Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

8 февраля 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. *U, V – линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$*
Линейным отображением A называется $A : U \to V$, обладающее свойством линейности:
$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$
$A(u + \lambda v) = A(u) + \lambda A(v)$

Замечание.
1. Записываем не $A(u)$, а Au
2. "Поточечно"выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $A\mathbb{0}_U = \mathbb{0}_V$

Примеры.
1. $\mathbb{0}$ – нулевое отображение $U \to V$
   $\forall u \in U : \mathbb{0}u = \mathbb{0}_v$
2. $\mathcal{E}$ – тождественное отображение: $V \to V$
   $\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$
3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n
   $A : V \to V$
   $Ap = p'(t)$ – дифференциальный оператор
   $A(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = Ap_1 + \lambda Ap_2$
   Линейное отображение $A = \frac{d}{dt}$
4. $U = \mathbb{R}^n \ V = \mathbb{R}^m$
   $A = (a_{ij})_{m \times n}$
   $A : x \in U \to y = Ax \in V$
   $x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \to y = A(x_1 + \lambda x_2) = Ax_1 + \lambda Ax_2$
5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K \ A : U \to V$
Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение
$B = \lambda A$
$B : U \to V \ \forall u \in U \ Bu = \lambda Au$

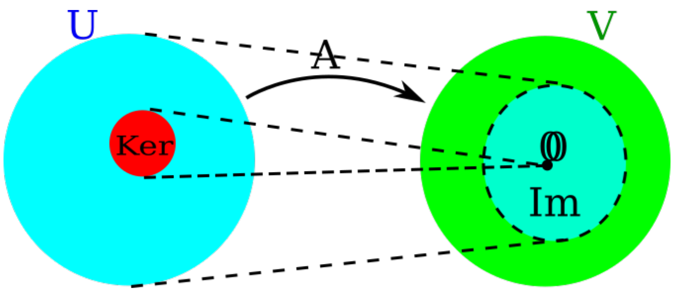
Определение 3. *Суммой линейных отображений $A, B : U \to V$ называется $C : U \to V$*
$\forall u \in U \ Cu = Au + Bu \quad \boxed{C = A + B}$

Определение 4. $-A$ *– отображение противоположное A*
$\forall u \in U \ (-A)u = -1 \cdot Au$

$L(U, V) = Hom_K(U, V) = Hom(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$
$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V.
Линейное отображение = гомоморфизм с операциями λA и $A + B$
Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).
Значит $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

Определение 5. $A \in L(U, V)$
$KerA = \{u \in U \mid Au = \mathbb{0}_v\}$ *– ядро линейного отображения.*

Определение 6. $ImA = \{v \in V = Au \ \forall u \in U\} =$
$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = Au\}$ *– образ линейного отображения.*



Упр: $KerA$ и ImA - это подпространства соответственно пространств U и V. То есть они замкнуты относительно линейных операций.
Если $KerA$ конечномерное подпространство U, то
$\boxed{dim\ KerA = defA}$ – дефект линейного отображения.
Если ImA конечномерное подпространство V, то
$\boxed{dimImA = rgA}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. *A изоморфно между U и V $\Leftrightarrow$*

1. *$A \in L(U, V)$*
2. *$ImA = V$*
3. *$KerA = \{\mathbb{0}\}$ тривиально*

Доказательство. A изоморфно $\Leftrightarrow$ взаимнооднозначное соответствие $+$ линейность – $A \in L(U, V)$
$\mathbb{0}_u \leftrightarrow \mathbb{0}_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow KerA = \{\mathbb{0}\}$
Пусть $KerA = \{\mathbb{0}\}$
Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$
$v_1 = Au_1$ $v_2 = Au_2$
$\mathbb{0} = v_1 - v_2 = Au_1 - Au_2 = A(u_1 - u_2) = \mathbb{0}$ т. к. ядро тривиально.
Сюръективность. $ImA = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U Au = v$. Последнее и означает сюръекцию. □

Определение 7. $A \in L(U, V)$
–инъективно, если $KerA = \{\mathbb{0}\}$
–сюръективно, если $ImA = v$
–биективно $\equiv$ изоморфизм, если инъекция + сюръекция.
–эндоморфизм $\equiv$ линейный оператор, если $U \equiv V$
$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$
–автоморфизм $\equiv$ эндоморфизм + изоморфизм.
$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. *Произведением линейных отображений A, B*
$A \in L(W, V)$ $B \in L(U, W)$ $U \xrightarrow{B} W \xrightarrow{A} V$
называется $C \in L(U, V) : C = A \cdot B$, которое является композицией функций, определяющих отображения A и B.
$A \cdot B = A \circ B$
$\forall u \in U : (AB)u = A(Bu)$
Очевидно, C – линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{C} U \xrightarrow{B_{1,2}} W \xrightarrow{A_{1,2}} V$$

Упр:

1. A, B изоморфизмы $\Rightarrow A \cdot B$ изоморфизм
2. $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$
   $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$ – дистрибутивность
3. $A(BC) = (AB)C$ – ассоциативность
4. $\lambda AB = A\lambda B$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра
$\mathcal{E}$ – единица $\mathcal{E}A = A\mathcal{E}$

Определение 9. $A \in L(U, V)$ *изоморфно.*
$\forall v \in V \exists! u \in U : v = Au$
$A^{-1} : V \to U$
$\boxed{A^{-1}v = u}$
Упр: $A^{-1} \in L(V, U)$
$A^{-1}A = \mathcal{E}_v \quad AA^{-1} = \mathcal{E}_u$

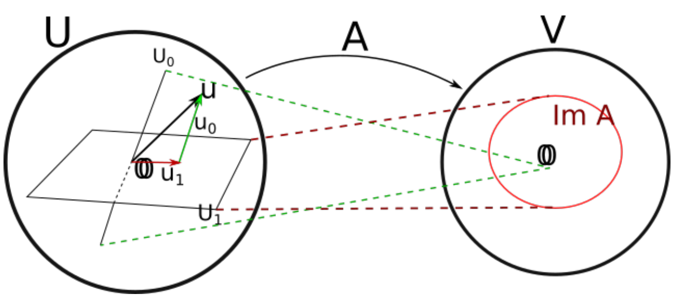
$A \in End(U)$ – линейный оператор
$A^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U // A \in L(U, V)$
Сужением линейного отображения A на линейное подпространство U_0 называется
$A|_{U_0} : U_0 \to V \quad \forall u \in U_0 \; A|_{U_0}u = Au$

Утверждение. *A изоморфизм $\in L(U, V) \Rightarrow A|_{U_0} \in L(U_0, Im(A|_{U_0}))$ – изоморфизм*

Примеры.
1. $\mathbb{0} : U \to U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2. $\mathcal{E} : U \to U$ – автоморфизм
3. $A = \frac{d}{dt} \quad A : P_n \to P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4. $x \in \mathbb{R}^n \to y = Ax \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.
   Сюръекция $\Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.
   То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения)**.** $A \in L(U, V)$
$\boxed{rgA + defA = dimU}$



Доказательство. $U_0 = KerA$
Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U:
$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\}$
$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)
$Au = Au_0 + Au_1 = Au_1 \qquad ImA = A(U_1)$
$A_1 = A|_{U_1} : U_1 \to ImA$
A_1 – изоморфизм? $ImA_1 = ImA$ – сюръекция
$$\left.\begin{array}{c}\forall w \in KerA_1 \in U_1 \\ KerA_1 \subset KerA = U_0\end{array}\right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow KerA_1 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow A_1 \text{ изоморфизм.}$$
$U_1 \cong ImA \Leftrightarrow dimU_1 = dim(ImA)$ – инъекция.
Т. к. $U = U_0 \oplus U_1$, то $dimU = dimU_0 + dimU_1 = \underset{defA}{dimKerA} + \underset{rgA}{dimImA}$ ∎

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма).
$A \in L(U, V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. *A изоморфно*
2. $dimU = dimV = rgA$
3. $dimU = dimV$
   $KerA = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow defA = 0$

Следствие 2. $A \in End(V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $A \in Aut(V)$
2. $dimV = rgA$
3. $KerA = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow defA = 0$