

**Problème 1 :** Déterminer le gradient et le Hessien des fonctions suivantes

a)  $f(x, y) = 5x^2 + 3x^2y - 2xy^2 + 12$

b)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

c)  $f(x, y, z) = 5xz^2 + z^2 + 3x^2y - 2xy^2 + 12z + 1$

**Problème 2 :** trouver les points stationnaires et déterminer la nature de ces points stationnaires pour les fonctions suivantes.

a)  $f(x, y) = 5x^2 - 2x^2y + 4y^2$

b)  $f(x, y) = \frac{xy}{2 + x^4 + y^4}$

c)  $f(x, y) = -4x^2 + x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 - y^3 - 2y^2$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

**Problème 3 :** Une entreprise produit un bien dans 2 usines différentes. Le coût de production total à l'usine 1 est donné par :  $C_1(x_1) = 0,05x_1^2 + 15x_1 + 5\,400$ , où  $x_1$  est la quantité produite à l'usine 1 ( $x_1 \geq 0$ ), alors que le coût de production total à l'usine 2 est donné par :  $C_2(x_2) = 0,03x_2^2 + 15x_2 + 6\,100$ , où  $x_2$  est la quantité produite à l'usine 2 ( $x_2 \geq 0$ ).

Le prix de vente unitaire du bien dépend lui aussi des quantités produites et est donné par :

$$P(x_1, x_2) = 225 - 0,4(x_1 + x_2).$$

- 2.1 Si les quantités produites aux usines 1 et 2 sont égales à 100 unités ( $x_1 = x_2 = 100$ ), déterminer les coûts de production totaux de chaque usine, ainsi que les recettes totales de l'entreprise.
- 2.2 Donner la fonction de profit de l'entreprise (en fonction des quantités produites  $x_1$  et  $x_2$ ).
- 2.3 Déterminer algébriquement les quantités à produire permettant à l'entreprise de maximiser son profit. Montrer qu'il s'agit bien d'un maximum absolu de la fonction de profit.
- 2.4 Résoudre ce problème de maximisation avec le Solveur d'Excel.

**Problème 4 :** Lait-de-Constantine est une petite entreprise spécialisée dans les produits laitiers. Elle vient de créer une gamme de soupes à la crème qu'elle désire mettre en marché, dans des boîtes de conserve. Mais elle se demande quel devrait être le format à adopter pour ces boîtes afin d'optimiser cette nouvelle gamme.

Le département de la production suggère tout simplement le format de base retrouvé sur le marché, soit des boîtes de 1 L. Mais comme il existe toute une panoplie de dimensions de conserve pouvant satisfaire ce volume fixé, ce département a entrepris une étude sur les coûts de production qui devraient permettre la déduction des dimensions optimales. Ces coûts sont établis comme suit : chaque millilitre de soupe revient à 0,1DA, tandis que les coûts de fabrication de la boîte en tant que tels reviennent à 0,4DA/cm<sup>2</sup> pour les bases de la boîte et à 0,3DA/cm<sup>2</sup> pour la surface latérale de la boîte (incluant le coût de l'étiquette de la compagnie). Trouver les dimensions de la boîte de conserve qui minimisent les coûts. (Note : un cm<sup>3</sup> contient 1 ml.)