Supplementary Applied Mathematics

Chenghao Dong

October 27, 2023

CONTENTS

1 Introduction

1.1 Notations and Basic Concepts

Definition 1.1.1. 线性微分算子 ***(linear differential operators)***
在本课程中，未经特殊说明，我们只考虑含有一个自变量的常微分方程。记 F^1 为所有一元函数的集合，线性微分算子是指一个作用在足够平滑的函数 $y \in F^1$ 上的线性变换 $L : F^1 \longrightarrow F^1$ *s.t.*

$$L_n\left[u(x)\right] = a_n(x)\, u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\, u'(x) + a_0$$

其满足：$L_n\left[c_1 u(x) + c_2 v(x)\right] = c_1 L_n\left[u(x)\right] + c_2 L_n\left[v(x)\right]$，其中 c_1, c_2 为常数。特别地，记 L 表示任意阶的线性微分算子。

注意： 线性微分算子不应当包含常数项。比如，$L[y] = y'' + 2$ 就不是线性算子；但区分 $L[y] = y'' + 2 \cdot y$ 就是线性算子，但有时我们会把后者记为：$L = \frac{d^2}{dx^2} + 2$

Definition 1.1.2. 线性边界值问题 ***(linear boundary value problems LBVPs)*** 常微分方程中形如下述的问题称为线性边界值问题（本笔记中，在未产生歧义的情况下简称为边界值问题）：

$$\begin{aligned} & L_n\left[u(x)\right] = f(x) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \quad & A_i\left[u(a)\right] + B_i\left[u(b)\right] = c_i \quad \text{s.t.} \quad i = 1 \cdots n \end{aligned}$$

称上述的 f 为施迫函数（*forcing function*），A_i, B_i 是线性微分算子，注意等式右端不含常数项。若 $f \equiv 0$ 则称这是一个线性齐次边界值问题（*homogeneous BVP*）；若边界条件为：

$$A_i\left[u(a)\right] + B_i\left[u(b)\right] = 0 \quad \text{for} \quad \forall i = 1 \cdots n$$

则称这个边界值问题有（线性）齐次边界条件（*homogeneous conditions*）。更特别地，我们一般考虑（*linear*）*separated homogeneous conditions*：

$$A_i\left[u(a)\right] = 0 \quad \text{for} \quad \forall i = 1 \cdots k$$

$$B_j\left[u(b)\right] = 0 \quad \text{for} \quad \forall j = 1 \cdots l$$

其中 A_i, B_i 是线性微分算子，$k + l = n$。

2 Eigenfunction Methods

2.1 Function Spaces

Definition 2.1.1. 函数空间的内积和边界值问题的特征函数
对线性边界值问题 $(*)$：

$$\begin{aligned} & L_n\left[u(x)\right]=f(x) \quad \text{s.t.} \quad a<x<b \\ \text{w.r.t.} \quad & A_i\left[u(a)\right]+B_i\left[u(b)\right]=c_i \quad \text{s.t.} \quad i=1\cdots n \end{aligned}$$

考虑 $[a,b]$ 上的一个无限维且对该 BVP 具有良定义的函数内积空间 $F\left([a,b]\right)$，规定其带权内积如下：

$$\langle u,v\rangle_\rho=\int_a^b \rho(x)\cdot u(x)\cdot\overline{v(x)}\,dx \quad \text{for} \quad \rho(x)\geq 0 \quad \text{if} \quad x\in[a,b]$$

其中ρ 为实值函数；上述 BVP 对于此函数空间的特征函数 *eigenfunction* $y_i(x)\not\equiv 0$ *non-trivial* 与对应的特征值 *eigenvalue* λ_i，定义为满足如下的关系：

$$\left\{(y_i,\lambda_i)\right\}_{i=1} \quad \text{s.t.} \quad L_n[y_i]=\lambda_i\cdot\rho(x)\cdot y_i \quad \text{under homogeneous conditions}$$

简单起见，我们一般默认考虑（除非特别说明）$\rho(x)\equiv 1$，此时内积可化为：

$$\langle u,v\rangle=\int_a^b u(x)\,\overline{v(x)}dx$$

特征函数 $y_i(x)\not\equiv 0$ 与对应的特征值 λ_i 在齐次条件下满足：$L_n[y_i]=\lambda_i\cdot y_i$。在解特征值问题时，我们要特别注意以下几点：

Key Points about Eigenfunctions 1 齐次边界条件 不论问题本身是什么类型的边界条件，我们在求特征方程时都默认是对应的齐次边界条件；

Key Points about Eigenfunctions 2 特征值权重 当我们把算子进行转化后（比如同时乘或约掉一个项），所得到的特征等式可能发生变化（主要是变化一个权重）。虽然这不一定影响解出的特征值和特征函数，但特征等式可能需要补上相应的权重函数 $\rho(x)$。比如：当我们发现某一个算子可以提取公因式 $L_1=\rho(x)\cdot L_2$，在约去公因式 $\rho(x)$ 后求 $L_2[y_i]=\lambda_i y_i$ 得到的特征函数与特征值实际上对于原来的算子 L_1 来说是相对于被约去公因式作为权重而言的，即：

$$L_2[y_i]=\lambda_i y\Longleftrightarrow\left(\rho(x)\cdot L_2\right)[y_i]=\rho(x)\lambda_i y_i\Longleftrightarrow L_1[y_i]=\rho(x)\lambda_i y_i$$

详细例题见**Problem Sheet 01, Q3**。

Definition 2.1.2. 边界值问题的伴随问题（*adjoint problems*）
同样考虑齐次线性边界值问题 (Lu, HBC) *i.e.*, $(*)$ s.t. $c_i = 0$，其伴随问题定义为一个包含：在规定内积下的伴随变换 L^*v，与一组齐次伴随边界条件 HBC^* 的二元组 (L^*v, HBC^*)，使得：

$$\langle Lu, v\rangle_1 = \langle u, L^*v\rangle_1 \quad \text{w.r.t.} \quad u \in \mathrm{HBC}\,(a,b) \wedge v \in \mathrm{HBC}^*\,(a,b)$$

若 $L^* = L$ 则称这个算子为自伴算子（*self-adjoint*），或 *formally self-adjoint*；
若 $L^* = L$ 且 $\mathrm{HBC}^* = \mathrm{HBC}$ 则称这个 BVP 为自伴 BVP，或 *fully self-adjoint*。
典型例题详见 Problem Sheet 01, Q1 / Lecture Notes pp. 7-8。

Key Points about Adjoint 1 齐次边界条件 不论问题本身是什么类型的边界条件，我们在求其伴随问题时都默认是对应的齐次边界条件；同时，在应用等式 $\langle Lu, v\rangle_1 = \langle u, L^*v\rangle_1$ 时，务必确认函数 u, v 分别满足对应位置上的齐次边界条件 $u \in \mathrm{HBC}\,(a,b) \wedge v \in \mathrm{HBC}^*\,(a,b)$。详细例题见**Problem Sheet 01, Q4**，讨论关于目标解函数不满足齐次边界条件时会产生的现象，简单概括，当 $u \notin \mathrm{HBC}\,(a,b) \wedge v \in \mathrm{HBC}^*\,(a,b)$ 时分部积分有可能出现：

$$\langle Lu, v\rangle_1 = \langle u, L^*v\rangle_1 + F\,(a,b) \neq \langle u, L^*v\rangle_1$$

其中 $F\,(a,b)$ 为分部积分后的积分余项，可以用问题本身的边界条件消除或化简，但只有在 $u \in \mathrm{HBC}\,(a,b)$ 时才能一定为 0。

Key Points about Adjoint 2 内积定义 不论我们的特征函数与特征值是否相对于某个权重函数，在计算伴随问题（即解伴随变换与伴随条件）时，都使用权重函数为 1。详细例题见**Problem Sheet 01, Q3**。

Key Points about Adjoint 3 确定伴随问题的步骤 通常确定一个 BVP 的伴随问题，需要经历以下步骤（注意在此处$\rho\,(x) \equiv 1$）：首先，采用分部积分将导数从 u 转移到 v；最后，在不含积分号的余项中，利用 HBC 分别对 u 在 a, b 处的导数合并同类项，规定合并后括号内涉及 v 在 a, b 处导数的部分为 0，从而得到 HBC^*。

Properties 2.1.1. 特征方程的性质
1) BVP 与其伴随问题 BVP^* 享有共轭的特征值：$Ly = \lambda\rho y \Longrightarrow \exists\ w : L^*w = \overline{\lambda}\rho w$
2) $Ly_i = \lambda_i\rho y_i$ 且 $L^*w_j = \lambda_j\rho w_j$ s.t. $\lambda_i \neq \overline{\lambda}_j \Longrightarrow \langle y_i, w_j\rangle_\rho = 0$

Proof 2.1.1 (2) $\lambda_i\langle\rho y_i, w_j\rangle_1 = \langle Ly_i, w_j\rangle_1 = \langle y_i, L^*w_j\rangle_1 = \overline{\lambda}_j\langle y_i, \rho w_j\rangle_1$，显然有：

$$\left(\lambda_i - \overline{\lambda}_j\right)\langle y_i, w_j\rangle_\rho = 0\ ,\ \lambda_i \neq \overline{\lambda}_j \Longrightarrow \langle y_i, w_j\rangle_\rho = 0$$

2.2 Inhomogeneous BVP with Homogeneous BCs

考虑齐次条件（separated）的非齐次 BVP

$$L_n\left[u(x)\right]=f(x) \quad \text{s.t.} \quad a<x<b$$

$$\text{w.r.t.} \quad A_i\left[u(a)\right]=0 \ \text{ for } \ \forall i=1\cdots k \ \text{ and } \ B_j\left[u(b)\right]=0 \ \text{ for } \ \forall j=1\cdots l$$

其中 $k+l=n$，采用如下过程解该微分方程：

STEP 1 找到伴随问题 (L^*v, HBC^*) (此处的内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$)

STEP 2 解关于原问题 (Lu, HBC) 的特征值问题，并找到 $\{(y_i,\lambda_i)\}_{i=1}$

$$Ly=\lambda\rho y \quad \text{w.r.t} \quad \text{HBC}$$

STEP 3 解关于伴随问题 (L^*v, HBC^*) 的特征值问题，并找到 $\{(w_k,\lambda_k)\}_{i=k}$，注意如果为 fully-adjoint 可以省略此步骤

$$L^*w=\lambda\rho w \quad \text{w.r.t} \quad \text{HBC}^*$$

STEP 4 设方程的解为特征方程的线性组合

$$u=\textstyle\sum_{i=1} c_i\cdot y_i$$

STEP 5 配对好 $\{(y_k,w_k,\lambda_k)\}_{i=k}$ 两边同时对 w_k 作内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 来确定系数

$$\begin{aligned}
\langle Lu,w_k\rangle_1=\langle f,w_k\rangle_1 &\Longrightarrow \boldsymbol{\langle u,L^*w_k\rangle_1=\langle f,w_k\rangle_1}\\
&\Longrightarrow \bar{\lambda}_k\langle \textstyle\sum_{i=1} c_iy_i,\rho w_k\rangle_1=\langle f,w_k\rangle_1\\
&\Longrightarrow \bar{\lambda}_k\cdot\textstyle\sum_{i=1} c_i\langle y_i,w_k\rangle_\rho=\langle f,w_k\rangle_1\\
&\Longrightarrow \bar{\lambda}_k\cdot c_k\langle y_k,w_k\rangle_\rho=\langle f,w_k\rangle_1\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{c_k=\frac{\langle f,w_k\rangle_1}{\bar{\lambda}_k\langle y_k,w_k\rangle_\rho}} \qquad (*)
\end{aligned}$$

STEP 6 最终解为 $u=\sum_{k=1} c_k\cdot y_k$

Remark 关于最核心的 STEP 5 有诸多关键需要深入讨论，推荐详细考虑例题 **Problem Sheet 01, Q4**（或将在下文给出）。具体来说有如下几个要点：

1） 伴随变换涉及的必要性 下面提供了一种错误的推导方式，其与 STEP 5 中正确的推导方式仅在第一步有主要区别，并且不涉及伴随变换：

$$\langle Lu,w_k\rangle_1=\langle f,w_k\rangle_1 \Longrightarrow \langle L\left[\textstyle\sum_{i=1} c_iy_i\right],w_k\rangle_1=\langle f,w_k\rangle_1$$
$$\Longrightarrow \langle \textstyle\sum_{i=1} c_iL\left[y_i\right],w_k\rangle_1=\langle f,w_k\rangle_1 \Longrightarrow \sum_{i=1} c_i\lambda_i\langle\rho y_i,w_k\rangle_1=\langle f,w_k\rangle_1$$
$$\Longrightarrow c_k\lambda_k\langle y_k,w_k\rangle_\rho=\langle f,w_k\rangle_1 \Longrightarrow c_k=\langle f,w_k\rangle_1/\left(\lambda_k\langle y_k,w_k\rangle_\rho\right)$$

这种推理看似合理，实际上却很可能导致错误，一方面，分母上的特征值变成了 $\overline{\lambda}_k$ 而非其共轭；另外这种推导在处理非齐次边界条件时出现了极大的漏洞，它并没有涉及到考虑这些 (非齐次) 条件（见后文或例题 Problem Sheet 01, Q4）。最大的问题在于第一步，由于我们将解的形式设为了一个无穷级数，在一般的情形下并不能确保逐项求导的收敛性。即，在推导的第二至第三步时，$L\left[\sum_{i=1} c_i y_i\right] \Longrightarrow \sum_{i=1} c_i L\left[y_i\right]$ 并不能确保微分算子可以放到求和号的后面又保持级数的收敛性。

2） 应用伴随变换或者公式 $(*)$ 的条件 STEP 5 中推导的第一步运用了伴随变换的定义，注意这里可以使用的条件是这个问题的目标函数 $u \in \mathrm{HBC}$ 本身是符合齐次边界条件的（对于 w_k，由于其推导自默认齐次条件的特征问题，显然 $w_k \in \mathrm{HBC}^*$）；因此，由于推导的第一步就默认了整体的其次边界条件，最后推出的公式 $(*)$ 也显然只能在齐次边界条件的问题中使用。

3） 非齐次边界条件的变形解法 上述步骤也可以完全照搬到非齐次边界条件的情境中使用，同样还是设 $u = \sum_i c_i y_i$ 但需要注意的是此时 STEP 5 的第一步的伴随变换已然不成立，因为第一个位置上的 u 不再符合齐次边界条件，公式 $(*)$ 也不能直接使用。此时需要将 STEP 5 的第一步更改为直接分部积分：

$$
\begin{aligned}
\langle Lu, w_k\rangle_1 = \langle f, w_k\rangle_1 &\Longrightarrow \boldsymbol{\int_a^b L\left[u\right] w_k dx = \langle f, w_k\rangle_1} \\
&\Longrightarrow \boldsymbol{\langle u, L^* w_k\rangle_1 + F\left(a,b\right) = \langle f, w_k\rangle_1} \qquad (**) \\
&\Longrightarrow \overline{\lambda}_k \langle \textstyle\sum_{i=1} c_i y_i, \rho w_k\rangle_1 + F\left(a,b\right) = \langle f, w_k\rangle_1 \\
&\Longrightarrow \overline{\lambda}_k \cdot \textstyle\sum_{i=1} c_i \langle y_i, w_k\rangle_\rho + F\left(a,b\right) = \langle f, w_k\rangle_1 \\
&\Longrightarrow \overline{\lambda}_k \cdot c_k \langle y_k, w_k\rangle_\rho = \langle f, w_k\rangle_1 - F\left(a,b\right) \\
&\Longrightarrow \boldsymbol{c_k = \frac{\langle f, w_k\rangle_1 - F\left(a,b\right)}{\overline{\lambda}_k \langle y_k, w_k\rangle_\rho}} \qquad (***)
\end{aligned}
$$

注意此处，分子上多出了积分余项，而这个余项可以结合特征函数本身和非齐次边界条件进行进一步的化简。而读者可能会怀疑结果的合理性，因为每一项特征函数 y_k 都满足其次边界条件，为何由他们线性组合出来的函数 $u = \sum_i c_i y_i$ 确能够满足非齐次条件？这是由于犯了一个常见的错误，当我们在考虑 $u\left(x\right)$ 端点的“取值”时，我们实际上是在讨论其在端点处的极限，即$u\left(a\right) = \lim_{x\to a+} \sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k\left(x\right)$（resp. $u\left(b\right)$），然而无穷求和号与外侧极限能进行交换需要十分严苛的条件，不普遍成立，即：

$$
\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to a+} c_k y_k\left(x\right) = 0 \;\; \not\Rightarrow \;\; u\left(a\right) = \lim_{x\to a+} \sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k\left(x\right) = 0
$$

2.3 Inhomogeneous BVP with Inomogeneous BCs

考虑非齐次条件（separated）的非齐次 BVP

$$
\begin{aligned}
&L_n\left[u(x)\right] = f(x) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\
\text{w.r.t.} \quad &A_i\left[u(a)\right] = \alpha_i \quad \text{for} \quad \forall i = 1\cdots k \quad \text{and} \quad B_j\left[u(b)\right] = \beta_j \quad \text{for} \quad \forall j = 1\cdots l
\end{aligned}
$$

其中 $k+l=n$，一种方法是入前一章讨论的，采用如下过程解该微分方程：

Method I Eigenfunction

STEP 1 找到伴随问题 (L^*v, HBC^*) (此处的内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$)

STEP 2 解关于原问题 (Lu, HBC) 的特征值问题，并找到 $\{(y_i, \lambda_i)\}_{i=1}$

$$Ly = \lambda\rho y \quad \text{w.r.t} \quad \text{HBC}$$

STEP 3 解关于伴随问题 (L^*v, HBC^*) 的特征值问题，并找到 $\{(w_k, \lambda_k)\}_{i=k}$，注意如果为 fully-adjoint 可以省略此步骤

$$L^*w = \lambda\rho w \quad \text{w.r.t} \quad \text{HBC}^*$$

STEP 4 设方程的解为特征方程的线性组合

$$u = \sum_{i=1} c_i \cdot y_i$$

STEP 5 配对好 $\{(y_k, w_k, \lambda_k)\}_{i=k}$ 两边同时对 w_k 作内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 来确定系数

$$
\begin{aligned}
&\langle Lu, w_k\rangle_1 = \langle f, w_k\rangle_1 \Longrightarrow \boldsymbol{\int_a^b L\left[u\right] w_k dx = \langle f, w_k\rangle_1} \\
&\Longrightarrow \boldsymbol{\langle u, L^* w_k\rangle_1 + F(a,b) = \langle f, w_k\rangle_1} \\
&\Longrightarrow \overline{\lambda}_k \langle \textstyle\sum_{i=1} c_i y_i, \rho w_k\rangle_1 + F(a,b) = \langle f, w_k\rangle_1 \\
&\Longrightarrow \overline{\lambda}_k \cdot \textstyle\sum_{i=1} c_i \langle y_i, w_k\rangle_\rho + F(a,b) = \langle f, w_k\rangle_1 \\
&\Longrightarrow \overline{\lambda}_k \cdot c_k \langle y_k, w_k\rangle_\rho = \langle f, w_k\rangle_1 - F(a,b) \\
&\Longrightarrow \boldsymbol{c_k = \frac{\langle f, w_k\rangle_1 - F(a,b)}{\overline{\lambda}_k \langle y_k, w_k\rangle_\rho}}
\end{aligned}
$$

STEP 6 最终解为 $u = \sum_{k=1} c_k \cdot y_k$

一般还有另外一种比较常见的方法，即将原问题化为另外两个简单问题：

Method II Decomposition

$$\begin{aligned} & L_n\left[u(x)\right] = f(x) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \qquad & A_i\left[u(a)\right] = \alpha_i \quad \text{for} \quad \forall i = 1\cdots k \\ & B_j\left[u(b)\right] = \beta_j \quad \text{for} \quad \forall j = 1\cdots l \end{aligned}$$

STEP 1 将原问题化为如下两个问题，一个是齐次边界非齐次方程 $(*)$，一个为齐次方程非齐次边界 $(**)$：

$$\begin{aligned} & L_n\left[u_1(x)\right] = f(x) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \qquad & A_i\left[u_1(a)\right] = 0 \quad \text{and} \quad B_j\left[u_1(b)\right] = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & L_n\left[u_2(x)\right] = 0 \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \qquad & A_i\left[u_2(a)\right] = \alpha_i \quad \text{and} \quad B_j\left[u_2(b)\right] = \beta_j \qquad (**) \end{aligned}$$

STEP 2 分开解方程 $(*)\,,(**)$，得到 $u_1(x)\,,u_2(x)$，最终解为

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x)$$

解的合理性不难由算子的线性性质得出。

下面用方法一解一例题（取自 Problem Sheet 01, Q4）

Example 2.3.1. 特征方程法解非齐次边界条件方程 用特征法解如下方程 $y'' = 0 \;\; \text{s.t.} \;\; y(0) = 0 \;\; , \;\; y(1) = 1$，已知其为完全自伴随问题（可以省略第一、三步）。为方便对照，从 STEP 2 开始标注步骤

STEP 2 解关于原问题 (Lu, HBC) 的特征值问题，并找到 $\{(y_i, \lambda_i)\}_{i=1}$

$$y'' = \lambda y \quad \text{w.r.t} \quad \mathrm{y}(0) = 0 \quad , \quad \mathrm{y}(1) = 0$$

显然只有当 $\lambda < 0$ 时能有非平凡解，带入齐次边界：

$$y_k(x) = sin(k\pi x) = w_k(x) \quad , \quad \lambda_k = -k^2\pi^2 \quad \text{s.t.} \quad k \in \mathbb{N}$$

STEP 4 设方程的解为特征方程的线性组合

$$u = \textstyle\sum_{i=1} c_i \cdot y_i$$

STEP 5 两边同时对 w_k 作内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 来确定系数

$$\begin{aligned}\langle Ly, w_k\rangle_1 &= \int_0^1 y'' w_k dx = \int_0^1 y w_k'' dx + \{y'w_k - yw_k'\}|_0^1 \\ &= \langle u, L^* w_k\rangle_1 + F(0,1) \\ &= \overline{\lambda}_k \langle \textstyle\sum_{i=1} c_i y_i, w_k\rangle_1 + F(0,1) = \overline{\lambda}_k \cdot \sum_{i=1} c_i \langle y_i, w_k\rangle_1 + F(0,1) \\ &= \overline{\lambda}_k \cdot c_k \langle y_k, w_k\rangle_1 + F(0,1) = \langle 0, w_k\rangle_1 = 0\end{aligned}$$

不难求得

$$\begin{aligned}F(0,1) &= \{y'w_k - yw_k'\}|_0^1 = y' sin(k\pi x)|_0^1 - k\pi \cdot y \cdot cos(k\pi x)|_0^1 \\ &= 0 - k\pi \cdot y(1) \cdot cos(k\pi) + k\pi \cdot y(0) \cdot cos(0) \\ &= -k\pi \cdot 1 \cdot (-1)^k + k\pi \cdot 0 \cdot 1 = -k\pi \cdot (-1)^k \quad \text{(using BC)}\end{aligned}$$

此外 $\langle y_k, w_k\rangle_1 = \langle y_k, y_k\rangle_1 = \int_0^1 sin^2(k\pi x)\,dx = 1/2$，于是有：

$$c_k = \frac{2(-1)^{(k+1)}}{k\pi}$$

最终解为

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{(k+1)}}{k\pi} \cdot sin(k\pi x)$$

正好是 $y = x$ 的傅里叶展开。注意显然求和号里的各项在 $x = 1$ 处为 0，但是我们依然有（见下图）：

$$y\left(1^-\right) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{(k+1)}}{k\pi} \cdot sin(k\pi x) = 1$$