + \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$$

По теореме Виета: $det\mathcal{A} = \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_n}_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)}$

$\underline{\underline{\lambda \in K}}$ с.ч. $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ $(\underline{\underline{\lambda \in K}})$

λ корень характеристического многочлена.

$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$ с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.

$k = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни χ_A будут с.ч.

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod\limits_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$

$\alpha(\lambda)$ называется алгебраической кратностью с.ч. λ (если $\lambda \in K$)

Определение 4. *Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется* ***спектром*** *линейного оператора.* $(\lambda, \alpha(\lambda))$

Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.

$\alpha(\lambda) = 1 \; \forall \; \lambda$

Немножко про алгебраическую кратность

$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = a_n \prod\limits_{a\text{–корень}} (t - a)^{m_a}$

a–корень $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \,\vdots\, (t - a)$

a – корень f **кратности** $m \Leftrightarrow \begin{matrix} f \mid (t - a)^m \\ f \nmid (t - a)^{m+1} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow f(t) = (t-a)^m g(t)$

a_0 – произведение всех корней с учетом кратности $= (-1)^n \prod a \qquad a$–корень с учетом кратности

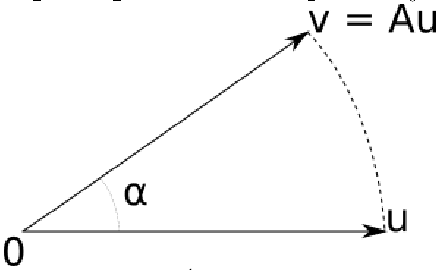
$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$

$(-1)^n t^n + \ldots = (-1)^n (t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n)$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \ldots = (-1)^n (t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_n)$

$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ с.ч.

Примеры. $\mathcal{A}$ – поворот на угол α



$\bar{i}\ \bar{j}$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \begin{pmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - t \end{pmatrix} =$$

$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha t + t^2 + sin^2\alpha = t^2 - 2\cos\alpha t + 1$

$D = 4\cos^2\alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$

нет вещ. корней $\Rightarrow$ нет с.ч.

$K = \mathbb{R}$

Теорема 1. *λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow$* $\boxed{1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$

Доказательство. Пусть $\gamma(\lambda) = k = dimV_\lambda = span(\underbrace{v_1 \dots v_k}_{\text{базис}})$

V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 \end{array}\right) \quad A^1_{k\times k}$$

Базис $= v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$

$$\mathcal{A} \underset{i=1\dots k}{v_i} \in V_\lambda = \lambda v_i \leftrightarrow A^1_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & \\ 0 & \lambda - t & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 - tE_{n-k} \end{array}\right) \underset{\text{св-ва } det}{=} \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{\mathcal{A}^3}(t)$$

Очевидно, λ корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ кратности не меньше, чем $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$ □

Теорема 2. *$\lambda_1 \dots \lambda_m$ – различные с.ч. $\mathcal{A}$*

$v_1 \dots v_m$ соответствующие им с.в. $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Метод математической индукции

1. База. $m = 1 \quad \lambda_1 v_1$ с.в. – линейно независимы, т.к. $v_1 \neq \mathbb{0}$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для $m-1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для m

   От противного. Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A}$,

   а $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы.

   Пусть $v_m = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$

   $$\begin{array}{l} \mathcal{A}_{v_m} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i \\ || \\ \lambda_m v_m = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i \end{array}$$

   $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \underset{\not\parallel \, 0}{(\lambda_i - \lambda_m)} v_i = \mathbb{0}$ $\;v_i$ линейно независим по инд. предположению

   $\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \;\; \forall\, i = 1 \dots m-1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow v_m = \mathbb{0}$ — Противоречие, т.к. v_m с.в. и значит не может быть $\mathbb{0}$

$\square$

Следствие 1. *$\lambda_1 \dots \lambda_m$ различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ дизъюнктны.* $\left(\bigoplus\limits_{\substack{\lambda \\ \text{с.ч.}}} V_\lambda\right)$

Доказательство. $v_1 + \ldots + v_m = \mathbb{0} \quad v_i \;\in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое $\neq \mathbb{0} \Rightarrow$ это слагаемое с.в. $\Rightarrow$ противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч. $\Rightarrow \forall\, i : v_i = \mathbb{0} \Rightarrow$ дизъюнктны. $\square$

Теорема 3. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \to L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

Доказательство. см. теорему - следствие п. 7.3

Базис V – объединение базисов L_i

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \qquad A_{k_i \times k_i}$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства } det}{=} |A^1 - tE_{k_1}||A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\begin{array}{cccc} \chi_{A^1}(t) & \chi_{A^2}(t) & \dots & \chi_{A^m}(t) \\ || & || & & || \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & & \mathcal{A}^m \end{array}$$

$\square$

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$A_{n \times n} \quad \lambda$ с.ч. $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq \mathbb{0} \quad Ax = \lambda x$

$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{линейный оператор}}}{Ax}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

с.ч., с.в.? $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$?

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$

$t_1 = 0 \ \ \alpha(0) = 2$

$t_2 = 1 \ \ \alpha(1) = 1$

$V_\lambda = Ker(A - \lambda E) \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in]R$

$V_{\lambda_1} = 0 = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$

$\lambda_2 \ \ 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma(1) = 1$