

PROBLEME 1 :

Résoudre les problèmes suivants par la méthode du lagrangien et la méthode KKT :

$$\max f(x, y) = x + \ln y \quad \text{s.c.} \quad h(x, y) = xy + 2x - y - 1 = 0 \quad ,$$

$$\min f(x, y) = x + \ln y \quad \text{s.c.}$$

$$h(x, y) = xy + 2x - y - 1 = 0$$

$$g(x, y) = x^2 + xy \leq 0$$

PROBLEME 2 :

On considère le problème suivant :

$$\min (3x^2 + 4xy + 5y^2) \quad \text{s.c.}$$

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

$$x + y \geq 4$$

- 1) Quelle est la nature de ce problème ?
- 2) Prouver qu'il admet une solution unique.
- 3) Écrire la condition de KKT pour ce problème
- 4) Prouver que la contrainte : $x + y \geq 4$ est saturée à l'optimum.
- 5) Trouver la solution unique de ce problème

PROBLEME 3 : Problème du format d'une boîte de conserve

Lait-de-Constantine est une petite entreprise spécialisée dans les produits laitiers. Elle vient de créer une gamme de soupes à la crème qu'elle désire mettre en marché, dans des boîtes de conserve. Mais elle se demande quel devrait être le format à adopter pour ces boîtes afin d'optimiser cette nouvelle gamme.

Le département de la production suggère tout simplement le format de base retrouvé sur le marché, soit des boîtes de 1 L. Mais comme il existe toute une panoplie de dimensions de conserve pouvant satisfaire ce volume fixé, ce département a entrepris une étude sur les coûts de production qui devraient permettre la déduction des dimensions optimales. Ces coûts sont établis comme suit : chaque millilitre de soupe revient à 0,1DA, tandis que les coûts de fabrication de la boîte en tant que tels reviennent à 0,4DA/cm² pour les bases de la boîte et à 0,3DA/cm² pour la surface latérale de la boîte (incluant le coût de l'étiquette de la compagnie). Trouver les dimensions de la boîte de conserve qui minimisent les coûts. (Note : un cm³ contient 1 ml.)

PROBLEME 4 : Problème du profit généré par une campagne de publicité

L'entreprise *Lait-de-Constantine* veut allouer un budget de 500 000 DA à la publicité au cours des six prochains mois. Les annonces publicitaires seront présentées dans deux médias : la télévision et les journaux. Les profits générés par cette campagne sont estimés par la fonction suivante :

$$P(x, y) = -x^2 - y^2 + 500x + 1000y$$

$$\text{s.c. } x + y = 500$$

où x = montant investi dans la publicité dans les journaux (**en milliers de DA**) et
 y = montant investi dans la publicité à la télévision (**en milliers de DA**).

En considérant que le budget est totalement dépensé, déterminer l'allocation aux deux médias qui permette de maximiser les profits de l'entreprise en utilisant la méthode de substitution et la méthode de Lagrange. Quel est le profit maximum obtenu ? Vérifier que le point stationnaire est un maximum absolu. Interpréter le multiplicateur de Lagrange.