Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

12 февраля 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. U, V – *линейные пространства над полем* $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$
Линейным отображением $\mathcal{A}$ *называется* $\mathcal{A} : U \to V$*, обладающее свойством линейности:*
$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$
$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$

Замечание.
1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно"выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}\mathbb{0}_U = \mathbb{0}_V$

Примеры.
1. $\mathbb{0}$ – нулевое отображение $U \to V$
   $\forall u \in U : \mathbb{0}u = \mathbb{0}_v$
2. $\mathcal{E}$ – тождественное отображение: $V \to V$
   $\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$
3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n
   $\mathcal{A} : V \to V$
   $\mathcal{A}p = p'(t)$ – дифференциальный оператор
   $\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$
   Линейное отображение $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
4. $U = \mathbb{R}^n$ $V = \mathbb{R}^m$
   $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$
   $\mathcal{A} : x \in U \to y = \mathcal{A}x \in V$
   $x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$
5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K$ $\mathcal{A} : U \to V$
Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение
$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$
$\mathcal{B} : U \to V$ $\forall u \in U$ $\mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$

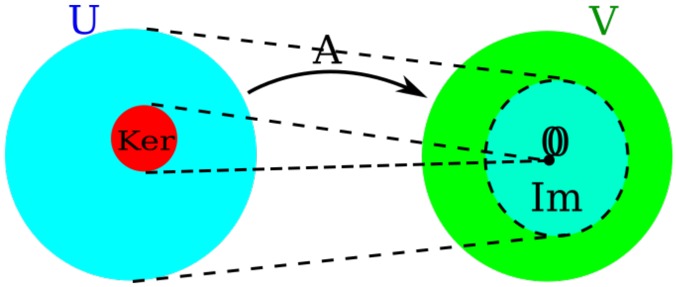
Определение 3. *Суммой линейных отображений* $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \to V$ *называется* $\mathcal{C} : U \to V$
$\forall u \in U$ $\mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$ $\boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ – *отображение противоположное* $\mathcal{A}$
$\forall u \in U$ $(-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$

$L(U, V) = Hom_K(U, V) = Hom(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$
$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V.
Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$
Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).
Значит $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = \mathbb{0}_v\}$ – *ядро линейного отображения.*

Определение 6. $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u \ \forall u \in U\} =$
$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$ – *образ линейного отображения.*



Упр: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ - это подпространства соответственно пространств U и V. То есть они замкнуты относительно линейных операций.
Если $Ker\mathcal{A}$ конечномерное подпространство U, то
$\boxed{dim\ Ker\mathcal{A} = def\mathcal{A}}$ – дефект линейного отображения.
Если $Im\mathcal{A}$ конечномерное подпространство V, то
$\boxed{dimIm\mathcal{A} = rg\mathcal{A}}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. *$\mathcal{A}$ изоморфно между U и V $\Leftrightarrow$*

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $Im\mathcal{A} = V$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$ *тривиально*

Доказательство. $\mathcal{A}$ изоморфно $\Leftrightarrow$ взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\mathbb{0}_u \leftrightarrow \mathbb{0}_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Пусть $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$
$v_1 = \mathcal{A}u_1$ $v_2 = \mathcal{A}u_2$
$\mathbb{0} = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = \mathbb{0}$ т. к. ядро тривиально.
Сюръективность. $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. □

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
–инъективно, если $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
–сюръективно, если $Im\mathcal{A} = v$
–биективно $\equiv$ *изоморфизм, если инъекция + сюръекция.*
–эндоморфизм $\equiv$ *линейный оператор, если* $U \equiv V$
$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$
–автоморфизм $\equiv$ *эндоморфизм + изоморфизм.*
$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. *Произведением линейных отображений* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$
$\mathcal{A} \in L(W, V)$ $\mathcal{B} \in L(U, W)$ $U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$
называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$*, которое является композицией функций, определяющих отображения* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$*.*
$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$
$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$
Очевидно, $\mathcal{C}$ *– линейное отображение.*

$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$
Упр:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм
2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
   $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ – дистрибутивность
3. $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ – ассоциативность
4. $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра
$\mathcal{E}$ – единица $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U,V)$ *изоморфно.*
$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$
$\mathcal{A}^{-1} : V \to U$
$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$
Упр: $\mathcal{A}^{-1} \in L(V,U)$
$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$

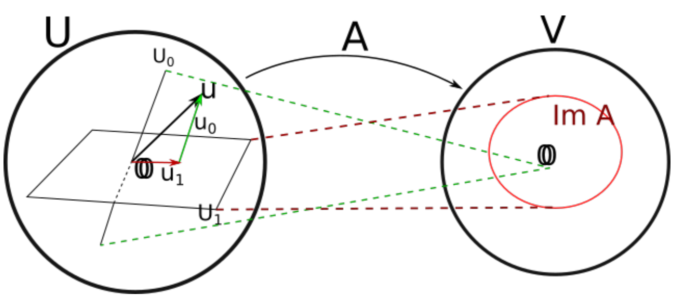
$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор
$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U,V)$
Сужением линейного отображения $\mathcal{A}$ *на линейное подпространство* U_0 *называется*
$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V \quad \forall u \in U_0 \ \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$

Утверждение. $\mathcal{A}$ *изоморфизм* $\in L(U,V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ *– изоморфизм*

Примеры.
1. $\mathbb{0} : U \to U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2. $\mathcal{E} : U \to U$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \quad \mathcal{A} : P_n \to P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4. $x \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.
   Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.
   То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения)**.** $\mathcal{A} \in L(U,V)$
$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$



Доказательство. $U_0 = Ker\mathcal{A}$
Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U:
$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\}$
$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)
$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \qquad Im\mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$
$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \to Im\mathcal{A}$
$\mathcal{A}_1$ – изоморфизм? $Im\mathcal{A}_1 = Im\mathcal{A}$ – сюръекция
$$\left.\begin{matrix} \forall w \in Ker\mathcal{A}_1 \in U_1 \\ Ker\mathcal{A}_1 \subset Ker\mathcal{A} = U_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow Ker\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$
$U_1 \cong Im\mathcal{A} \Leftrightarrow dimU_1 = dim(Im\mathcal{A})$ – инъекция.
Т. к. $U = U_0 \oplus U_1$, то $dimU = dimU_0 + dimU_1 = dim\underbrace{Ker\mathcal{A}}_{def\mathcal{A}} + dim\underbrace{Im\mathcal{A}}_{rg\mathcal{A}}$ ∎

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма).
$\mathcal{A} \in L(U, V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A}$ *изоморфно*
2. $dimU = dimV = rg\mathcal{A}$
3. $dimU = dimV$
   $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in End(V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
2. $dimV = rg\mathcal{A}$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U
$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$\forall u \in U \ u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i$ Достаточно знать, как $\mathcal{A}$ работает на базисных векторах $\xi_1 \dots \xi_n$

$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}}$ матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ относительно базисов (ξ, η)

Частный случай: $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$
$A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора
$Ae_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$

Примеры.

1. $\mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

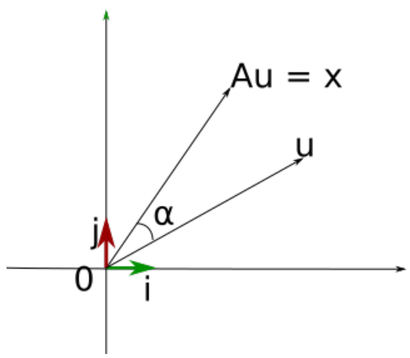
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

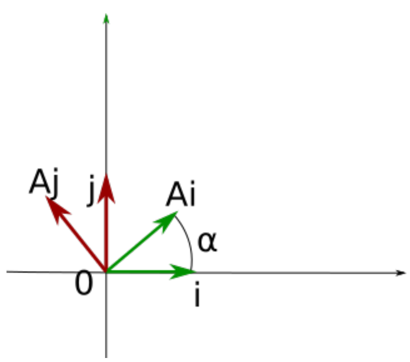
$$\mathcal{E} e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \to e'}$$

3.



$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$v = \mathcal{A} u$
Поворот векторов в плоскости на угол α.
Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos\alpha i + \sin\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin\alpha i \cos\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

4. $\mathcal{A} : \overset{1,t,t^2}{p_2} \to \overset{1,t,t^2}{p_2}$
$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t}{p_1}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U,V) \cong M_{m\times n}$
(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности $m \times n$.

Доказательство. Изоморфизм $\equiv$ биекция + линейность.
Биекция. $\mathcal{A} \to A_{m\times n}$ – поняли, как сопоставлять.
Теперь обратно. Пусть $A_{m\times n} = (a_{ij})$

$U\ \xi_1 \dots \xi_n$ базис $\qquad \mathcal{A} : U \to V$

$V\ \eta_1 \dots \eta_m$ базис $\qquad \mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \in V$

$\forall u \in U\ u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i$

$\mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U,V)\ \mathcal{A},\mathcal{B} \leftrightarrow A, B$

$\forall \lambda \in K\ \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$

$$(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda\mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}n_j + \lambda\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m}(a_{ji}+\lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность $\Rightarrow$ изоморфизм. □

$\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$
$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$
$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$
$End(V) \cong M_{n\times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).
Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$V\eta_1 \dots \eta_m \qquad u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i$

$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

$v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j\eta_j$

$\mathcal{A} \in L(U,V) \underset{\xi,\eta}{\leftrightarrow} A$

$\sum\limits_{j=1}^{m} v_j\eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum\limits_{j=1}^{m}(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_{ji})\eta_j$

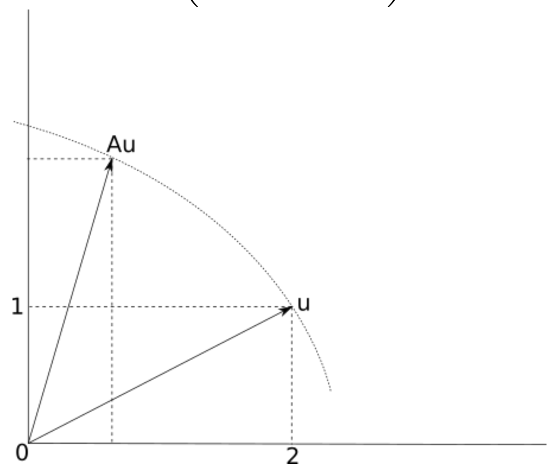
Так как координаты определяются единственным образом:

$\boxed{v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}u_i} \ \leftrightarrow \ \boxed{v = Au} \ \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ поворот на угол α

   $(i,j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$



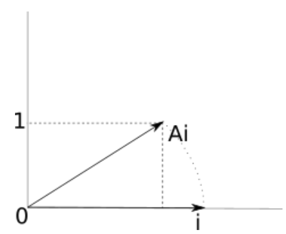
$$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\mathcal{A}u} \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



2. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t,t^2}{p_2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overbrace{3t^3 + 6t + 4}^{u(t)})' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}u} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 2 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi,\eta)} A$

$\quad \xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$

$T_{\eta \to \eta'}$ – *матрица перехода*

$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ – *базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi',\eta')} A'$

$\quad \eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$

$\boxed{\mathcal{A}' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} \cdot A \cdot T_{\xi \to \xi'}}$