<u>Résolution d'un problème non linéaire avec des contraintes d'égalité et d'inegalité</u>

<u>PROBLEME</u>

Au ministère de l'agriculture, on a établi la fonction de profit suivante pour les fermes cultivant des germes de soja et des pistaches :

$$P(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$$

Où $P(x, y)$ sont les profits annuels en DA, x représente le nombre d'hectares plantés en germes de soja, et y donne le nombre d'hectares plantés en pistaches.
Un fermier possède une terre de 500 hectares. Comment devrait-il allouer ses terres à ces deux cultures pour obtenir un profit maximal, sachant que la surface réservée au soja (x) ne doit pas dépasser 350hec? Utiliser la méthode de KKT. Montrer qu'il s'agit d'un maximum absolu et donner le montant du profit obtenu.

Réponse

Formulation du problème : le problème peut être formulé comme suit :

$$\text{MAX } P(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$$
$$SC:$$
$$h(x, y) = x + y - 500 = 0$$
$$g(x, y) = x - 350 \leq 0$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

C'est un problème d'optimisation non linéaire avec des contraintes d'égalité et d'inégalité :

1. calculer les conditions nécessaires d'optimalité de karush Kuhn et Tucker (KKT)

$$L(P, \lambda, \mu 1, \mu 2, \mu 3) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy - \lambda.(x + y - 500) - \mu 1(x - 350) - \mu 2(-x) - \mu 3(-y)$$

- **<u>Stationnarité</u>**

$$\nabla L(P, \lambda, \mu 1, u2, u3) = \nabla(600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy) - \nabla\lambda.(x + y - 600) - \nabla\mu 1(x - 350) + \nabla\mu 2(x) + \nabla\mu 3(y)$$
$$Lx = 600 - 2x - 2y - \lambda - \mu 1 + \mu 2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Ly = 800 - 4y - 2x - \lambda + \mu 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- **<u>Faisabilité principale</u>**

$x + y - 500 = 0$

$x - 350 \leq 0$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

- **<u>Faisabilité Duelle</u>**

$\mu 1 \geq 0$

$\mu 2 \geq 0$

$\mu 3 \geq 0$

- **<u>Négligence complémentaire</u>**

$\mu 1(x - 350) = 0$

$\mu 2(x) = 0$

$\mu 3(y) = 0$

En résolvons ce système, on trouvera les points stationnaires. Malheureusement la résolution de ce système d'équations et d'inéquations n'est plus une chose facile.

Pour ce faire, on va commencer l'équation :

$\mu 1(x - 350) = 0$

On a deux cas

Soit

$\mu 1 = 0 \; ou \; (x - 350) = 0$

Commençons par le cas $(x - 350) = 0$ ➔ x=350

Remplaçons la valeur de x dans les autres équations, on trouve

$600 - 700 - 2y - \lambda - \mu 1 + \mu 2 = 0.$

$800 - 4y - 700 - \lambda + \mu 3 = 0$

Et dans les contraintes

$350 + y - 500 = 0$

$350 - 350 \leq 0$

On trouve que y=150

On remplace y dans les équation précédentes

$600 - 700 - 300 - \lambda - \mu 1 + \mu 2 = 0 ....a$

$800 - 600 - 700 - \lambda + \mu 3 = 0 ....b$

$\mu 1 \geq 0$

$\mu 2 \geq 0$

$\mu 3 \geq 0$

$\mu 1(350 - 350) = 0$

$\mu 2(350) = 0$

$\mu 3(150) = 0$

D'après ces deux équations

$\mu 2(350)=0$

$\mu 3(150)=0$

$\mu 2=0$ et $\mu 3=0$

En remplaçant ces deux variables par leur valeurs dans les équations 1 et 2 on trouve :

$600-700-300-\lambda-\mu 1+0=0 \Rightarrow \mu 1=100$

$800-600-700-\lambda+0=0 \Rightarrow \lambda=-500$

Et ainsi nous avons trouvé une solution (x=350,y=150,λ=-500, µ1=100, µ2=0, µ3=0) qui vérifie toutes les conditions de KKT.

Maintenant, on va tester le cas $\mu 1=0$, on trouve le système suivant :

$600-2x-2y-\lambda-0+\mu 2=0$

$800-4y-2x-\lambda+\mu 3=0$

$x+\mathrm{y}-500=0$

$\mathrm{x}-350 \leq 0$

$\mathrm{x} \geq 0$

$\mathrm{y} \geq 0$

$\mu 2(x)=0$

$\mu 3(y)=0$

$\mu 2 \geq 0$

$\mu 3 \geq 0$

Prenant les équations $\begin{array}{l}\mu 2(x)=0\\ \mu 3(y)=0\end{array}$

On va supposer maintenant que µ2=0, µ3=0, on trouve :

$600-2x-2y-\lambda-0+0=0$

$800-4y-2x-\lambda+0=0$

$x+\mathrm{y}-500=0$

$\mathrm{x}-350 \leq 0$

$\mathrm{x} \geq 0$

$\mathrm{y} \geq 0$

La résolution de ce système $\begin{array}{l}600-2x-2y-\lambda=0\\ 800-4y-2x-\lambda=0\\ x+\mathrm{y}-500=0\end{array}$

Donne la solution x=400, y=100, λ=-400

Mais cette solution ne vérifie pas la contrainte $\mathrm{x}-350 \leq 0$

- On va supposer maintenant que µ2>0, µ3>0 ➔ x= et y=0

Cette solution n'est pas faisable car elle ne vérifie pas la contrainte : $x+\mathrm{y}-500=0$

……..

……

Donc un a un seul point stationnaire qui pourra être un optimum x=350 et y=150, pour en vérifier il faut vérifier la deuxième condition d'optimalité.

<u>Etude la concavité de la fonction P(x,y)</u>

$p(x,y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$

$\nabla p(x,y) = (600 - 2x - 2y;\quad 800 - 4y - 2x)$.

$H(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$; det($H(x, y)$)=4>0 et -2<0 et -4<0, $\forall(x, y)$; $p(x, y)$ est strict. concave.

Le point (350,150) est un maximum absolu du problème d'optimisation sous contraintes car on maximise une fonction concave sous un domaine convexe (contraintes affines).

p = 57500 da

L'interprétation économique que l'on peut donner à λ^*= -500 signifie qu'en ne cultivant pas tous les champs (c.-à-d. ses 500 hectares de champs), le fermier augmenterait ses profits, à cause du signe négatif de λ^*. En effet, lorsque le fermier satisfait les contraintes, ses profits ne sont que de 57500 DA, alors qu'ils sont de 100 000 DA lorsque l'on ne tient pas compte des contraintes (il cultive alors 300 acres de champs).