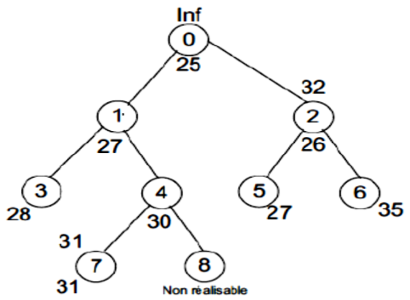
# TD Programmation linéaire en nombres entiers.

**Exercice 1**

On considère l'arbre d'énumération suivant pour un problème de minimisation:




**Question 1 :** Déterminer les meilleures bornes supérieures et inférieures de la valeur optimale de $z$.
**Question 2 :** Quels sont les nœuds de l'arbre qui peuvent être sondés et quels sont ceux qui doivent être séparés ?

---

## Solution

**1)** D'après le schéma d'arbre, les chemins réalisables (de la racine jusqu'aux feuilles) constituent les solutions possibles sont : 28, 31, 27,35  et le minimum est 27

- La meilleure borne inferieure est **LB=27,** parce que toutes les  évaluations des nœuds qui suivent immédiatement la racine sont supérieures ou égales à 27.
- La meilleure borne supérieure est **UB=28,** parce qu'en utilisant une méthode gloutonne basée sur la recherche en profondeur d'abord  (DFS) , on peut trouver une première solution acceptable pour ce problème.  **(0)→(1) →(3)**

**2) selon les LB et UB trouvés dans l'étape précédente :**

| Les nœuds sondés (recherchés) | Les nœuds séparés |
|---|---|
| 0 ( racine)<br>1 → eval(1)>=LB **et** eval(1)<=UB<br>2 → eval(2)>=LB **et** eval(2)<=UB | 4 → eval(4)>=LB **MAIS eval(4)>UB**<br>Donc 4 est séparé |

**Exercice 2 :**

On considère le problème de maximisation (P) suivant:

$$\begin{cases} max\ z = 4x_1 - x_2 \\ 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ entiers \end{cases}$$

**Question 1 :** Résoudre le problème obtenu par relaxation linéaire continue de (P) par la méthode du simplexe.
**Question 2 :** Que représente la valeur de la solution obtenue pour le problème (P) ?
**Question 3 :** Résoudre le problème (P) par une méthode de Branch and Bound.
**Question 4 :** Représenter graphiquement le domaine des solutions réalisables à chaque étape de la méthode de Branch and Bound.

---

## La solution

1) la relaxation linaire continue consiste à supprimer les conditions **$x1, x2$ entiers** et le problème devient un problème purement linaire avec des variables réelles :

$$\max z = 4x1 - x2$$
$$7x1 - 2x2 \leq 14$$
$$x2 \leq 3$$
$$2x1 - 2x2 \leq 3$$

$x1, x2 \in R^+$

Pour résoudre ce problème linéaire, on utilise la méthode du simplex (voir les cours PL)

La solution trouvée pour sous problème est :

X1=2.85714286

X2=3

Z= 8.42857143

**La valeur Z représente <u>la borne supérieure</u> de la solution du problème linéaire en ajoutant les contraintes entières(PLNE).**

| |
|---|
| **Mais la solution dans un programme en PLNE doit être entière et non fractionnaire** |

**2) La résolution du problème par B&B**

**Ce problème est facilement résoluble par la méthode B&B parce que la contrainte** $x2 \leq 3$ nous aide énormément pour énumérer les nœuds de l'arbre de résolution.

Afin de séparer les nœuds il faut **une borne inferieure :**
Comme la solution exacte da la relaxation continue est (2.86, 3), on voit clairement que x2=3 et un entier, on peut donc remplacer la valeur de x2 dans le système afin de trouver une borne inférieure.

$$\text{Max } z = 4x1 - 3$$
$$7x1 - 6 \leq 14$$
$$2x1 - 4 \leq 3$$

Après la résolution de ce système simple on trouve la valeur de x1=2

On a une solution admissible (2,3)

et z=5 donc : la meilleure solution si elle existe doit être supérieure ou égale à 5, on peut prendre cette valeur comme une borne inferieure LB.

**NB : Il existe plusieurs façons pour résoudre ce problème**

**<u>Méthode de résolution générale d'un problème en PLNE par B&B</u>**

| |
|---|
| 1. Initialisation :<br>• Calculer un LB par une heuristique qui donne des solutions entières<br>• Calculer un UB par la méthode du simplex |
| 2. choisir une variable xi et une constante xi* et ajouter la contrainte suivante $xi \geq xi^*+1$<br>($xi \leq xi^*$)<br>3. diviser le problème selon ces deux contraintes ( voir exemple)<br>2. Pour chaque nœud i calculer UBi de ce nœud par la méthode du simplexe<br>Si (UBi < LB)<br>Séparer ce nœud<br>Sinon (si UBi est fractionné)<br>Aller à 2<br>Sinon (si UBi est entier)<br>Mettre LB=UBi<br>Aller à 2 |

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1,x2 entiers
best-sol (2.86,3), z= 8.43=UB mais fractionnée
**LB= 5**

x1 ≤ 2

x1 ≥ 3

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3
**x1 ≤ 2**
z=7.5 =$UB_{x1\le 2}$ > LB

x1 = 2.0 ; x2 = 0.5 fractionné

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

**x1 ≥ 3**
**Infaisable**

**pas de solution**

X

**x2 <= 1**

**x2 >= 2**

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
~~x2 ≤ 3~~
2x1 − 2x2 ≤ 3

**x1 <= 2**
**x2 <= 1**

**z=7.5** =UB> LB

**x1 = 1 ; x2 =0.5**

Fractionnaire

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

**x1 <= 1**
**x2 >=2**

**best sol Z=7**
**x1 = 2.0**
**x2 = 1.0**
**<u>Prendre LB=7</u>**

**x1 >= 0**

**x1 <= 1**

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

**x1 <= 1**
**x2 <= 1**
**UBi=4 <LB refusée**

X

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
2x1 − 2x2 ≤ 3

**x2 <= 1**
**x1 >=0 ; x1 ≤ 2**

Solution
fractionnée
non admissible.

X

Donc la solution est

X1=2

X2=1

Et z=7