PROBLEME 1

Au ministère de l'agriculture, on a établi la fonction de profit suivante pour les fermes cultivant des germes de soja et des pistaches :

$$\mathrm{P}(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$$

où $P(x, y)$ sont les profits annuels en \$, x représente le nombre d'acres plantés en germes de soja, et y donne le nombre d'acres plantés en pistaches

a) Déterminez la répartition optimale entre les deux types de récoltes, celle qui maximise les profits). Vérifier la nature du point stationnaire et évaluer le montant de profits ainsi générés.

b) Un fermier possède une terre de 500 acres. Comment devrait-il allouer ses terres à ces deux cultures pour obtenir un profit maximal? Utiliser la méthode de substitution. Montrer qu'il s'agit d'un maximum absolu et donner le montant du profit obtenu.

c) Utiliser la méthode du Lagrangien pour trouver la solution. Interpréter le multiplicateur de Lagrange. En vous basant sur cette interprétation, suggéreriez-vous au fermier d'augmenter la surface totale consacrée à ces deux cultures ou, au contraire, de la diminuer?

Réponse

a) $$\left.\begin{array}{l} P'_x = -2x - 2y + 600 = 0 \\ P'_y = -2x - 4y + 800 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 100 \text{ et } x = 200$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \left.\begin{array}{l} \det(H(x, y)) = 4 > 0 \ \ \forall (x, y) \\ P^{(2)}_{xx}(x, y) = -2 < 0 \ \ \forall (x, y) \end{array}\right\}; P(x, y) \text{ est strictement concave.}$$

Le point stationnaire (200,100) est un maximum absolu. En plantant 200 acres de germes de soja et 100 acres de pistaches, on obtient des profits de P(200, 100) = 100 000 \$.

b) On cherche $\max P(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$ s.c. $x + y = 500$. Par substitution, y = 500-x et la fonction objectif devient alors : $P(x) = -x^2 + 800x - 100000$. Les conditions du premier ordre sont : $P'(x) = -2x + 800 = 0 \Rightarrow x = 400$ et y = 500 - x = 100.

Puisque $P''(x) = -2 < 0, \forall x$, (x, y) = (400,100) est un maximum absolu. En plantant 400 acres de germes de soja et 100 acres de pistaches, les profits sont P(400,100) = 60 000 \$.

c)

Le Lagrangien est: $L(x,y,\lambda)=P(x,y)-\lambda(x+y-500)$ et les conditions du premier ordre sont :

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= -2x-2y+600-\lambda=0 \\ L'_y &= -4y-2x+800-\lambda=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2x-2y+600=-4y-2x+800 \Rightarrow y^*=100$$

$$L'_\lambda = -(x+y-500)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y-500=0 \ .$$

En remplaçant y^* = 100 dans L'_λ: $x+100-500=0 \Rightarrow x^*=400$, on a λ^* = 600 - 2x^*- 2y^* = - 400.

Le point (400,100) est un maximum absolu du problème d'optimisation sous contrainte car on maximise une fonction concave sous un domaine convexe (contrainte affine).

L'interprétation économique que l'on peut donner à λ^*= -400 signifie qu'en ne cultivant pas tous les champs (c.-à-d. ses 500 acres de champs), le fermier augmenterait ses profits, à cause du signe négatif de λ^*. En effet, lorsque le fermier satisfait la contrainte, ses profits ne sont que de 60 000 $, alors qu'ils sont de 100 000 $ lorsque l'on ne tient pas compte de la contrainte (il cultive alors 300 acres de champs).

PROBLEME 2

Soit le problème suivant : max $f(x,y)=xy$ s.c $x^2+y^2-2=0$. Sachant qu'il existe deux maxima locaux en (1,1) et (-1, -1) ainsi que deux minima locaux en (1, -1) et (-1,1), calculer la valeur du multiplicateur de Lagrange associé à chacun de ces points, et vérifier les deux conditions d'optimum du premier ordre (théorème 4.1) sont satisfaites.

Réponse

En un point optimal $X^*=(x^*,y^*)$, le multiplicateur $\lambda^*=\dfrac{f'_x(X^*)}{h'_x(X^*)}$ ou $\dfrac{f'_y(X^*)}{h'_y(X^*)}$.

Les dérivées partielles des fonctions *f* et *h* sont :
$f'_x(x,y)=y,\ \ f'_y(x,y)=x,\ \ h'_x(x,y)=2x$ et $h'_y(x)=2y$.

Si x^* = (1,1), alors $\lambda^*=\dfrac{f'_x(1,1)}{h'_x(1,1)}=\dfrac{1}{2}$ [si on utilise $\lambda^*=\dfrac{f'_y(1,1)}{h'_y(1,1)}$, on obtient la même réponse].

Si x^* = (-1, -1), alors $\lambda^*=\dfrac{f'_x(-1,-1)}{h'_x(-1,-1)}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$.

Si x^* = (1, -1), alors $\lambda^*=\dfrac{f'_x(1,-1)}{h'_x(1,-1)}=\dfrac{-1}{2}$.

Si x^* = (-1,1), alors $\lambda^*=\dfrac{f'_x(-1,1)}{h'_x(-1,1)}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$.

λ^* prend deux valeurs : 1/2 en (1, 1) et (-1, -1) ainsi que -1/2 en (1, -1) et (-1, 1).

Les gradients de *f* et *h* sont : $\nabla f(x,y)$ = $\nabla f(x, y)=(y, x)$ et $\nabla h(x,y)$ = $\nabla h(x, y)$ = $(2x, 2y)$.

En $(x^*,y^*) = (1,1)$ avec $\lambda^* = ½$:
$h(1,1) = 1^2 + 1^2 - 2 = 0$ et
$\nabla f(1,1) - (1/2)\nabla h(1,1) = (1,1)-(1/2)(2,2) = (1,1) - (1,1) = (0,0) = 0$.

En $(x^*,y^*) = (-1, -1)$ avec $\lambda^* = ½$:
$h(-1, -1) = (-1)^2 + (-1)^2 - 2 = 0$ et
$\nabla f(-1, -1) - (1/2)\nabla h(-1, -1) = (-1, -1)-(1/2)(-2, -2) = (-1, -1) - (-1, -1) = (0,0) = 0$.

En $(x^*,y^*) = (1, -1)$ avec $\lambda^* = -1/2$:
$h(1, -1) = 1^2 + (-1)^2 - 2 = 0$ et
$\nabla f(1, -1) - (-1/2)\nabla h(1, -1) = (-1,1)-(-1/2)(2, -2) = (-1,1) - (-1,1) = (0,0) = 0$.

En $(x^*,y^*) = (-1,1)$ avec $\lambda^* = -1/2$:
$h(-1,1) = (-1)^2 + 1^2 - 2 = 0$ et
$\nabla f(-1,1) - (-1/2)\nabla h(-1,1) = (1, -1)-(-1/2)(-2,2) = (1, -1) - (1, -1) = (0,0) = 0$.

PROBLEME 3

Résoudre le problème suivant par la méthode du lagrangien :

$$\max\ f(x,y) = x + \ln y \quad \text{s.c} \quad h(x,y) = xy + 2x - y - 11 = 0\ .$$

Réponse

Le Lagrangien est $L(x,y,\lambda) = x + \ln y - \lambda(xy + 2x - y - 11)$. Les conditions du premier ordre sont :

$$L_x^{'} = 1 - \lambda y - 2\lambda = 0 \iff \lambda(-y-2) + 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{y+2} \qquad (1)$$

$$L_y^{'} = \frac{1}{y} - \lambda x + \lambda = 0 \iff \lambda(1-x) + \frac{1}{y} = 0 \iff \lambda = \frac{-1}{y(1-x)} \qquad (2)$$

$$L_\lambda^{'} = -(xy + 2x - y - 11) = 0 \iff xy + 2x - y - 11 = 0 \qquad (3)$$

On a (1) = (2) $\iff \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{-1}{y(1-x)} \iff y(1-x) = -(y+2) \iff 1 - x = \dfrac{-(y+2)}{y}$

$$\iff -x = \frac{-(y+2)}{y} - 1 \iff x = \frac{(y+2)}{y} + 1 = \frac{y+2+y}{y} = \frac{2y+2}{y}.$$

On remplace $x = \dfrac{2y+2}{y}$ dans (3):

$$\left(\frac{2y+2}{y}\right)y+2\left(\frac{2y+2}{y}\right)-y-11=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2y+2+4+\frac{4}{y}-y-11=0$$

$$\Leftrightarrow\quad y-5+\frac{4}{y}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y^2-5y+4}{y}=0 \qquad (\text{donc } y\neq 0) \quad\Leftrightarrow\quad y^2-5y+4=0$$

$$\Leftrightarrow\quad y=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(4)}}{2(1)}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=1 \text{ ou } 4.$$

- Si $y=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{2(1)+2}{1}=4 \;\Rightarrow$ 1er point stationnaire : $(x^*,y^*)=(4,1)$

  $\Rightarrow\;\lambda^*=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}.$
- Si $y=4 \;\Rightarrow\; x=\frac{2(4)+2}{1}=\frac{5}{2} \;\Rightarrow$ 2e point stationnaire : $(x^*,y^*)=(\frac{5}{2},4)$

$\Rightarrow\;\lambda^*=\frac{1}{4+2}=\frac{1}{6}.$

Rem : les techniques vues dans ce cours ne nous permettent pas de déterminer la nature des points stationnaires du Lagrangien lorsqu'il y en a plusieurs. Ainsi, on ne peut identifier la nature des deux points trouvés.