

# Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

20 февраля 2020 г.

# Содержание

<b>7</b>	<b>Линейные отображения</b>	<b>2</b>
7.1	Основные определения . . . . .	2
7.2	Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса. . . . .	5
7.3	Инварианты линейного отображения . . . . .	10

## 7 Линейные отображения

### 7.1 Основные определения

**Определение 1.**  $U, V$  – линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением  $\mathcal{A}$  называется  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ , обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не  $\mathcal{A}(u)$ , а  $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3.  $\mathcal{A}0_U = 0_V$

**Примеры.**

1.  $0$  – нулевое отображение  $U \rightarrow V$

$$\forall u \in U : 0u = 0_v$$

2.  $\mathcal{E}$  – тождественное отображение:  $V \rightarrow V$

$$\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$$

3.  $U = V = P_n$  – многочлены степени до  $n$

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V$$

$\mathcal{A}p = p'(t)$  – дифференциальный оператор

$$\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$$

Линейное отображение  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

4.  $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$$

$$x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$$

5.  $U \cong V$ . То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

**Определение 2.**  $\lambda \in K, \mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

**Определение 3.** Суммой линейных отображений  $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$  называется  $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$$

**Определение 4.**  $-\mathcal{A}$  – отображение противоположное  $\mathcal{A}$

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$  – множество всех линейных отображений из  $U$  в  $V$ .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями  $\lambda \mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

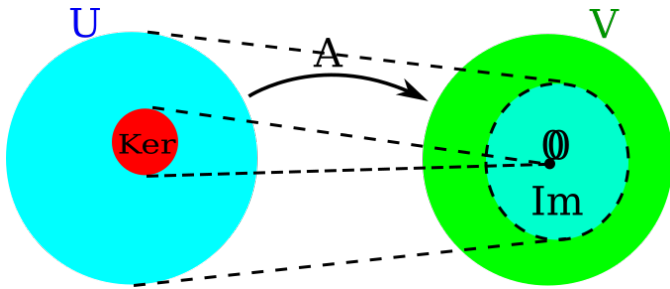
Значит  $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

**Определение 5.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\text{Ker} \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0_v\}$  – ядро линейного отображения.

**Определение 6.**  $\text{Im} \mathcal{A} = \{v \in V \mid v = \mathcal{A}u \ \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$  – образ линейного отображения.



Упр:  $\text{Ker} \mathcal{A}$  и  $\text{Im} \mathcal{A}$  – это подпространства соответственно пространств  $U$  и  $V$ . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если  $\text{Ker} \mathcal{A}$  конечномерное подпространство  $U$ , то

$\boxed{\dim \text{Ker} \mathcal{A} = \text{def} \mathcal{A}}$  – дефект линейного отображения.

Если  $\text{Im} \mathcal{A}$  конечномерное подпространство  $V$ , то

$\boxed{\dim \text{Im} \mathcal{A} = \text{rg} \mathcal{A}}$  – ранг линейного отображения.

**Утверждение.**  $\mathcal{A}$  изоморфно между  $U$  и  $V \Leftrightarrow$

1.  $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2.  $\text{Im} \mathcal{A} = V$
3.  $\text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$  тривиально

*Доказательство.*  $\mathcal{A}$  изоморфно  $\Leftrightarrow$  взаимнооднозначное соответствие + линейность –  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$0_u \leftrightarrow 0_v$ , т. к. изоморфизм  $\Rightarrow \text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$

Пусть  $\text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$

Докажем инъективность  $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$$v_1 = \mathcal{A}u_1 \quad v_2 = \mathcal{A}u_2$$

$$0 = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = 0 \text{ т. к. ядро тривиально.}$$

Сюръективность.  $\text{Im} \mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$ . Последнее и означает сюръекцию. □

**Определение 7.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

–инъективно, если  $\text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$

–сюръективно, если  $\text{Im} \mathcal{A} = v$

–биективно  $\equiv$  изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

–эндоморфизм  $\equiv$  линейный оператор, если  $U \equiv V$

$$\text{End}_k(V) = \text{End}(V) = L(V, V)$$

–автоморфизм  $\equiv$  эндоморфизм + изоморфизм.

$$\text{Aut}_k(V) = \text{Aut}(V)$$

**Определение 8.** Произведением линейных отображений  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$$\mathcal{A} \in L(W, V) \quad \mathcal{B} \in L(U, W) \quad U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$$

называется  $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ , которое является композицией функций, определяющих отображения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

$$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

Очевидно,  $\mathcal{C}$  – линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$$

Упр:

1.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  изоморфизмы  $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  изоморфизм
2.  $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$   
 $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$  – дистрибутивность
3.  $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$  – ассоциативность
4.  $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$  – единица  $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

**Определение 9.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  изоморфно.

$$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$$

$$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$$

$$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$$

$$Упр: \mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$$

$\mathcal{A} \in End(U)$  – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$  – обратный оператор

**Определение 10.**  $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения  $\mathcal{A}$  на линейное подпространство  $U_0$  называется

$$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$$

**Утверждение.**  $\mathcal{A}$  изоморфизм  $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$  – изоморфизм

**Примеры.**

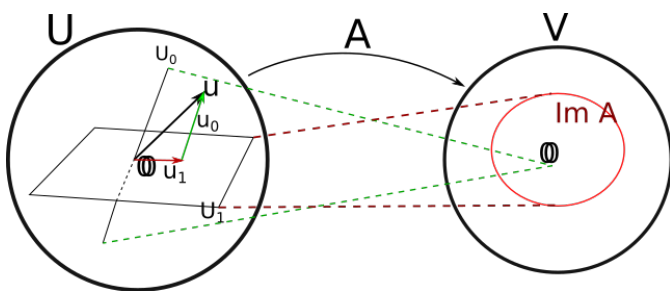
1.  $\mathbb{0} : U \rightarrow U$  – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2.  $\mathcal{E} : U \rightarrow U$  – автоморфизм
3.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \quad \mathcal{A} : P_n \rightarrow P_n$  – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4.  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$  – эндоморфизм.

Сюръекция  $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$  инъекция.

То есть автоморфизм.

**Теорема 1** (о  $rg$  и  $def$  линейного отображения).  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$$



*Доказательство.*  $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A}$

Дополним линейное пространство  $U_1$  до пр-ва  $U$ :

$$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{0\}$$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$  (единственным образом)

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad \text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}_1$  – изоморфизм?  $\text{Im } \mathcal{A}_1 = \text{Im } \mathcal{A}$  – сюръекция

$$\left. \begin{array}{l} \forall w \in \text{Ker } \mathcal{A}_1 \in U_1 \\ \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong \text{Im } \mathcal{A} \Leftrightarrow \dim U_1 = \dim(\text{Im } \mathcal{A})$  – инъекция.

Т. к.  $U = U_0 \oplus U_1$ , то  $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \dim_{\text{def } \mathcal{A}} \text{Ker } \mathcal{A} + \dim_{\text{rg } \mathcal{A}} \text{Im } \mathcal{A}$  □

**Следствие 1** (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A}$  изоморфно
2.  $\dim U = \dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3.  $\dim U = \dim V$   
 $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$
2.  $\dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3.  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

## 7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$\xi_1 \dots \xi_n$  базис  $U$

$\eta_1 \dots \eta_m$  базис  $V$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \quad \text{Достаточно знать, как } \mathcal{A} \text{ работает на базисных векторах } \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}} \quad \text{матрица линейного отображения } \mathcal{A} \text{ относительно базисов } (\xi, \eta)$$

Частный случай:  $\mathcal{A} \in \text{End}(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$   
 $A = (a_{ji})_{n \times n}$  – матрица линейного оператора  
 $Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$

Примеры.

$$1. \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

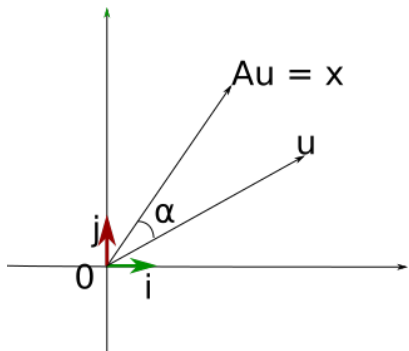
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

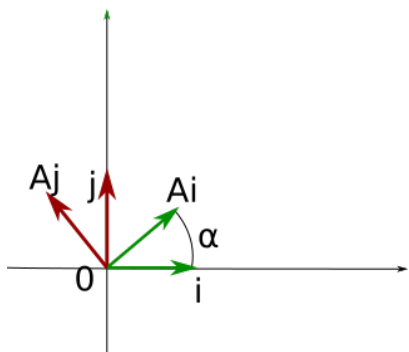


$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол  $\alpha$ .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$4. \mathcal{A} : \begin{smallmatrix} 1, t, t^2 \\ p_2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1, t, t^2 \\ p_2 \end{smallmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{(1, t, t^2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} : \begin{smallmatrix} p_2 \\ 1, t, t^2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} p_1 \\ 1, t \end{smallmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Утверждение.**  $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности  $m \times n$ .)

*Доказательство.* Изоморфизм  $\equiv$  биекция + линейность.

Биекция.  $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$  – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть  $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$U$   $\xi_1 \dots \xi_n$  базис

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$

$V$   $\eta_1 \dots \eta_m$  базис

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$$

$$\forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность  $\Rightarrow$  изоморфизм. □

$$\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$$

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$$

$End(V) \cong M_{n \times n}$  – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V\eta_1 \dots \eta_m \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$



$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A_{\xi, \eta}$$

$$\sum_{j=1}^m v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n u_i a_{ji} \right) \eta_j$$

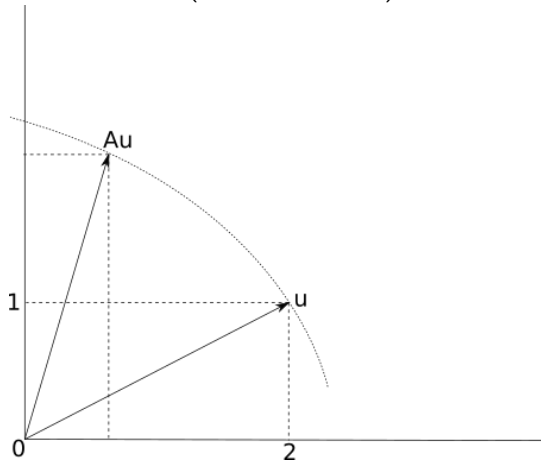
Так как координаты определяются единственным образом:

$$\boxed{v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i} \leftrightarrow \boxed{v = Au} \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

**Примеры.**

1.  $\mathcal{A}$  поворот на угол  $\alpha$

$$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



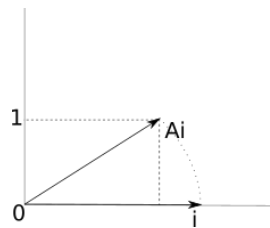
$$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



2.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : p_{2,1,t,t^2} \rightarrow p_{2,1,t,t^2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{(3t^3 + 6t + 4)}^{u(t)} = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

**Теорема 1** (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса).  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi, \eta)} A$$

$$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$$

$T_{\eta \rightarrow \eta'}$  - матрица перехода

$$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi', \eta')} A'$$

$$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \cdot A \cdot T_{\xi \rightarrow \xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi_1 \dots \xi_n & & \eta_1 \dots \eta_m \end{array}$$

$$\mathcal{E}_u \uparrow \uparrow \quad \downarrow \uparrow \mathcal{E}_v$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi'_1 \dots \xi'_n & & \eta'_1 \dots \eta'_m \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

$$\mathcal{A}B \leftrightarrow AB$$

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

$$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \quad \text{Смотри пример 2}$$

□

**Следствие 1.**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \quad \mathcal{A}: \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$e_1 \dots e_n \text{ базис } V \leftrightarrow A$$

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис } \leftrightarrow A'$$

$$\mathcal{A}: \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{A' = T^{-1} A T}$$

$$\text{Замечание. В условиях теоремы } v = \mathcal{A}u \xrightarrow{(\xi, \eta)} v = Au \xrightarrow{(\xi', \eta')} v' = A'u$$

$$V = T_{\eta \rightarrow \eta'} V'$$

$$\begin{aligned}
U &= T_{\xi \rightarrow \xi'} U' \\
T_{\eta \rightarrow \eta'} v' &= A T_{\xi \rightarrow \xi'} u' \\
v' &= \boxed{T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}}_{A'} u'
\end{aligned}$$

### 7.3 Инварианты линейного отображения

**Инвариант** - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$$v = Au \leftrightarrow v = Au$$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.

$$v' = A' u'$$

**Определение 1.**  $A_{m \times n}$

$$Im A = span(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \in K \right\} =$$

$$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \mid x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$rg A = dim Im A$  — ранг матрицы

$Ker A = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \mid Ax = 0\} = \{\text{множество решений СЛОУ}\}$  — ядро матрицы

$dim Ker A = n - rg A = def A$  — дефект матрицы

$\boxed{rg A + def A = n}$  — аналогично теореме о ранге и дефекте

**Теорема 1.**  $\forall A \in L(U, V)$

$$\boxed{\begin{aligned} rg A &= rg A \\ def A &= def A \end{aligned}}$$

где матрица  $A$  — матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств  $U$  и  $V$ .

$rg A, def A$  инвариантны относительно выбора базиса.

*Доказательство.*  $A \leftrightarrow_{(\xi, \eta)} A \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$  базис  $U$

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$  базис  $V$

$$Im A = span(A \xi_1 \dots A \xi_n)$$

$$A \xi_i \overset{\leftrightarrow}{\cong} A_i$$

Координатный изоморфизм.

Пусть  $rg A = k \Rightarrow k$  столбцов линейно независимы, а остальные — их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, то из  $A \xi_1 \dots A \xi_n$   $k$  линейно независимые, а остальные — их линейная комбинация  $\Rightarrow rg A = dim Im A = k$

$$dim U = rg A + def A$$

$$\begin{array}{ccc}
\parallel & & \parallel \\
n & & rg A \\
& & \parallel \\
& & k
\end{array}$$

$$def A = n - rg A = n - k = dim \text{ пространства решений } Ax = 0 = def A$$

□

**Следствие 1.**  $\mathcal{A}$  изоморфизм  $\Leftrightarrow A$  невырожденная ( $\exists A^{-1}$ ), где  $A$  матрица в некотором базисе.

*Доказательство.* Изоморфизм  $\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{def } A = 0 \\ \text{dim } U = \text{dim } V \end{matrix} \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow A \text{ невырожденная.}$   $\square$

**Теорема 2.**  $\det \mathcal{A}$  не зависит от выбора базиса пространства  $V$  (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом  $\det \mathcal{A} = \det A$ , где  $A$  – матрица оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе.

*Доказательство.*  $V$   $e_1 \dots e_n$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_k &= \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (\det \text{ } n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=2}^n \dots \sum_{i_n=n}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма} - 2 \text{ одинаковых аргумента} \Rightarrow \det = 0) \\ &= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \overbrace{\det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}^{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \det(e_1 \dots e_n)=1} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

$e'_1 \dots e'_n$  базис  $V$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}' \stackrel{?}{=} \det A$$

$$A' = T^{-1} A T$$

$$\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$$

$\square$

**Определение 2.**  $A, B$  называются подобными, если

$$\exists \text{ невырожденная } C : B = C^{-1} A C$$

**Примеры.** Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$$A' = T^{-1} A T$$

$$A, B \text{ подобны} \Rightarrow \det A = \det B$$

**Следствие 1.**  $f$  –  $n$ -форма на  $V$

$$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1 \dots \xi_n)}$$

*Доказательство.*  $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$$g(\xi_1 \dots \xi_n) = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$$

$$\det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\text{смотри док-во теоремы}} = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{\det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{\det A}_{\det A}$$

$\square$

*Замечание.*  $A$  – линейный оператор,  $B_{n \times n}$

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \dots AB_n)$$

$$\det(AB) = \det(AB_1 \dots AB_n) =$$

$$= \det A \cdot \det(B_1 \dots B_n) = \det A \cdot \det B$$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V)$

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

*Доказательство.*  $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$  □

**Следствие 3.**  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$

$$\Leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$$

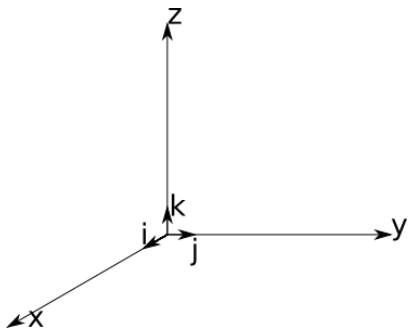
$$\text{Причем } \det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$$

*Доказательство.* Из следствия 2

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

$$\det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$$
 □

**Примеры.**  $V_3$



$$V_{abc\text{-правая тройка}} = \underset{\text{смешанное пр-е}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f(\underset{\text{3-форма}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})$$

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V_3) \quad u \in V_3 \rightarrow v = \mathcal{A}u \in V_3$$

Как поменяется объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$$\mathcal{A}(V_{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}) = f(\mathcal{A}\bar{a}, \mathcal{A}\bar{b}, \mathcal{A}\bar{c}) = \det \mathcal{A} \cdot f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det \mathcal{A} \cdot V(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$$

$$\lambda = |\det \mathcal{A}| \quad \text{Объем увеличится в } \lambda \text{ раз.}$$

$$1. \mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

Оператор подобия

$$\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$$

$A?$

$$\mathcal{A}\bar{i} = \mu\bar{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\bar{j} = \mu\bar{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\bar{k} = \mu\bar{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

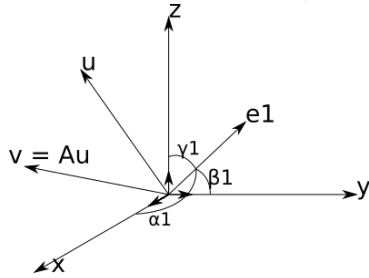
$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\lambda = |\det \mathcal{A}| = |\det A| = |\mu^3|$$

2.  $\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$

**Оператор поворота**

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \bar{i} \rightarrow e_1 \nearrow \\ \bar{j} \rightarrow e_2 \rightarrow \\ \bar{k} \rightarrow e_3 \searrow \end{array} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} |e_i| &= 1 \\ (e_i, e_j) &= 0 \\ i &\neq j \end{aligned}$$

$$"A(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})" = \det A \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |\cdots|_{\text{Смешанное произведение}} e_1 e_2 e_3 = 1$$

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = \det(AA^T) = \det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \det E = 1$$

$$|\det A| = 1$$

**Утверждение.**  $A, B$  подобные матрицы  $\Rightarrow \text{tr} A = \text{tr} B$

*trace = след*

*Доказательство.*  $A, B$  подобные  $\Rightarrow$

$\exists C$  невырожденная:  $C^{-1}(AC) = B$

$$\text{tr} B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}^{\prime\prime-1} (AC)_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ij}^{\prime\prime-1} a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{ki} C_{ij}^{\prime\prime-1}}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \text{tr} A$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}} \quad CC^{-1} = E$$

□

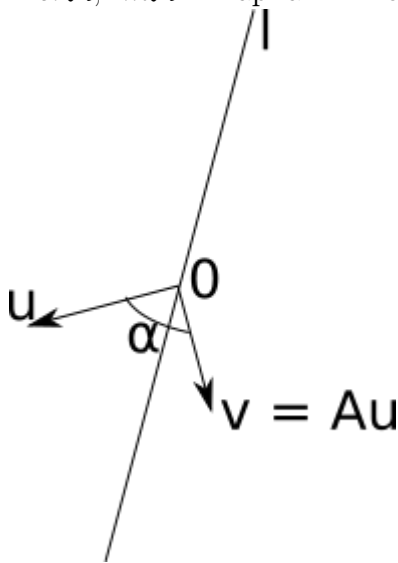
**Определение 3.**  $\text{tr} \mathcal{A} = \text{tr} A$ , где  $A$  – матрица оператора в некотором базисе.

$\text{tr} \mathcal{A} = \text{tr} A = \text{tr} A'$  – не зависит от выбора базиса, т.к.  $A$  и  $A'$  подобны.

**Определение 4.**  $L \subset V$   $L$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  если  $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$

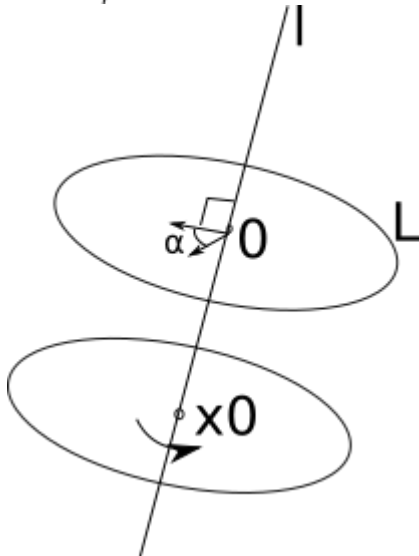
**Примеры.**

1.  $\{0\}, V$  инвариантны относительно  $\mathcal{A}$
2.  $\text{Ker } \mathcal{A}, \text{Im } \mathcal{A}$  инвариантны относительно  $\mathcal{A}$



$\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$

Поворот вектора(пр-ва) относительно оси  $l$  на угол  $\alpha$



Плоскость  $\perp l$  инвариантна относительно  $\mathcal{A}$

$P = x_0 + L$  инвариантно

**Теорема 3.**  $L \subset V$   $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Линейное пространство инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$  базис пространства  $V$ , т.ч. матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе

будет иметь вид:  $A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right)$

$A_1 k \times k$  где  $k = \dim L$

*Доказательство.*  $L = \text{span}(e_1 \dots e_k)$   
базис

Дополним до базиса  $V : e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i \in L = \sum_{m=1}^k a_{mi}e_m + \sum_{m=k+1}^n 0 \cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1i}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{ki}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

□

**Следствие 1.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно  $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$  базис пр-ва  $V$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{matrix} A^i \\ \text{размерность матрицы} \end{matrix} \right) = \dim L_i$$

*Доказательство.*  $L_1 = \text{span}(e_i^1 \dots e_{i_k}^{i_k})$   
базис

т.к.  $\bigoplus$ , то базис  $V$  – объединение базисов  $L_i$

$$V = \text{span}(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$  раскладываем по базису  $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \underline{L_1} \\ \underline{1 \dots i_1} \end{matrix} & \begin{matrix} \underline{L_2} \\ \underline{i_1+1 \dots i_2} \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right)$$

отвечает позиции базисных элементов пр-ва  $L_i$  в базисе  $V$

□

**Следствие 2.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$



Доказательство.  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \forall u \in V \exists! u = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i$

$$Im\mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

**Верно и " $\supset$ "**

Пусть  $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^m u_i \in V) \in Im\mathcal{A}$$

$$Im\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$\bigoplus$  прямая?

$$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = 0 \longleftarrow$$

Т.к.  $L_i$  инвариантна  $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$ , но  $L_i$  дизъюнкты  $\swarrow \Rightarrow \forall i : v_i = 0$

$$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i} \text{ дизъюнкты } \Rightarrow \bigoplus$$

□