Applied Partial Differential Equations

Chenghao Dong

October 28, 2023

CONTENTS

1 Introduction

1.1 Notations for Multivariable Derivatives

Definition 1.1.1. 偏导数的多重下标 ***(multi-index)***
记 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}_0{}^n$ 称为偏导数的多重下标；定义该下标的**长度** ***(length)*** 为 $|\boldsymbol{\alpha}| = a_1 + \cdots + a_n$，阶乘为 $\boldsymbol{\alpha}! = a_1! \cdots a_2!$；特别地，记 $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$。于是有以下算符：

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} \ := \ \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \ := \ \partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n} \ := \ \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}$$

注意有以下几种常见的表达：$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\boldsymbol{k}} \boldsymbol{D^{\alpha} u}$ 与 $\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq \boldsymbol{k}} \boldsymbol{D^{\alpha} u}$ 分别表示函数 u 的所有 k 阶偏导项，与 u 的所有阶数小于 k 的偏导项。

Remark $\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\boldsymbol{k}} \boldsymbol{D^{\alpha} u}$ 有总计不超过 $\binom{n+k-1}{k}$ 项，即为 $|\boldsymbol{\alpha}| = k$ 的非负整数解个数；$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq \boldsymbol{k}} \boldsymbol{D^{\alpha} u}$ 有总计不超过 $\binom{n+k}{k}$ 项。

Theorem 1.1.1. 多项式定理（*multinomial theorem*） 对于多元函数自变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，与多重下标 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$ 有：

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} \frac{k!}{\boldsymbol{\alpha}!} \cdot \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

Theorem 1.1.2. 多元函数的泰勒展开（*multivariable taylor's theorem*）
记函数 $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 为开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的 $(k+1)$ 阶连续可微函数，即 $f \in C^{k+1}(\Omega)$，则对 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 与充分小的 $\Delta\boldsymbol{x}$ s.t. $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} \in \Omega$，有：

$$f(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq k} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\alpha}!} \Delta\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + R_{x,k}(\Delta\boldsymbol{x})$$

其中拉格朗日余项为：

$$R_{x,k}(\Delta\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k+1} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(x+c)}{\boldsymbol{\alpha}!} \Delta\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{for some } c \in (0,1)$$

特别地，如果满足 $\Delta\boldsymbol{x} = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n)$ s.t. $\Delta x_1 = \cdots = \Delta x_n = \Delta x$，则 $R_{x,k}(\Delta\boldsymbol{x}) = O\left(\Delta x^{k+1}\right)$

Theorem 1.1.3. 多元函数的散度定理（*divergence theorem*）
记 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的由 $\partial\Omega$ 围成的有界连通区域，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 $\partial\Omega$ 上的单位法向量。若矢量函数 $\boldsymbol{v}$ 在闭区域 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 上连续，在 Ω 内有一阶连续偏导数，则：

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} d\boldsymbol{S}$$

1.2 Classification of PDEs

偏微分方程的分类在很大程度上决定了解法的选则。在本课程中，我们将主要了解以下几种主要的 PDE 形式；且在无特别说明的情况下，我们默认仅考虑 (至多) 二元二阶 PDE（PDE 的阶数是指其含有的最高阶导数的阶数）且认为研究的问题中涉及的函数（包括系数函数）都足够光滑：

Definition 1.2.1. 线性偏微分方程 ***(linear pdes)***
k 阶线性偏微分方程的一般形式如下：

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le k} A_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})\, D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

二元二阶线性 PDE 的一般形式如下：

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f(x, y)$$

其中 $A(x, y) \sim F(x, y)$ 是关于自变量的函数。线性 *PDE* 的特征是等式左侧的算子为线性算子。当 *PDE* 的边界条件与初值条件均为线性条件时（不涉及因变量的乘法或其他复杂运算），称这个问题整体为线性问题。所有其他非线性的 PDE 统称为 *non-linear*。

Definition 1.2.2. 拟线性偏微分方程 ***(semilinear pdes)***
当最高阶导数的部分为线性时，称此类 PDE 为拟线性（注意一般的拟线性仍然属于非线性）。k 阶拟线性偏微分方程的一般形式如下：

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} A_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})\, D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) = f\left(D^{\boldsymbol{\beta}} u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\right) \quad \text{where} \quad |\boldsymbol{\beta}| < k$$

二元二阶拟线性 PDE 的一般形式如下：

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = f\left(u_x, u_y, u, x, y\right)$$

Definition 1.2.3. 准线性偏微分方程 ***(quasilinear pdes)***
当 m 阶导数前的系数只包含自变量与更低阶导数时，称此类 PDE 为准线性（显然一般的准线性也属于非线性）。k 阶准线性偏微分方程的一般形式如下：

$$\exists\, m \le k \text{ s.t. } : \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} A_{\boldsymbol{\alpha}}\left(D^{\boldsymbol{\beta}} u, \boldsymbol{x}\right) D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) = f\left(D^{\boldsymbol{\gamma}} u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\right)$$

其中 $|\boldsymbol{\beta}| < m \wedge |\boldsymbol{\gamma}| \ne m$。二元二阶对一阶导数的准线性 PDE 一般形式如下：

$$D(u, x, y)\, u_x + E(u, x, y)\, u_y = f\left(u_{xx}, u_{yy}, u, x, y\right)$$

对二阶导数的准线性 PDE 一般形式如下：

$$\begin{aligned} A\left(u_x, u_y, u, x, y\right) u_{xx} + B\left(u_x, u_y, u, x, y\right) u_{xy} \\ + C\left(u_x, u_y, u, x, y\right) u_{yy} = f\left(u_x, u_y, u, x, y\right) \end{aligned}$$

2 Symmetry and Similarity Solutions

2.1 Symmetry Transformations

Definition 2.1.1. 对称变换（*symmetry transformations*）
仅考虑二元函数 $u(x,t)$ 的偏微分方程 $D_{(x,t)}\left[u(x,t)\right]=\phi(x,t)$ ，$\forall(x,t)\in\Omega$，D 为一个微分算子。如果存在一组映射（或变量替换）：

$$\{x,t,u\}\mapsto\left\{\xi(x,t,u),\tau(x,t,u),w\left(x,t,u(\xi,\tau)\right)\right\}$$

使得 $u(x,y)$ 为此偏微分方程的解能推出 $w(x,y)$ 也为此偏微分方程的解（注意w 可以化为关于替换前变量 (x,t) 的函数）：

$$D_{(x,t)}\left[u(x,t)\right]=\phi(x,t)\Longrightarrow D_{(x,t)}\left[w(x,t)\right]=\phi(x,t)$$

此时称此偏微分方程为对称的（*symmetry*），对应的变量变换称为对称变换（*symmetry transformation*）。注意我们强调，所谓“变换后仍为微分方程的解”指的是对于之前的 (x,t) 导数而言的。然而由于假设了 $u(x,t)$ 为偏微分方程的解，那么显然不论在定义区域内的任何点上都有 $D_{(x,t)}\left[u(x_0,t_0)\right]=\phi(x_0,t_0)$ ，$\forall(x_0,t_0)\in\Omega$；特别地，如果换元后 $(\xi,\tau)\in\Omega$ 则理应有：

$$D_{(\xi,\tau)}\left[u(\xi,\tau)\right]=\phi(\xi,\tau)\ ,\ \forall(\xi,\tau)\in\Omega$$

最后强调一点，$u\mapsto w\left(x,t,u(\xi,\tau)\right)$ 中后面的 $u(\xi,\tau)$ 应视为保持原自变量位置的因变量替换，即新自变量直接在对应原自变量的位置上对其进行替换（$u_x(x,t)=g(x,t)\Longleftrightarrow u_\xi(\xi,\tau)=g(\xi,\tau)$，*resp.* u_t，$u_{xx}\cdots$）。

下面讨论一个简单的例子：

Example 2.1.1. 对称变换的检验 现考虑一组应用于方程 $u_x+t^2u_t=0$ 的简单变换（固定 L），尝试找出使得变换为对称变换的参数 β 取值。

$$\begin{cases} x\mapsto\xi(x,t,u)=x/L \\ t\mapsto\tau(x,t,u)=t/L^\beta \\ u\mapsto w\left(x,t,u(\xi,\tau)\right)=u(\xi,\tau)\end{cases}$$

将变换后的因变量 $w(x,t)=u\left(\xi(x,t),\tau(x,t)\right)$ 带入方程：

$$w_t(x,t)=u_\xi\xi_t+u_\tau\tau_t=u_\tau(\xi,\tau)/L^\beta \tag{1}$$
$$w_x(x,t)=u_\xi\xi_x+u_\tau\tau_x=u_\xi(\xi,\tau)/L \tag{2}$$
$$w_x+t^2w_t=u_\xi(\xi,\tau)/L+\left(t^2/L^\beta\right)u_\tau(\xi,\tau) \tag{3}$$

为确保变换对于微分方程对称，显然我们需要有 $w_x + t^2 w_t = 0$：

$$u_\xi(\xi,\tau)/L + \left(t^2/L^\beta\right) u_\tau(\xi,\tau) = u_\xi(\xi,\tau)/L + \tau^2 L^\beta u_\tau(\xi,\tau) = 0$$

又已知 $u(x,y)$ 为方程的解，在 (ξ,τ) 的位置上考虑原方程确定的关系：

$$u_\xi(\xi,\tau) + \tau^2 u_\tau(\xi,\tau) = 0$$

整合二式：

$$\begin{cases} u_\xi(\xi,\tau)/L + \tau^2 L^\beta u_\tau(\xi,\tau) = 0 \\ u_\xi(\xi,\tau) + \tau^2 u_\tau(\xi,\tau) = 0 \end{cases}$$

不难解得

$$\tau^2 u_\tau(\xi,\tau)\left(-1/L + L^\beta\right) = 0 \Longrightarrow \beta = -1$$

Definition 2.1.2. 伸缩对称变换（*dilation symmetries*） 我们考虑如下一种常见的变换 $\varepsilon \neq 0$：

$$\begin{cases} x \mapsto \xi(x,t,u) = \varepsilon^\alpha \cdot x \\ t \mapsto \tau(x,t,u) = \varepsilon^\beta \cdot t \\ u \mapsto w\left(x,t,u(\xi,\tau)\right) = \varepsilon^\gamma \cdot u(\xi,\tau) \end{cases}$$

此类变换称为伸缩变换。一般我们的一个目标是确定参数 (α,β,γ) 使得该伸缩变换是对于目标方程的对称变换。

到现在为止我们讨论了偏微分方程的对称变换和一类特殊的伸缩变换。我们的实际目的就是利用这一对称性。实际上，利用这些对称变换，我们有机会将偏微分方程转化为常微分方程进行求解从而大大简化求解难度。当然，这种机会是偶然的，但在很多情况下不妨一试。下面我们将讨论如何利用伸缩对称变换达到这一效果。

2.2 Similarity Solutions

在本节中，未经特殊说明，我们讨论的对称变换均默认为对关于 $u(x,t)$ 的偏微分方程的伸缩对称变换，即对 $\varepsilon \neq 0$：

$$\begin{cases} x \mapsto \xi(x,t,u) = \varepsilon^{\alpha} \cdot x \\ t \mapsto \tau(x,t,u) = \varepsilon^{\beta} \cdot t \\ u \mapsto w\left(x,t,u(\xi,\tau)\right) = \varepsilon^{\gamma} \cdot u(\xi,\tau) \end{cases} \tag{$*$}$$

利用对称变换将偏微分方程转化为常微分方程的关键在于其对称性。正如我们在上文讨论的，在对称变换中如果 $u(x,t)$ 是方程的解，则其在变换下的像 $w(x,t) = w\left(x,t,u(\xi,\tau)\right)$ 也是方程的解。那么有没有一种可能这两个解所指代的其实是同一个解呢，也即有没有可能在相似变换的语境下，存在关系：

$$w\left(x,t,u(\xi,\tau)\right) \equiv u(x,t)$$

事实证明这是可能的，所以我们定义：

Theorem 2.2.1. 不变解（*invariant solutions*） 若对于相似变换，若变换前后的两个解 $u(x,t)$ 与 $w(x,t) = w\left(x,t,u(\xi,\tau)\right)$ 保持不变，即

$$w\left(x,t,u(\xi,\tau)\right) \equiv u(x,t)$$

则称其为一个不变解。特别的，对于伸缩变换，我们要求：

$$\varepsilon^{\gamma} \cdot u(\xi,\tau) \equiv u(x,t)$$

下面一条定理解释了我们要寻找这种关系的原因，简单来说，对于伸缩对称变换，如果一个解为不变解则，则其必然可以化简成某种特殊形态。

Theorem 2.2.2. 伸缩对称变换的相似解（*similarity solutions*） 若 $(*)$ 对关于 $u(x,t)$ 的偏微分方程存在不变解 $u(x,t)$，则其一定形如下：

$$u(x,t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta) \quad \text{s.t.} \quad \eta = \frac{x}{t^{\alpha/\beta}}$$

此时称该解为对应方程的相似解，η 为相似变量 *similarity variable*。注意，这种形式的解并不一定总是存在。

Proof 2.2.2 假设存在不变解 $u(x,t)$, 现在考虑一组一对一坐标变换 $(x,t) \mapsto \big(\eta(x,t), \varphi(x,t)\big)$ s.t.

$$\eta(x,t) = \frac{x}{t^{\alpha/\beta}} \qquad \varphi(x,t) = x \cdot t^{(-\alpha+\gamma)/\beta}$$

注意这组坐标变换并不一定是对称变换。同时，不失普遍性，我们假设 $x, t > 0$，且不考虑那些测度为零的不可逆点集。于是在该坐标变换下，不变解 $u(x,t)$ 可以一对一化为某个用 $\big(\eta(x,t), \varphi(x,t)\big)$ 坐标表示的函数，即

$$\exists\ g \ \text{ s.t. } \ u(x,y) = g(\eta, \varphi)$$

我们同时构造另一个函数：$f(\eta, \varphi) = g(\eta, \varphi) \cdot \frac{\varphi}{\eta}$，在伸缩对称变换下，我们有（注意位置不变性）：

$$f\Big(\eta\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right), \varphi\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right)\Big) = g\Big(\eta\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right), \varphi\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right)\Big) \cdot \frac{\varphi\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right)}{\eta\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right)} \qquad (**)$$

同时

$$\eta\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right) = \frac{\varepsilon^{\alpha}x}{\varepsilon^{\alpha} \cdot t^{\alpha/\beta}} = \eta$$

$$\varphi\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right) = \varepsilon^{\alpha}x \cdot \varepsilon^{-\alpha+\gamma} \cdot t^{(-\alpha+\gamma)/\beta} = \varepsilon^{\gamma}\varphi$$

又由解在伸缩对称变换下的不变性：

$$\varepsilon^{\gamma} g\Big(\eta\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right), \varphi\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right)\Big) = \varepsilon^{\gamma} u\left(\varepsilon^{\alpha}x, \varepsilon^{\beta}t\right) = u(x,t) = g(\eta, \varphi)$$

将上述关系代入式 $(**)$ 得到：

$$f\left(\eta\ ,\ \varepsilon^{\gamma}\varphi\right) = \varepsilon^{-\gamma} g(\eta, \varphi) \cdot \varepsilon^{\gamma} = g(\eta, \varphi) \qquad (***)$$

对 $(***)$ 的两边对 ε 求偏导数：

$$f_{\varphi}\left(\eta\ ,\ \varepsilon^{\gamma}\varphi\right) \cdot \varepsilon^{\gamma} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_{\varphi}\left(\eta\ ,\ \varepsilon^{\gamma}\varphi\right) = 0 \quad (\varepsilon \neq 0)$$

任取 $\varepsilon = 1$，式子化为 $f_{\varphi}(\eta\ ,\ \varphi) = 0$，说明 f 实际上与 φ 无关，所以回到我们之前设的式子，化为：

$$f(\eta) = g(\eta, \varphi) \cdot \frac{\varphi}{\eta}$$

其中不难发现 $\varphi/\eta = t^{\gamma/\beta}$，加上设的 $u(x,t) = g(\eta, \varphi)$，我们最终有：

$$u(x,t) = f(\eta) \cdot t^{-\gamma/\beta}$$

2.3 Solving PDEs with Similarity Solutions

考虑二元函数 $u(x,t)$ 的偏微分方程：

$$D_{(x,t)}\left[u(x,t)\right]=\phi(x,t)\ \ ,\ \forall (x,t)\in\Omega$$

利用伸缩对称变换解此问题大致分为三个主要步骤：

STEP 1 写出伸缩变换，利用对称性解出部分参数关系：

$$\begin{cases} x\mapsto \xi(x,t)=\varepsilon^{\alpha}\cdot x \\ t\mapsto \tau(x,t)=\varepsilon^{\beta}\cdot t \\ u\mapsto w(x,t)=\varepsilon^{\gamma}\cdot u\left(\xi(x,t),\tau(x,t)\right) \end{cases} \qquad (*)$$

将 $w(x,t)$ 代入原微分方程使之成立；加上旧解 $u(x,t)$ 在 (ξ,τ) 上的等式，二者联立解出部分参数关系：

$$\begin{cases} D_{(x,t)}\left[w(x,t)\right]=\phi(x,t) \\ D_{(\xi,\tau)}\left[u(\xi,\tau)\right]=\phi(\xi,\tau) \end{cases} \qquad (**)$$

STEP 2 设出相似解与相似变量，并利用上一步中解得的关系进一步化简：

$$u(x,t)=t^{-\gamma/\beta}f(\eta)\quad \text{s.t.}\quad \eta=\frac{x}{t^{\alpha/\beta}}$$

STEP 3 回带第二步中设的解形式进原方程，化为 ODE 求解方程，注意边界条件不一定要在最后代入，详见**Problem Sheet 01, Q2**。

下面给出一个例题，注意当函数 $f(x)$ 的不定积分无解析式时，不妨记其为 $F(x)=\int_a^x f(s)\,ds$。

Example 2.3.1. 相似解法解 PDE 考虑二元函数 $u(x,t)$ 的热方程：

$$u_t=u_{xx}\quad \text{s.t.}\quad u(x,0)=u(\infty,t)=0,\ \ u(0,t)=1$$

STEP 1 写出伸缩变换，利用对称性解出部分参数关系：

$$\begin{cases} x\mapsto \xi(x,t)=\varepsilon^{\alpha}\cdot x \\ t\mapsto \tau(x,t)=\varepsilon^{\beta}\cdot t \\ u\mapsto w(x,t)=\varepsilon^{\gamma}\cdot u\left(\xi(x,t),\tau(x,t)\right) \end{cases} \qquad (*)$$

将 $w(x,t)$ 带入原微分方程使之成立，加上旧解 $u(x,t)$ 在 (ξ,τ) 上的等式，二者联立解出部分参数关系：

$$\left.\begin{aligned} w_t &= \varepsilon^{\gamma} u_{\tau}\cdot\varepsilon^{\beta} = \varepsilon^{\gamma+\beta}u_{\tau} \\ w_{xx} &= \varepsilon^{\gamma}\left(u_{\xi}\cdot\varepsilon^{\alpha}\right)_x = \varepsilon^{\gamma+2\alpha}u_{\xi\xi} \\ \\ \text{Invariant condition}\quad & w_t = w_{xx} \\ \text{Evaluation } u \text{ at } (\xi,\tau)\quad & u_{\tau} = u_{\xi\xi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

STEP 2 设出相似解与相似变量，并利用上一步中解得的关系进一步化简：

$$u(x,t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta) \quad \text{s.t.} \quad \eta = x/\sqrt{t}$$

STEP 3 回带第二步中设的解形式 $u(x,t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta)$ 进原方程，化为 ODE 求解。首先转化边界条件：

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \ 0^{-\gamma/\beta} f(\infty) = 0 \\ u(\infty,t) &= t^{-\gamma/\beta} f(\infty) = 0 \\ u(0,t) &= t^{-\gamma/\beta} f(0) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f(\infty) &= 0 \\ f(0) &= 1 \\ t^{-\gamma/\beta} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

接着回带设的解形式 $u(x,t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta)$ 进原方程：

$$\left.\begin{aligned} & u_t = -\frac{\gamma}{\beta}\cdot t^{-\gamma/\beta-1} f(\eta) - t^{-\gamma/\beta-3/2}\frac{x}{2} f'(\eta) \\ & u_{xx} = t^{-\gamma/\beta}\left(f'(\eta)\, t^{-1/2}\right)_x = t^{-\gamma/\beta} f''(\eta)\, t^{-1} \\ & \text{Boundary condition}\quad t^{-\gamma/\beta} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f''(\eta) = -\frac{x}{2\sqrt{t}} f'(\eta)$$

又知道 $\frac{x}{\sqrt{t}} = \eta$，故最终方程化为：

$$f''(\eta) = -\frac{\eta}{2} f'(\eta)$$

换元降次解得：$f'(\eta) = C\cdot e^{-\frac{1}{4}\eta^2} \Rightarrow f(\eta) = C\cdot \int_a^{\eta} e^{-\frac{1}{4}s^2} ds$ 最后带入剩下的两个边界条件加简单的换元不难得到最终解为：

$$f(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta/2}^{\infty} e^{-s^2} ds = \operatorname{erfc}\left(\eta/2\right) \Rightarrow u(x,t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

更多例题：Lecture Notes pp.74-76

3 First Order Quasilinear Equations

3.1 Method of Characteristics

我们先考虑简单情况 $a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u)$ ，此时有

$$a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y - c(x,y,u) = \langle a,b,c\rangle\cdot\langle u_x,u_y,-1\rangle = 0$$

即，$\langle a,b,c\rangle\cdot\nabla\Big(u(x,y)-u\Big)=0$，说明矢量场 $\boldsymbol{v}=\langle a,b,c\rangle$ 与曲面 $u=u(x,y)$ 处处相切。我们考虑构造矢量场 $\boldsymbol{v}$ 的矢量面 Σ，它可以用 $\boldsymbol{v}$ 的一簇矢量线表示，引入这些矢量线的参数方程与参数化的初始条件（设未知变量为一个参数）：

$$\begin{cases} x = x(\tau) \ , \ x_0 = x_0(s) \ \text{ if } \tau = 0 \\ y = y(\tau) \ , \ y_0 = y_0(s) \ \text{ if } \tau = 0 \\ u = u(\tau) \ , \ u_0 = u_0(s) \ \text{ if } \tau = 0 \end{cases}$$

由矢量线与 $\boldsymbol{v}=\langle a,b,c\rangle$ 相切，得一阶常微分方程组（特征方程组）：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = a\Big(x(\tau),y(\tau),u(\tau)\Big)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = b\Big(x(\tau),y(\tau),u(\tau)\Big)$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = c\Big(x(\tau),y(\tau),u(\tau)\Big)$$

解出带三个参数的矢量线簇，这些曲线称为 PDE 的特征曲线 characteristic curves 或 积分曲线 integral curves。这些特征曲线在 (x,y) 平面的投影称为特征投影 characteristic projection（可以通过将$x(\tau)$，$y(\tau)$ 消去参数 τ 得到）。然而，在空间中存在无数条特征曲线，如何才能得到我们想要的曲面呢？此时，通过参数化的初始条件，我们可以消去特征曲线留下的积分参数并最终得到 $x(\tau,s)$ ，$y(\tau,s)$ ，$u(\tau,s)$ 为想要的解曲面。在某些时候可以通过消参得到隐式解 $F(x,y,u)=0$ 或显式解 $u=u(x,y)$。可以发现，实际上参数化初始条件也确定了空间内的一条曲线 $\boldsymbol{\gamma}_0(s)=x_0(s)\,\boldsymbol{i}+y_0(s)\,\boldsymbol{j}+u_0(s)\,\boldsymbol{k}$，称为初始曲线 initial curve。

这一方法可以被推广到任意个自变量的同类 PDE

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x},u)\,u_{x_i} = c(\boldsymbol{x},u)$$

$$\text{w.r.t.}\quad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau} = a_i\Big(\boldsymbol{x}(\tau),u(\tau)\Big)\ ,\ x_{i0}=x_{i0}\Big(s_1,\ \cdots,\ s_{n-1}\Big)\ \text{ if } \tau=0$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = c\Big(\boldsymbol{x}(\tau),u(\tau)\Big)\quad,\quad u_0=u_0\Big(s_1,\ \cdots,\ s_{n-1}\Big)\ \text{ if } \tau=0$$

我们再考虑令一种更快（但等价）的方法，同样是考虑

$$a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u)$$

但是这次我们的特征方程组换为不含参数的等价形式

$$\frac{a(x,y,u)}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x,y,u)}{\mathrm{d}y} = \frac{c(x,y,u)}{\mathrm{d}u}$$

这里面含有两个独立的方程，应该能解出两个含参解曲面

$$\begin{cases} f(x,y,u) = c_1 \\ g(x,y,u) = c_2 \end{cases}$$

这两个曲面的交线即为特征曲线 characteristics，然而我们的初始条件只能解出一个参数，不妨设 $c_1 = h(c_2)$（或 $c_2 = h(c_1)$），即：

$$f(x,y,u) = h\Big(g(x,y,u)\Big)$$

带入边界条件解出 $h(t)$ 的表达式即可。下面总结两类方法的步骤：

方法一 ：含参法

$$\boldsymbol{a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u)}$$

STEP 1 列出变量的参数式，并将初始条件参数化 s（可以设任意未知变量为一个独立参数）

$$\begin{cases} x = x(\tau) \;\;,\;\; x_0 = x_0(s) \;\; \text{if } \tau = 0 \\ y = y(\tau) \;\;,\;\; y_0 = y_0(s) \;\; \text{if } \tau = 0 \\ u = u(\tau) \;\;,\;\; u_0 = u_0(s) \;\; \text{if } \tau = 0 \end{cases}$$

STEP 2 解关于参数 τ 的特征方程组，得到含“积分常数”的矢量线簇

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = a\Big(x(\tau), y(\tau), u(\tau)\Big) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = b\Big(x(\tau), y(\tau), u(\tau)\Big) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = c\Big(x(\tau), y(\tau), u(\tau)\Big) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\tau;s) = X(\tau) + c_1(s) \\ y(\tau;s) = Y(\tau) + c_2(s) \\ u(\tau;s) = U(\tau) + c_3(s) \end{cases}$$

STEP 3 回带参数化条件消去积分常数。

方法二 ：直求法

$$\boldsymbol{a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u)}$$

STEP 1 列出变量特征方程组

$$\frac{a(x,y,u)}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x,y,u)}{\mathrm{d}y} = \frac{c(x,y,u)}{\mathrm{d}u}$$

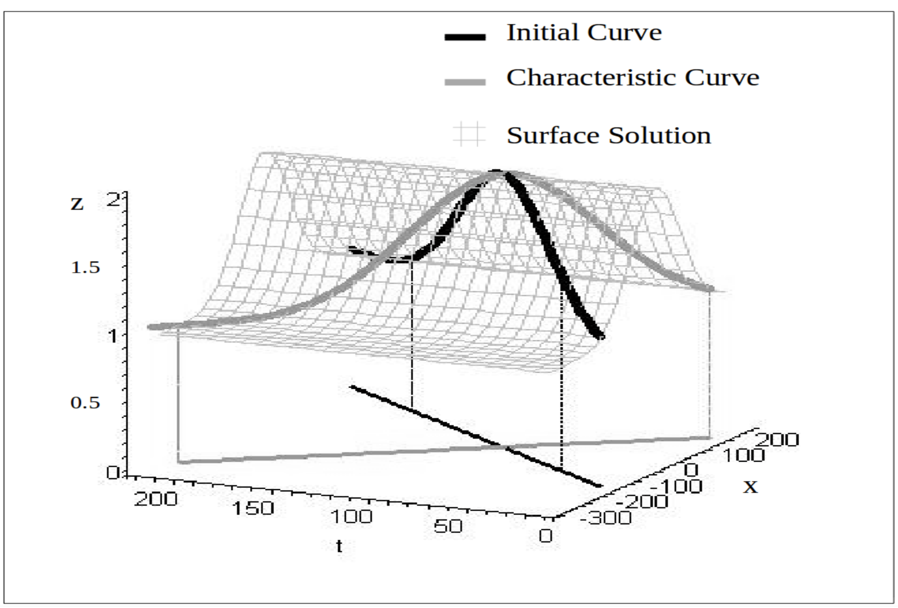
STEP 2 解出两个含参解曲面

$$\begin{cases} f(x,y,u) = c_1 \\ g(x,y,u) = c_2 \end{cases}$$

STEP 3 设 $c_1 = h(c_2)$（或 $c_2 = h(c_1)$），带入初始条件解出 $h(t)$ 的表达式

$$f(x,y,u) = h\Big(g(x,y,u)\Big) \Rightarrow F(x,y,u) = 0$$

下面这张图绘制了 $a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u)$ 问题中特征曲线 characteristic curves，特征投影 characteristic projection 与初始曲线 initial curve（边界条件）的关系：



3.2 Existence and Uniqueness of Solutions

我们考虑解如下的一个方程：

$$u_x + u_y = 1$$

其特征投影为：$y = x + c_1$ on $u = 0$；其解曲面为：$u = \frac{1}{2}(x+y) + F(x-y)$，现在考虑下面三种可能的初始条件：

1） $u(x,-x) = 0$, i.e., $u = 0$ on $y = -x$ 此时得到唯一解 $u = \frac{1}{2}(x+y)$

2） $u(x,x) = 0$, i.e., $u = 0$ on $y = x$ 此时得到 $F(0) = -x$ 解不存在

3） $u(x,x) = x$, i.e., $u = x$ on $y = x$ 此时得到 $u = \frac{1}{2}(x+y) + F(x-y)$ s.t. $\forall F(0) = 0$ 有无数解

一般来说，形如：

$$a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u) \qquad (*)$$

$$\text{w.r.t.}\quad u_0 = U_0(x_0,y_0)\ \text{ if } f(x_0,y_0) = 0$$

或者初值条件符合参数式：

$$\text{w.r.t.}\quad \boldsymbol{\gamma_0}(s) = x_0(s)\,\boldsymbol{i} + y_0(s)\,\boldsymbol{j} + u_0\Big(x_0(s), y_0(s)\Big)\,\boldsymbol{k}$$

的问题 $(**)$，其解有三种可能的情况：

1） 初始投影 $f(x,y)$ 与每条特征投影在交点处不相切 此时微分方程（至少在局部）有唯一解；

2） 初始投影 $f(x,y)$ 与任何一条特征投影在交点处相切 此时微分方程（一般来说）没有解；

3） 属于第二种情况但在初始曲线上满足 $\frac{x_0'(s)}{a(\gamma_0)} = \frac{u_0'(s)}{c(\gamma_0)}$ 此时微分方程有多解。

Definition 3.2.1. 柯西问题与柯西数据（*Cauchy problem and Cauchy data*） 上述问题 $(**)$ 称为柯西问题。定义能使上述微分方程 $(*)$（至少局部）存在唯一解的初值条件称为柯西数据。

Theorem 3.2.1. 柯西问题解的存在性（*Cauchy-Kowalevski*） 考虑初值条件为参数形式的问题 (**)

$$a(x, y, u)\, u_x + b(x, y, u)\, u_y = c(x, y, u)$$

$$\text{w.r.t.}\quad \boldsymbol{\gamma_0}(s) = x_0(s)\, \boldsymbol{i} + y_0(s)\, \boldsymbol{j} + u_0\Big(x_0(s), y_0(s)\Big)\, \boldsymbol{k}$$

若 a, b, c 在 $\boldsymbol{\gamma_0}$ 的某个邻域内解析（无穷可微），则该初值问题在 $\boldsymbol{\gamma_0}$ 的邻域内有唯一解（为 *Cauchy problem*）当且仅当

$$J_0 = \begin{vmatrix} a(\boldsymbol{\gamma_0}) & b(\boldsymbol{\gamma_0}) \\ x_0'(s) & y_0'(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

这等价于初值曲线的切线投影 $\langle x_0'(s), y_0'(s)\rangle$ 与矢量场（或者特征曲线的切线）的投影 $\langle a, b\rangle$ 在交点处不共线。特别地，如果

$$\frac{x_0'(s)}{a(\boldsymbol{\gamma_0})} = \frac{u_0'(s)}{c(\boldsymbol{\gamma_0})}$$

即使不满足上述不等关系，仍可能有多个解。

Part of Proof 3.2.2 我们在 $\boldsymbol{\gamma_0}$ 上考虑 u 的偏导数，有

$$u_0'(s) = u_x \cdot x_0'(s) + u_y \cdot y_0'(s)$$

再由偏微分方程，在边界上本来就有：

$$c(\boldsymbol{\gamma_0}) = u_x \cdot a(\boldsymbol{\gamma_0}) + u_y \cdot b(\boldsymbol{\gamma_0})$$

将他们整理成线性方程组：$\begin{bmatrix} a(\boldsymbol{\gamma_0}) & b(\boldsymbol{\gamma_0}) \\ x_0'(s) & y_0'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\boldsymbol{\gamma_0}) \\ u_0'(s) \end{bmatrix}$

为了确保 u_x 和 u_y 在 $\boldsymbol{\gamma_0}$ 上唯一，需要系数矩阵可逆。当系数矩阵不可逆时，只有 $x_0'(s)/a(\boldsymbol{\gamma_0}) = u_0'(s)/c(\boldsymbol{\gamma_0})$ 可以使方程组能有多个解。同样的推理可以拓宽到 k 阶导数，比如：

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = u_{xx} \cdot x_0'(s) + u_{xy} \cdot y_0'(s)$$

再对 $a(x, y, u)\, u_x + b(x, y, u)\, u_y = c(x, y, u)$ 两边同时取 x 偏导数：

$$(a_x + a_u u_x)\, u_x + a u_{xx} + (b_x + b_u u_x)\, u_y + b u_{yx} = c_x + c_u u_x$$

整理得到：

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = u_{xx} x_0'(s) + u_{xy} y_0'(s)$$

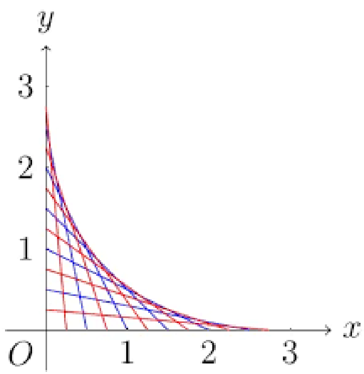
$$(a_x + a_u u_x)\, u_x + a u_{xx} + (b_x + b_u u_x)\, u_y + b u_{yx} = c_x + c_u u_x$$

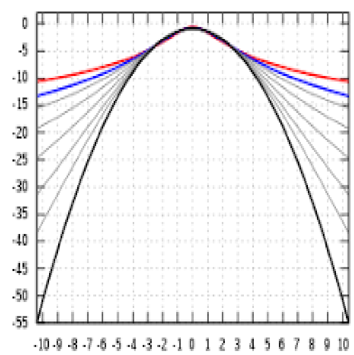
Theorem 3.2.2. Unique evaluation of the solution 最后，如果我们解出了唯一的参数解 $x(s,\tau)$，$y(s,\tau)$，$u(s,\tau)$，我们还可能需要 u 是 x，y 的"函数"，这意味着唯一的 (x,y) 会给出唯一的 u 的值。由于我们可以通过坐标变换 $(s,\tau)\mapsto(x,y)$ 实现 $\tilde{u}(x,y)=u\left(s(x,y),\tau(x,y)\right)=u(s,\tau)$，这意味着我们希望这套坐标变换是可逆的，即

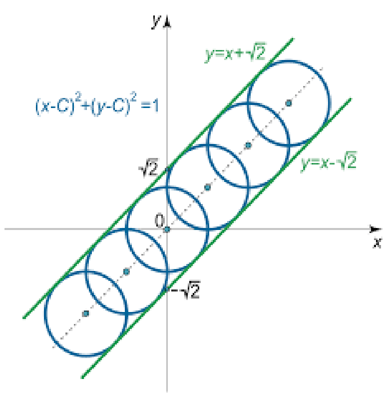
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,\tau)}=\begin{vmatrix}x_\tau & x_s\\ y_\tau & y_s\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & x_s\\ b & y_s\end{vmatrix}\neq 0\ \&\ \infty$$

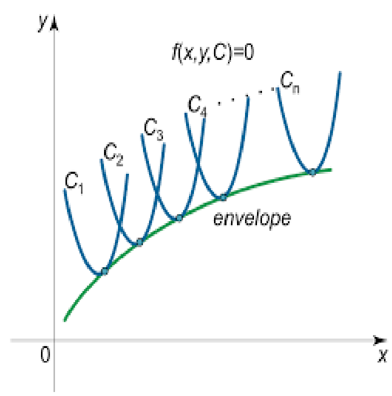
几何上来说，这意味着特征投影不能相交。

下面的图只是关于下一节包络线的可视化，与上文无关。









3.3 Domain of Definition

最后我们考虑 PDE 有合理解的定义域，因为我们的解曲面是由特征线加上初值线决定的，我们只需要考虑他们在自变量平面（$x-y$）内的投影可以覆盖的区域即可。记得我们解出的解曲面的参数方程为：

$$x=X(s,\tau)\ ,\ y=Y(s,\tau)\ ,\ u=U(s,\tau)$$

他们实际上也可以看作是，以 s 为参数的特征线簇

$$c(\tau;s)=X(\tau;s)\,\boldsymbol{i}+Y(\tau;s)\,\boldsymbol{j}+U(\tau;s)\,\boldsymbol{k}$$

通过消除 $x=X(s,\tau)$ ，$y=Y(s,\tau)$ 的参数 τ 得到特征在 xOy 平面上的特征投影簇 $F(x,y;s)=0$，即

$$\left.\begin{array}{r}x=X(s,\tau)\\ y=Y(s,\tau)\end{array}\right\}\Rightarrow F(x,y;s)=0$$

同理，我们通过合并初始曲线 $\boldsymbol{\gamma}_o(s)=X_0(s)\,\boldsymbol{i}+Y_0(s)\,\boldsymbol{j}+U_0(s)\,\boldsymbol{k}$ 的参数方程（消除 s）得到其初始投影，即

$$\left.\begin{array}{r}x=X_0(s)\\ y=Y_0(s)\end{array}\right\}\Rightarrow H_0(x,y)=0$$

接着，我们画出 $H_0(x,y)=0$，与 $F(x,y;s)=0$，并 **(1)** 保留 $F(x,y;s)=0$ 与 $H_0(x,y)=0$ 严格相交的区域（且有时需要删去被 $H_0(x,y)=0$ 截断的区域，保留方向与 τ 增大时特征的方向一致），即满足 thm 3.2.1 的存在唯一解曲面的区域；**(2)** 去除沿特征线方向函数值可能 blow up（tend to infinity）的区域；**(3)** 去除 $F(x,y;s)=0$ 所有可能的相交，即满足 thm 3.2.2 的解曲面 u 为关于 (x,y) 函数的区域。一般这种区域的边界是由曲线簇 $F(x,y;s)=0$ 的包络 envelope*决定的，我们允许保留那些在接触到包络之前不会相交的特征投影所覆盖的区域，从而通过这种方法移除特征投影在可行定义域内可能存在的交点。我们可以通过下面的定理确定包络在 xOy 平面的边界：

Theorem 3.3.1. 包络 Envelope 关于参数 s 的曲线簇 $F(x,y;s)=0$ 在 xOy 平面的包络同时满足下面两个方程，可以通过联立下面两个方程消参 s 得到（除非包络不存在或者是有限个点）：

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{F(x,y;s)=0}\\ \boldsymbol{\partial_s F(x,y;s)=0}\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{E(x,y)=0}$$

若存在，包络线要么和曲线簇中的每根曲线都相切（见 *p.15* 演示图），要么是曲线簇中所有曲线的交点。

使用参数方程寻找柯西问题定义域的步骤

考虑以 s 为参数的特征线簇（其实是解曲面的参数方程）

$$\boldsymbol{c}\left(\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{s}\right)=\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{s}\right)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{s}\right)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{s}\right)\boldsymbol{k}$$

STEP 1 通过消除 $x=X\left(s,\tau\right)$ ，$y=Y\left(s,\tau\right)$ 的参数 τ 得到特征在 xOy 平面上的特征投影簇 $F\left(x,y;s\right)=0$，即

$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\tau}\right)\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\tau}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{s}\right)=\boldsymbol{0}\quad\text{s.t.}\quad a<s<b$$

接着, 绘制出这簇曲线在 s 取端点值 a, b 时的图像, 作为区域的参考边界 1、2。

STEP 2 合并初始曲线 $\boldsymbol{\gamma}_o\left(s\right)=X_0\left(s\right)\boldsymbol{i}+Y_0\left(s\right)\boldsymbol{j}+U_0\left(s\right)\boldsymbol{k}$ 的参数方程（消除 s）得到其初始投影，即

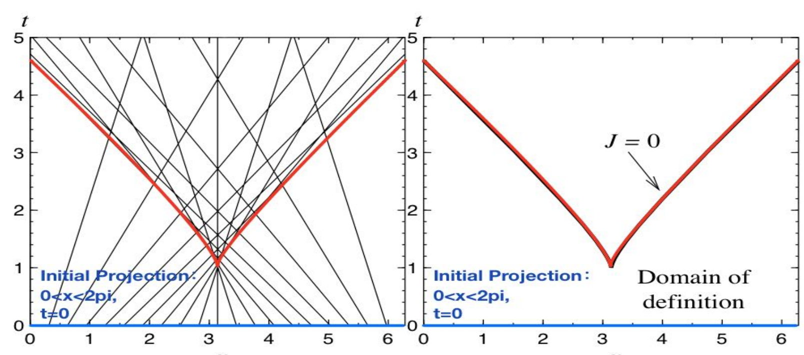
$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X_0}\left(\boldsymbol{s}\right)\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Y_0}\left(\boldsymbol{s}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\boldsymbol{H_0}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\boldsymbol{0}$$

绘制出该曲线作为区域的参考边界 3, 保留特征与之严格相交的区域, 有时需要考虑是否仅保留被初始曲线截断的部分, 方向与 τ 增大时特征的方向一致。

STEP 3 计算曲线簇 $F\left(x,y;s\right)=0$ 的包络

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{s}\right)=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\partial_s F}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{s}\right)=\boldsymbol{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\boldsymbol{0}$$

绘制出该曲线作为区域的参考边界 4，保留那些在接触到包络之前不会相交的特征投影所覆盖的区域。



STEP 4 沿特征线方向考察 u 的极限，去除函数值趋于无穷 blow up 的部分。绘制出参考边界 5。