УДК 517.9

Всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Б. Е. Кангужин, Д.Б. Нурахметов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
dauletkaznu@gmail.com

Аннотация

В работе дано полное описание всюду разрешимых краевых задач для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке. Затем выписаны всюду разрешимые краевые задачи на проколотом отрезке. Приведены формулы резольвенты указанных краевых задач.

1 Введение

Известно [1], что для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами всюду разрешимой задачей является задача Коши, то есть для всюду разрешимости краевые условия выбираются специальным образом. В данной работе предлагается еще один способ постановки всюду разрешимых краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных дифференциальных уравнениях второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке. В настоящей статье описаны всевозможные всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке. В заключении приведены формулы резольвенты для найденных всюду разрешимых задач. Метод работы идейно близок к методам работ [2,3,4].

2 Вспомогательные утверждения и доказательства теорем

Теорема 1. *В пространстве $L_2[0,1]$ решение задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами вида:*

$$y^{''}(x)+p_1(x)y^{'}(x)+p_2(x)y(x)=f(x), 0<x<1, \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$y(0)=0, y^{'}(0)=0, \tag{2}$$

задается формулой:

$$y(x)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt, \tag{3}$$

где

$$k(x,t)=\frac{1}{\Delta(t)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) \\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $y_1(x)$, $y_2(x)$ - решения однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Доказательство. Докажем, что правая часть соотношения (3) удовлетворяет краевой задаче (1), (2). Для этого находим $y^{'}(x)$, $y^{''}(x)$.

$$y^{'}(x) = \int_0^x k_x^{'}(x,t)f(t)dt + k(x,x)f(x).$$

Вычислим $k(x,x)$ по формуле

$$k(x,x) = \frac{1}{\Delta(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Следовательно, имеем

$$y^{'}(x) = \int_0^x k_x^{'}(x,t)f(t)dt. \tag{7}$$

$$y^{''}(x) = \int_0^x k_{xx}^{''}(x,t)f(t)dt + k_x^{'}(x,x)f(x).$$

Вычислим $k_x^{'}(x,x)$ по формуле

$$k_x^{'}(x,x) = \frac{1}{\Delta(x)}\begin{vmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, имеем

$$y^{''}(x) = \int_0^x k_{xx}^{''}(x,t)f(t)dt + f(x) \tag{8}$$

Теперь формулы (3), (7), (8) поставим в формулу (1).

$$\int_0^x k_{xx}^{''}(x,t)f(t)dt + f(x) + p_1(x)\int_0^x k_x^{'}(x,t)f(t)dt + p_2(x)\int_0^x k(x,t)f(t)dt =$$

$$= \int_0^x \left[k_{xx}^{''}(x,t) + p_1(x)k_x^{'}(x,t) + p_2(x)k(x,t)\right] f(t)dt + f(x) = f(x). \tag{9}$$

Так как

$$k(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}},\ k_x^{'}(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}$$

$$k_{xx}^{''}(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1^{''}(x) & y_2^{''}(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} = -p_1(x)k_x^{'}(x,t) - p_2(x)k(x,t),$$

то, при $0 \le t < x < 1$, $k_{xx}^{''}(x,t) + p_1(x)k_x^{'}(x,t) + p_2(x)\,k(x,t) = 0$. Из формул (3) и (7) выполнение начальных условий очевидна.

Теорема 1 доказана.

Пусть $h(x)$ - произвольная дважды дифференцируемая на отрезке [0, 1] функция. Введем новую функцию по формуле:

$$I(x) = \int_0^x k(x,t)\left[h^{''}(t) + p_1(t)h^{'}(t) + p_2(t)h(t)\right] dt. \tag{10}$$

Какими свойствами обладает $I(x)$ функция? Вычислим значение функции $I(x)$ в точке $x=0$.

$$I(0)=\int_0^0 k(0,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=0. \tag{11}$$

Теперь найдем производную первого порядка функции $I(x)$ и найдем ее значение в точке $x=0$.

$$I^{'}(x)=\int_0^x k_x^{'}(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+k(x,x)\left[h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x)\right],$$

так как $k(x,x)=0$, то получим следующую формулу:

$$I^{'}(x)=\int_0^x k_x^{'}(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt, \tag{12}$$

$$I^{'}(0)=\int_0^0 k_x^{'}(0,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=0. \tag{13}$$

Найдем производную второго порядка функции $I(x)$:

$$I^{''}(x)=\int_0^x k_{xx}^{''}(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+$$

$$+k_x^{'}(x,x)\left[h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x)\right],$$

так как $k_x^{'}(x,x)=1$, то получим следующую формулу:

$$I^{''}(x)=\int_0^x k_{xx}^{''}(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x). \tag{14}$$

Если взять линейную комбинацию (10), (12), (14) в виде $I^{''}(x)+p_1I^{'}(x)+p_2I(x)$, то получим

$$I^{''}(x)+p_1I^{'}(x)+p_2I(x)=\int_0^x\left[k_{xx}^{''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'}(x,t)+p_2(x)k(x,t)\right]\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+$$

$$+h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x),$$

то есть

$$I^{''}(x)+p_1I^{'}(x)+p_2I(x)=h^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)+p_2(x)h(x). \tag{15}$$

Здесь учтено, что при $0\le t<x<1$, $k_{xx}^{''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'}(x,t)+p_2(x)\,k(x,t)=0$.

Таким образом, мы показали, что значение самой функции $I(x)$ и производной первого порядка в точке $x=0$ равно нулю и существует производная второго порядка, причем выполняется соотношение (15).

С другой стороны если вспомнить формулу Лагранжа, то $I(x)$ функцию можно переписать в виде:

$$I(x)=\int_0^x k(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=\int_0^x h(t)\left[k_{tt}^{''}(x,t)-(p_1(t)k(x,t))_t^{'}+p_2(t)k(x,t)\right]dt+$$

$$+h(x)-h^{'}(0)k(x,0)+h(0)k_t^{'}(x,0)-h(0)p_1(0)k(x,0). \tag{16}$$

Вычислим следующие выражения $k''_{tt}(x,t) - (p_1(t)k(x,t))'_t + p_2(t)k(x,t), k(x,0)$, $k'_t(x,0)$ по отдельности.

$$k'_t(x\,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}},$$

$$k''_{tt}(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y''_1(t) & y''_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}^2} \begin{vmatrix} y''_1(t) & y''_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} + p'_1(t)k(x,t) + p_1(t)k'_t(x,t) =$$

$$= -p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} - p_2(t)k(x,t) + p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p'_1(t)k(x,t) + p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p_1^2k(x,t),$$

$$k''_{tt}(x,t) - (p_1(t)k(x,t))'_t + p_2(t)k(x,t) = -p_2(t)k(x,t) + p'_1(t)k(x,t) + p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} + p_1^2(t)k(x,t) -$$

$$-p'_1(t)k(x,t) - p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(t) & y'_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}} - p_1^2(t)k(x,t) + p_2(t)k(x,t) = 0,$$

$$k(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(0) & y'_2(0) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}},$$

$$k'_t(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(0) & y'_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(0) & y'_2(0) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}} + p_1(0)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y'_1(0) & y'_2(0) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix}},$$

где $y_1(0) = 1$, $y'_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y'_2(0) = 1$ фундаментальная система решений. Тогда получим, что

$$k(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = y_2(x), \tag{17}$$

$$k'_t(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} + p_1(0)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = -y_1(x) + p_1(0)y_2(x). \tag{18}$$

То есть (16) формула примет следующий вид:

$$I(x) = h(x) - h^{'}(0)y_2(x) + h(0)\left(-y_1(x) + p_1(0)y_2(x)\right) - h(0)p_1(0)y_2(x) =$$

$$= h(x) - h(0)y_1(x) - h^{'}(0)y_2(x). \tag{19}$$

Удобно вести обозначение $M(x) = h(x) - I(x)$. Найдем производную первого и второго порядка функции $M(x)$.

$$M^{'}(x) = h^{'}(x) - I^{'}(x),$$

$$M^{''}(x) = h^{''}(x) - I^{''}(x).$$

Если взять линейную комбинацию $M^{''}(x) + p_1(x)M^{'}(x) + p_2(x)M(x)$, то в результате для любой гладкой функции $h(x)$ получим соотношение

$$M^{''}(x)+p_1(x)M^{'}(x)+p_2(x)M(x) = h^{''}(x)-I^{''}(x)+p_1(x)h^{'}(x)-p_1(x)I^{'}(x)+p_2(x)h(x)-p_2(x)I(x) = 0,$$

или

$$M^{''}(x) + p_1(x)M^{'}(x) + p_2(x)M(x) = 0. \tag{20}$$

Теперь используем граничные условия (11), (13), тогда для произвольной гладкой функции $h(x)$ имеем граничные соотношения

$$h(x)|_{x=0} - M(x)|_{x=0} = 0,$$

$$h^{'}(x)|_{x=0} - M^{'}(x)|_{x=0} = 0. \tag{21}$$

В силу произвольности $h(x)$ при $t \in [0,1]$ из соотношения (18) убеждаемся в справедливости следующего свойства функции $k(x,t)$:

$$k(x,t)|_{x=0,\, t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}k(x,t)|_{x=0,\, t=0} = -1. \tag{22}$$

Поэтому сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждения.

Теорема 2. *Функция $k(x,t)$ задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке обладает свойствами:*
1) $k(P,Q) = k(Q,P), \forall Q, P \in [0,1]$,
2) $k(P,Q) \le 0, \forall Q, P \in [0,1]$,
3) $k^{''}_{xx}(Q,P) + p_1(Q)k^{'}_x(Q,P) + p_2(Q)k(Q,P) = 0, \forall Q, P \in [0,1]$,
4) при $P = Q$, $k(P,Q) = 0$
5)при $P = Q = 0$ справедливо соотношение (22).

Теперь образуем новую функцию по формуле:

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(x) - I(x). \tag{23}$$

где $h(x)$ - произвольная достаточно гладкая функция. $I(x)$ - определяется по формуле (19).

Теорема 3. *Функция $W(x)$, введенная по формулам (23)и (19), является решением следующей задачи:*

$$W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = f(x), 0 < x < 1, \tag{24}$$

$$W(x)|_{x=0} = h(x)|_{x=0}, \tag{25}$$

$$W^{'}(x)|_{x=0} = h^{'}(x)|_{x=0},$$

где $h(x)-$ произвольная достаточно гладкая функция.

Причем решение краевой задачи (24), (25) единственно, то есть решение зависит, только от граничных значений $h(x)|_{x=0}$, $h^{'}(x)\Big|_{x=0}$, но не зависит от $h(x)$, $h^{'}(x)$ когда $0 < x < 1$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения (19) представление (23) можно переписать в виде

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(0)y_1(x) + h^{'}(0)y_2(x). \tag{26}$$

Проверим, какими свойствами обладает $W(x)$ функция. Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x = 0$.

$$W(0) = \int_0^0 k(0,t)f(t)dt + h(0)y_1(0) + h^{'}(0)y_2(0) = h(0). \tag{27}$$

Найдем производную $W^{'}(x)$, $W^{''}(x)$ и найдем значение $W^{'}(x)|_{x=0}$.

$$W^{'}(x) = \int_0^x k^{'}_x(x,t)f(t)dt + k(x,x)f(x) + h(0)y^{'}_1(x) + h^{'}(0)y^{'}_2(x), \tag{28}$$

$$W^{'}(0) = \int_0^0 k^{'}_x(0,t)f(t)dt + h(0)y^{'}_1 + h^{'}(0)y^{'}_2(0) = h^{'}(0). \tag{29}$$

$$W^{''}(x) = \int_0^x k^{''}_{xx}(x,t)f(t)dt + k^{'}_x(x,x)f(x) + h(0)y^{''}_1(x) + h^{'}(0)y^{''}_2(x),$$

$$W^{''}(x) = \int_0^x k^{''}_{xx}(x,t)f(t)dt + f(x) + h(0)y^{''}_1(x) + h^{'}(0)y^{''}_2(x). \tag{30}$$

Если взять линейную комбинацию (26), (28), (30) в виде $W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x)$, то получим

$$W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = \int_0^x \left[k^{''}_{xx}(x,t) + p_1(x)k^{'}_x(x,t) + p_2(x)k(x,t)\right] f(t)dt+$$

$$+h(0)\left[y^{''}_1(x) + p_1(x)y^{'}_1(x) + p_2(x)y_1(x)\right] + h^{'}(0)\left[y^{''}_2(x) + p_1(x)y^{'}_2(x) + p_2(x)y_2(x)\right] + f(x),$$

$$W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = f(x). \tag{31}$$

Из формул (31), (27), (29) вытекает утверждение теоремы 3.

Теперь покажем, как используя теорему 3 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на отрезке $[0,1]$.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x)$, то есть, пусть существует непрерывный оператор K, отображающий $f(x)$ в $h(x)$. Напомним $h(x)$ - гладкая функция. Итак, пусть $h = Kf(x)$. Тогда задача (24), (25) примет вид

$$W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = f(x), 0 < x < 1, \tag{32}$$

$$W(x)|_{x=0} - K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)|_{x=0} = 0, \tag{33}$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)|_{x=0} = 0.$$

Условия (33), накладываемые на функцию $W(x)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (32) при любой правой части $f(x)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (32), (33) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми"условиями вида (33). Итак, справедлива

Теорема 4. *Для любого непрерывного оператора K, отображающего пространство $\{f\} \in L_2[0,\,1]$ во множество гладких функций $\{h\} \in W_2^2[0,\,1]$ задачи (32), (33) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях $f(x)$.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 5. *Если уравнение (32) при всех правых частях $f(x)$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение , то найдется непрерывный оператор K, отображающий пространство $\{f\} \in L_2[0,1]$ во множество гладких функций $\{h\} \in W_2^2[0,1]$, такое, что дополнительное условие примет вид (33).*

Доказательство. Пусть уравнение (32) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x,f)$. Для удобства введем новую функцию $u_0(x,f) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt$. Рассмотрим разность $\upsilon(x) = W(x,f) - u_0(x,f)$. Функция $\upsilon(x)$ удовлетворяет условию $\upsilon^{''} + p_1\upsilon^{'} +$ $+p_2\upsilon = 0$. Таким образом, для любого f единственным образом находим υ, то есть $\upsilon = Kf(x)$. С другой стороны, введем новую функцию $\omega(x,f) = u_0(x,f) + \upsilon(0,f)y_1(x) + \upsilon^{'}(0,f)y_2(x)$. Последняя формула аналогична формуле (26). В данном случае роль $h(x)$ играет функция $\upsilon(x)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\omega^{''}(x) + p_1(x)\omega^{'}(x) + p_2(x)\omega(x) = f(x), \tag{34}$$

$$\omega(x)|_{x=0} = \upsilon(x,f)|_{x=0}, \tag{35}$$
$$\frac{d}{dx}\omega(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0},$$

где $\upsilon(x) = Kf(x)$ или $\upsilon(x) = K(\omega^{''} + p_1\omega^{'} + p_2\omega)(x)$.
С другой стороны, ясно что $W(x,f) = u_0(x,f) + \upsilon(x)$. Следовательно, имеем

$$W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = f(x), 0 < x < 1,$$
$$W(x,f)|_{x=0} = \upsilon(x,f)|_{x=0}, \tag{36}$$
$$\frac{d}{dx}W(x,f)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}.$$

Сравнивая соотношения (35) и (36) видим, что $W(x,f) = \omega(x,f)$, то есть дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид:

$$W(x)|_{x=0} - K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)|_{x=0} = 0.$$

Теорема 5 полностью доказана.

Из теоремы 5 следует, что решение (32), (33) имеют вид

$$W(x,f)=u_0(x,f)+Kf(x)|_{x=0}y_1(x)+\frac{d}{dx}Kf(x)|_{x=0}y_2(x). \qquad (37)$$

Оператор, соответствующий задаче (32), (33) обозначим через L_K. Тогда L_0 соответствует задаче Коши из теоремы 1. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора L_K.

Теорема 6. *Если K - линейный непрерывный оператор из теорем 4 и 5, то резольвента оператора L_K имеет вид:*

$$(L_K-\lambda I)^{-1}f(x)=(L_0-\lambda I)^{-1}f(x)+KL_0\,(L_0-\lambda I)^{-1}f(x)|_{x=0}\,L_K(L_K-\lambda I)^{-1}y_1(x)+$$

$$+\frac{d}{dx}KL_0\,(L_0-\lambda I)^{-1}f(x)|_{x=0}\,L_K(L_K-\lambda I)^{-1}y_2(x). \qquad (38)$$

Для доказательства теоремы 6 нам понадобятся следующие леммы. Удобно вести обозначения:

$$\widetilde{u_0}(x,\lambda)=(L_0-\lambda I)^{-1}f(x),$$

$$u_{K1}(x,\lambda)=L_K(L_K-\lambda I)^{-1}y_1(x),$$

$$u_{K2}(x,\lambda)=L_K(L_K-\lambda I)^{-1}y_2(x).$$

Тогда формула (38) примет следующий вид

$$W(x,\lambda)=\widetilde{u_0}(x,\lambda)+KL_0\widetilde{u_0}(x,\lambda)|_{x=0}u_{K1}(x,\lambda)+\frac{d}{dx}KL_0\widetilde{u_0}(x,\lambda)|_{x=0}u_{K2}(x,\lambda)$$

или

$$W(x,\lambda)=\widetilde{u_0}(x,\lambda)+\alpha u_{K1}(x,\lambda)+\beta u_{K2}(x,\lambda), \qquad (39)$$

где α и β не зависят от x и задаются по формулам:

$$\alpha=KL_0\widetilde{u_0}(x,\lambda)|_{x=0},$$

$$\beta=\frac{d}{dx}KL_0\widetilde{u_0}(x,\lambda)|_{x=0}.$$

Лемма 1. *Функция $\widetilde{u_0}(x,\lambda)$ является решением следующей задачи Коши с условиями в нуле:*

$$\widetilde{u_0}''(x)+p_1(x)\widetilde{u_0}'(x)+p_2(x)\widetilde{u_0}(x)-\lambda\widetilde{u_0}(x)=f(x), 0<x<1,$$

$$\widetilde{u_0}(x)|_{x=0}=0,$$

$$\frac{d}{dx}\widetilde{u_0}(x)|_{x=0}=0.$$

Доказательство. Если на соотношение

$$\widetilde{u_0}(x,\lambda)=(L_0-\lambda I)^{-1}f(x),$$

подействовать оператором $(L_0-\lambda I)$, то функция $\widetilde{u_0}(x,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$\widetilde{u_0}''(x)+p_1(x)\widetilde{u_0}'(x)+p_2(x)\widetilde{u_0}(x)-\lambda\widetilde{u_0}(x)=f(x),$$

так как оператор L_0 соответствует задаче Коши, то справедливость начальных условий очевидно.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Функция $u_{K1}(x,\lambda)$ является решением следующей краевой задачи:*

$$u''_{K1}(x)+p_1(x)u'_{K1}(x)+p_2(x)u_{K1}(x)-\lambda u_{K1}(x)=0,\ 0<x<1,$$

$$u_{K1}(x)|_{x=0}-K(u''_{K1}+p_1u'_{k1}+p_2u_{K1})(x)|_{x=0}=1,$$

$$\frac{d}{dx}u_{K1}(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(u''_{K1}+p_1u'_{k1}+p_2u_{K1})(x)|_{x=0}=0.$$

Доказательство. Соотношение $u_{K1}(x,\lambda)=L_K(L_K-\lambda I)^{-1}y_1(x)$ можно переписать в виде $u_{K1}(x,\lambda)=(L_K-\lambda I+\lambda I)(L_K-\lambda I)^{-1}y_1(x)=y_1(x)+\lambda(L_K-\lambda I)^{-1}y_1(x)$.

Обозначим $(L_K-\lambda I)^{-1}y_1(x)=\widetilde{w}(x)$ и подействуем на данное соотношение слева оператором $(L_K-\lambda I)$, то получим

$$\widetilde{w}''(x)+p_1(x)\widetilde{w}'(x)+p_2(x)\widetilde{w}(x)-\lambda\widetilde{w}(x)=y_1(x),$$

$$\widetilde{w}(x)|_{x=0}-K(\widetilde{w}''+p_1\widetilde{w}'+p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0}=0,$$

$$\frac{d}{dx}\widetilde{w}(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(\widetilde{w}''+p_1\widetilde{w}'+p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0}=0.$$

Если на соотношение $u_{K1}(x,\lambda)=y_1(x)+\lambda\widetilde{w}(x)$ подействовать слева через $(l-\lambda I)$, заметим, что здесь l - дифференциальное выражение, которое соответствует следующему виду: $l(y)=$ $=y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_2(x)y(x)-\lambda y(x)$, тогда функция $u_{K1}(x,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$u''_{K1}(x)+p_1(x)u'_{K1}(x)+p_2(x)u_{K1}(x)-\lambda u_{K1}(x)=y''_1(x)+p_1(x)y'_1(x)+p_2(x)y_1(x)-\lambda y_1(x)+\lambda y_1(x)=0,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Теперь проверим справедливость краевых условии:

1-условие.

$$u_{K1}(x)|_{x=0}-K(u''_{K1}+p_1u'_{k1}+p_2u_{K1})(x)|_{x=0}=y_1(x)|_{x=0}-K(y''_1+p_1y'_1+p_2y_1)(x)|_{x=0}+$$

$$+\lambda\{\widetilde{w}(x)|_{x=0}-K(\widetilde{w}''+p_1\widetilde{w}'+p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0}\}=y_1(x)|_{x=0}=1,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\widetilde{w}(x)|_{x=0}-K(\widetilde{w}''+p_1\widetilde{w}'+$ $+p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0}=0$.

2-условие.

$$\frac{d}{dx}u_{K1}(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(u''_{K1}+p_1u'_{k1}+p_2u_{K1})(x)|_{x=0}=\frac{d}{dx}y_1(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(y''_1+p_1y'_1+p_2y_1)(x)|_{x=0}+$$

$$+\lambda\{\frac{d}{dx}\widetilde{w}(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(\widetilde{w}''+p_1\widetilde{w}'+p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0}\}=\frac{d}{dx}y_1(x)|_{x=0}=0,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\frac{d}{dx}\widetilde{w}(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(\widetilde{w}''+$ $+p_1\widetilde{w}'+p_2\widetilde{w})(x)|_{x=0}=0$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Функция $u_{K2}(x,\lambda)$ является решением следующей краевой задачи:*

$$u''_{K2}(x) + p_1(x)u'_{K2}(x) + p_2(x)u_{K2}(x) - \lambda u_{K2}(x) = 0,\ 0 < x < 1,$$

$$u_{K2}(x)|_{x=0} - K(u''_{K2} + p_1u'_{K2} + p_2u_{K2})(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}u_{K2}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(u''_{K2} + p_1u'_{k2} + p_2u_{K2})(x)|_{x=0} = 1.$$

Доказательство. Соотношение $u_{K2}(x,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x)$ можно переписать в виде $u_{K2}(x,\lambda) = (L_K - \lambda I + \lambda I)(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x) = y_2(x) + \lambda(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x)$.

Обозначим $(L_K - \lambda I)^{-1}y_2(x) = \widetilde{v}(x)$ и подействуем на данное соотношение слева оператором $(L_K - \lambda I)$, то получим

$$\widetilde{v}''(x) + p_1(x)\widetilde{v}'(x) + p_2\widetilde{v}(x) - \lambda\widetilde{v}(x) = y_2(x),$$

$$\widetilde{v}(x)|_{x=0} - K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\widetilde{v}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0} = 0.$$

Если на соотношение $u_{K2}(x,\lambda) = y_2(x) + \lambda\widetilde{v}(x)$ подействовать слева через $(l - \lambda I)$, то функция $u_{K2}(x,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$u''_{K2}(x)+p_1(x)u'_{K2}(x)+p_2(x)u_{K2}(x)-\lambda u_{K2}(x) = y''_2(x)+p_1(x)y'_2(x)+p_2(x)y_2(x)-\lambda y_2(x)+\lambda y_2(x) = 0,$$

так как функция $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Теперь проверим справедливость краевых условии:

1-условие.

$$u_{K2}(x)|_{x=0} - K(u''_{K2} + p_1u'_{K2} + p_2u_{K2})(x)|_{x=0} = y_2(x)|_{x=0} - K(y''_2 + p_1y'_2 + p_2y_2)(x)|_{x=0}+$$

$$+\lambda\{\widetilde{v}(x)|_{x=0} - K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0}\} = y_2(x)|_{x=0} = 0,$$

так как $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\widetilde{v}(x)|_{x=0}-K(\widetilde{v}''+p_1\widetilde{v}'+p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0} =$

$= 0$.

2-условие.

$$\frac{d}{dx}u_{K2}(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(u''_{K2}+p_1u'_{K2}+p_2u_{K2})(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}y_2(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(y''_2+p_1y'_2+p_2y_2)(x)|_{x=0}+$$

$$+\lambda\{\frac{d}{dx}\widetilde{v}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(\widetilde{v}'' + p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0}\} = \frac{d}{dx}y_2(x)|_{x=0} = 1,$$

так как функция $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\frac{d}{dx}\widetilde{v}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(\widetilde{v}'' + {}$ $+ p_1\widetilde{v}' + p_2\widetilde{v})(x)|_{x=0} = 0$.

Лемма 3 доказана.

Доказательства теоремы 6. Докажем, что функция

$$W(x,\lambda) = \widetilde{u_0}(x,\lambda) + \alpha u_{K1}(x,\lambda) + \beta u_{K2}(x,\lambda), \tag{39}$$

является решением следующей задачи:

$$W^{''}(x)+p_1(x)W^{'}(x)+p_2W(x)-\lambda W(x)=f(x),\ 0<x<1 \tag{40}$$

$$W(x)|_{x=0}-K(W^{''}+p_1W^{'}+p_2W)(x)|_{x=0}=0, \tag{41}$$
$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(W^{''}+p_1W^{'}+p_2W)(x)|_{x=0}=0.$$

Вспоминая леммы 1, 2, 3, легко заметить, что функция $W(x,\ \lambda)$ из формулы (39) удовлетворяет требуемому дифференциальному соотношению (40).

Остается проверить справедливость краевых условий.

1-условие.

$$W(x)|_{x=0}-K(W^{''}+p_1W^{'}+p_2W)(x)|_{x=0}=\widetilde{u_0}(x)|_{x=0}-K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}+$$
$$+\alpha[u_{K1}(x)|_{x=0}-K(u^{''}_{K1}+p_1u^{'}_{k1}+p_2u_{K1})(x)|_{x=0}]+\beta[u_{K2}(x)|_{x=0}-K(u^{''}_{K2}+p_1u^{'}_{k2}+p_2u_{K2})(x)|_{x=0}]=$$
$$=-K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}+\alpha=-K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}+KL_0\widetilde{u_0}(x,\ \lambda)=$$
$$=-K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}+K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}=0.$$

Здесь учтены (1)-ое соотношение из условий задачи Коши леммы 1, а также (1)-ые соотношения из условий краевых задач леммы 2, 3.

2-условие.

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(W^{''}+p_1W^{'}+p_2W)(x)|_{x=0}=\frac{d}{dx}\widetilde{u_0}(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}+$$
$$+\alpha[\frac{d}{dx}u_{K1}(x,\ \lambda)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(u^{''}_{K1}+p_1u^{'}_{k1}+p_2u_{K1})(x)|_{x=0}]+\beta[\frac{d}{dx}u_{K2}(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(u^{''}_{K2}+p_1u^{'}_{k2}+$$
$$+p_2u_{K2})(x)|_{x=0}]=-K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}+\beta=-K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}+$$
$$+\frac{d}{dx}KL_0\widetilde{u_0}(x)|_{x=0}=-K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}+K(\widetilde{u_0}^{''}+p_1\widetilde{u_0}^{'}+p_2\widetilde{u_0})(x)|_{x=0}=0.$$

Здесь учтены (2)-ое соотношение из условий задачи Коши леммы 1, а также (2)-ые соотношения из условий краевых задач леммы 2, 3.

Теорема 6 доказана.

Теперь рассмотрим всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на проколотом отрезке. Для этого применим вышеуказанный метод к проколотому отрезку $[0,c)\cup(c,1]$, где c - некоторая внутренняя точка отрезка $[0,1]$.

Пусть $h(x)$ - дважды дифференцируемая на проколотом отрезке $[0,c)\cup(c,1]$, функция. Нам уже известно, что функция

$$W(x)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt+h(x)-I(x).$$

Рассмотрим два случая $x<c$ и $x>c$.

$$I(x)=\int_0^x k(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt=$$

$$=\begin{cases} h(x)-h(0)y_1(x)-h^{'}(0)y_2(x), & x<c; \\ \int_0^{c-0}k(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt+\int_{c+0}^{x}k(x,t)\left[h^{''}(t)+p_1(t)h^{'}(t)+p_2(t)h(t)\right]dt, & x>c. \end{cases}$$

Вычислим интеграл: $\int_0^{c-0} k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt = ?$

1) $\int_0^{c-0} k(x,t)h''(t)dt = \left[k(x,t)h'(t)-k_t'(x,t)h(t)\right]_{t=0}^{t=c-0} + \int_0^{c-0} h(t)k_{tt}''(x,t)dt,$

2) $\int_0^{c-0} k(x,t)p_1(t)h'(t)dt = k(x,t)p_1(t)h(t)|_{t=0}^{t=c-0} - \int_0^{c-0} h(t)\,(k(x,t)p_1(t))_t'\,dt,$

3) $\int_0^{c-0} k(x,t)p_2(t)h(t)dt = \int_0^{c-0} h(t)k(x,t)p_2(t)dt.$

$$\int_0^{c-0} k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt = k(x,c)h'(c-0)-k_t'(x,c)h(c-0)-$$

$$-k(x,0)h'(0)+k_t'(x,0)h(0)+p_1(c)k(x,c)h(c-0)-p_1(0)k(x,0)h(0)+$$

$$+\int_0^{c-0} h(t)\left[k_{tt}''(x,t)-(k(x,t)p_1(t)h(t))_t'+k(x,c)p_2(t)\right]dt =$$

$$= k(x,c)h'(c-0)-k_t'(x,c)h(c-0)-y_2(x)h'(0)-h(0)y_1(x)+p_1(0)h(0)y_2(x)+p_1(c)k(x,c)h(c-0)-$$

$$-p_1(0)h(0)y_2(x) = -h'(0)y_2(x)-h(0)y_1(x)+k(x,c)h'(c-0)-k_t'(x,c)h(c-0)+p_1(c)k(x,c)h(c-0)$$

Здесь учтено, что $k_{tt}''(x,t)-(k(x,t)p_1(t)h(t))_t'+k(x,c)p_2(t)=0$.

Таким же способом вычислим интеграл: $\int_{c+0}^{x} k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt$

1) $\int_{c+0}^{x} k(x,t)h''(t)dt = \left[k(x,t)h'(t)-k_t'(x,t)h(t)\right]_{t=c+0}^{t=x} + \int_{c+0}^{x} h(t)k_{tt}''(x,t)dt,$

2) $\int_{c+0}^{x} k(x,t)p_1(t)h'(t)dt = k(x,t)p_1(t)h(t)|_{t=c+0}^{t=x} - \int_{c+0}^{x} h(t)\,(k(x,t)p_1(t))_t'\,dt,$

3) $\int_{c+0}^{x} k(x,t)p_2(t)h(t)dt = \int_{c+0}^{x} h(t)k(x,t)p_2(t)dt.$

$$\int_{c+0}^{x} k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt = k(x,x)h'(x)-k_t'(x,x)h(x)-$$

$$-k(x,c)h'(c+0)+k_t'(x,c)h(c+0)+p_1(x)k(x,x)h(x)-p_1(c)k(x,c)h(c+0)+$$

$$+\int_{c+0}^{x} h(t)\left[k_{tt}''(x,t)-(k(x,t)p_1(t)h(t))_t'+k(x,t)p_2(t)\right]dt =$$

$$= h(x)-k(x,c)h'(c+0)+k_t'(x,c)h(c+0)-p_1(c)k(x,c)h(c+0).$$

Так как, $k_{tt}''(x,t)-(k(x,t)p_1(t)h(t))_t'+k(x,t)p_2(t)=0$, $k(x,x)=0$, $k_t'(x,x)=-1$.

Теперь берем сумму интегралов:

$$\int_0^{c-0} k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt + \int_{c+0}^{x} k(x,t)\left[h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)\right]dt =$$

$$= -h'(0)y_2(x)-h(0)y_1(x)+k(x,c)h'(c-0)-k_t'(x,c)h(c-0)+p_1(c)k(x,c)h(c-0)+$$

$$+h(x)-k(x,c)h'(c+0)+k_t'(x,c)h(c+0)-p_1(c)k(x,c)h(c+0) = h(x)-h(0)y_1(x)-h'(0)y_2(x)+$$

$$+p_1(c)k(x,c)[h]_c+k(x,c)[h']_c-k_t'(x,c)[h]_c.$$

Отсюда,

$$I(x) = \begin{cases} h(x)-h(0)y_1(x)-h'(0)y_2(x), & x<c; \\ h(x)-h(0)y_1(x)-h'(0)y_2(x)+(p_1(c)k(x,c)-k_t'(x,c))[h]_c+k(x,c)[h']_c, & x>c. \end{cases} \tag{42}$$

Поэтому аналог формулы (23) примет вид:

$$W(x)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt+h(0)y_1(x)+h^{'}(0)y_2(x)+$$

$$+\begin{cases} 0, & x<c; \\ k_t^{'}(x,c)[h]_c-p_1(c)k(x,c)[h]_c-k(x,c)[h^{'}]_c, & x>c. \end{cases} \tag{43}$$

Формула (43) дает решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на проколотом отрезке $[0,c)\cup(c,1]$.

Таким образом мы сможем сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. *Функция $W(x)$ введенная по формуле (43) является единственным решением следующей краевой задачи:*

$$W^{''}(x)+p_1(x)W^{'}(x)+p_2(x)W(x)=f(x), 0<x<c,\ c<x<1 \tag{44}$$

$$\begin{gathered} W(0)=h(0), \\ W^{'}(0)=h^{'}(0), \\ [W]_c=[h]_c, \\ [W^{'}]_c=[h^{'}]_c. \end{gathered} \tag{45}$$

Доказательство. $W(x)$ - дважды дифференцируемая на проколотом отрезке $[0,c)\cup(c,1]$ функция. Какими свойствами обладает $W(x)$ функция? Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x=0$,

$$W(0)=\int_0^0 k(0,t)f(t)dt+h(0)y_1(0)+h^{'}(0)y_2(0)=h(0), \tag{46)}$$

$$W^{'}(x)=\int_0^x k_x^{'}(x,t)f(t)dt+h(0)y_1^{'}(x)+h^{'}(0)y_2^{'}(x)+$$

$$+\begin{cases} 0, & x<c; \\ k_{tx}^{''}(x,c)[h]_c-p_1(c)k_x^{'}(x,c)[h]_c-k_x^{'}(x,c)[h^{'}]_c, & x>c. \end{cases}$$

Вычислим значение функции $W^{'}(x)$ в точке $x=0$,

$$W^{'}(0)=\int_0^0 k_x^{'}(0,t)f(t)dt+h(0)y_1^{'}(0)+h^{'}(0)y_2^{'}(0)=h^{'}(0). \tag{47}$$

Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x=c-0$,

$$W(c-0)=\int_0^c k(c,t)f(t)dt+h(0)y_1(c)+h^{'}(0)y_2(c).$$

Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x=c+0$,

$$W(c+0)=\int_0^c k(c,t)f(t)dt+h(0)y_1(c)+h^{'}(0)y_2(c)+k_t^{'}(c,c)[h]_c-p_1(c)k(c,c)[h]_c-k(c,c)[h^{'}]_c=$$

$$=\int_0^c k(c,t)f(t)dt+h(0)y_1(c)+h^{'}(0)y_2(c)-[h]_c.$$

Вычислим линейную комбинацию

$$W(c-0)-W(c+0)=[W]_c=[h]_c. \tag{48}$$

Вычислим значение функции $W^{'}(x)$ в точке $x=c-0$,

$$W^{'}(c-0)=\int_0^c k_x^{'}(x,t)f(t)dt+h(0)y_1^{'}(c)+h^{'}(0)y_2^{'}(c).$$

Вычислим значение функции $W^{'}(x)$ в точке $x=c+0$,

$$W^{'}(c+0)=\int_0^c k_x^{'}(x,t)f(t)dt+h(0)y_1^{'}(c)+h^{'}(0)y_2^{'}(c)+k_{tx}^{''}(c,c)[h]_c-p_1(c)k_x^{'}(c,c)[h]_c-k_x^{'}(c,c)[h^{'}]_c=$$

$$=\int_0^c k_x^{'}(c,t)f(t)dt+h(0)y_1^{'}(c)+h^{'}(0)y_2^{'}(c)-[h^{'}]_c.$$

Здесь учтено, что $k_{tx}^{''}(c,c)=\dfrac{\begin{vmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}+p_1(t)\dfrac{\begin{vmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}$, $k_{tx}^{''}(c,c)=p_1(c), k_x^{'}(c,c)=1.$

Вычислим линейную комбинацию

$$W^{'}(c-0)-W^{'}(c+0)=[W^{'}]_c=[h^{'}]_c. \tag{49}$$

Найдем производную второго порядка функции $W(x)$:

$$W^{''}(x)=\int_0^x k_{xx}^{''}(x,t)f(t)dt+f(x)+h(0)y_1^{''}(x)+h^{'}(0)y_2^{''}(x)+$$

$$+\begin{cases} 0, & x<c;\\ k_{txx}^{'''}(x,c)[h]_c-p_1(c)k_{xx}^{''}(x,c)[h]_c-k_{xx}^{''}(x,c)[h^{'}]_c, & x>c.\end{cases} \tag{50}$$

Теперь вычислим линейную комбинацию:

$$W^{''}(x)+p_1(x)W^{'}(x)+p_2(x)W(x)=\int_0^x\left[k_{xx}^{''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'}(x,t)+p_2(x)k(x,t)\right]f(t)dt+$$

$$+h(0)\left[y_1^{''}(x)+p_1(x)y_1^{'}(x)+p_2(x)y_1(x)\right]+h^{'}(0)\left[y_2^{''}(x)+p_1(x)y_2^{'}(x)+p_2(x)y_2(x)\right]+$$

$$+\left[k_{txx}^{'''}(x,c)+p_1(x)k_{tx}^{''}(x,c)+p_2(x)k_t^{'}(x,c)\right][h]_c-p_1(c)\left[k_{xx}^{''}(x,c)+p_1(x)k_x^{'}(x,c)+p_2(x)k(x,c)\right][h]_c-$$

$$-\left[k_{xx}^{''}(x,c)+p_1(x)k_x^{'}(x,c)+p_2(x)k(x,c)\right][h^{'}]_c+f(x)=f(x).$$

Так как, $k_{xx}^{''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'}(x,t)+p_2(x)k(x,t)=-p_1(x)\dfrac{\begin{vmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}-p_2(x)\dfrac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}-$

$$-p_1(t)p_1(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}-p_1(t)p_2(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}+p_1(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}+p_1(t)p_1(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}+$$

$$+p_2(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}+p_1(t)p_2(x)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}}=0.$$

Таким образом, $W(x)$ функция является решением краевой задачи (44), (45).

Докажем единственность решении краевой задачи (44), (45). Для этого сначала рассмотрим задачу Коши на отрезке $[0, c)$.

$$W''(x) + p_1(x)W'(x) + p_2(x)W(x) = f(x), 0 < x < c,\ c < x < 1 \tag{51}$$

$$W(0) = h(0),$$
$$W'(0) = h'(0),$$

Решение для краевой задачи (51) находим единственно.

Для $W(x)$ при $0 < x < c$ вытекает, что единственным образом вычисляем $W(x-c), W(x+c)$, поэтому из последних двух выражении следует единственность $W(x)$ на проколотом отрезке $[0, c) \cup (c, 1]$.

Теорема 7 доказана.

Теперь покажем, как используя теорему 7 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на проколотом отрезке $[0, c) \cup (c, 1]$.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x)$, то есть, пусть существует непрерывный оператор K, отображающий $f(x)$ в $h(x)$. Напомним $h(x)$ - дважды дифференцируемая функция на проколотом отрезке $[0, c) \cup (c, 1]$. Итак, пусть $h = Kf(x)$. Тогда задача (44), (45) примет вид

$$W''(x) + p_1(x)W'(x) + p_2(x)W(x) = f(x),\ 0 < x < c,\ c < x < 1, \tag{52}$$

$$\begin{gathered}
W(x)|_{x=0} - K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)|_{x=0} = 0,\\
\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)|_{x=0} = 0,\\
[W(x)]_c - [K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)]_c = 0,\\
[\frac{d}{dx}W(x)]_c - [\frac{d}{dx}K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)]_c = 0.
\end{gathered} \tag{53}$$

Условия (53) накладываемые на функцию $W(x)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (52) при любой правой части $f(x)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (52), (53) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми"условиями вида (53). Итак, справедлива

Теорема 8. *Для любого непрерывного оператора K, отображающего пространство $\{f\} \in$ $\in L_2[0,\ 1]$ во множество функций $\{h\} \in W_2^2[0, c) \cup (c, 1]$ задачи (52), (53) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях $f(x)$.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 9. *Если уравнение (52) при всех правых частях $f(x)$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение , то найдется непрерывный оператор K, отображающий пространство $\{f\} \in L_2[0, 1]$ во множество функции $\{h\} \in W_2^2[0, c) \cup (c, 1]$ такое, что дополнительное условие примет вид (53).*

Доказательство. Пусть уравнение (52) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x, f)$. Для удобства введем новую функцию $u_0(x, f) = \int_0^x k(x, t)f(t)dt$. Рассмотрим разность $v(x) = W(x, f) - u_0(x, f)$. Функция $v(x)$ удовлетворяет условию $v'' + p_1v' +$

$+p_2\upsilon = 0$. Таким образом, для любого f единственным образом находим υ, то есть $\upsilon = Kf(x)$.
С другой стороны, введем новую функцию

$$\omega(x,f) = u_0(x,f)+\upsilon(0,f)y_1(x)+\upsilon^{'}(0,f)y_2(x)+\begin{cases} 0, & x<c; \\ k_t^{'}(x,c)[\upsilon]_c - k(x,c)[\upsilon^{'}]_c - p_1(c)k(x,c)[\upsilon]_c, & x>c. \end{cases} .$$

Последняя формула аналогична формуле (43). В данном случае роль $h(x)$ играет функция $\upsilon(x)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 7 показывают, что

$$\omega^{''}(x) + p_1(x)\omega^{'}(x) + p_2(x)\omega(x) = f(x), \tag{54}$$

$$\begin{gathered} \omega(x)|_{x=0} = \upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d}{dx}\omega(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)\Big|_{x=0}, \\ [\omega(x)]_c = [\upsilon(x,f)]_c, \\ [\frac{d}{dx}\omega(x)]_c = [\frac{d}{dx}\upsilon(x,f)]_c. \end{gathered} \tag{55}$$

где $\upsilon(x) = Kf(x)$ или $\upsilon(x) = K(\omega^{''} + p_1\omega^{'} + p_2\omega)(x)$.
С другой стороны, ясно что $W(x,f) = u(x,f) + \upsilon(x)$. Следовательно, имеем

$$\begin{gathered} W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = f(x),\ 0<x<c,\ c<x<1, \\ W(x,f)|_{x=0} = \upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d}{dx}W(x,f)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}. \\ [W(x,f)]_c = [\upsilon(x,f)]_c, \\ [\frac{d}{dx}W(x,f)]_c = [\frac{d}{dx}\upsilon(x,f)]_c. \end{gathered} \tag{56}$$

Сравнивая соотношения (55) и (56) видим, что $W(x,f) = \omega(x,f)$, то есть дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид:

$$\begin{gathered} W(x)|_{x=0} - K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)|_{x=0} = 0, \\ \frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)|_{x=0} = 0. \\ [W(x)]_c - [K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)]_c = 0, \\ [\frac{d}{dx}W(x)]_c - [\frac{d}{dx}K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)]_c = 0. \end{gathered}$$

Теорема 9 полностью доказана.

Из теоремы 9 следует, что решение (52), (53) имеет вид

$$W(x,f) = u_0(x,f) + Kf(x)|_{x=0}y_1(x) + \frac{d}{dx}Kf(x)|_{x=0}y_2(x)+$$

$$+\begin{cases} 0, & x<c; \\ \Big(k_t'(x,c)-k(x,c)p_1(c)\Big)\,[Kf(x)]_c - k(x,c)[\frac{d}{dx}Kf(x)]_c, & x>c. \end{cases} \tag{57}$$

Оператор, соответствующий задаче (52), (53) обозначим через L_K. Тогда L_0 соответствует задаче Коши. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора L_K.

Теорема 10. *Если K - линейный непрерывный оператор из теорем 8 и 9, то резольвента оператора L_K имеет вид:*

$$(L_K-\lambda I)^{-1}f(x) = (L_0\ -\lambda I)^{-1}f(x) + KL_0\,(\,L_0-\lambda I)^{-1}f(x)|_{x=0}\,L_K(L_K-\lambda I)^{-1}y_1(x)+$$
$$+\,\frac{d}{dx}KL_0\,(L_0\ -\lambda I)^{-1}f(x)\bigg|_{x=0}\,L_K(L_K-\lambda I)^{-1}y_2(x)+ \tag{58}$$
$$+\begin{cases} 0, & x<c; \\ L_K(L_K-\lambda I)^{-1}\Big(k_t'(x,c)-p_1(c)k(x,c)\Big)\,[KL_0(L_0-\lambda I)^{-1}f(x)]_c - & \\ -L_K(L_K-\lambda I)^{-1}k(x,c)[\frac{d}{dx}KL_0(L_0-\lambda I)^{-1}f(x)]_c, & x>c. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 10 нам понадобятся следующие леммы. Удобно вести обозначения:

$$\widetilde{g_0}(x,\,\lambda) = L_0\ -\lambda I)^{-1}\,f(x),$$

$$g_{K1}(x,\,\lambda) = L_K(L_K\ -\lambda I)^{-1}\,y_1(x),$$
$$g_{K2}(x,\,\lambda) = L_K(L_K\ -\lambda I)^{-1}\,y_2(x),$$
$$g_{K3}(x,\,\lambda) = L_K(L_K\ -\lambda I)^{-1}\,\Big(k_t'(x,\,c)-p_1(c)\,k(x,\,c)\Big),$$
$$g_{K4}(x,\,\lambda) = L_K(L_K\ -\lambda I)^{-1}\,k(x,\,c).$$

Тогда формула (58) примет следующий вид:

$$W(x,\,\lambda) = \widetilde{g_0}(x,\,\lambda) + K\,L_0\,\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)|_{x=0}\ g_{K1}(x,\,\lambda) + \frac{d}{dx}K\,L_0\,\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)\bigg|_{x=0}\ g_{K2}(x,\,\lambda)+$$

$$+\begin{cases} 0, & x<c; \\ g_{K3}(x,\,\lambda)\ [KL_0\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)]_c - g_{K4}(x,\,\lambda)\ \left[\frac{d}{dx}K\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)\right]_c, & x>c. \end{cases}$$

или

$$W(x,\,\lambda) = \widetilde{g_0}(x,\,\lambda) + \alpha\,g_{K1}(x,\,\lambda) + \beta\,g_{K2}(x,\,\lambda)+ \tag{59}$$
$$+\begin{cases} 0, & \text{если x<c;} \\ g_{K3}(x,\,\lambda)\widetilde{\alpha}_c - g_{K4}(x,\,\lambda)\widetilde{\beta}_c, & \text{если x>c,} \end{cases}$$

где α, β, $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ соответственно задаются по формулам:

$$\alpha = K\,L_0\,\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)|_{x=0},$$

$$\beta = \frac{d}{dx}K\,L_0\,\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)\bigg|_{x=0},$$

$$\widetilde{\alpha} = [K\,L_0\,\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)]_c\,,$$

$$\widetilde{\beta} = \left[\frac{d}{dx}K\,L_0\,\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)\right]_c.$$

Лемма 4. *Функция* $\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)$ *является решением следующей задачи Коши с условиями в нуле:*

$$\widetilde{g_0''}(x) + p_1(x)\,\widetilde{g_0'}(x) + p_2(x)\,\widetilde{g_0}(x) - \lambda\,\widetilde{g_0}(x) = \,f(x),\; 0<x<c,\; c<x<1,$$
$$\widetilde{g_0}(x)|_{x=0} \,=\, 0,$$
$$\frac{d}{dx}\widetilde{g_0}(x)\bigg|_{x=0} \,=\, 0,$$
$$[\widetilde{g_0}(x)]_c \,=\, 0,$$
$$\left[\frac{d}{dx}\widetilde{g_0}(x)\right]_c \,=\, 0$$

Доказательство. Если на соотношение

$$\widetilde{g_0}(x,\,\lambda) = L_0\, - \lambda I)^{-1}\,f(x),$$

подействовать оператором $(L_0 - \lambda I)$, то функция $\widetilde{g_0}(x,\,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$\widetilde{g_0''}(x) + p_1(x)\,\widetilde{g_0'}(x) + p_2(x)\,\widetilde{g_0}(x) - \lambda\,\widetilde{g_0}(x) = \,f(x).$$

Так как оператор L_0 соответствует задаче Коши, то справедливость начальных условий очевидно.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Функция* $g_{K1}(x,\,\lambda)$ *является решением следующей краевой задачи:*

$$g_{K1}^{''}(x) + p_1(x)\,g_{K1}^{'}(x) + p_2(x)\,g_{K1}(x) - \lambda\,g_{K1}(x) = \,0,\; 0<x<c,\; c<x<1,$$
$$g_{K1}(x)|_{x=0} \,-\, K\,(g_{K1}^{''} + p_1\,g_{K1}^{'} + p_2\,g_{K1})(x)|_{x=0} = \,1,$$
$$\frac{d}{dx}g_{K1}(x)\bigg|_{x=0} \,-\, \frac{d}{dx}K\,(g_{K1}^{''} + p_1\,g_{K1}^{'} + p_2\,g_{K1})(x)\bigg|_{x=0} \,=\, 0,$$
$$[g_{K1}(x)]_c \,-\, [K\,(g_{K1}^{''} + p_1\,g_{K1}^{'} + p_2\,g_{K1})(x)]_c = \,0,$$
$$\left[\frac{d}{dx}g_{K1}(x)\right]_c \,-\, \left[\frac{d}{dx}K\,(g_{K1}^{''} + p_1\,g_{K1}^{'} + p_2\,g_{K1})(x)\right]_c \,=\, 0.$$

Доказательство. Соотношение $g_{K1}(x,\,\lambda) = L_K(L_K\, - \lambda I)^{-1}\,y_1(x)$ можно переписать в виде $g_{K1}(x,\,\lambda) = L_K(L_K\, - \lambda I + \lambda I)^{-1}\,y_1(x) = y_1(x) + \lambda(L_K\, - \lambda I)^{-1}\,y_1(x)$.

Обозначим $\lambda(L_K - \lambda I)^{-1}\,y_1(x) = \omega(x)$ и подействуем на данное соотношение слева оператором $(L - \lambda I)$, то получим

$$\omega^{''}(x) + p_1(x)\,\omega^{'}(x) + p_2(x)\,\omega(x) - \lambda\,\omega(x) = \,y_1(x),\; 0<x<c,\; c<x<1,$$
$$\omega(x)|_{x=0} \,-\, K\,(\omega^{''} + p_1\,\omega^{'} + p_2\,\omega)(x)|_{x=0} = \,0,$$
$$\frac{d}{dx}\omega(x)\bigg|_{x=0} \,-\, \frac{d}{dx}K\,(\omega^{''} + p_1\,\omega^{'} + p_2\,\omega)(x)\bigg|_{x=0} \,=\, 0,$$
$$[\omega(x)]_c \,-\, [K\,(\omega^{''} + p_1\,\omega^{'} + p_2\,\omega)(x)]_c = \,0,$$
$$\left[\frac{d}{dx}\omega(x)\right]_c \,-\, \left[\frac{d}{dx}K\,(\omega^{''} + p_1\,\omega^{'} + p_2\,\omega)(x)\right]_c \,=\, 0.$$

Если на соотношение $g_{K1}(x,\,\lambda)\;=\;y_1(x)+\lambda\,\omega(x)$ подействовать слева через $(l-\lambda I)$, заметим, что l - дифференциальное выражение, которое соответствует следующему виду: $l(g)=g^{''}(x)+$ $+p_1(x)g^{'}(x)+p_2(x)g(x)-\lambda g(x)$, тогда функция $g_{K1}(x,\,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$g^{''}_{K1}(x)+p_1(x)\,g^{'}_{K1}(x)+p_2(x)\,g_{K1}(x)-\lambda\,g_{K1}(x)=y^{''}_1(x)+p_1(x)\,y^{'}_1(x)+p_2(x)\,y_1(x)-\lambda\,y_1(x)+\lambda\,y_1(x)=0,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Теперь проверим справедливость краевых условий:

1-условие.

$$g_{K1}(x)|_{x=0}-K\,(g^{''}_{K1}+p_1\,g^{'}_{K1}+p_2\,g_{K1})(x)|_{x=0}=y_1(x)|_{x=0}-K(y^{''}_1+p_1y^{'}_1+p_2y_1)(x)|_{x=0}+$$

$$+\lambda\left\{\omega(x)|_{x=0}-K(\omega^{''}+p_1\omega^{'}+p_2\omega)(x)|_{x=0}\right\}=y_1(x)|_{x=0}=1,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\omega(x)|_{x=0}-K\,(\omega^{''}+p_1\,\omega^{'}+$ $+\,p_2\,\omega)(x)|_{x=0}=0$.

2-условие.

$$\frac{d}{dx}g_{K1}(x)\Big|_{x=0}-\frac{d}{dx}K\,(g^{''}_{K1}+p_1\,g^{'}_{K1}+p_2\,g_{K1})(x)\Big|_{x=0}=\frac{d}{dx}y_1(x)\Big|_{x=0}-\frac{d}{dx}K\,(y^{''}_1+p_1\,y^{'}_1+p_2\,y_1)(x)|_{x=0}+$$

$$+\lambda\{\frac{d}{dx}\omega(x)\Big|_{x=0}-\frac{d}{dx}K\,(\omega^{''}+p_1\,\omega^{'}+p_2\,\omega)(x)\Big|_{x=0}\}=\frac{d}{dx}y_1(x)\Big|_{x=0}=0,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\frac{d}{dx}\omega(x)\big|_{x=0}-\frac{d}{dx}K\,(\omega^{''}+$ $+p_1\,\omega^{'}+p_2\,\omega)(x)|_{x=0}=0$.

3-условие.

$$[g_{K1}(x)]_c-[K\,(g^{''}_{K1}+p_1\,g^{'}_{K1}+p_2\,g_{K1})(x)]_c=[y_1(x)]_c-[K\,(y^{''}_1+p_1\,y^{'}_1+p_2\,y_1)(x)]_c+$$

$$+\lambda\left\{[\omega(x)]_c-[K\,(\omega^{''}+p_1\,\omega^{'}+p_2\,\omega)(x)]_c\right\}=0,$$

так как функция $y_1(x)$ является непрерывным, а также решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $[\omega(x)]_c-$ $[K\,(\omega^{''}+p_1\,\omega^{'}+p_2\,\omega)(x)]_c=0$.

4-условие.

$$\left[\frac{d}{dx}g_{K1}(x)\right]_c-\left[\frac{d}{dx}K\,(g^{''}_{K1}+p_1\,g^{'}_{K1}+p_2\,g_{K1})(x)\right]_c=\left[\frac{d}{dx}y_1(x)\right]_c-\left[\frac{d}{dx}K\,(y^{''}_1+p_1\,y^{'}_1+p_2\,y_1)(x)\right]_c+$$

$$+\lambda\left\{\left[\frac{d}{dx}\omega(x)\right]_c-\left[\frac{d}{dx}K\,(\omega^{''}+p_1\,\omega^{'}+p_2\,\omega)(x)\right]_c\right\}=0,$$

так как функция $y_1(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, а также ее производная первого порядка непрерывно и справедливо соотношение $\left[\frac{d}{dx}\omega(x)\right]_c-\left[\frac{d}{dx}K\,(\omega^{''}+p_1\,\omega^{'}+p_2\,\omega)(x)\right]_c=0$.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Функция $g_{K2}(x,\,\lambda)$ является решением следующей краевой задачи:*

$$g^{''}_{K2}(x)+p_1(x)\,g^{'}_{K2}(x)+p_2(x)\,g_{K2}(x)-\lambda\,g_{K2}(x)=0,\;0<x<c,\;c<x<1,$$

$$g_{K2}(x)|_{x=0}-K\,(g^{''}_{K2}+p_1\,g^{'}_{K2}+p_2\,g_{K2})(x)|_{x=0}=0,$$

$$\frac{d}{dx} g_{K2}(x)\Big|_{x=0} - \frac{d}{dx} K\,(g_{K2}^{''} + p_1\, g_{K2}^{'} + p_2\, g_{K2})(x)\Big|_{x=0} = 1,$$
$$[g_{K2}(x)]_c - [K\,(g_{K2}^{''} + p_1\, g_{K2}^{'} + p_2\, g_{K2})(x)]_c = 0,$$
$$\left[\frac{d}{dx} g_{K2}(x)\right]_c - \left[\frac{d}{dx} K\,(g_{K2}^{''} + p_1\, g_{K2}^{'} + p_2\, g_{K2})(x)\right]_c = 0.$$

Доказательство. Соотношение $g_{K2}(x,\,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1}\, y_2(x)$ можно переписать в виде $g_{K2}(x,\,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I + \lambda I)^{-1}\, y_2(x) = y_2(x) + \lambda(L_K - \lambda I)^{-1}\, y_2(x)$.

Обозначим $\lambda(L_K - \lambda I)^{-1}\, y_2(x) = \upsilon(x)$ и подействуем на данное соотношение слева оператором $(L - \lambda I)$, то получим

$$\upsilon^{''}(x) + p_1(x)\,\upsilon^{'}(x) + p_2(x)\,\upsilon(x) - \lambda\,\upsilon(x) = y_2(x),$$
$$\upsilon(x)|_{x=0} - K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)|_{x=0} = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\upsilon(x)\Big|_{x=0} - \frac{d}{dx} K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)\Big|_{x=0} = 0,$$
$$[\upsilon(x)]_c - [K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)]_c = 0,$$
$$\left[\frac{d}{dx}\upsilon(x)\right]_c - [\frac{d}{dx} K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)\Big]_c = 0.$$

Если на соотношение $g_{K2}(x,\,\lambda) = y_1(x) + \lambda\,\upsilon(x)$ подействовать слева через $(l - \lambda I)$, то функция $g_{K2}(x,\,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$g_{K2}^{''}(x) + p_1(x)\, g_{K2}^{'}(x) + p_2(x)\, g_{K2}(x) - \lambda\, g_{K2}(x) = y_2^{''}(x) + p_1(x)\, y_2^{'}(x) + p_2(x)\, y_2(x) - \lambda\, y_2(x) + \lambda\, y_2(x) = 0,$$

так как функция $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Теперь проверим справедливость краевых условий:

1-условие.

$$g_{K2}(x)|_{x=0} - K\,(g_{K2}^{''} + p_1\, g_{K2}^{'} + p_2\, g_{K2})(x)|_{x=0} = y_2(x)|_{x=0} - K(y_2^{''} + p_1 y_2^{'} + p_2 y_2)(x)|_{x=0} +$$
$$+\lambda\left\{\upsilon(x)|_{x=0} - K(\upsilon^{''} + p_1\upsilon^{'} + p_2\upsilon)(x)|_{x=0}\right\} = y_2(x)|_{x=0} = 0,$$

так как функция $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\upsilon(x)|_{x=0} - K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)|_{x=0} = 0$.

2-условие.

$$\tfrac{d}{dx} g_{K2}(x)\big|_{x=0} - \tfrac{d}{dx} K\,(g_{K2}^{''} + p_1\, g_{K2}^{'} + p_2\, g_{K2})(x)\Big|_{x=0} = \tfrac{d}{dx} y_2(x)\big|_{x=0} - \tfrac{d}{dx} K\,(y_2^{''} + p_1\, y_2^{'} + p_2\, y_2)(x)|_{x=0} +$$
$$+\lambda\{\frac{d}{dx}\upsilon(x)\Big|_{x=0} - \frac{d}{dx} K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)\Big|_{x=0}\} = \frac{d}{dx} y_2(x)\Big|_{x=0} = 1,$$

так как функция $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\frac{d}{dx}\upsilon(x)\big|_{x=0} - \frac{d}{dx} K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)|_{x=0} = 0$.

3-условие.

$$[g_{K2}(x)]_c - [K\,(g_{K2}^{''} + p_1\, g_{K2}^{'} + p_2\, g_{K2})(x)]_c = [y_2(x)]_c - [K\,(y_2^{''} + p_1\, y_2^{'} + p_2\, y_2)(x)]_c +$$
$$\lambda\left\{[\upsilon(x)]_c - [K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)]_c\right\} = 0,$$

так как функция $y_2(x)$ является непрерывным, а также решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $[\upsilon(x)]_c -$

$- \ [K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)]_c = \ 0.$

4-условие.

$\left[\frac{d}{dx} g_{K2}(x)\right]_c - \left[\frac{d}{dx} K\,(g_{K2}^{''} + p_1\,g_{K2}^{'} + p_2\,g_{K2})(x)\right]_c = \left[\frac{d}{dx} y_2(x)\right]_c - \left[\frac{d}{dx} K\,(y_2^{''} + p_1\,y_2^{'} + p_2\,y_2)(x)\right]_c +$

$$+\lambda\left\{\left[\frac{d}{dx}\upsilon(x)\right]_c - \ [\frac{d}{dx}K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)\right]_c\right\} = 0,$$

так как функция $y_2(x)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, а также ее производная первого порядка непрерывно и справедливо соотношение $\left[\frac{d}{dx}\upsilon(x)\right]_c - \ [\frac{d}{dx}K\,(\upsilon^{''} + p_1\,\upsilon^{'} + p_2\,\upsilon)(x)\Big]_c = \ 0.$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Функция $g_{K3}(x,\,\lambda)$ является решением следующей краевой задачи:*

$$g_{K3}^{''}(x) + p_1(x)\,g_{K3}^{'}(x) + p_2(x)\,g_{K3}(x) - \lambda\,g_{K3}(x) = \ 0,\ 0 < x < c,\ c < x < 1,$$

$$g_{K3}(x)|_{x=0} \ - \ K\,(g_{K3}^{''} + p_1\,g_{K3}^{'} + p_2\,g_{K3})(x)|_{x=0} = \ 0,$$

$$\frac{d}{dx} g_{K3}(x)\bigg|_{x=0} - \ \frac{d}{dx}K\,(g_{K3}^{''} + p_1\,g_{K3}^{'} + p_2\,g_{K3})(x)\bigg|_{x=0} = \ 0,$$

$$[g_{K3}(x)]_c \ - \ [K\,(g_{K3}^{''} + p_1\,g_{K3}^{'} + p_2\,g_{K3})(x)]_c = \ 1,$$

$$\left[\frac{d}{dx} g_{K3}(x)\right]_c - \ \left[\frac{d}{dx}K\,(g_{K3}^{''} + p_1\,g_{K3}^{'} + p_2\,g_{K3})(x)\right]_c = \ 0.$$

Доказательство. Соотношение $g_{K3}(x,\,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1}\,\Big(k_t^{'}(x,\,c) - p_1(c)k(x,\,c)\Big)$ можно переписать в виде $g_{K3}(x,\,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1}\,\Big(k_t^{'}(x,\,c) - p_1(c)k(x,\,c)\Big) = (L_K - \lambda I + \lambda I)(L_K - \lambda I)^{-1}\,\Big(k_t^{'}(x,\,c) - p_1(c)k(x,\,c)\Big) = k_t^{'}(x,\,c) - p_1(c)k(x,\,c) + \lambda(L_K - \lambda I)^{-1}\,\Big(k_t^{'}(x,\,c) - \ p_1(c)k(x,\,c)\Big)$.

Обозначим $(L_K - \lambda I)^{-1}\,\Big(k_t^{'}(x,\,c) - p_1(c)k(x,\,c)\Big) = z(x)$ и подействуем на данное соотношение слева оператором $(L_K - \lambda I)$, то получим

$$z^{''}(x) + p_1(x)\,z^{'}(x) + p_2(x)\,z(x) - \lambda\,z(x) = \ k_t^{'}(x,\,c) - p_1(c)k(x,\,c)\,,$$

$$z(x)|_{x=0} \ - \ K\,(z^{''} + p_1\,z^{'} + p_2\,z)(x)|_{x=0} = \ 0,$$

$$\frac{d}{dx} z(x)\bigg|_{x=0} - \ \frac{d}{dx}K\,(z^{''} + p_1\,z^{'} + p_2\,z)(x)\bigg|_{x=0} = \ 0,$$

$$[z(x)]_c \ - \ [K\,(z^{''} + p_1\,z^{'} + p_2\,z)(x)]_c = \ 0,$$

$$\left[\frac{d}{dx} z(x)\right]_c - \ [\frac{d}{dx}K\,(z^{''} + p_1\,z^{'} + p_2\,z)(x)\Big]_c = \ 0.$$

Если на соотношение $g_{K3}(x,\,\lambda) = \ k_t^{'}(x,\,c) - \ p_1(c)k(x,\,c) + \lambda z(x)$ подействовать слева через $(l - \lambda I)$, то функция $g_{K3}(x,\,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению: $g_{K3}^{''}(x) + p_1(x)\,g_{K3}^{'}(x) + p_2(x)\,g_{K3}(x) - \lambda\,g_{K3}(x) = k_{txx}^{'''}(x,\,c) + p_1(x)\,k_{tx}^{''}(x,\,c) + p_2(x)\,k_t^{'}(x,\,c) -$

$-\lambda\,k_t^{'}(x,\,c) - p_1(c)\Big\{k_{xx}^{''}(x,\,c) + p_1(x)k_x^{'}(x,\,c) + p_2(x)k(x,\,c) - \lambda\,k(x,\,c)\Big\} + \lambda k_t^{'}(x,\,c) - \lambda p_1(c)k(x,\,c) = 0,$

так как функции $k_t'(x,\,c)$ и $k(x,\,c)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Теперь проверим справедливость краевых условий:

1-условие.

$g_{K3}(x)|_{x=0} - K\,(g_{K3}'' + p_1\,g_{K3}' + p_2\,g_{K3})(x)|_{x=0} = k_t'(x,\,c)|_{x=0} - p_1(c)k(x,\,c)|_{x=0} - K(k_{txx}''' + p_1 k_{tx}'' + {} + p_2 k_t')(x,\,c)|_{x=0} + p_1(c)K(k_{xx}'' + p_1 k_x' + p_2 k)(x,\,c)|_{x=0} + \lambda\left\{z(x)|_{x=0} - K(z'' + p_1 z' + p_2 z(x)|_{x=0}\right\} = {} = 0,$

так как функции $k_t'(x,\,c)$ и $k(x,\,c)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $z(x)|_{x=0} - {} - K\,(z'' + p_1\,z' + p_2\,z)(x)|_{x=0} = 0$, а также учены, что при $t > x$ значения $k(x,\,t) = 0$, $k_t'(x,\,t) = 0$.

2-условие.

$\frac{d}{dx}g_{K3}(x)\Big|_{x=0} - \frac{d}{dx}K\,(g_{K3}'' + p_1\,g_{K3}' + p_2\,g_{K3})(x)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}k_t'(x,\,c)\Big|_{x=0} - \frac{d}{dx}\,p_1\,k(x,\,c) - \frac{d}{dx}\,K(k_{txx}''' + p_1 k_{tx}'' + p_2 k_t')(x,\,c)|_{x=0} + \frac{d}{dx}p_1(c)K(k_{xx}'' + p_1 k_x' + p_2 k)(x,\,c)|_{x=0} +$

$$+\lambda\{\frac{d}{dx}z(x)\Big|_{x=0} - \frac{d}{dx}K\,(z'' + p_1\,z' + p_2\,z)(x)\Big|_{x=0}\} = 0,$$

так как функции $k_t'(x,\,c)$ и $k(x,\,c)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\frac{d}{dx}z(x)|_{x=0} - {} - \frac{d}{dx}K\,(z'' + p_1\,z' + p_2\,z)(x)|_{x=0} = 0$, а также учены, что при $t > x$ значения $\frac{d}{dx}k_t'(x,\,c) = {} = 0$, $\frac{d}{dx}p_1(c)k(x,\,c) = 0$.

3-условие.

$[g_{K3}(x)]_c - [K\,(g_{K3}'' + p_1\,g_{K3}' + p_2\,g_{K3})(x)]_c = [k_t'(x,\,c)]_c - [p_1 k(x,\,c)]_c - [K\,(k_{txx}''' + p_1 k_{tx}'' + p_2 k_t')(x,\,c)]_c +$

$$+[K(k_{xx}'' + p_1 k_x' + p_2 k)(x,\,c)]_c + \lambda\left\{[z(x)]_c - [K\,(z'' + p_1\,z' + p_2\,z)(x)]_c\right\} = 1,$$

так как функции $k_t'(x,\,c)$ и $k(x,\,c)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $[z(x)]_c - {} - [K\,(z'' + p_1\,z' + p_2\,z)(x)]_c = 0$, а также учены, что значения $[k_t'(x,\,t)]_c = 1$, $[k(x,\,c)]_c = 0$.

4-условие.

$\left[\frac{d}{dx}g_{K3}(x)\right]_c - \left[\frac{d}{dx}K\,(g_{K3}'' + p_1\,g_{K3}' + p_2\,g_{K3})(x)\right]_c = \left[\frac{d}{dx}k_t'(x,\,c)\right]_c - [\frac{d}{dx}p_1(c)k(x,\,c)] + {} + \left[\frac{d}{dx}K\,(k_{txx}''' + p_1\,k_{tx}'' + p_2\,k_t')(x,\,c)p_1(c)\right]_c + \lambda\left\{\left[\frac{d}{dx}z(x)\right]_c - [\frac{d}{dx}K\,(z'' + p_1\,z' + p_2\,z)(x)\Big]_c\right\} = 0,$

так как функции $k_t'(x,\,c)$ и $k(x,\,c)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\frac{d}{dx}[z(x)]_c - {} - [\frac{d}{dx}K\,(z'' + p_1\,z' + p_2\,z)(x)]_c = 0$, а также учены, что значения $[k_t'(x,\,t)]_c = 1$, $[k(x,\,c)]_c = 0$.

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Функция $g_{K4}(x,\,\lambda)$ является решением следующей краевой задачи:*

$$g_{K4}''(x) + p_1(x)\,g_{K4}'(x) + p_2(x)\,g_{K4}(x) - \lambda\,g_{K4}(x) = 0,\ 0 < x < c,\ c < x < 1,$$

$$g_{K4}(x)|_{x=0} - K\,(g_{K4}'' + p_1\,g_{K4}' + p_2\,g_{K4})(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}g_{K4}(x)\Big|_{x=0} - \frac{d}{dx}K\,(g_{K4}'' + p_1\,g_{K4}' + p_2\,g_{K4})(x)\Big|_{x=0} = 0,$$

$$[g_{K4}(x)]_c - [K\,(g_{K4}'' + p_1\,g_{K4}' + p_2\,g_{K4})(x)]_c = 0,$$

$$\left[\frac{d}{dx}g_{K4}(x)\right]_c - \left[\frac{d}{dx}K\,(g_{K4}'' + p_1\,g_{K4}' + p_2\,g_{K4})(x)\right]_c = -1.$$

Доказательство. Соотношение $g_{K4}(x,\,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1}\,k(x,\,c)$ можно переписать в виде $g_{K3}(x,\,\lambda) = L_K(L_K - \lambda I)^{-1}\,k(x,\,c) = k(x,\,c) + \lambda(L_K - \lambda I)^{-1}k(x,\,c)$.

Обозначим $(L_K - \lambda I)^{-1}\,k(x,\,c) = q(x)$ и подействуем на данное соотношение слева оператором $(L_K - \lambda I)$, то получим

$$q^{''}(x) + p_1(x)\,q^{'}(x) + p_2(x)\,q(x) - \lambda\,q(x) = \,k(x,\,c),$$

$$q(x)|_{x=0} \,-\, K\,(q^{''} + p_1\,q^{'} + p_2\,q)(x)|_{x=0} = \,0,$$

$$\frac{d}{dx}q(x)\bigg|_{x=0} \,-\, \frac{d}{dx}K\,(q^{''} + p_1\,q^{'} + p_2\,q)(x)\bigg|_{x=0} \,=\, 0,$$

$$[q(x)]_c \,-\, [K\,(q^{''} + p_1\,q^{'} + p_2\,q)(x)]_c = \,0,$$

$$\left[\frac{d}{dx}q(x)\right]_c \,-\, \left[\frac{d}{dx}K\,(q^{''} + p_1\,q^{'} + p_2\,q)(x)\right]_c \,=\, 0.$$

Если на соотношение $g_{K4}(x,\,\lambda) = k(x,\,c) + \lambda q(x)$ подействовать слева через $(l - \lambda I)$, то функция $g_{K4}(x,\,\lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$g^{''}_{K4}(x) + p_1(x)\,g^{'}_{K4}(x) + p_2(x)\,g_{K4}(x) - \lambda\,g_{K4}(x) = k^{''}_{xx}(x,\,c) + p_1(x)\,k^{'}_x(x,\,c) + p_2(x)\,k(x,\,c) -$$

$$-\lambda\,k(x,\,c) + \lambda\left\{q^{''}(x) + p_1(x)k^{'}(x) + p_2(x)q(x) - \lambda\,q(x)\right\} = -\lambda k(x,\,c) + \lambda k(x,\,c) = 0,$$

так как функция $k(x,\,c)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Теперь проверим справедливость краевых условий:

1-условие.

$g_{K4}(x)|_{x=0} - K\,(g^{''}_{K4} + p_1\,g^{'}_{K4} + p_2\,g_{K4})(x)|_{x=0} = k(x,\,c)|_{x=0} - K(k^{''}_{xx} + p_1 k^{'}_x + p_2 k(x,\,c)|_{x=0} +$
$+\,\lambda\left\{q(x)|_{x=0} - K(q^{''} + p_1 q^{'} + p_2 q(x)|_{x=0}\right\} = 0,$

так как функция $k(x,\,c)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $q(x)|_{x=0} - K\,(q^{''} + p_1\,q^{'} + p_2\,q)(x)|_{x=0} = \,0$, а также учтено, что $k(x,\,c)|_{x=0} = 0$.

2-условие.

$\frac{d}{dx}g_{K4}(x)\big|_{x=0} - \frac{d}{dx}K\,(g^{''}_{K4} + p_1\,g^{'}_{K4} + p_2\,g_{K4})(x)\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}k(x,\,c)\big|_{x=0} - \frac{d}{dx}\,K(k^{''}_{xx} + p_1 k^{'}_x + p_2 k(x,\,c)|_{x=0} +$

$$+\lambda\{\,\frac{d}{dx}q(x)\bigg|_{x=0} \,-\, \frac{d}{dx}K\,(q^{''} + p_1\,q^{'} + p_2\,q)(x)\bigg|_{x=0}\} = 0,$$

так как функция $k(x,\,c)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\frac{d}{dx}q(x)\big|_{x=0} - \frac{d}{dx}K\,(q^{''} + {} + p_1 q^{'} + p_2\,q)(x)|_{x=0} = \,0$, а также учтено, что $\frac{d}{dx}k(x,\,c)|_{x=0} = 0$.

3-условие.

$[g_{K4}(x)]_c \,-\, [K\,(g^{''}_{K4} + p_1\,g^{'}_{K4} + p_2\,g_{K4})(x)]_c = [k(x,\,c)]_c \,-\, [K\,(k^{''}_{xx} + p_1 k^{'}_x + p_2 k)(x,\,c)]_c +$

$$+\lambda\left\{[q(x)]_c \,-\, [K\,(q^{''} + p_1\,q^{'} + p_2\,q)(x)]_c\right\} = \,0,$$

так как функция $k(x,\,c)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $[q(x)]_c - [K\,(q^{''} + p_1\, q^{'} + + p_2\, q)(x)]_c = 0$, а также учтено, что $[k(x,\, c)]_c = 0$.

4-условие.
$\left[\frac{d}{dx} g_{K4}(x)\right]_c - \left[\frac{d}{dx} K\,(g^{''}_{K4} + p_1\, g^{'}_{K4} + p_2\, g_{K4})(x)\right]_c = \left[\frac{d}{dx} k(x,\, c)\right]_c -$
$+ \left[\frac{d}{dx} K\,(k^{''}_{xx} + p_1\, k^{'}_x + p_2\, k)(x,\, c)\right]_c + \lambda\left\{\left[\frac{d}{dx} q(x)\right]_c - \left[\frac{d}{dx} K\,(q^{''} + p_1\, q^{'} + p_2\, q)(x)\right]_c\right\} = -1,$
так как функция $k(x,\, c)$ является решением однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и справедливо соотношение $\left[\frac{d}{dx} q(x)\right]_c - [\frac{d}{dx} K\,(q^{''} + p_1\, q^{'} + p_2\, q)(x)]_c = 0$. а также учтено, что $[\frac{d}{dx} k(x,\, c)]_c = -1$.

Лемма 8 доказана.

Доказательства теоремы 10. Докажем, что функция

$$W(x,\, \lambda) = \widetilde{g_0}(x,\, \lambda) + \alpha\, g_{K1}(x,\, \lambda) + \beta\, g_{K2}(x,\, \lambda) + \tag{59}$$

$$+ \begin{cases} 0, & \text{если x<c;} \\ g_{K3}(x,\, \lambda)\widetilde{\alpha}_c - g_{K4}(x,\, \lambda)\widetilde{\beta}_c, & \text{если x>c.} \end{cases}$$

является решением следующей задачи:

$$W^{''}(x) + p_1(x) W^{'}(x) + p_2 W(x) - \lambda W(x) = f(x),\, 0 < x < ,\, c < x < 1 \tag{60}$$

$$W(x)|_{x=0} - K(W^{''} + p_1 W^{'} + p_2 W)(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx} W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx} K(W^{''} + p_1 W^{'} + p_2 W)(x)|_{x=0} = 0. \tag{61}$$

$$[W(x)]_c - [K(W^{''} + p_1 W^{'} + p_2 W)(x)]_c = 0,$$

$$[\frac{d}{dx} W(x)]_c - [\frac{d}{dx} K(W^{''} + p_1 W^{'} + p_2 W)(x)]_c = 0.$$

Вспоминая леммы 4-8, легко заметить, что функция $W(x,\, \lambda)$ из формулы (59) удовлетворяет требуемому дифференциальному соотношению (60).

Остается проверить справедливость краевых условий.

1-условие.
$W(x)|_{x=0} - K(W^{''} + p_1 W^{'} + p_2 W)(x)|_{x=0} = \widetilde{g_0}(x)|_{x=0} - K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g_0})(x)|_{x=0} +$
$+ \alpha\left\{g_{K1}(x)|_{x=0} - K\,(g^{''}_{K1} + p_1\, g^{'}_{K1} + p_2\, g_{K1})(x)|_{x=0}\right\} + \beta\{g_{K1}(x)|_{x=0} - K\,(g^{''}_{K1} + p_1\, g^{'}_{K1} +$
$+ p_2\, g_{K1})(x)|_{x=0}\} = -K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g_0})(x)|_{x=0} + K L_0 \widetilde{g_0}(x,\, \lambda)|_{x=0} = -K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g_0})(x)|_{x=0} +$
$+ K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g_0})(x)|_{x=0} = 0,$
здесь учтены (1)-ое соотношение из условий задачи Коши леммы 4, а также (1)-ые соотношения из условий краевых задач леммы 5, 6.

2-условие.
$\frac{d}{dx} W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx} K(W^{''} + p_1 W^{'} + p_2 W)(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx} \widetilde{g_0}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx} K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g_0})(x)|_{x=0} +$
$+ \alpha\left\{\frac{d}{dx} g_{K1}(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx} K\,(g^{''}_{K1} + p_1\, g^{'}_{K1} + p_2\, g_{K1})(x)|_{x=0}\right\} + \beta\{\frac{d}{dx} g_{K1}(x)|_{x=0} - K\, \frac{d}{dx}(g^{''}_{K1} + p_1\, g^{'}_{K1} +$
$+ p_2\, g_{K1})(x)|_{x=0}\} = -\frac{d}{dx} K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g_0})(x)|_{x=0} + \frac{d}{dx} K L_0 \widetilde{g_0}(x,\, \lambda)|_{x=0} = -\frac{d}{dx} K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} +$
$+ p_2 \widetilde{g_0})(x)|_{x=0} + \frac{d}{dx} K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g_0})(x)|_{x=0} = 0,$
здесь учтены (2)-ое соотношение из условий задачи Коши леммы 4, а также (2)-ые соотношения из условий краевых задач леммы 5, 6.

3-условие.
$[W(x)]_c - [K(W^{''} + p_1 W^{'} + p_2 W)(x)]_c = [\widetilde{g_0}(x)]_c - [K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g_0})(x)]_c + \alpha\{[g_{K1}(x)]_c - [K\,(g^{''}_{K1} +$

$p_1\, g^{'}_{K1} + p_2\, g_{K1})(x)]_c\} + \beta\{[g_{K2}(x)|_{x=0} - K\,(g^{''}_{K2} + p_1\, g^{'}_{K2} + p_2 g_{K2})(x)]_c\} + \widetilde{\alpha}\{[g_{K3}(x)]_c - [K(g^{''}_{K3} +$
$p_1\, g^{'}_{K3} + p_2\, g_{K3})(x)]_c\} - \widetilde{\beta}\{[g_{K4}(x)]_c - [K(g^{''}_{K4} + p_1\, g^{'}_{K4} +$
$+ p_2\, g_{K4})(x)]_c\} = -[K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g}_0)(x)]_c + [K L_0 \widetilde{g}_0(x,\, \lambda)]_c = -[K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g}_0)(x)]_c +$
$+ [K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g}_0)(x)]_c = 0,$
здесь учтены (3)-ье соотношение из условий задачи Коши леммы 4, а также (3)-ее соотношения из условий краевых задач леммы 5-8.

4-условие.
$[\frac{d}{dx}W(x)]_{x=0} - [\frac{d}{dx}K(W^{''} + p_1 W^{'} + p_2 W)(x)|_{x=0} = [\frac{d}{dx}\widetilde{g}_0(x)]_c - [\frac{d}{dx}K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g}_0)(x)]_c +$
$+ \alpha[\left\{\frac{d}{dx}g_{K1}(x)]_c - [\frac{d}{dx}K\,(g^{''}_{K1} + p_1\, g^{'}_{K1} + p_2\, g_{K1})(x)]_c\right\} + \beta[\{\frac{d}{dx}g_{K2}(x)]_c - [K\,\frac{d}{dx}(g^{''}_{K2} + p_1\, g^{'}_{K2} +$
$p_2\, g_{K2})(x)]_c\} + \widetilde{\alpha}[\{[g_{K3}(x)]_c - [K(g^{''}_{K3} + p_1\, g^{'}_{K3} + p_2\, g_{K3})(x)]_c\} - \widetilde{\beta}\{[g_{K4}(x)] - [K(g^{''}_{K4} + p_1\, g^{'}_{K4} +$
$p_2\, g_{K4})(x)]_c\} = -[\frac{d}{dx}K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g}_0)(x)]_c + [\frac{d}{dx}K L_0 \widetilde{g}_0(x,\, \lambda)]_c = -[\frac{d}{dx}K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g}_0)(x)]_c +$
$+ [\frac{d}{dx}K(\widetilde{g^{''}_0} + p_1 \widetilde{g^{'}_0} + p_2 \widetilde{g}_0)(x)]_c = 0,$
здесь учтены (4)-ое соотношение из условий задачи Коши леммы 4, а также (4)-ые соотношения из условий краевых задач леммы 5-8.

Список литературы

[1] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., Наука. 1969. 528 стр.

[2] Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О. О регулярных задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Диф.уравнения. 1981. т.17, №5. с.873-885.

[3] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения // Диф.уравнеия. 1981.т.17, №5, с.1105-1121.

[4] Павлов Б.С. Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат.науки, т.42, №6(258), 1987. с.99-131

B.E. Kanguzhin, D.B. Nurakhmetov, Correct boundary value problems for 2-order in nonhomogeneous differential equation with variable coefficients.

The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2010, № 0(0), 1-17

In this paper discussed correct boundary value problems for 2-order in nonhomogeneous differential equation with variable coefficients in a finite interval. Then consider the case of a punctured a finite interval. Formulas are given data resolvent boundary value problems.

Б.Е. Кангужин, Д.Б. Нурахметов, Айнымалы коэффициентті екінші ретті біртектес емес дифференциалдық теңдеулер үшін корректілі шекаралық есептер.

ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы. 2010, № 0(0), 1-17

Бұл жұмыста кесіндідегі айнымалы коэффициентті екінші ретті біртектес емес дифференциалдық теңдеулер үшін корректі шекаралық есептердің толық баяндамасы берілген. Содан кейін олардың ойылған кесіндідегі жағдайы қарастырылған. Шекаралық есептердің резольвенталарының формуласы келтірілген 4.