Numerical Solution of Partial Differential Equations

Chenghao Dong

October 27, 2023

CONTENTS

1 Elements of Function Spaces

1.1 Notations for Multivariable Derivatives

Definition 1.1.1. 偏导数的多重下标 *(multi-index)*
记 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}_0{}^n$ 称为偏导数的多重下标；定义该下标的**长度** **(*length*)** 为 $|\boldsymbol{\alpha}| = a_1 + \cdots + a_n$，阶乘为 $\boldsymbol{\alpha}! = a_1! \cdots a_2!$；特别地，记 $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$。于是有以下算符：

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} := \partial^{\boldsymbol{\alpha}} := \partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n} := \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}$$

注意有以下几种常见的表达：$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\boldsymbol{k}} \boldsymbol{D^{\alpha} u}$ 与 $\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq \boldsymbol{k}} \boldsymbol{D^{\alpha} u}$ 分别表示函数 u 的所有 k 阶偏导项，与 u 的所有阶数小于 k 的偏导项。

Remark $\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\boldsymbol{k}} \boldsymbol{D^{\alpha} u}$ 有总计不超过 $\binom{n+k-1}{k}$ 项，即为 $|\boldsymbol{\alpha}| = k$ 的非负整数解个数；$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq \boldsymbol{k}} \boldsymbol{D^{\alpha} u}$ 有总计不超过 $\binom{n+k}{k}$ 项。

Theorem 1.1.1. 多项式定理（*multinomial theorem*） 对于多元函数自变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，与多重下标 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$ 有：

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} \frac{k!}{\boldsymbol{\alpha}!} \cdot \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

Theorem 1.1.2. 多元函数的泰勒展开（*multivariable taylor's theorem*）
记函数 $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 为开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的 $(k+1)$ 阶连续可微函数，即 $f \in C^{k+1}(\Omega)$，则对 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 与充分小的 $\Delta \boldsymbol{x}$ s.t. $\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x} \in \Omega$，有：

$$f(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq k} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\alpha}!} \Delta \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} + R_{x,k}(\Delta \boldsymbol{x})$$

其中拉格朗日余项为：

$$R_{x,k}(\Delta \boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k+1} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(x+c)}{\boldsymbol{\alpha}!} \Delta \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{for some } c \in (0,1)$$

特别地，如果满足 $\Delta \boldsymbol{x} = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n) \quad \text{s.t.} \quad \Delta x_1 = \cdots = \Delta x_n = \Delta x$，则 $R_{x,k}(\Delta \boldsymbol{x}) = O\left(\Delta x^{k+1}\right)$

Theorem 1.1.3. 多元函数的散度定理（*divergence theorem*）
记 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的由 $\partial\Omega$ 围成的有界连通区域，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 $\partial\Omega$ 上的单位法向量。若矢量函数 $\boldsymbol{v}$ 在闭区域 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 上连续，在 Ω 内有一阶连续偏导数，则：

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} d\boldsymbol{S}$$

1.2 Spaces of Continuous Functions

Definition 1.2.1. 闭包（*closure*） 一个集合 Ω 的闭包是包含其自身的最小闭集合，即包含其自身与该集合所有的聚点（*accumulation point*），记作 $\bar{\Omega}$。

Definition 1.2.2. 完备（*complete*） 一个集合 Ω，若其在某度量下，其中的序列柯西收敛等价于一般收敛，则称该集合为完备集合。完备集合必然为闭集合；完备集合的子集合也完备当且仅当其为闭集合。
Remark $\left(\mathbb{R}^n, d_p\right)$ 均是完备的，包括对 d_∞。

Definition 1.2.3. 紧致（*compact*） 在度量空间的语境下，若一个集合 Ω 的任意序列在良定义度量下均存在收敛子列，且子列极限 $l \in \Omega$，则称该集合紧致。紧致集合必然完备；紧致集合的子集合也紧致当且仅当其为闭集合。
Remark 欧式空间语境下 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界闭集合均是紧致的。

Definition 1.2.4. 连续函数集合 记 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集合，则集合 $C^k(\Omega)$ 定义为在 Ω 上的所有 k 阶连续可微函数，其中 $k \in \mathbb{N}_0$；进一步，若 Ω 有界（*bounded*），则 $C^k(\bar{\Omega})$ 表示在闭集合 $\bar{\Omega}$（Ω 的闭包）上的所有 k 阶连续可微函数。

Theorem 1.2.1. 连续函数空间 记 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集合，则 $C^k(\bar{\Omega})$ 为一个线性空间，且其上有范数（*norm*）定义为：

$$||u||_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega} |D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x})|$$

这表示函数 $u(\boldsymbol{x})$ 的所有 k 阶及以下偏导数绝对值上确界之和。特别地，当 $k = 0$ 时：

$$||u||_{C(\bar{\Omega})} = \max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} |u(\boldsymbol{x})|$$

注意范数意味着其满足三角不等式（*triangle inequality*），$\forall\ k \in \mathbb{R} : ||ku|| = k||u||$ 与 $||u||_{C^k(\bar{\Omega})} = 0$ 当且仅当 $u(\boldsymbol{x}) \equiv 0$。

Definition 1.2.5. 函数的支集（*support*） 记连续函数 $u \in C(\Omega)$，其在 Ω 上的支集为：

$$\text{supp } u = \text{closure of } \{\boldsymbol{x} : u(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$$

也即 Ω 上包含所有 u 的非零取值点的最小闭集；不难证明它也是 Ω 上最小的补集均为 u 零点的闭集。特别定义：

$$C_0^k(\Omega) = \left\{u \in C^k(\Omega) : (\text{supp } u \subset \Omega) \wedge (\text{supp } u \text{ bounded})\right\}$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C_0^k(\Omega)$$

后者仅表示满足 $(\text{supp } u \subset \Omega) \wedge (\text{supp } u \text{ bounded})$ 的无穷可微函数。显然 $\forall\, l < k\ :\ C_0^k(\Omega) \subset C_0^l(\Omega)$ 均成立。

此外还定义：$C_c^k(\Omega) = \left\{u \in C^k(\Omega) : (\text{supp } u \subset \Omega) \wedge (\text{supp } u \text{ compact})\right\}$

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C_c^k(\Omega)$$

若 $u \in C_c^k(\Omega)$，则称函数 u 在 Ω 上紧支撑（*compactly supported*）。

Theorem 1.2.2. $C_0^k(\Omega)$的常见性质
当 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 时，有以下常见性质

1) $(\text{supp } u \text{ bounded}) \Longleftrightarrow (\text{supp } u \text{ compact})$，即 $C_0^k(\Omega)$ 与 $C_c^k(\Omega)$ 等价；
2) 若 Ω 为开集，则 $u \in C_0^k(\Omega) \Rightarrow u(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$，反之不成立；
3) 若 Ω 为开集，则 $u \in C_0^k(\Omega) \Rightarrow \partial_{x_i} u \in C_0^{k-1}(\Omega), \forall x_i$。

Proof theorem 1.2.2，2) 假设 $\exists\, \boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$ s.t. $u(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$，由连续性，存在一个 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $B(\boldsymbol{x}_0, \epsilon_0)$ s.t. $u(\boldsymbol{x}) \neq 0, \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \epsilon_0)$。又由于 $\boldsymbol{x}_0$ 为 Ω 的边界点，由边界点的定义：$\forall\ 0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$，总存在 $\boldsymbol{x}(\epsilon_1) \in B(\boldsymbol{x}_0, \epsilon_1) \cap \Omega$，且 $u\big(\boldsymbol{x}(\epsilon_1)\big) \neq 0$, 因此 $\boldsymbol{x}(\epsilon_1) \in \text{supp } u$。进一步取 $0 < \epsilon_2 < ||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}(\epsilon_1)||_n$ 并重复上述操作，可以得到 $\boldsymbol{x}(\epsilon_2) \in \text{supp } u$ 且 $\boldsymbol{x}(\epsilon_2) \neq \boldsymbol{x}(\epsilon_1)$。

重复上述推导，得到 $\{\boldsymbol{x}(\epsilon_n)\}_{n=1}^\infty$ s.t. $\boldsymbol{x}(\epsilon_n) \to \boldsymbol{x}_0$ in norm $||\cdot||_n$。即 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $\{\boldsymbol{x} : u(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ 的聚点，从而 $\boldsymbol{x}_0 \in \text{supp } u$ (closed) $\subset \Omega$。其中 $\text{supp } u \subset \Omega$ 由 $u \in C_0^k(\Omega)$ 定义自然可得。而 Ω 为开集，必然不包含边界点 $\boldsymbol{x}_0$，即 $\boldsymbol{x}_0 \notin \Omega$，矛盾。

Proof theorem 1.2.2，3) 假设 $u \in C_0^k(\Omega)$ 则将其定义域拓展至全集 $\mathbb{R}^n$，有：$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (\text{supp } u)\ :\ u(\boldsymbol{x}) = 0$，由于 $\mathbb{R}^n \setminus (\text{supp } u)$ 为开集合，对 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (\text{supp } u)$，均存在特定的邻域 $B\big(\boldsymbol{x}, \epsilon(\boldsymbol{x})\big)$ s.t. $u(\boldsymbol{y}) \equiv 0$，$\forall \boldsymbol{y} \in B\big(\boldsymbol{x}, \epsilon(\boldsymbol{x})\big)$，即 u 在该领域上是常数函数。所以：$\partial_{x_i} u(\boldsymbol{y}) \equiv 0, \forall \boldsymbol{y} \in B\big(\boldsymbol{x}, \epsilon(\boldsymbol{x})\big)$ 对任何 x_i 成立。显然 $\boldsymbol{x}$ 不能是集合 $\{\boldsymbol{x}' : \partial_{x_i} u\big(\boldsymbol{x}'\big) \neq 0\}$ 的内点或边界点，因为存在 $B\big(\boldsymbol{x}, \epsilon(\boldsymbol{x})\big)$ 与之无交集。所以 $\boldsymbol{x} \notin \text{supp } \partial_{x_i} u$；$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \big(\text{supp } \partial_{x_i} u\big)$。

综上，$\mathbb{R}^n \setminus (\text{supp } u) \subset \mathbb{R}^n \setminus \big(\text{supp } \partial_{x_i} u\big) \Longrightarrow \text{supp } \partial_{x_i} u \subset \text{supp } u \subset \Omega$，并且显然有界。

1.3 Spaces of Integrable Functions

Theorem 1.3.1. 可积函数空间 对 $\forall\, p \in \mathbb{R}$ s.t. $p \geq 1$，与开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，定义 $\mathcal{L}_p(\Omega) = \{u(\boldsymbol{x}) : \int_\Omega |u|^p d\boldsymbol{x} < \infty\}$ 为其上所有的勒贝格可积函数（*Lebesgue integrable*）。记 $u_1 \overset{a.e.}{=\!=} u_2$ 表示两函数（对勒贝格测度）几乎处处相等，则商集合：$L_p(\Omega) = \left(\mathcal{L}_p(\Omega) / \overset{a.e.}{=\!=}\right)$ 为一个线性空间，且其上有范数（*norm*）定义为：

$$||u||_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}$$

注意范数意味着其满足三角不等式(*triangle inequality*)，$\forall\, k \in \mathbb{R} : ||ku|| = k||u||$ 与 $||u||_{L_p(\Omega)} = 0$ 当且仅当 $u(\boldsymbol{x}) \overset{a.e.}{=\!=} 0$。特别地，当 $p = 2$ 时，有定义在 $L_2(\Omega)$ 上的内积：

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega u(\boldsymbol{x})\, v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$

如果 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 是两个同维矢量函数，且每个分量属于 $L_2(\Omega)$：

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$

那么其自然满足*Cauchy-Schwarz Inequality*：$|(u, v)_{L_2(\Omega)}| \leq ||u||_{L_2(\Omega)} \cdot ||v||_{L_2(\Omega)}$
因此，$L_2(\Omega)$ 为一个希尔伯特空间（*Hilbert Space*）。

下面是对上述定义中几个名词的补充解释：

Definition 1.3.1. 勒贝格零测集（*Lebesgue null set*） 记 m_n 为 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度，则 $N \subset \mathbb{R}^n$ 为（勒贝格）零测集当且仅当 $\forall \epsilon > 0 : \exists$ 可数个开球 $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ s.t.

$$\left(N \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_k\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^\infty m_n(B_k) < \epsilon\right)$$

两函数（对依勒贝格测度）在 ω 上几乎处处相等 $u_1 \overset{a.e.}{=\!=} u_2$ 当且仅当 $\{\boldsymbol{x} \in \Omega : u_1(\boldsymbol{x}) \neq u_2(\boldsymbol{x})\}$ 为零测集。

Definition 1.3.2. 希尔伯特空间 (*Hilbert Space*) 记线性空间$\left(V, (\cdot,\cdot)_X\right)$为一个内积空间，即有良定内积 $(\cdot,\cdot)_X$ 与范数 $||\boldsymbol{v}||_X = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_X}$；若其对于度量 $d_X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||_X$ 完备，则称之为一个希尔伯特空间。换句话说，希尔伯特空间就是有完备（范数）度量的内积空间。

Theorem 1.3.2. 可积函数空间的性质 若勒贝格可测集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 满足 $m_n(\Omega) < \infty$，则

1) $\forall\, 1 \leq q \leq p \leq \infty$: $L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$，证明可见 *Hölder inequality*，略；
2) $\forall\, 1 \leq q \leq p \leq \infty$: $f_n \xrightarrow{L_p} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{L_q} f$，注意这里 $f_n \xrightarrow{L_p} f$ 指代 $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L_p(\Omega)} = 0$ 。

1.4 Sobolev Spaces

Lemma 1.4.1. 记 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集合，取 $u \in C^k(\Omega)$ 与 $v \in C_0^\infty(\Omega)$，则对 $\forall\ x_i$：

$$\int_\Omega \boldsymbol{v(x)\,\partial_{x_i}u(x)\,dx} = -\int_\Omega \boldsymbol{u(x)\,\partial_{x_i}v(x)\,dx}$$

Proof lemma 1.4.1. 由 $v \in C_0^\infty(\Omega)$，$\operatorname{supp} v \subset \Omega \Longrightarrow v(\boldsymbol{x}) = 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v(\boldsymbol{x})\,\partial_{x_i}u(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \ + \ \int_\Omega u(\boldsymbol{x})\,\partial_{x_i}v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\
=& \int_\Omega \left(v\partial_{x_i}u + u\partial_{x_i}v\right)d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial_{x_i}(vu)\,d\boldsymbol{x} \\
=& \int_\Omega \nabla\cdot(0,\cdots,vu,\cdots,0)\,d\boldsymbol{x} \quad (\text{for } i_{th} \text{ entry}) \\
=& \oint_{\partial\Omega} vu\cdot\gamma_i\ d\boldsymbol{S} = \oint_{\partial\Omega} 0\cdot\gamma_i\ d\boldsymbol{S} = 0
\end{aligned}$$

于是有：$\int_\Omega v(\boldsymbol{x})\,\partial_{x_i}u(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u(\boldsymbol{x})\,\partial_{x_i}v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$，证毕。

Theorem 1.4.1. 多元函数的分部积分（*integration-by-parts formula*）
记 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集合，取 $u \in C^k(\Omega)$ 与 $v \in C_0^\infty(\Omega)$，则对 $\forall\ \boldsymbol{\alpha} : |\boldsymbol{\alpha}| \le k$：

$$\int_\Omega \boldsymbol{v(x)\left(D^\alpha u(x)\,dx\right)} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\int_\Omega \boldsymbol{u(x)\left(D^\alpha v(x)\,dx\right)}$$

Proof theorem 1.4.1. 由引理与 theorem 1.2.2. 不难证明有：

$$\int_\Omega v(\boldsymbol{x})\,\partial_{x_i}^{a_i}u(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = (-1)^{a_i}\int_\Omega u(\boldsymbol{x})\,\partial_{x_i}^{a_i}v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

故进一步有：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v(\boldsymbol{x})\left(D^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right) = \int_\Omega v(\boldsymbol{x})\,\partial_{x_1}^{a_1}\{D^{(a_2,\cdots,a_n)}u(\boldsymbol{x})\}d\boldsymbol{x} \\
=& (-1)^{a_1}\int_\Omega \{D^{(a_2,\cdots,a_n)}u(\boldsymbol{x})\}\cdot\{\partial_{x_1}^{a_1}v(\boldsymbol{x})\}d\boldsymbol{x} \\
=& (-1)^{a_1}\int_\Omega \partial_{x_2}^{a_2}\{D^{(a_3,\cdots,a_n)}u(\boldsymbol{x})\}\cdot\{\partial_{x_1}^{a_1}v(\boldsymbol{x})\}d\boldsymbol{x} \\
=& (-1)^{a_1+a_2}\int_\Omega \{D^{(a_3,\cdots,a_n)}u(\boldsymbol{x})\}\cdot\{\partial_{x_2}^{a_2}\partial_{x_1}^{a_1}v(\boldsymbol{x})\}d\boldsymbol{x} \\
\overset{\vdots}{=}& (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\int_\Omega u(\boldsymbol{x})\left(D^{\boldsymbol{\alpha}}v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right)
\end{aligned}$$

Theorem 1.4.2. 弱导数（*weak derivative*） 记 u 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上局部可积（*locally integrable*），即 $u \in L_1(\Omega), \forall\ \omega$ open and bounded s.t. $\bar{\omega} \subset \Omega$。若存在另一个在 Ω 上局部可积的函数 $w_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})$ 使得 $\forall\ v \in C_0^\infty(\Omega)$ 有：

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = (-\mathbf{1})^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \left(\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}\right)$$

称 $w_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})$ 为 u 关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的弱导数，并记为 $w_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) := D_w^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x})$。当 u 足够光滑时，其弱导数等于对应的偏导数。

Lecture Notes p4 Example 如何寻找弱导数。

Definition 1.4.1. *Sobolev Spaces* 记 $k \in \mathbb{N}_0$，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集合，定义以下 *Sobolev* 函数空间与 *Sobolev* 范数（根号下所有可能导数的 L_2 范数平方和）：

$$H^k(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : D_w^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L_2(\Omega), \forall |\boldsymbol{\alpha}| \le k\}$$

$$||u||_{H^k(\Omega)} = \left(\textstyle\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \le k}\ ||D_w^{\boldsymbol{\alpha}} u||_{L_2(\Omega)}^2\right)^{1/2} = \left(\textstyle\sum_{j=0}^{k}\ |u|_{H^j(\Omega)}^2\right)^{1/2}$$

其中，$|u|_{H^j(\Omega)} = \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=j} ||D_w^{\boldsymbol{\alpha}} u||_{L_2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$ 因其不满足 $|u|_{H^j(\Omega)} = 0 \Longrightarrow u = 0$，称为 *Sobolev semi-norm* 表示所有所有 j 阶导数 L_2 范数的平方和开方。*Sobolev Spaces* 是一个希尔伯特空间，其相应的内积定义为：

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \textstyle\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \le k}\ \left(D_w^{\boldsymbol{\alpha}} u\ ,\ D_w^{\boldsymbol{\alpha}} v\right)_{L_2(\Omega)}$$

特别的，定义子希尔伯特空间 $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$。

Theorem 1.4.3. *Poincare-Friedrichs Inequality* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集合，其边界 $\partial\Omega$ 足够平滑，则对 $\forall u \in H_0^1(\Omega)$，存在一个仅与 Ω 有关的常数 $c^*(\Omega)$（该常数与 u 无关），使得：

$$\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \le c^*(\Omega) \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\partial_{x_i} u(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}$$

或者可以写作：$||u||_{L_2(\Omega)}^2 \le c^*(\Omega)\, |u|_{H^1(\Omega)}^2$。下面仅给出 $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ 的证明，一般情形的证明类似。

Proof theorem 1.4.3 显然，对 x 由微积分基本定理：

$$u(x, y) = u(a, y) + u(\xi, y)\,|_a^x = u(a, y) + \int_a^x \partial_\xi u(\xi, y)\, d\xi = \int_a^x \partial_\xi u(\xi, y)\, d\xi$$

最后一个等号是因为 $u \in H_0^1(\Omega)$ 在边界上取值为 0，故 $u(a, y) = 0$。

$$\int_\Omega u^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_a^b \left\{\int_c^d u^2(x, y)\, dy\right\} dx = \int_a^b \left\{\int_c^d \left|\int_a^x \partial_\xi u(\xi, y)\, d\xi\right|^2 dy\right\} dx$$

对 $\left|\int_a^x \partial_\xi u(\xi, y)\, d\xi\right|^2$ 由 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left|\int_a^x 1 \cdot \partial_\xi u(\xi, y)\, d\xi\right|^2 \le \int_a^x 1^2 d\xi \cdot \int_a^x |\partial_\xi u(\xi, y)|^2 d\xi \le (x-a) \int_a^{b} |\partial_\xi u(\xi, y)|^2 d\xi$$

于是最终有:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_a^b \left\{\int_c^d \left|\int_a^x \partial_\xi u(\xi, y)\, d\xi\right|^2 dy\right\} dx \\
&\le \int_a^b \left\{\int_c^d (x-a) \int_a^{b} |\partial_\xi u(\xi, y)|^2 d\xi dy\right\} dx \\
&= \int_a^b (x-a)\, dx \cdot \left\{\int_c^d \int_a^b |\partial_\xi u(\xi, y)|^2 d\xi dy\right\} = \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \int_\Omega |\partial_x u(x, y)|^2 d\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

同理有:

$$\int_\Omega u^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \le \frac{(c-d)^2}{2} \cdot \int_\Omega |\partial_y u(x, y)|^2 d\boldsymbol{x}$$

将系数除到左边合并二式可得:

$$\int_\Omega u^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \le c^*(a, b, c, d) \cdot \left\{\int_\Omega |\partial_x u(x, y)|^2 d\boldsymbol{x} + \int_\Omega |\partial_y u(x, y)|^2 d\boldsymbol{x}\right\}$$

其中 $c^*(a, b, c, d) = \left(\frac{2}{(b-a)^2} + \frac{2}{(c-d)^2}\right)^{-1}$, 证毕。

2 Elliptic Boundary Value Problems

2.1 Formulation

在本课程中，我们考虑如下的椭圆型偏微分方程，其定义在有界开集 $\Omega \in \mathbb{R}^n$：

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})\,u = f(\boldsymbol{x}) \qquad (*)$$

或写成 dense form：

$$-\nabla \cdot \left(\nabla^T u A(\boldsymbol{x})\right) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u + c(\boldsymbol{x})\,u = f(\boldsymbol{x})$$

其中：$a_{i,j}(\boldsymbol{x}) \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$； $b_i, c, f \in C\left(\bar{\Omega}\right)$； 且 $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$，$\forall \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}$：

$$\xi^T A \xi \geq c^* \xi^T \xi \quad \text{or} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\boldsymbol{x})\,\xi_i \xi_j \geq c^* \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

其中常数 c^* 与 $\boldsymbol{x}$，ξ 无关。上述条件称为 uniform ellipticity。其中常见的边界条件有（将本笔记的 ∇ 视为**列向量**）：

(a) Dirichlet：$u = g$ on $\partial\Omega$，当 $g = 0$ 时称边界条件齐次（homogeneous）；

(b) Neumann：$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} := \nabla u \cdot \boldsymbol{v} = g$ on $\partial\Omega$，其中 $\boldsymbol{v}$ 表示边界上的单位外法向量;

(c) Robin：$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} + \sigma u = g$ on $\partial\Omega$，其中 $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega : \sigma(\boldsymbol{x}) \geq 0$；

(d) Oblique derivative：$\nabla^T u A \boldsymbol{v} + \sigma(\boldsymbol{x})\,u = g$ on $\partial\Omega$。

Definition 2.1.1. 典型解（*classical solutions*） *考虑齐次 Dirichlet 条件下的椭圆型偏微分方程 $(*)$，若存在解 $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$，则称其为一个典型解。当 $A, \boldsymbol{b}, c, f$ 和 $\partial\Omega$ 充分平滑时，此类问题的典型解存在且唯一。*

Definition 2.1.2. 二元二阶拟线性偏微分方程 *形如下式的，定义于 $\mathbb{R}^2$ 的偏微分方程称为二元二阶拟线性偏微分方程：*

$$a(x,y)\,u_{xx} + b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} = f\left(u_x, u_y, u, x, y\right)$$

其分类如下：

(a) $b^2 - 4ac > 0$：双曲型（hyperbolic）

(b) $b^2 - 4ac = 0$：抛物型（parabolic）

(c) $b^2 - 4ac < 0$：椭圆型（elliptic）

2.2 Weak Solutions

Definition 2.2.1. 弱形式解 (*weak solution*) 考虑定义在有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 下的齐次 *Dirichlet* 条件椭圆型偏微分方程：

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial_{x_i}}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})\, u = f(\boldsymbol{x})$$

$$\text{s.t. } u(\boldsymbol{x}) = 0,\ \ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$$

且 $a_{i,j}, b_i, c \in C\left(\bar{\Omega}\right)$，$f \in L_2(\Omega)$。则称满足下列条件的 $u \in H_0^1(\Omega)$ 为该偏微分方程的弱解,$\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \left\{-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial_{x_i}}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})\, u\right\} \cdot v d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}) \cdot v d\boldsymbol{x}$$

上式可简单化为：

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial_{x_i}} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v d\boldsymbol{x} + \int_\Omega cu \cdot v d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f \cdot v d\boldsymbol{x}$$

或写成 *dense form* :

$$(\nabla u, A\nabla v)_{L_2(\Omega)} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla u, v)_{L_2(\Omega)} + (cu, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

Remark 上述积分中的二阶偏导项使用了 **Thm 1.4.1.** 中的分部积分转化：

$$\int_\Omega \left\{-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial_{x_i}}\right)\right\} \cdot v d\boldsymbol{x} = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial_{x_i}}\right) \cdot v d\boldsymbol{x}$$
$$= -\sum_{i,j=1}^{n} - \int_\Omega \left(a_{i,j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial_{x_i}}\right)\frac{\partial v}{\partial x_j} d\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial_{x_i}} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\boldsymbol{x}$$

将方程设置为 齐次 Dirichlet BC 下的 Laplace Equation, 即 $A(\boldsymbol{x}) = I$，可以得到一个简单的分布积分式子：

$$-\int_\Omega v \triangle u d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\boldsymbol{x}$$

其中 $u, v \in H_0^1(\Omega)$，Ω open bounded（注：$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u$）。

关于弱解的存在性可详见 **Lecture Notes pp. 9-12** 的补充材料。

3 Finite Difference Schemes for ODEs

3.1 Finite Differences

求解微分方程的通常思路是将求解空间离散化后，有有限差分（实际上是差商）近似导数，将差分方程化为一般的线性方程组求解。为了详细讨论这些过程，我们规定以下符号与属术语：首先考虑以下的一般线性问题（$\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{B}$ 均为线性算子）：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}) \text{ if } \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \mathcal{B}u(\boldsymbol{x}) &= g(\boldsymbol{x}) \text{ if } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\end{aligned}$$

我们定义求解区域的离散化网格如下

Definition 3.1.1. 差分网格（*finite difference mesh*） 方便起见，我们暂时先考虑边界互相平行的区域 Ω。假设对于求解区域 Ω，我们对其的每个轴 Ox_i 取等距的离散化坐标 $x_i^j = x_i^0 + jh_i$, $\forall j = 1 \cdots n_i$，得到一个有限点集 $\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h$，称为目标区域的一个网格 *mesh*，其中

1. $h = (h_1, \cdots, h_n)$ 为每根轴上节点的网格间距 *mesh-size*，为了方便后续讨论，当 $h_1 = \cdots = h_n = h$ 时且不引起歧义的情况下，我们直接用 h 表示公共步长；否则，用 $h_{max} = \max_{1 \le i \le n} h_i$ 表示最大步长。此外，当我们想强调 h 的矢量/多重下标性质时，我们会使用粗体 $\boldsymbol{h}$，记：$\boldsymbol{h}^* = \prod_i h_i$。

2. $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}} \in \Omega_h \subset \Omega \setminus \partial\Omega$ 称为内部网格点 *interior mesh-points/nodes*；$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}} \in \partial\Omega_h \subset \partial\Omega$ 称为边界网格点集 *boundary mesh-points/nodes*；其中 $\boldsymbol{\kappa}$ 为节点的 *multi-index*。

在离散网格确定后，我们会对内部网格点 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}} \in \Omega_h$ 套用微分方程，并对边界网格点 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}} \in \partial\Omega_h$ 施加边界条件。这都需要我们对算子 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{B}$ 中的导数在相应的网格点上进行近似。常见的导数与其有限差分近似为：

Theorem 3.1.1. 一阶导数的有限差分近似（*finite difference approximation for first-order derivatives*） 我们提供以下常见的差分公式来近似所需的一阶导数，类似地可以推广到任何函数的一阶偏导数上：

1. 一阶导一阶向前差分 $f'(x_i) = D_x^+ f(x_i) + O(h) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$

2. 一阶导一阶向后差分 $f'(x_i) = D_x^- f(x_i) + O(h) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$

3. 一阶导二阶中心差分 $f'(x_i) = D_x^c f(x_i) + O\left(h^2\right) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O\left(h^2\right)$

其英文表达分别是：*first/first/second-order forward/backward/central first divided difference*，其中的 *order* 指代近似的精度。

Theorem 3.1.2. 二阶导数的有限差分近似（*finite difference approximation for first-order derivatives*） 我们提供以下常见的差分公式来近似所需的二阶导数，类似地可以推广到任何函数的二阶偏导数上：

1. 二阶导二阶中心差分 *second-order symmetric/central second divided difference*，$f''(x_i) = D_{xx}^c f(x_i) + O\left(h^2\right)$ 其中

$$D_{xx}^c f(x_i) = D_x^+ D_x^- f(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

2. 二阶混合导一阶有限差分 $u_{xy}\left(x_i, y_j\right) = D_{xy} u\left(x_i, y_j\right) + O(h)$ 其中

$$D_{xy} f\left(x_i, x_j\right) = D_y^c D_x^c f\left(x_i, x_j\right) = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4h^2}$$

Theorem 3.1.3. 上述差分算子还满足如下的一些关系

1. $D_x^c f_i = \frac{1}{2}\left(D_x^+ f_i + D_x^- f_i\right)$
2. $D_{xx}^c f_i = D_x^+ D_x^- f_i = D_x^- D_x^+ f_i$
3. $D_{xy}^c f_{ij} = D_y^c D_x^c f_{ij} = D_x^c D_y^c f_{ij}$

下面介绍一下利用插值多项式构造的导数差分公式与误差，具体讨论见 MATH 336 笔记。

Theorem 3.1.4. 插值多项式构造的差分公式 取足够光滑的函数 f，其在定义域内有 $(n+1)$ 个等距（h）节点 $x_0 < \cdots < x_i < \cdots < x_n$，利用这些节点与其上对应的函数值 f_i 构造 n 阶插值多项式，并用该多项式在 x_i 的导数 $\tilde{f}'_i$ 近似 f'_i。此公式对于任何 $(n+1)$ 个连续节点在相对位置相同的第 i 个节点上均适用，其 k 阶导数的近似的误差为（记 $(q)_n = q(q-1)\cdots(q-i+1)$）

$$\left|\tilde{f}'_i - f'_i\right| = \frac{h^{n+1-k} \cdot \left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} \left\{\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}q^k}(q)_{n+1}\right\}\Bigg|_{q=i} \sim O\left(h^{n+1-k}\right)$$

若有奇数个节点，对于中间节点的偶数阶导数，精度可以上升一阶，为 $O\left(h^{n+2-k}\right)$。二阶导数的二阶中心差分 $D_{xx}^c f_i$ 可以用这种方法构造。

一般来说，差分公式的构造还可通过待定系数法与在目标点的泰勒展开实现，详细例子见 MATH 336 笔记。在使用差分公式替换掉方程与边界条件中的导数项后，我们可以将一开始的问题替换为解一个线性方程组：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h \tilde{u}(\boldsymbol{x}) &= f_h(\boldsymbol{x}) \text{ if } \boldsymbol{x} \in \Omega_h \\ \mathcal{B}_h \tilde{u}(\boldsymbol{x}) &= g_h(\boldsymbol{x}) \text{ if } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h \end{aligned}$$

我们称 $\{\tilde{u}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}}) : \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}} \in \overline{\Omega}_h\}$ 为 $\{u(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}}) : \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}} \in \overline{\Omega}\}$ 的近似解。

3.2 Existence and Uniqueness

本节我们主要讨论形如下的常微分方程边界值问题 $(*)$ 数值解的各种性质：

$$-u'' + c(x)\, u = f(x) \text{ if } x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

其中，$f, c \in C\big([0,1]\big)$，且 $c(x) \geq 0,\ \forall x \in [0,1]$。我们记 u 的数值解为 $\tilde{u}$。

通常，对于定义在一个特定区间 $\overline{\Omega} = [a,b]$ 内的 ODE 问题，其等距差分网格为：$\overline{\Omega}_h = \{x_i\ :\ x_i = a + ih,\ h = (b-a)/N,\ i = 0 \cdots N\}$，其中边界节点为 $\partial\Omega_h = \{x_0\ ,\ x_N\}$。在开始具体分析之前，我们做如下定义：

Definition 3.2.1. 差分网格上的函数 微分方程的数值解均可以定义为在差分网格上的函数。当我们在下文中说"$\boldsymbol{w}$ 是一个定义在差分网格上的函数"时，也可以理解为我们在假设其是一个目标方程的潜在数值解。一般使用如下记号表示一个定义为在差分网格上的函数 $\boldsymbol{w}$：

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}}) = w_{\boldsymbol{\kappa}} \quad \forall\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}} \in \overline{\Omega}_h$$

一般来说我们会更关心在解函数在区域内部节点上的取值，也就是定义在 Ω_h 上的函数(数值解)。定义这些内部节点的下标集合为：$K(\Omega_h) = \{\boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}} \in \Omega_h\}$ 现在，设有两个在内部节点上有定义的函数 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}$，我们定义其内积为：

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})_h = \textstyle\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in K(\Omega_h)} \boldsymbol{h}^* w_{\boldsymbol{\kappa}} v_{\boldsymbol{\kappa}} = \Big(\prod_j h_j\Big) \cdot \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in K(\Omega_h)} w_{\boldsymbol{\kappa}} v_{\boldsymbol{\kappa}}$$

这个定义基本上是函数在 $L_2(\Omega)$ 上内积的离散版本。

最后，我们允许有限差分算符应用在这些离散函数的内部节点上（有时边界点也可以，看具体情况），相当于在对应的 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\kappa}}$ 上用 $\boldsymbol{v}$ 的值进行 *element-wise* 运算。

回到 ODE 的情境，考虑两个个定义在一维网格点 $\overline{\Omega}_h = \{x_i\ :\ x_i = a + ih,\ h = (b-a)/N,\ i = 0 \cdots N\}$ 上的函数 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}$，其内积为：

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})_h = \textstyle\sum_{i=1}^{N-1} h w_i v_i$$

Lemma 3.2.1. 假设 $\boldsymbol{v}$ 是定义在一维（等距）网格点 $\overline{\Omega}_h$ 上的函数，且满足边界条件 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_N = 0$，则：

$$-\Big(D_{xx}^c \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\Big)_h = \textstyle\sum_{i=1}^{N} h |D_x^- v_i|^2 =: \Big(D_x^- \boldsymbol{v}, D_x^- \boldsymbol{v}\Big]_h$$

这很像端点值为 0 时候的连续情形的分部积分 $-\big(u'', u\big)_{L_2([a,b])} = \big(u', u'\big)_{L_2([a,b])}$，证明比较简单，见 Lecture Notes p.16。

Existence and Uniqueness of the Solution

我们第一步将讨论关于常微分方程边界值问题 $(*)$ 数值解的存在与唯一性。整体的思路是将问题化为离散的形式并最终转化为解线性方程组 $A\tilde{u} = f_h$，随后只要证明系数矩阵 A 可逆即可。这等价于证明齐次方程组 $A\tilde{u} = 0$ 只有平凡解。考虑常微分方程边界值问题 $(*)$

$$
\begin{aligned}
-u'' + c(x)\,u &= f(x) \;\; \text{if } x \in (0,1) \\
u(0) &= u(1) = 0
\end{aligned}
$$

其中，$f, c \in C\left([0,1]\right)$，且 $c(x) \geq 0,\ \forall x \in [0,1]$。我们记 u 的数值解为 $\tilde{u}$。将其离散化为如下的线性方程组：

$$
\begin{bmatrix}
\frac{2}{h^2} + c_1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c_2 & -\frac{1}{h^2} & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c_{N-2} & -\frac{1}{h^2} \\
0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c_{N-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{N-2} \\ \tilde{u}_{N-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1}
\end{bmatrix}
$$

将系数矩阵写成 A，方程化为更紧凑的形式 $A\tilde{u} = f_h$，实际上我们不难发现系数矩阵 A 的作用等价于线性差分算子 $L = -D^c_{xx} + c_h$，方程的离散化（在齐次边界条件下）整体等价于将这个算子应用到定义在内部网格点 Ω_h 的离散值函数 $\tilde{u}$ 上

$$
A\tilde{u} = f_h \quad \Longleftrightarrow \quad -D^c_{xx}\tilde{u} + c_h\tilde{u} = f_h
$$

注意，上述的 c_h, f_h 在差分算符中也视为离散值函数。对任意满足其次边界条件的离散值函数 $\boldsymbol{v}$ 考虑内积

$$
\begin{aligned}
(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_h &= \left(-D^c_{xx}\boldsymbol{v} + c_h\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right)_h = -\left(D^c_{xx}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right) + (c_h\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_h \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{N} h|D^-_x v_i|^2 + (c_h\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_h \geq \textstyle\sum_{i=1}^{N} h|D^-_x v_i|^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

不等号成立是因为我们规定了 $c(x) \geq 0$ 在求解区域内处处成立；第三个等号运用了 lemma 3.2.1。上述的不等关系说明，如果存在 $A\boldsymbol{v} = 0$，此时该内积也为 0，则必然有 $\sum_{i=1}^{N} h|D^-_x v_i|^2 = 0$ 即 $D^-_x v_i \equiv 0$ 对 $i = 1 \cdots N$ 恒成立。考虑到有边界条件 $\boldsymbol{v} = 0$，则由递推关系能得到 $\boldsymbol{v} \equiv 0$。即 $A\boldsymbol{v} = 0 \iff \boldsymbol{v} = 0$，即 A 为可逆矩阵，数值解存在且唯一。

Theorem 3.2.1. *对于 ODE 边界值问题 $(*)$，有限差分法的解存在且唯一。*

3.3 Stability and Consistency

Definition 3.3.1. 离散 L_2 范数（*discrete L_2 norm*） 设有一个在离散网格节点上有定义的函数 $\boldsymbol{v}$，我们定义其 L_2 范数（只考虑内部节点）为

$$||\boldsymbol{v}||_h = \sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_h} = \sqrt{\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in K(\Omega_h)} \boldsymbol{h}^* w_{\boldsymbol{\kappa}} v_{\boldsymbol{\kappa}}}$$

有时候，范数可能或涉及到边界节点。于是对于一维形式，我们定义含右边界内积：

$$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}]_h = \sum_{i=1}^{N} h w_i v_i$$

含边界范数：

$$||\boldsymbol{v}]|_h = \sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}]_h} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} h v_i^2}$$

一维离散 *Sobolev* 范数：

$$||\boldsymbol{v}||_{1,h} = \left(||\boldsymbol{v}||_h^2 + \left|\left|D_x^- \boldsymbol{v}\right]\right|_h^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Lemma 3.3.1. Discrete Poincare-Friedrichs Inequality（DPFI）
令 $\boldsymbol{v}$ 为定义在一维离散网格点 $\overline{\Omega}_h = \{x_i : x_i = a + ih,\ h = (b-a)/N,\ i = 0\cdots N\}$ 上的函数，且满足边界条件 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_N = 0$；则存在一个与 $\boldsymbol{v}$, h 无关的常数 $c^* = 1/2$ 使得

$$||\boldsymbol{v}||_h^2 \leq \frac{1}{2}\left|\left|D_x^- \boldsymbol{v}\right]\right|_h^2$$

回顾连续版的 CPFI 我们有 $||u||_{L_2(\Omega)}^2 \leq c^*|u|_{H^1(\Omega)}^2$。证明见 Lecture Notes p.18。

Lemma 3.3.2. 令 $\boldsymbol{v}$ 为定义在一维离散网格点 $\overline{\Omega}_h = \{x_i : x_i = a + ih,\ h = (b-a)/N,\ i = 0\cdots N\}$ 上的函数，且满足边界条件 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_N = 0$；则，对于边界值问题 $(*)$ 有

$$(A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_h \geq 2||\boldsymbol{v}||_h^2 \quad \& \quad (A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_h \geq \frac{2}{3}||\boldsymbol{v}||_{1,h}^2$$

第一个式子由前页存在性讨论中的不等关系 $(**)$ $(A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_h \geq \sum_{i=1}^{N} h|D_x^- v_i|^2 = \left|\left|D_x^- \boldsymbol{v}\right]\right|_h^2$ 与 *DPFI* 显然可得。第二个式子直接将新得到的式子与 $(**)$ 相加即可。特别地，对于由差分法得到的解 $\tilde{u}$ 有（证明见 Lecture Notes p.18）

$$||\tilde{u}||_{1,h} \leq \frac{3}{2}||f_h||_h$$

Stability and the Error/Consistency of the Solution

在这一部分我们讨论问题 $(*)$ 数值解的稳定性与绝对误差。当我们讨论一个数值解是否稳定时，我们是在讨论初始数据的微小扰动是否也只会引起解（对于某种范数）的微小扰动。这在这里是显然的，因为所有的符合边界条件的数值解 $\boldsymbol{v}$ 的离散 Sobolev 范数都会被 $3/2||f_h||_h$ bounded (lemma 3.2.3)。我们在这里主要讨论方法的全局误差，假设有一个符合边界条件且定义在网格上的离散函数 $\tilde{u}$ 为方法导出的数值解。

定义全局误差为离散函数：$\boldsymbol{e} = \tilde{u} - \boldsymbol{u}$，显然有 $e_0 = e_N = 0$，于是：

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{e} &= A(\tilde{u} - \boldsymbol{u}) = f_h - A\boldsymbol{u} = f_h - \left(-D_{xx}^c \boldsymbol{u} + c_h \boldsymbol{u}\right) \\ &= \left(-\boldsymbol{u''} + c_h \boldsymbol{u}\right) - \left(-D_{xx}^c \boldsymbol{u} + c_h \boldsymbol{u}\right) \\ &= D_{xx}^c \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u''} := \varphi_h \end{aligned}$$

由 lemma 3.2.3. $||\boldsymbol{e}||_{1,h} \leq \frac{3}{2}||\varphi_h||_h$，取 $||u^{(4)}||_{L_\infty([0,1])} = \max\limits_{x\in[0,1]} |u^{(4)}|$，又有

$$\begin{aligned} \left|D_{xx}^c u_i - u''(x_i)\right| &= \left|\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right) - u''(x_i)\right| \\ = &\left|\frac{1}{h^2}\left(u_i + u_i'h + \frac{1}{2}u_i''h^2 + \frac{1}{6}u_i^{(3)}h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(\xi_1)h^4\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{h^2}\left(u_i - u_i'h + \frac{1}{2}u_i''h^2 - \frac{1}{6}u_i^{(3)}h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(\xi_2)h^4\right) - \frac{2}{h^2}u_i - u''(x_i)\right| \\ = &\left|\frac{1}{24}u^{(4)}(\xi_1)h^2 + \frac{1}{24}u^{(4)}(\xi_2)h^2\right| \leq \frac{1}{12}h^2||u^{(4)}||_{L_\infty([0,1])} := Ch^2 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} ||\varphi_h||_h &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{N-1} h\varphi_i^2} \leq \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{N-1} hC^2h^4} = \sqrt{(N-1)\,hC^2h^4} \\ &\leq \sqrt{(Nh)\,C^2h^4} = \sqrt{1\cdot C^2h^4} = Ch^2 = \frac{1}{12}h^2||u^{(4)}||_{L_\infty([0,1])} \end{aligned}$$

所以综上

$$||\boldsymbol{e}||_{1,h} \leq \frac{3}{2}||\varphi_h||_h \leq \frac{1}{8}h^2||u^{(4)}||_{L_\infty([0,1])}$$

Theorem 3.3.1. 对于常微分方程边界值问题 $(*)$，若 $u \in C^4\left([0,1]\right)$，则有限差分法的误差为

$$||\tilde{u} - \boldsymbol{u}||_{1,h} \leq \frac{1}{8}h^2||u^{(4)}||_{L_\infty([0,1])}$$

4 Finite Difference Schemes of Elliptic BVPs

4.1 Introduction and Terminologies

前一节的稳定性与一致性分析均可以类似地嵌套到（Elliptic）PDE 的边界值问题上，考虑我们在最开始讨论的一类线性椭圆 BVP (∗)

$$\mathcal{L}u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \text{ if } \boldsymbol{x} \in \Omega$$
$$\mathcal{B}u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \text{ if } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$$

其离散化后得到的线性方程组表示为 (∗∗)

$$\mathcal{L}_h\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = f_h(\boldsymbol{x}) \text{ if } \boldsymbol{x} \in \Omega_h$$
$$\mathcal{B}_h\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = g_h(\boldsymbol{x}) \text{ if } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h$$

假设我们能定义与网格 $\overline{\Omega}_h$ 有关的两个涉及内部节点 Ω_h（或 $\overline{\Omega}_h$）的范数 $||\cdot||'_{\Omega_h}$（for stability）与 $||\cdot||_{\Omega_h}$；以及一个仅涉及边界节点 $\partial\Omega_h$ 的范数 $||\cdot||_{\partial\Omega_h}$，比如在前文中，我们有 $||\cdot||'_{\Omega_h} = ||\cdot||_{1,h}$ 与 $||\cdot||_{\Omega_h} = ||\cdot||_h$。我们定义：

Definition 4.1.1. 差分法的稳定性（*stability*） 对于任意一个可能的满足边界条件的数值解 $\tilde{u}$，如果存在一个与网格无关的常数 C 使得

$$||\tilde{u}||'_{\Omega_h} \leq C\left(\ ||f_h||_{\Omega_h} + ||g_h||_{\partial\Omega_h}\ \right)$$

则我们称该数值方法产生的数值解 $\tilde{u}$ 是稳定的。比如在前文中，我们由 *lemma 3.3.2* 有

$$||\tilde{u}||_{1,h} \leq \frac{3}{2}||f_h||_h$$

Definition 4.1.2. 差分法的一致性（*consistency*） 考虑一致性误差 *consistency error*，注意下面的 $\boldsymbol{u}$ 表示准确值，与 $\tilde{u}$ 区分开来

$$\varphi_{\Omega_h} = \mathcal{L}_h\boldsymbol{u} - f_h(\boldsymbol{x}) \quad \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_h$$
$$\varphi_{\partial\Omega_h} = \mathcal{B}_h\boldsymbol{u} - g_h(\boldsymbol{x}) \quad \text{if } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h$$

如果有这些误差依 $h \to 0$ 收敛，则称该方法一致 *consistent*。

$$||\varphi_{\Omega_h}||_{\Omega_h} + ||\varphi_{\partial\Omega_h}||_{\partial\Omega_h} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad h \to 0$$

特别地，如果对足够光滑的 u 存在最大的 p，有下面的关系成立，则称该方法有 p-阶一致性 *have order of accuracy/consistency p*。

$$||\varphi_{\Omega_h}||_{\Omega_h} + ||\varphi_{\partial\Omega_h}||_{\partial\Omega_h} \sim O\left(h^p\right) \quad \text{as} \quad h \to 0$$

Definition 4.1.3. 差分法的收敛性（*consistency*） 对于有限差分法，如果对其解 $\tilde{u}$ 有

$$||u-\tilde{u}||'_{\Omega_h} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad h \to 0$$

则称该方法下数值解收敛 *convergent*。特别地，如果对足够光滑的 u 存在最大的 q，有下面的关系成立，则称该方法有 q-阶收敛性 *have order of convergence* q。

$$||u-\tilde{u}||'_{\Omega_h} \sim O\left(h^q\right) \quad \text{as} \quad h \to 0$$

Theorem 4.1.1. 稳定差分法一致性与收敛性的关系 对于线性问题 $(*)$，如果其有限差分策略 $(**)$ 是稳定且一致的，则其一定是收敛的，且收敛阶数 q 不小于一致阶数 p。

Proof theorem 4.1.3 证明与前一章最后一节类似。定义全局误差为离散函数：$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{u}-\tilde{u}$，显然有

$$\mathcal{L}_h\boldsymbol{e}=\mathcal{L}_h\left(\boldsymbol{u}-\tilde{u}\right)=\mathcal{L}_h\boldsymbol{u}-f_h=\varphi_{\Omega_h}$$

$$\mathcal{B}_h\boldsymbol{e}=\mathcal{B}_h\left(\boldsymbol{u}-\tilde{u}\right)=\mathcal{B}_h\boldsymbol{u}-g_h=\varphi_{\partial\Omega_h}$$

由一致性，$||\varphi_{\Omega_h}||_{\Omega_h}+||\varphi_{\partial\Omega_h}||_{\partial\Omega_h} \sim O\left(h^p\right) \quad \text{as} \quad h \to 0$。再由稳定性

$$||\boldsymbol{u}-\tilde{u}||'_{\Omega_h}=||\boldsymbol{e}||'_{\Omega_h} \le C\left(\ ||\varphi_{\Omega_h}||_{\Omega_h}+||\varphi_{\partial\Omega_h}||_{\partial\Omega_h}\ \right) \le C'h^p$$

即至少有 $||\boldsymbol{u}-\tilde{u}||'_{\Omega_h} \sim O\left(h^p\right) \quad \text{as} \quad h \to 0$ 依 p 阶收敛。

4.2 Problem Formulation

在本章中我们具体讨论如下的二元椭圆 BVP，边界条件齐次，求解区域为方形区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$c(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续且 $c(x,y)\geq 0$ 恒成立，求解问题定义如下 $(*)$

$$\begin{aligned} -u_{xx}-u_{yy}+c(x,y)\,u=f(x,y) &\quad \text{if } (x,y)\in\Omega \\ u(x,y)=0 &\quad \text{if } (x,y)\in\partial\Omega \end{aligned}$$

在随后的两节，我们将就 $f(x,y)$ 的连续性分两种情况讨论差分法的稳定性、一致性和收敛性。第一种情况，$f\in C\left(\overline{\Omega}\right)$，这种情况下的分析模式与前一章中的类似；后一种情况我们只考虑 $f\in L_2(\Omega)$，此时 BVP 只存在弱解；且在进行一致性分析时，Taylor 展开的使用也会受限。届时我们会引入并介绍另一种分析方法。

在这些分析中，我们默认使用以下的记号与策略，对于离散化网格我们有

$$\overline{\Omega}_h=\left\{\ \left(x_i,y_j\right)\ :\ x_i=ih,\ y_j=jh,\ i,j=0\cdots N\ \right\}$$

$$\Omega_h=\left\{\ \left(x_i,y_j\right)\ :\ x_i=ih,\ y_j=jh,\ i,j=1\cdots N-1\ \right\}$$

考虑如下的差分策略 five-point difference scheme（因为计算一个点的算符 $\mathcal{L}u$ 近似会用到附近五个点的函数值）

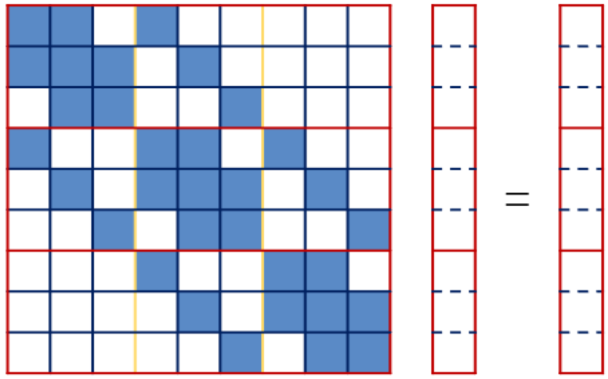
$$\begin{aligned} -D^c_{xx}\tilde{u}_{i,j}-D^c_{yy}\tilde{u}_{i,j}+c_{i,j}\tilde{u}_{i,j}=f_{i,j} &\quad \text{if } \left(x_i,y_j\right)\in\Omega_h \\ \tilde{u}_{i,j}=0 &\quad \text{if } \left(x_i,y_j\right)\in\partial\Omega_h \end{aligned}$$

我们可以通过将各行取出后首尾连接将二维下标 (i,j) 一维化，即规定

$$\begin{aligned} \tilde{u}&=\left[\tilde{u}^T_{1.}\quad\cdots\quad\tilde{u}^T_{N-1.}\right]^T \\ &=\left[\tilde{u}_{11}\quad\cdots\quad\tilde{u}_{1,N-1}\quad\tilde{u}_{21}\quad\cdots\quad\tilde{u}_{2,N-1}\quad\cdots\quad\tilde{u}_{N-1,1}\quad\cdots\quad\tilde{u}_{N-1,N-1}\right]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_h&=\left[f^T_{1.}\quad\cdots\quad f^T_{N-1.}\right]^T \\ &=\left[f_{11}\quad\cdots\quad f_{1,N-1}\quad f_{21}\quad\cdots\quad f_{2,N-1}\quad\cdots\quad f_{N-1,1}\quad\cdots\quad f_{N-1,N-1}\right]^T \end{aligned}$$

于是可以将 BVP 转换为求解线性方程组 $\mathcal{L}_h\tilde{u}=f_h$，为了保证前后文的连贯性，我们以后默认用 $\mathcal{L}_h$ 表示转化后的 $(N-1)^2\times(N-1)^2$ 系数矩阵 A。对于五点策略，系数矩阵的大部分行（除了对应了靠近边界的点）应该只有五个非 0 元素（用于计算对应下标点的 $\mathcal{L}u$ 近似），因此其应当是一个稀疏矩阵；一般来说，其还应当是一个带状矩阵。下面是问题 $(*)$ 对应的系数矩阵 $\mathcal{L}_h$，我们假设其形状为 9×9（i.e, $N=4$）。



4.3 Solution Behaviors for Continuous Force Functions

类似对一元问题的讨论，当施迫函数 $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ 时，我们对节点上的离散函数做如下的范数定义。首先，有在内部节点上 Ω_h 的内积

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})_h = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} h^2 w_{ij} v_{ij}$$

分别含行（下）边界与列（右）边界的内积：

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}]_{x,h} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N-1} h^2 w_{ij} v_{ij} \quad \& \quad (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}]_{y,h} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N} h^2 w_{ij} v_{ij}$$

其次，有范数

$$||\boldsymbol{v}||_h = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_h} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} h^2 v_{ij} v_{ij}}$$

$$||\boldsymbol{v}]|_{x,h} = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}]_{x,h}} \quad \& \quad ||\boldsymbol{v}]|_{y,h} = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}]_{y,h}}$$

以及最后，二维离散 Sobolev 范数：

$$||\boldsymbol{v}||_{1,h} = \left(||\boldsymbol{v}||_h^2 + \left|\left|D_x^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{x,h}^2 + \left|\left|D_y^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{y,h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

下面和一维情境中类似的，介绍二维离散形式的“分部积分”公式以及 Poincare-Friedrichs Inequality。

Lemma 4.3.1. 假设 $\boldsymbol{v}$ 是定义在 *4.2* 节网格点 $\overline{\Omega}_h$ 上的函数，且满足齐次边界条件 $\boldsymbol{v} = 0$ on $\partial\Omega_h$，则由 *lemma 3.2.1* 显然可得：

$$-\left(D_{xx}^c \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right)_h - \left(D_{yy}^c \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right)_h = \left|\left|D_x^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{x,h}^2 + \left|\left|D_y^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{y,h}^2$$

Lemma 4.3.2. ***Discrete Poincare-Friedrichs Inequality*** **(*DPFI*)**
令 $\boldsymbol{v}$ 为定义在 *4.2* 节网格点 $\overline{\Omega}_h$ 上的函数,且满足齐次边界条件 $\boldsymbol{v} = 0$ on $\partial\Omega_h$；则存在一个与 $\boldsymbol{v}$, h 均无关的常数 $c^* = 1/4$ 使得

$$||\boldsymbol{v}||_h^2 \leq \frac{1}{4}\left(\left|\left|D_x^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{x,h}^2 + \left|\left|D_y^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{y,h}^2 \right)$$

证明见利用了一维形式的 lemma 3.3.1，给出如下。

Proof lemma 4.3.2 固定每一行 (列), 对列使用一维形式的 DPFI (lemma 3.3.1)，分别有

$$\forall\ i = 1\cdots(N-1)\ :\ \textstyle\sum_{j=1}^{N-1} h|\boldsymbol{v}_i j|^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} h|D_{yy}^- \boldsymbol{v}_i j|^2$$

$$\forall\ j = 1\cdots(N-1)\ :\ \textstyle\sum_{i=1}^{N-1} h|\boldsymbol{v}_i j|^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} h|D_{xx}^- \boldsymbol{v}_i j|^2$$

两式分别两端乘上 h，并对另一个坐标从 $1 \sim (N-1)$ 求和之后两式相加后两边同时除以 2 即可得到结果。

$$2 \cdot ||\boldsymbol{v}||_h^2 \leq \frac{1}{2}\left(\left|\left|D_x^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{x,h}^2 + \left|\left|D_y^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{y,h}^2 \right)$$

Lemma 4.3.3. 令 $\boldsymbol{v}$ 为定义在 *4.2* 节网格点 $\overline{\Omega}_h$ 上的函数，且满足齐次边界条件 $\boldsymbol{v} = 0$ on $\partial\Omega_h$；则，对于边界值问题 $(*)$ 有

$$(\mathcal{L}_h \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_h \geq 4||\boldsymbol{v}||_h^2 \quad \& \quad (\mathcal{L}_h \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_h \geq \frac{4}{5}||\boldsymbol{v}||_{1,h}^2$$

第一个式子不难证明 $(\mathcal{L}_h \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_h \geq\ \left|\left|D_x^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{x,h}^2 + \left|\left|D_y^- \boldsymbol{v}\right]\right|_{y,h}^2$，结合 *DPFI* 显然可得。第二个式子直接将新得到的不等式与上式相加即可。特别地，对于由差分法得到的解 $\tilde{u}$ 有（证明见 Lecture Notes p.26）

$$||\tilde{u}||_{1,h} \leq \frac{5}{4}||f_h||_h$$

现在，我们可以开始讨论对于连续施迫函数 f，差分法得到数值解的各种性质了，见下页讨论。

Existence, Uniqueness, Stability and Consistency of the Solution

讨论与一维情形完全类似，我们只做简单论述

1. **Existence and Uniqueness** 如果存在 $\mathcal{L}_h \boldsymbol{v} = 0$，则由 lemma 4.3.3 $||\boldsymbol{v}||_{1,h}^2 \leq \frac{5}{4}(\mathcal{L}_h \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_h = 0 \Rightarrow ||\boldsymbol{v}||_{1,h} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$，所以 $\mathcal{L}_h$ 可逆，解存在且唯一。

2. **Stability** 由 lemma 4.3.3 $||\tilde{u}||_{1,h} \leq \frac{5}{4}||f_h||_h$ 已经证明了稳定性，我们补充一下这一步证明的细节，利用了范数的柯西不等式：
$$||\tilde{u}||_{1,h}^2 \leq \frac{5}{4}(\mathcal{L}_h \tilde{u}, \tilde{u})_h \leq \frac{5}{4}(f_h, \tilde{u})_h \leq \frac{5}{4}||f_h||_h ||\tilde{u}||_h \Rightarrow ||\tilde{u}||_{1,h} \leq \frac{5}{4}||f_h||_h$$

3. **Consistency** 对于本问题的齐次边界条件，只要证明 $||\mathcal{L}_h \boldsymbol{u} - f_h||_h$ 随 $h \to 0$ 收敛即可。有
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_h \boldsymbol{u} - f_h &= \left(-D_{xx}^c \boldsymbol{u} - D_{yy}^c \boldsymbol{u} + c_h \boldsymbol{u}\right) - \left(-\boldsymbol{u}_{xx} - \boldsymbol{u}_{yy}\tilde{u} + c_h \boldsymbol{u}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{u}_{xx} - D_{xx}^c \boldsymbol{u}\right) + \left(\boldsymbol{u}_{yy} - D_{yy}^c \boldsymbol{u}\right) = \varphi_h\end{aligned}$$
又有之前证明的
$$\left|\partial_x^2 u_{ij} - D_{xx}^c u_{ij}\right| \leq \frac{h^2}{12}||\partial_x^4 u||_{L_\infty(\Omega)} = C_x h^2$$
$$\left|\partial_y^2 u_{ij} - D_{yy}^c u_{ij}\right| \leq \frac{h^2}{12}||\partial_y^4 u||_{L_\infty(\Omega)} = C_y h^2$$
于是 $|\varphi_{ij}| = \left|\partial_x^2 u_{ij} - D_{xx}^c u_{ij} + \partial_y^2 u_{ij} - D_{yy}^c u_{ij}\right| \leq \left(C_x + C_y\right) h^2 = C' h^2$，即有
$$\begin{aligned}||\varphi_h||_h = ||\mathcal{L}_h \boldsymbol{u} - f_h||_h &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} h^2 \varphi_{ij}^2} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} h^2 C'^2 h^4} \\ &\leq \sqrt{(Nh)^2 C'^2 h^4} = C' h^2 = \left(C_x + C_y\right) h^2 \sim O\left(h^2\right)\end{aligned}$$

4. **Convergence** 记 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u} - \tilde{u}$，不难证明有 $\mathcal{L}_h \boldsymbol{e} = \varphi_h$ 且满足齐次边界条件，由 lemma 4.3.3 有
$$||\boldsymbol{e}||_{1,h} \leq \frac{5}{4}||\varphi_h||_h \leq \frac{5h^2}{48}\left(C_x + C_y\right) \sim O\left(h^2\right)$$

Theorem 4.3.1. 对于边界值问题 $(*)$，若 $u \in C^4(\Omega)$，则有限差分法的误差为
$$||\tilde{u} - \boldsymbol{u}||_{1,h} \leq \frac{5}{48}h^2\left(\ ||\partial_x^4 u||_{L_\infty(\Omega)} + ||\partial_y^4 u||_{L_\infty(\Omega)}\ \right)$$

4.4 Solution Behaviors for Non-continuous Force Functions