

Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

9 февраля 2020 г.

Содержание

7	Линейные отображения	2
7.1	Основные определения	2
7.2	Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.	5

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. U, V – линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением \mathcal{A} называется $\mathcal{A} : U \rightarrow V$, обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}0_U = 0_V$

Примеры.

1. 0 – нулевое отображение $U \rightarrow V$
 $\forall u \in U : 0u = 0_v$
2. \mathcal{E} – тождественное отображение: $V \rightarrow V$
 $\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$
3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n
 $\mathcal{A} : V \rightarrow V$
 $\mathcal{A}p = p'(t)$ – дифференциальный оператор
 $\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$
Линейное отображение $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m$
 $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$
 $\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$
 $x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$
5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K, \mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

Определение 3. Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$ называется $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ – отображение противоположное \mathcal{A}

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

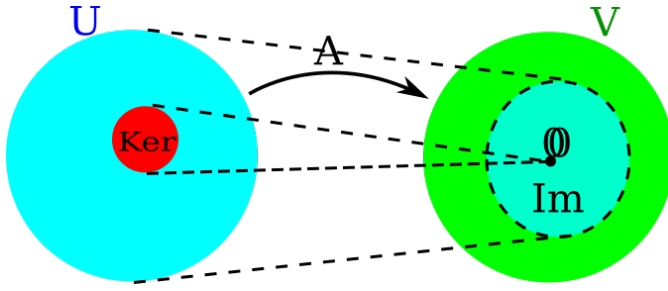
Значит $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0_v\}$ – ядро линейного отображения.

Определение 6. $\text{Im } \mathcal{A} = \{v \in V \mid v = \mathcal{A}u \quad \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \quad v = \mathcal{A}u\}$ – образ линейного отображения.



Упр: $\text{Ker } \mathcal{A}$ и $\text{Im } \mathcal{A}$ - это подпространства соответственно пространств U и V . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если $\text{Ker } \mathcal{A}$ конечномерное подпространство U , то

$\boxed{\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}}$ - дефект линейного отображения.

Если $\text{Im } \mathcal{A}$ конечномерное подпространство V , то

$\boxed{\dim \text{Im } \mathcal{A} = \text{rg } \mathcal{A}}$ - ранг линейного отображения.

Утверждение. \mathcal{A} изоморфно между U и $V \Leftrightarrow$

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $\text{Im } \mathcal{A} = V$
3. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ тривиально

Доказательство. \mathcal{A} изоморфно \Leftrightarrow взаимнооднозначное соответствие + линейность - $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$0_u \leftrightarrow 0_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$

Пусть $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$

Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$$v_1 = \mathcal{A}u_1 \quad v_2 = \mathcal{A}u_2$$

$$0 = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = 0 \text{ т. к. ядро тривиально.}$$

Сюръективность. $\text{Im } \mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. □

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

-инъективно, если $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$

-сюръективно, если $\text{Im } \mathcal{A} = v$

-биективно \equiv изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

-эндоморфизм \equiv линейный оператор, если $U \equiv V$

$$\text{End}_k(V) = \text{End}(V) = L(V, V)$$

-автоморфизм \equiv эндоморфизм + изоморфизм.

$$\text{Aut}_k(V) = \text{Aut}(V)$$

Определение 8. Произведением линейных отображений \mathcal{A}, \mathcal{B}

$$\mathcal{A} \in L(W, V) \quad \mathcal{B} \in L(U, W) \quad U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$$

называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, которое является композицией функций, определяющих отображения \mathcal{A} и \mathcal{B} .

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

$$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

Очевидно, \mathcal{C} - линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$$

Упр:

1. \mathcal{A}, \mathcal{B} изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм
2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
 $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ - дистрибутивность
3. $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ - ассоциативность
4. $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

\mathcal{E} – единица $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ изоморфно.

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$

$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$

Упр: $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения \mathcal{A} на линейное подпространство U_0 называется

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$

Утверждение. \mathcal{A} изоморфизм $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ – изоморфизм

Примеры.

1. $\mathbb{0} : U \rightarrow U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.

2. $\mathcal{E} : U \rightarrow U$ – автоморфизм

3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : P_n \rightarrow P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.

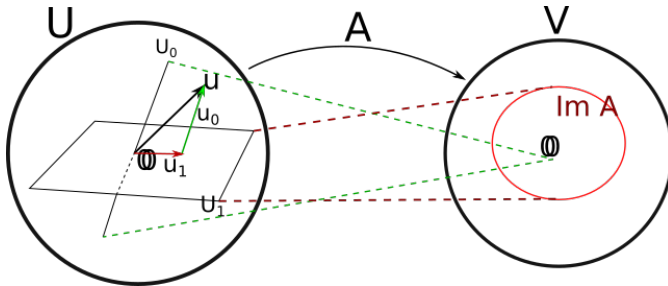
4. $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.

Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.

То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения). $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dim U}$



Доказательство. $U_0 = Ker\mathcal{A}$

Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U :

$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{0\}$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad Im\mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow Im\mathcal{A}$

\mathcal{A}_1 – изоморфизм? $Im\mathcal{A}_1 = Im\mathcal{A}$ – сюръекция

$\left. \begin{array}{l} \forall w \in Ker\mathcal{A}_1 \in U_1 \\ Ker\mathcal{A}_1 \subset Ker\mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{0\} \Rightarrow Ker\mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$

$U_1 \cong Im\mathcal{A} \Leftrightarrow dim U_1 = dim(Im\mathcal{A})$ – инъекция.

Т. к. $U = U_0 \oplus U_1$, то $dim U = dim U_0 + dim U_1 = \underbrace{dim Ker\mathcal{A}}_{def\mathcal{A}} + \underbrace{dim Im\mathcal{A}}_{rg\mathcal{A}}$

□

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. \mathcal{A} изоморфно
2. $\dim U = \dim V = \operatorname{rg} \mathcal{A}$
3. $\dim U = \dim V$
 $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{def} \mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. $\mathcal{A} \in \operatorname{Aut}(V)$
2. $\dim V = \operatorname{rg} \mathcal{A}$
3. $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{def} \mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U

$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i$$

Достаточно знать, как \mathcal{A} работает на базисных векторах $\xi_1 \dots \xi_n$

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}$ матрица линейного отображения \mathcal{A} относительно базисов (ξ, η)

Частный случай: $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$

$A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора

$$Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$$

Примеры.

$$1. \quad \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

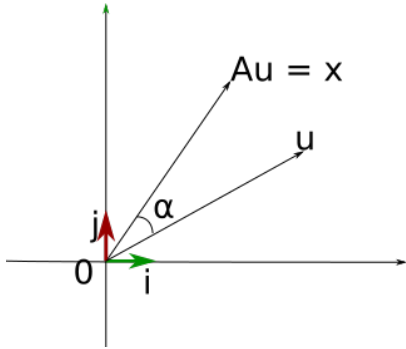
2.

$$\mathcal{E}: \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

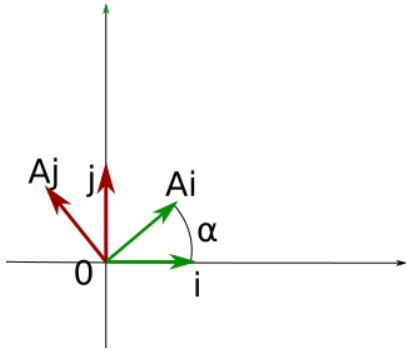


$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол α .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

4. $\mathcal{A}: \underset{p_2}{1, t, t^2} \rightarrow \underset{p_2}{1, t, t^2}$
 $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}: \underset{1, t, t^2}{p_2} \rightarrow \underset{1, t}{p_1}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1, t, t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности $m \times n$.)

Доказательство. Изоморфизм \equiv биекция + линейность.

Биекция. $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$ – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть $A_{m \times n} = (a_{ij})$

U $\xi_1 \dots \xi_n$ базис.

V $\eta_1 \dots \eta_m$ базис

$$\mathcal{A} : U \rightarrow V \quad \mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V)$$

TODO

□