

# Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

12 февраля 2020 г.

# Содержание

<b>7</b>	<b>Линейные отображения</b>	<b>2</b>
7.1	Основные определения . . . . .	2
7.2	Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса. . . . .	5

## 7 Линейные отображения

### 7.1 Основные определения

**Определение 1.**  $U, V$  – линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением  $\mathcal{A}$  называется  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ , обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не  $\mathcal{A}(u)$ , а  $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3.  $\mathcal{A}0_U = 0_V$

**Примеры.**

1.  $0$  – нулевое отображение  $U \rightarrow V$   
 $\forall u \in U : 0u = 0_v$
2.  $\mathcal{E}$  – тождественное отображение:  $V \rightarrow V$   
 $\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$
3.  $U = V = P_n$  – многочлены степени до  $n$   
 $\mathcal{A} : V \rightarrow V$   
 $\mathcal{A}p = p'(t)$  – дифференциальный оператор  
 $\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$   
Линейное отображение  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
4.  $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m$   
 $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$   
 $\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$   
 $x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$
5.  $U \cong V$ . То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

**Определение 2.**  $\lambda \in K, \mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

**Определение 3.** Суммой линейных отображений  $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$  называется  $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$$

**Определение 4.**  $-\mathcal{A}$  – отображение противоположное  $\mathcal{A}$

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$  – множество всех линейных отображений из  $U$  в  $V$ .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями  $\lambda \mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

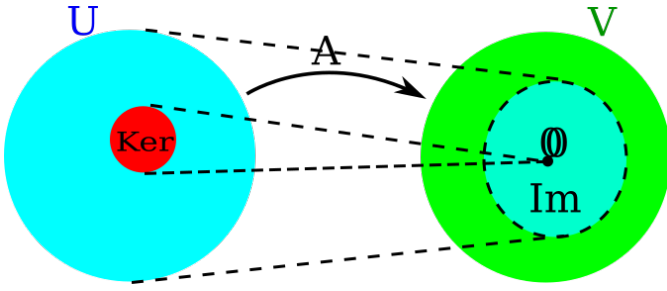
Значит  $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

**Определение 5.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0_v\}$  – ядро линейного отображения.

**Определение 6.**  $\text{Im } \mathcal{A} = \{v \in V \mid v = \mathcal{A}u \quad \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \quad v = \mathcal{A}u\}$  – образ линейного отображения.



Упр:  $Ker A$  и  $Im A$  - это подпространства соответственно пространств  $U$  и  $V$ . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если  $Ker A$  конечномерное подпространство  $U$ , то

$\boxed{\dim Ker A = def A}$  - дефект линейного отображения.

Если  $Im A$  конечномерное подпространство  $V$ , то

$\boxed{\dim Im A = rg A}$  - ранг линейного отображения.

**Утверждение.**  $A$  изоморфно между  $U$  и  $V \Leftrightarrow$

1.  $A \in L(U, V)$
2.  $Im A = V$
3.  $Ker A = \{0\}$  тривиально

*Доказательство.*  $A$  изоморфно  $\Leftrightarrow$  взаимнооднозначное соответствие + линейность -  $A \in L(U, V)$

$0_u \leftrightarrow 0_v$ , т. к. изоморфизм  $\Rightarrow Ker A = \{0\}$

Пусть  $Ker A = \{0\}$

Докажем инъективность  $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$$v_1 = Au_1 \quad v_2 = Au_2$$

$$0 = v_1 - v_2 = Au_1 - Au_2 = A(u_1 - u_2) = 0 \text{ т. к. ядро тривиально.}$$

Сюръективность.  $Im A = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U Au = v$ . Последнее и означает сюръекцию. □

**Определение 7.**  $A \in L(U, V)$

-инъективно, если  $Ker A = \{0\}$

-сюръективно, если  $Im A = v$

-биективно  $\equiv$  изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

-эндоморфизм  $\equiv$  линейный оператор, если  $U \equiv V$

$$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$$

-автоморфизм  $\equiv$  эндоморфизм + изоморфизм.

$$Aut_k(V) = Aut(V)$$

**Определение 8.** Произведением линейных отображений  $A, B$

$$A \in L(W, V) \quad B \in L(U, W) \quad U \xrightarrow{B} W \xrightarrow{A} V$$

называется  $C \in L(U, V) : C = A \cdot B$ , которое является композицией функций, определяющих отображения  $A$  и  $B$ .

$$A \cdot B = A \circ B$$

$$\forall u \in U : (AB)u = A(Bu)$$

Очевидно,  $C$  - линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{C} U \xrightarrow{B_{1,2}} W \xrightarrow{A_{1,2}} V$$

Упр:

1.  $A, B$  изоморфизмы  $\Rightarrow A \cdot B$  изоморфизм
2.  $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$   
 $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$  - дистрибутивность
3.  $A(BC) = (AB)C$  - ассоциативность
4.  $\lambda AB = A\lambda B$

$End(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$  – единица  $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

**Определение 9.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  изоморфно.

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$

$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$

Упр:  $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$

$\mathcal{A} \in End(U)$  – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$  – обратный оператор

**Определение 10.**  $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения  $\mathcal{A}$  на линейное подпространство  $U_0$  называется

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$

**Утверждение.**  $\mathcal{A}$  изоморфизм  $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$  – изоморфизм

**Примеры.**

1.  $\mathbb{0} : U \rightarrow U$  – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.

2.  $\mathcal{E} : U \rightarrow U$  – автоморфизм

3.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : \mathcal{A} : P_n \rightarrow P_n$  – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.

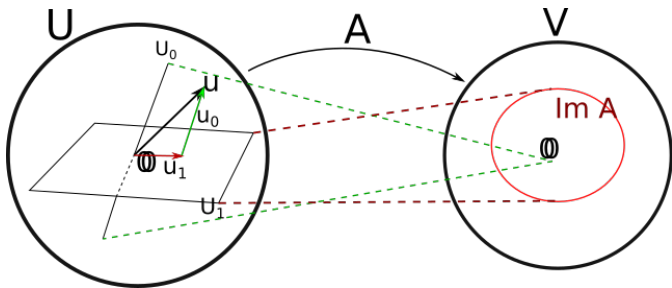
4.  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$  – эндоморфизм.

Сюръекция  $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$  инъекция.

То есть автоморфизм.

**Теорема 1** (о  $rg$  и  $def$  линейного отображения).  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$



*Доказательство.*  $U_0 = Ker\mathcal{A}$

Дополним линейное пространство  $U_1$  до пр-ва  $U$ :

$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\}$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$  (единственным образом)

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad Im\mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A}_1$  – изоморфизм?  $Im\mathcal{A}_1 = Im\mathcal{A}$  – сюръекция

$\left. \begin{array}{l} \forall w \in Ker\mathcal{A}_1 \in U_1 \\ Ker\mathcal{A}_1 \subset Ker\mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow Ker\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$

$U_1 \cong Im\mathcal{A} \Leftrightarrow dimU_1 = dim(Im\mathcal{A})$  – инъекция.

Т. к.  $U = U_0 \oplus U_1$ , то  $dimU = dimU_0 + dimU_1 = \underset{def\mathcal{A}}{dimKer\mathcal{A}} + \underset{rg\mathcal{A}}{dimIm\mathcal{A}}$

□

**Следствие 1** (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A}$  изоморфно
2.  $\dim U = \dim V = \operatorname{rg} \mathcal{A}$
3.  $\dim U = \dim V$   
 $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{def} \mathcal{A} = 0$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A} \in \operatorname{Aut}(V)$
2.  $\dim V = \operatorname{rg} \mathcal{A}$
3.  $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{def} \mathcal{A} = 0$

## 7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1 \dots \xi_n$  базис  $U$

$\eta_1 \dots \eta_m$  базис  $V$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \quad \text{Достаточно знать, как } \mathcal{A} \text{ работает на базисных векторах } \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}} \quad \text{матрица линейного отображения } \mathcal{A} \text{ относительно базисов } (\xi, \eta)$$

Частный случай:  $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$

$A = (a_{ji})_{n \times n}$  – матрица линейного оператора

$$Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$$

**Примеры.**

$$1. \quad \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

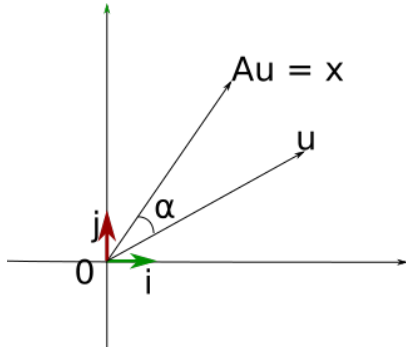
2.

$$\mathcal{E}: \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

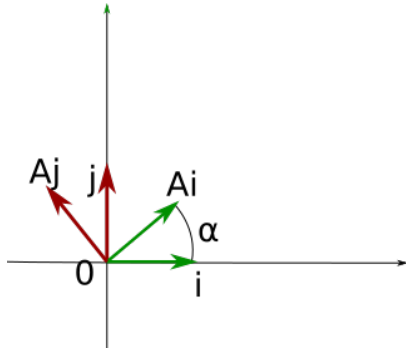


$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол  $\alpha$ .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

4.  $\mathcal{A}: \underset{p_2}{1, t, t^2} \rightarrow \underset{p_2}{1, t, t^2}$   
 $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}: \underset{1, t, t^2}{p_2} \rightarrow \underset{1, t}{p_1}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1, t, t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Утверждение.**  $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности  $m \times n$ .)

*Доказательство.* Изоморфизм  $\equiv$  биекция + линейность.

Биекция.  $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$  – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть  $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$U \quad \xi_1 \dots \xi_n$  базис

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$

$V \quad \eta_1 \dots \eta_m$  базис

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$$

$$\forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность  $\Rightarrow$  изоморфизм. □

$$\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$$

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$$

$End(V) \cong M_{n \times n}$  – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$$U \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V \eta_1 \dots \eta_m \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \overset{\xi, \eta}{\leftrightarrow} A$$

$$\sum_{j=1}^m v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n u_i a_{ji} \right) \eta_j$$

Так как координаты определяются единственным образом:

$$\boxed{v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i} \leftrightarrow \boxed{v = Au} \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$



Примеры. 1.