

Applied Partial Differential Equations

Chenghao Dong

January 1, 2024

CONTENTS

1	Introduction	3
1.1	Notations for Multivariable Derivatives	3
1.2	Classification of PDEs	4
2	Symmetry and Similarity Solutions	5
2.1	Symmetry Transformations	5
2.2	Similarity Solutions	7
2.3	Solving PDEs with Similarity Solutions	9
3	First Order Quasilinear Equations	12
3.1	Method of Characteristics	12
3.2	Discontinuous Initial Curves	16
3.3	Existence and Uniqueness of Solutions	19
3.4	Domain of Definition	23
4	Weak Solutions and Shocks	25
4.1	Weak Solutions	25
4.2	Shocks and Nonuniqueness of Weak Solutions	28
4.3	Introducing Shocks into Solutions	30
5	First Order Nonlinear Equations	33
5.1	Charpit's Equations	33
6	First Order Quasilinear Systems	38
6.1	Method of Characteristics	38
6.2	Examples When Method of Characteristics Works	43
6.3	Initial Data and Domain of Definition	49
6.4	Weak Solutions and Shocks	51
7	Second Order Semilinear Equations	54
7.1	Introduction and Cauchy Data	54
7.2	Canonical Forms	56
8	Second Order Hyperbolic Equations	58
8.1	Non-Cauchy Data	58
8.2	Riemann's Method	58
9	Second Order Elliptic Equations	60
9.1	Well-posed Boundary Data	60
9.2	Green's Function	62
9.3	Method of Images	66

9.4	Conformal Mappings	68
10	Second Order Parabolic Equations	69
10.1	Well-posed Boundary Data	69
10.2	Green's Function	71

1 Introduction

1.1 Notations for Multivariable Derivatives

Definition 1.1.1. 偏导数的多重下标 (multi-index)

记 $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ 称为偏导数的多重下标；定义该下标的长度 (length) 为 $|\alpha| = a_1 + \dots + a_n$ ，阶乘为 $\alpha! = a_1! \cdots a_n!$ ；特别地，记 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ 。于是有以下算符：

$$D^\alpha := \partial^\alpha := \partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}$$

注意有以下几种常见的表达： $\sum_{|\alpha|=k} D^\alpha u$ 与 $\sum_{|\alpha|\leq k} D^\alpha u$ 分别表示函数 u 的所有 k 阶偏导项，与 u 的所有阶数小于 k 的偏导项。

Remark $\sum_{|\alpha|=k} D^\alpha u$ 有总计不超过 $\binom{n+k-1}{k}$ 项，即为 $|\alpha| = k$ 的非负整数解个数； $\sum_{|\alpha|\leq k} D^\alpha u$ 有总计不超过 $\binom{n+k}{k}$ 项。

Theorem 1.1.1. 多项式定理 (multinomial theorem) 对于多元函数自变量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ，与多重下标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 有：

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot \mathbf{x}^\alpha \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x}^\alpha = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

Theorem 1.1.2. 多元函数的泰勒展开 (multivariable taylor's theorem)

记函数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的 $(k+1)$ 阶连续可微函数，即 $f \in C^{k+1}(\Omega)$ ，则对 $\mathbf{x} \in \Omega$ 与充分小的 $\Delta \mathbf{x}$ s.t. $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \in \Omega$ ，有：

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x})}{\alpha!} \Delta \mathbf{x}^\alpha + R_{x,k}(\Delta \mathbf{x})$$

其中拉格朗日余项为：

$$R_{x,k}(\Delta \mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x} + c)}{\alpha!} \Delta \mathbf{x}^\alpha \quad \text{for some } c \in (0, 1)$$

特别地，如果满足 $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ s.t. $\Delta x_1 = \cdots = \Delta x_n = \Delta x$ ，则 $R_{x,k}(\Delta \mathbf{x}) = O(\Delta x^{k+1})$ 。

Theorem 1.1.3. 多元函数的散度定理 (divergence theorem)

记 Ω 为 \mathbb{R}^n 中的由 $\partial\Omega$ 围成的有界连通区域， \mathbf{n} 为曲面 $\partial\Omega$ 上的单位法向量。若矢量函数 \mathbf{v} 在闭区域 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 上连续，在 Ω 内有一阶连续偏导数，则：

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

1.2 Classification of PDEs

偏微分方程的分类在很大程度上决定了解法的选则。在本课程中，我们将主要了解以下几种主要的 PDE 形式；且在无特别说明的情况下，我们默认仅考虑 (至多) 二元二阶 PDE (PDE 的阶数是指其含有的最高阶导数的阶数) 且认为研究的问题中涉及的函数 (包括系数函数) 都足够光滑：

Definition 1.2.1. 线性偏微分方程 (linear pdes)

k 阶线性偏微分方程的一般形式如下：

$$\sum_{|\alpha| \leq k} A_{\alpha}(x) D^{\alpha} u(x) = f(x)$$

二元二阶线性 PDE 的一般形式如下：

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f(x, y)$$

其中 $A(x, y) \sim F(x, y)$ 是关于自变量的函数。线性 PDE 的特征是等式左侧的算子为线性算子。当 PDE 的边界条件与初值条件均为线性条件时 (不涉及因变量的乘法或其他复杂运算)，称这个问题整体为线性问题。所有其他非线性的 PDE 统称为 *non-linear*。

Definition 1.2.2. 拟线性偏微分方程 (semilinear pdes)

当最高阶导数的部分为线性时，称此类 PDE 为拟线性 (注意一般的拟线性仍然属于非线性)。 k 阶拟线性偏微分方程的一般形式如下：

$$\sum_{|\alpha| = k} A_{\alpha}(x) D^{\alpha} u(x) = f(D^{\beta} u(x), x) \quad \text{where } |\beta| < k$$

二元二阶拟线性 PDE 的一般形式如下：

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = f(u_x, u_y, u, x, y)$$

Definition 1.2.3. 准线性偏微分方程 (quasilinear pdes)

当最高阶导数前的系数只包含自变量与更低阶导数时，称此类 PDE 为准线性 (显然一般的准线性也属于非线性)。 m 阶准线性偏微分方程的一般形式如下：

$$\sum_{|\alpha| = m} A_{\alpha}(D^{\beta} u, x) D^{\alpha} u(x) = f(D^{\gamma} u(x), x)$$

其中 $|\beta|, |\gamma| < m$ 。二元一阶的准线性 PDE 一般形式如下：

$$D(u, x, y) u_x + E(u, x, y) u_y = f(u, x, y)$$

二元二阶的准线性 PDE 一般形式如下：

$$\begin{aligned} A(u_x, u_y, u, x, y) u_{xx} + B(u_x, u_y, u, x, y) u_{xy} \\ + C(u_x, u_y, u, x, y) u_{yy} = f(u_x, u_y, u, x, y) \end{aligned}$$

2 Symmetry and Similarity Solutions

2.1 Symmetry Transformations

Definition 2.1.1. 对称变换 (symmetry transformations)

仅考虑二元函数 $u(x, t)$ 的偏微分方程 $D_{(x,t)}[u(x, t)] = \phi(x, t)$, $\forall (x, t) \in \Omega$, D 为一个微分算子。如果存在一组映射 (或变量替换):

$$\{x, t, u\} \mapsto \{\xi(x, t, u), \tau(x, t, u), w(x, t, u(\xi, \tau))\}$$

使得 $u(x, y)$ 为此偏微分方程的解能推出 $w(x, y)$ 也为此偏微分方程的解 (注意 w 可以化为关于替换前变量 (x, t) 的函数):

$$D_{(x,t)}[u(x, t)] = \phi(x, t) \Rightarrow D_{(x,t)}[w(x, t)] = \phi(x, t)$$

此时称此偏微分方程为对称的 (*symmetry*), 对应的变量变换称为对称变换 (*symmetry transformation*)。注意我们强调, 所谓“变换后仍为微分方程的解”指的是对于之前的 (x, t) 导数而言的。然而由于假设了 $u(x, t)$ 为偏微分方程的解, 那么显然不论在定义区域内的任何点上都有 $D_{(x,t)}[u(x_0, t_0)] = \phi(x_0, t_0)$, $\forall (x_0, t_0) \in \Omega$; 特别地, 如果换元后 $(\xi, \tau) \in \Omega$ 则理应有:

$$D_{(\xi,\tau)}[u(\xi, \tau)] = \phi(\xi, \tau), \forall (\xi, \tau) \in \Omega$$

最后强调一点, $u \mapsto w(x, t, u(\xi, \tau))$ 中后面的 $u(\xi, \tau)$ 应视为保持原自变量位置的因变量替换, 即新自变量直接在对原自变量的位置上对其进行替换 ($u_x(x, t) = g(x, t) \iff u_\xi(\xi, \tau) = g(\xi, \tau)$, *resp.* $u_t, u_{xx} \dots$)。

下面讨论一个简单的例子:

Example 2.1.1. 对称变换的检验 现考虑一组应用于方程 $u_x + t^2 u_t = 0$ 的简单变换 (固定 L), 尝试找出使得变换为对称变换的参数 β 取值。

$$\begin{cases} x \mapsto \xi(x, t, u) = x/L \\ t \mapsto \tau(x, t, u) = t/L^\beta \\ u \mapsto w(x, t, u(\xi, \tau)) = u(\xi, \tau) \end{cases}$$

将变换后的因变量 $w(x, t) = u(\xi(x, t), \tau(x, t))$ 带入方程:

$$w_t(x, t) = u_\xi \xi_t + u_\tau \tau_t = u_\tau(\xi, \tau) / L^\beta \quad (1)$$

$$w_x(x, t) = u_\xi \xi_x + u_\tau \tau_x = u_\xi(\xi, \tau) / L \quad (2)$$

$$w_x + t^2 w_t = u_\xi(\xi, \tau) / L + (t^2 / L^\beta) u_\tau(\xi, \tau) \quad (3)$$

为确保变换对于微分方程对称, 显然我们需要有 $w_x + t^2 w_t = 0$:

$$u_\xi(\xi, \tau)/L + (t^2/L^\beta) u_\tau(\xi, \tau) = u_\xi(\xi, \tau)/L + \tau^2 L^\beta u_\tau(\xi, \tau) = 0$$

又已知 $u(x, y)$ 为方程的解, 在 (ξ, τ) 的位置上考虑原方程确定的关系:

$$u_\xi(\xi, \tau) + \tau^2 u_\tau(\xi, \tau) = 0$$

整合二式:

$$\begin{cases} u_\xi(\xi, \tau)/L + \tau^2 L^\beta u_\tau(\xi, \tau) = 0 \\ u_\xi(\xi, \tau) + \tau^2 u_\tau(\xi, \tau) = 0 \end{cases}$$

不难解得

$$\tau^2 u_\tau(\xi, \tau) (-1/L + L^\beta) = 0 \implies \beta = -1$$

Definition 2.1.2. 伸缩对称变换 (dilation symmetries) 我们考虑如下一种常见的变换 $\varepsilon \neq 0$:

$$\begin{cases} x \mapsto \xi(x, t, u) = \varepsilon^\alpha \cdot x \\ t \mapsto \tau(x, t, u) = \varepsilon^\beta \cdot t \\ u \mapsto w(x, t, u(\xi, \tau)) = \varepsilon^\gamma \cdot u(\xi, \tau) \end{cases}$$

此类变换称为伸缩变换。一般我们的一个目标是确定参数 (α, β, γ) 使得该伸缩变换是对于目标方程的对称变换。

到现在为止我们讨论了偏微分方程的对称变换和一类特殊的伸缩变换。我们的实际目的就是利用这一对称性。实际上, 利用这些对称变换, 我们有机会将偏微分方程转化为常微分方程进行求解从而大大简化求解难度。当然, 这种机会是偶然的, 但在很多情况下不妨一试。下面我们将讨论如何利用伸缩对称变换达到这一效果。

2.2 Similarity Solutions

在本节中，未经特殊说明，我们讨论的对称变换均默认为对关于 $u(x, t)$ 的偏微分方程的**伸缩对称变换**，即对 $\varepsilon \neq 0$ ：

$$\begin{cases} x \mapsto \xi(x, t, u) = \varepsilon^\alpha \cdot x \\ t \mapsto \tau(x, t, u) = \varepsilon^\beta \cdot t \\ u \mapsto w(x, t, u(\xi, \tau)) = \varepsilon^\gamma \cdot u(\xi, \tau) \end{cases} \quad (*)$$

利用对称变换将偏微分方程转化为常微分方程的关键在于其对称性。正如我们在上文讨论的，在对称变换中如果 $u(x, t)$ 是方程的解，则其在变换下的像 $w(x, t) = w(x, t, u(\xi, \tau))$ 也是方程的解。那么有没有一种**可能这两个解所指代的其实是同一个解**呢，也即有没有可能在相似变换的语境下，存在关系：

$$w(x, t, u(\xi, \tau)) \equiv u(x, t)$$

事实证明这是可能的，所以我们定义：

Theorem 2.2.1. 不变解 (invariant solutions) 若对于相似变换，若变换前后的两个解 $u(x, t)$ 与 $w(x, t) = w(x, t, u(\xi, \tau))$ 保持不变，即

$$w(x, t, u(\xi, \tau)) \equiv u(x, t)$$

则称其为一个不变解。特别的，对于伸缩变换，我们要求：

$$\varepsilon^\gamma \cdot u(\xi, \tau) \equiv u(x, t)$$

下面一条定理解释了我们要寻找这种关系的原因，简单来说，**对于伸缩对称变换**，如果一个解为不变解则，则其必然可以化简成某种特殊形态。

Theorem 2.2.2. 伸缩对称变换的相似解 (similarity solutions) 若 (*) 对关于 $u(x, t)$ 的偏微分方程存在不变解 $u(x, t)$ ，则其一定形如下：

$$u(x, t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta) \quad \text{s.t.} \quad \eta = \frac{x}{t^{\alpha/\beta}}$$

此时称该解为对应方程的相似解， η 为相似变量 *similarity variable*。注意，**这种形式的解并不一定总是存在**。

Proof Theorem 2.2.2 假设存在不变解 $u(x, t)$, 现在考虑一组一对一坐标变换 $(x, t) \mapsto (\eta(x, t), \varphi(x, t))$ s.t.

$$\eta(x, t) = \frac{x}{t^{\alpha/\beta}} \quad \varphi(x, t) = x \cdot t^{(-\alpha+\gamma)/\beta}$$

注意这组坐标变换并不一定是对称变换。同时, 不失普遍性, 我们假设 $x, t > 0$, 且不考虑那些测度为零的不可逆点集。于是在该坐标变换下, 不变解 $u(x, t)$ 可以一对一化为某个用 $(\eta(x, t), \varphi(x, t))$ 坐标表示的函数, 即

$$\exists g \text{ s.t. } u(x, y) = g(\eta, \varphi)$$

我们同时构造另一个函数: $f(\eta, \varphi) = g(\eta, \varphi) \cdot \frac{\varphi}{\eta}$, 在伸缩对称变换下, 我们有 (注意位置不变性):

$$f\left(\eta(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t), \varphi(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t)\right) = g\left(\eta(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t), \varphi(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t)\right) \cdot \frac{\varphi(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t)}{\eta(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t)} \quad (**)$$

同时

$$\begin{aligned} \eta(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t) &= \frac{\varepsilon^\alpha x}{\varepsilon^\alpha \cdot t^{\alpha/\beta}} = \eta \\ \varphi(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t) &= \varepsilon^\alpha x \cdot \varepsilon^{-\alpha+\gamma} \cdot t^{(-\alpha+\gamma)/\beta} = \varepsilon^\gamma \varphi \end{aligned}$$

又由解在伸缩对称变换下的不变性:

$$\varepsilon^\gamma g\left(\eta(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t), \varphi(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t)\right) = \varepsilon^\gamma u(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta t) = u(x, t) = g(\eta, \varphi)$$

将上述关系代入式 (**) 得到:

$$f(\eta, \varepsilon^\gamma \varphi) = \varepsilon^{-\gamma} g(\eta, \varphi) \cdot \varepsilon^\gamma = g(\eta, \varphi) \quad (***)$$

对 (***) 的两边对 ε 求偏导数:

$$f_\varphi(\eta, \varepsilon^\gamma \varphi) \cdot \varepsilon^\gamma = 0 \implies f_\varphi(\eta, \varepsilon^\gamma \varphi) = 0 \quad (\varepsilon \neq 0)$$

任取 $\varepsilon = 1$, 式子化为 $f_\varphi(\eta, \varphi) = 0$, 说明 f 实际上与 φ 无关, 所以回到我们之前设的式子, 化为:

$$f(\eta) = g(\eta, \varphi) \cdot \frac{\varphi}{\eta}$$

其中不难发现 $\varphi/\eta = t^{\gamma/\beta}$, 加上设的 $u(x, t) = g(\eta, \varphi)$, 我们最终有:

$$u(x, t) = f(\eta) \cdot t^{-\gamma/\beta}$$

2.3 Solving PDEs with Similarity Solutions

考虑二元函数 $u(x, t)$ 的偏微分方程：

$$D_{(x,t)}[u(x, t)] = \phi(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega$$

一般来说，利用伸缩对称变换解此问题大致分为三个主要步骤：

STEP 1 写出伸缩变换，利用对称性解出部分参数关系：

$$\begin{cases} x \mapsto \xi(x, t) = \varepsilon^\alpha \cdot x \\ t \mapsto \tau(x, t) = \varepsilon^\beta \cdot t \\ u \mapsto w(x, t) = \varepsilon^\gamma \cdot u(\xi(x, t), \tau(x, t)) \end{cases} \quad (*)$$

将 $w(x, t)$ 代入原微分方程使之成立；加上旧解 $u(x, t)$ 在 (ξ, τ) 上的等式，二者联立解出部分参数关系：

$$\begin{cases} D_{(x,t)}[w(x, t)] = \phi(x, t) \\ D_{(\xi,\tau)}[u(\xi, \tau)] = \phi(\xi, \tau) \end{cases} \quad (**)$$

STEP 2 设出相似解与相似变量，并利用上一步中解得的关系进一步化简：

$$u(x, t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta) \quad \text{s.t.} \quad \eta = \frac{x}{t^{\alpha/\beta}}$$

STEP 3 回带第二步中设的解形式进原方程，化为 ODE 求解方程，注意边界条件不一定要在最后代入，详见 **Problem Sheet 01, Q2**。

但还有一种相对来说更快的简化流程

STEP 1 设解的形式符合如下关系： $u(x, t) = t^\beta f(\eta)$ s.t. $\eta = t^\alpha x$

STEP 2 将 $u(x, t) = t^\beta f(\eta)$ 代入原方程，将 $\eta = t^\alpha x$ 视为整体，设定 α 与 β 的关系使新得到的方程可以化为关于 η 的 ODE，得到关于 α 与 β 的第一个关系；进一步带入初始或边界条件得到余下的条件信息，从而将问题彻底转化为关于 $f(\eta)$ 的 ODE。若此步骤无法成立，这说明相似解法失效。

STEP 3 求解前一步中的 ODE，详见 **Problem Sheet 01, Q2 (解法二)**。

下面给出一个例题，注意当函数 $f(x)$ 的不定积分无解析式时，不妨记其为 $F(x) = \int_a^x f(s) ds$ 。

Example 2.3.1. 相似解法解 PDE 考虑二元函数 $u(x, t)$ 的热方程：

$$u_t = u_{xx} \quad \text{s.t.} \quad u(x, 0) = u(\infty, t) = 0, \quad u(0, t) = 1$$

STEP 1 写出伸缩变换，利用对称性解出部分参数关系：

$$\begin{cases} x \mapsto \xi(x, t) = \varepsilon^\alpha \cdot x \\ t \mapsto \tau(x, t) = \varepsilon^\beta \cdot t \\ u \mapsto w(x, t) = \varepsilon^\gamma \cdot u(\xi(x, t), \tau(x, t)) \end{cases} \quad (*)$$

将 $w(x, t)$ 带入原微分方程使之成立，加上旧解 $u(x, t)$ 在 (ξ, τ) 上的等式，二者联立解出部分参数关系：

$$\left. \begin{aligned} w_t &= \varepsilon^\gamma u_\tau \cdot \varepsilon^\beta = \varepsilon^{\gamma+\beta} u_\tau \\ w_{xx} &= \varepsilon^\gamma (u_\xi \cdot \varepsilon^\alpha)_x = \varepsilon^{\gamma+2\alpha} u_{\xi\xi} \\ \text{Invariant condition} \quad w_t &= w_{xx} \\ \text{Evaluation } u \text{ at } (\xi, \tau) \quad u_\tau &= u_{\xi\xi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

STEP 2 设出相似解与相似变量，并利用上一步中解得的关系进一步化简：

$$u(x, t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta) \quad \text{s.t.} \quad \eta = x/\sqrt{t}$$

STEP 3 回带第二步中设的解形式 $u(x, t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta)$ 进原方程，化为 ODE 求解。首先转化边界条件：

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0^{-\gamma/\beta} f(\infty) = 0 \\ u(\infty, t) &= t^{-\gamma/\beta} f(\infty) = 0 \\ u(0, t) &= t^{-\gamma/\beta} f(0) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} f(\infty) &= 0 \\ f(0) &= 1 \\ t^{-\gamma/\beta} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

接着回带设的解形式 $u(x, t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta)$ 进原方程：

$$\left. \begin{aligned} u_t &= -\frac{\gamma}{\beta} \cdot t^{-\gamma/\beta-1} f(\eta) - t^{-\gamma/\beta-3/2} \frac{x}{2} f'(\eta) \\ u_{xx} &= t^{-\gamma/\beta} (f'(\eta) t^{-1/2})_x = t^{-\gamma/\beta} f''(\eta) t^{-1} \\ \text{Boundary condition} \quad t^{-\gamma/\beta} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f''(\eta) = -\frac{x}{2\sqrt{t}} f'(\eta)$$

又知道 $\frac{x}{\sqrt{t}} = \eta$, 故最终方程化为:

$$f''(\eta) = -\frac{\eta}{2} f'(\eta)$$

换元降次解得: $f'(\eta) = C \cdot e^{-\frac{1}{4}\eta^2} \Rightarrow f(\eta) = C \cdot \int_a^\eta e^{-\frac{1}{4}s^2} ds$ 最后带入剩下的两个边界条件加简单的换元不难得到最终解为:

$$f(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta/2}^\infty e^{-s^2} ds = \operatorname{erfc}(\eta/2) \Rightarrow u(x, t) = t^{-\gamma/\beta} f(\eta) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

更多例题: Lecture Notes pp.74-76

3 First Order Quasilinear Equations

3.1 Method of Characteristics

我们先考虑简单情况 $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$ ，此时有

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y - c(x, y, u) = \langle a, b, c \rangle \cdot \langle u_x, u_y, -1 \rangle = 0$$

即, $\langle a, b, c \rangle \cdot \nabla (u(x, y) - u) = 0$, 说明矢量场 $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ 与曲面 $u = u(x, y)$ 处处相切。我们考虑使用如下的方法构造解曲面 $\Sigma: u = F(x, y)$

首先, 选取 PDE 边界条件 $u(x, y_0) = f(x)$, resp. $u(x_0, y) = g(y)$ 所给定的空间曲线作为一条准线, 称为**初始曲线 initial curve**, 参数化后记作

$$\gamma_0(s) = x_0(s)\mathbf{i} + y_0(s)\mathbf{j} + u_0(s)\mathbf{k}$$

现假设解曲面 Σ 上有一条从 $(x_0, y_0, u_0)|_s \in \gamma_0(s)$ 出发的曲线 C_s , 参数化后记

$$C_s := \mathbf{C}(\tau; s) = x(\tau; s)\mathbf{i} + y(\tau; s)\mathbf{j} + u(\tau; s)\mathbf{k}$$

我们进一步要求, 在曲线 $\mathbf{C}(\tau; s)$ 上, 各点的切向量与矢量场 $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ 平行。即要求 C_s 为一条经过点 $(x_0, y_0, u_0)|_s$ 的矢量场 $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ 的矢量线, 可以解得

$$\begin{cases} x_\tau = a(x, y, u) \\ y_\tau = b(x, y, u) \\ u_\tau = c(x, y, u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\tau; s) = \widetilde{X}(\tau) + c_1(s) \\ y(\tau; s) = \widetilde{Y}(\tau) + c_2(s) \\ u(\tau; s) = \widetilde{U}(\tau) + c_3(s) \end{cases}$$

又因为我们要求了 $\mathbf{C}(\tau; s)$ 从 $(x_0, y_0, u_0)|_s \in \gamma_0(s)$ 出发, 所以

$$\begin{cases} x(0; s) = x_0(s) & \text{if } \tau = 0 \\ y(0; s) = y_0(s) & \text{if } \tau = 0 \\ u(0; s) = u_0(s) & \text{if } \tau = 0 \end{cases}$$

可以解出 $c_1(s) \sim c_3(s)$, 最终得到完整的 $\mathbf{C}(\tau; s)$ 参数方程

$$\begin{aligned} x &= X(\tau; s) = \widetilde{X}(\tau) + c_1(s) \\ y &= Y(\tau; s) = \widetilde{Y}(\tau) + c_2(s) \\ u &= U(\tau; s) = \widetilde{U}(\tau) + c_3(s) \end{aligned}$$

即

$$C_s := \mathbf{C}(\tau; s) = X(\tau; s)\mathbf{i} + Y(\tau; s)\mathbf{j} + U(\tau; s)\mathbf{k}$$

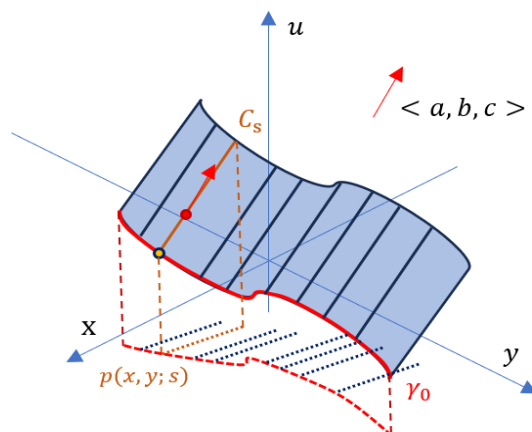
从一方面看, 给定任意一个 s , $C_s := C(\tau; s)$ 都给我们一条 \mathbb{R}^3 中固定的曲线, 称这些曲线为 PDE 的 **特征曲线 characteristic curves** 或 **积分曲线 integral curves**。特别强调, 对于齐次方程 s.t. $c \equiv 0$, 可以证明 u 在特征曲线上为常数, 且其值仅与特征曲线与初始曲线交点的位置有关, $u(x, y) = h(s(x, y))$ 。

特征曲线在 xOy 平面的投影称为 **特征投影 characteristic projection**。我们可以通过联立 $x = X(\tau; s)$, $y = Y(\tau; s_0)$ 消去参数 τ 得到这些投影 $p(x, y; s) = 0$ 。考虑到 s 实际上是一个由边界曲线 (初值曲线) 规定的参数变量, $p(x, y; s) = 0$ 实际上确定了一个 xOy 上关于变量 s 的 **投影簇**。特征投影簇将是后文确定解 u 合法定义域的重要依据。实际上,

Theorem 3.1.1. 若 xOy 平面内的任何一个点 (x, y) 被**唯一**的特征投影 $p(x, y; s) = 0$ 穿过, 若 $(x, y) \leftrightarrow (s, \tau)$ 还是可逆变换, 则在该点上 $u(x, y)$ 的值由特征曲线 $C(\tau; s)$ 唯一确定。

注意上述的前提不是 trivial 的, 特别是当初值曲线 γ_0 为分段函数 (甚至不连续) 时, 每段上的 s_i 都可能对应到 xOy 上的一类不同的特征投影 $p_i(x, y; s_i) = 0$ 。这些投影可能产生大量的交点, 意味着在这些区域 u 可能不存在传统意义上的解。此外, 在绘制特征投影时, 应当特别关注**同类特征投影** (沿伸自初值曲线同一段连续可微的部分) 的交点。这可能预示着 singularity 的出现, 特征投影在遇到 singularity 时因停止延伸。

另一方面, 将 s 视为参数。双参数方程 $X(\tau; s)\mathbf{i} + Y(\tau; s)\mathbf{j} + U(\tau; s)\mathbf{k}$ 实际上确定了空间中的一个曲面, 正是我们寻找的解曲面 Σ , 联立 $x = X(\tau; s)$, $y = Y(\tau; s)$, $u = U(\tau; s)$ 消去参数 τ, s 即可得到 PDE 的隐式解 $\phi(x, y, u) = 0$ 或显式解 $u = \varphi(x, y)$ 。



下面总结特征法的常规求解步骤：

方法一：含参法

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u)$$

STEP 1 将初始条件 $u(x, y_0) = f(x)$, resp. $u(x_0, y) = g(y)$ 参数化, 在 f 或 g 连续时可以设 $x_0(s) = s$, resp. $y_0(s) = s$. 得到参数化的初值曲线。

$$\gamma_0(s) = x_0(s) \mathbf{i} + y_0(s) \mathbf{j} + u_0(s) \mathbf{k}$$

STEP 2 解关于参数 τ 的特征方程组, 得到含“积分常数”的特征曲线簇。

$$\begin{cases} x_\tau = a(x, y, u) \\ y_\tau = b(x, y, u) \\ u_\tau = c(x, y, u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\tau; s) = \widetilde{X}(\tau) + c_1(s) \\ y(\tau; s) = \widetilde{Y}(\tau) + c_2(s) \\ u(\tau; s) = \widetilde{U}(\tau) + c_3(s) \end{cases}$$

STEP 3 回带参数化条件解出 $c_1(s) \sim c_3(s)$ 。

$$\begin{cases} x(0; s) = x_0(s) & \text{if } \tau = 0 \\ y(0; s) = y_0(s) & \text{if } \tau = 0 \\ u(0; s) = u_0(s) & \text{if } \tau = 0 \end{cases}$$

STEP 4 整理参数解, 可以的话消参得到显式解或隐式解。

$$\mathbf{C}_s := \mathbf{C}(\tau; s) = X(\tau; s) \mathbf{i} + Y(\tau; s) \mathbf{j} + U(\tau; s) \mathbf{k}$$

其中

$$\begin{aligned} x &= X(\tau; s) = \widetilde{X}(\tau) + c_1(s) \\ y &= Y(\tau; s) = \widetilde{Y}(\tau) + c_2(s) \\ u &= U(\tau; s) = \widetilde{U}(\tau) + c_3(s) \end{aligned}$$

上述方法可以被推广到任意个自变量的同类 PDE

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = c(\mathbf{x}, u)$$

$$\begin{aligned} \text{w.r.t. } \frac{dx_i}{d\tau} &= a_i(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) \quad , \quad x_{i0} = x_{i0}(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad \text{if } \tau = 0 \\ \frac{du}{d\tau} &= c(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) \quad , \quad u_0 = u_0(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad \text{if } \tau = 0 \end{aligned}$$

我们再考虑令一种更快（但等价）的方法，但是这次我们的特征方程组换为不含参数的等价形式

$$\frac{a(x, y, u)}{dx} = \frac{b(x, y, u)}{dy} = \frac{c(x, y, u)}{du}$$

这里面含有两个独立的方程，应该能解出两个含参解曲面

$$\begin{cases} f(x, y, u) = c_1 \\ g(x, y, u) = c_2 \end{cases}$$

这两个曲面的交线即为特征曲线 characteristics，然而我们的初始条件只能解出一个参数，不妨设 $c_1 = h(c_2)$ （或 $c_2 = h(c_1)$ ），即：

$$f(x, y, u) = h(g(x, y, u))$$

带入边界条件解出 $h(t)$ 的表达式即可。总结方法步骤为：

方法二：直求法

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u)$$

STEP 1 列出变量特征方程组

$$\frac{a(x, y, u)}{dx} = \frac{b(x, y, u)}{dy} = \frac{c(x, y, u)}{du}$$

STEP 2 解出两个含参解曲面

$$\begin{cases} f(x, y, u) = c_1 \\ g(x, y, u) = c_2 \end{cases}$$

STEP 3 设 $c_1 = h(c_2)$ （或 $c_2 = h(c_1)$ ），带入初始条件解出 $h(t)$ 的表达式

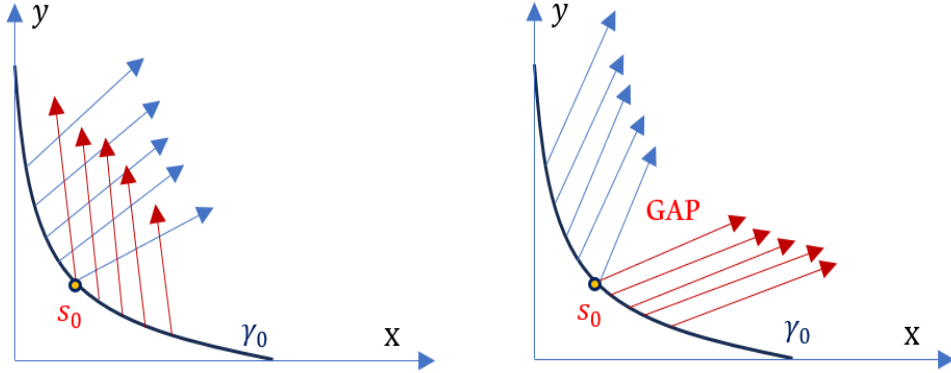
$$f(x, y, u) = h(g(x, y, u)) \Rightarrow F(x, y, u) = 0$$

3.2 Discontinuous Initial Curves

先前考虑的都是初始曲线 γ_0 (边界条件) 为连续曲线的情况。现假设在 $s = s_0$ 处 $\gamma_0(s)$ 有一个跳跃间断点, 利用该初值曲线分段求解往往会产生多类不同的特征曲线簇。

这些特征曲线簇一般会有如下两种关系, 一种如左图所示, **两簇特征投影相交 intersect**: 这意味着在相交部分区域的每个点, u 的值都可以由多根特征曲线决定, 因此我们 (至少现在) 应该在 u 的定义域中舍去这些区域。

另一种如右图所示, **两簇特征投影沿着相背的方向传播 diverge**: 此时这两簇特征曲线不会相交。然而, 这些曲线却在空间中遗留下了一块不被特征曲线覆盖的区域 gap, 在这块区域内, u 的值没有定义。本节主要考虑对后一种情况的处理方式, 对于前一种情况, 将在后文关于 weak solution 与 shock 的章节中详细讨论。



Technique 3.2.1. 特征投影出现 gap 的一种处理方法

考虑用特征法求方程 $a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u)$, 给定初始曲线

$$\gamma_0(s) = x_0(s) \mathbf{i} + y_0(s) \mathbf{j} + u_0(s) \mathbf{k}$$

其中 γ_0 有间断点 s_0 s.t. $\lim_{s \rightarrow s_0^+} \gamma_0(s) \neq \lim_{s \rightarrow s_0^-} \gamma_0(s)$ 。如果用常规法分段参数化 γ_0 画出特征投影存在 gap, 则可以用一根直线将 $\gamma_0^+(s_0)$ 与 $\gamma_0^-(s_0)$ 连接起来, 补全得到新的初始曲线 γ'_0 , 再对其用同一个参数 s 分段参数化 γ'_0 得到 $\gamma'_0(s)$ 作为新的初始曲线后重新求解即可。

Example 3.2.1. Filling the Gap 考虑如下 $u(x, t)$ 的方程与边界条件

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{s.t.} \quad u(x, 0) = 1_{\{x>0\}}$$

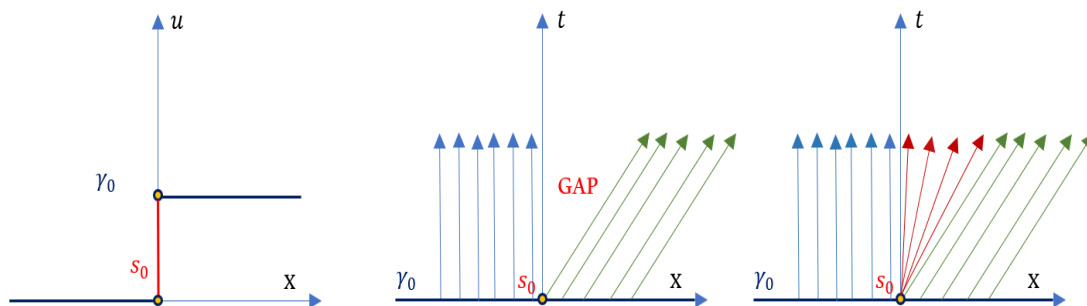
如果我们直接将边界条件（初始曲线）做如下的参数化

$$x_0(s) = s, \quad t_0(s) = 0, \quad u_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < 0 \\ 1 & \text{if } s > 0 \end{cases}$$

我们将会得到一个有 gap 的定义域，见下图 (2)；因此，在图 (1) 中我们将初始曲线的间断点处上下极限点用直线相连，重新参数化边界条件（用一个参数）为

$$x_0(s) = \begin{cases} s & \text{if } s < 0 \\ 0 & \text{if } 0 < s < 1 \\ s - 1 & \text{if } s > 1 \end{cases} \quad t_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < 0 \\ 0 & \text{if } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{if } s > 1 \end{cases} \quad u_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < 0 \\ s & \text{if } 0 < s < 1 \\ 1 & \text{if } s > 1 \end{cases}$$

其中公式的红色部分对应图 (1) 中红线部分的参数化。



接着按照特征法的正常流程解 PDE 即可

$$\begin{aligned} t_\tau = 1 & \Rightarrow t(\tau; s) = \tau + c_1(s) & , & \quad t_0(s) = c_1(s) \\ x_\tau = u & \Rightarrow x(\tau; s) = c_3(s)\tau + c_2(s) & , & \quad x_0(s) = c_2(s) \\ u_\tau = 0 & \Rightarrow u(\tau; s) = c_3(s) & , & \quad u_0(s) = c_3(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s < 0 & : & c_1(s) = 0 & \quad c_2(s) = s & \quad c_3(s) = 0 \\ 0 < s < 1 & : & c_1(s) = 0 & \quad c_2(s) = 0 & \quad c_3(s) = s \\ s > 1 & : & c_1(s) = 0 & \quad c_2(s) = s - 1 & \quad c_3(s) = 1 \end{aligned}$$

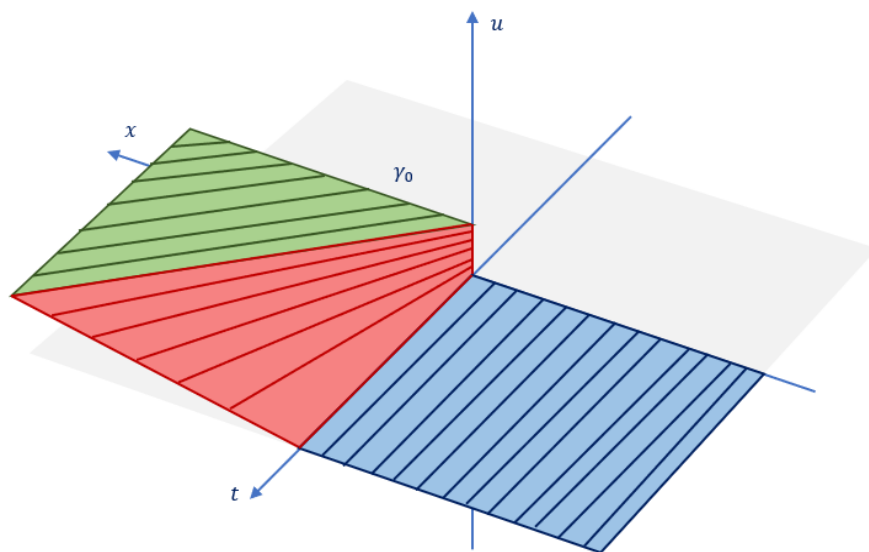
即有

$$\begin{array}{llll} s < 0 & : & t = \tau & x = s & u = 0 \\ 0 < s < 1 & : & t = \tau & x = s\tau & u = s \\ s > 1 & : & t = \tau & x = \tau + s - 1 & u = 1 \end{array}$$

消参有

$$\begin{array}{lll} x < 0 & : & x = s & u = 0 \\ 0 < x < t & : & x = st & u = x/t \\ x > t & : & x = t + s - 1 & u = 1 \end{array}$$

特征投影对应上图 (3), 解曲面形如下图。注意发现该解曲面在连接处的一阶偏导数不连续, 因此不是一个典型解而是一个弱解 weak solution (4.1.1), 我们将会在第四章证明, 弱解的一阶导数只能在特征曲线两边不连续。可以发现上述声明与我们的结果相符。



3.3 Existence and Uniqueness of Solutions

我们考虑解如下的一个方程：

$$u_x + u_y = 1$$

其特征投影为： $y = x + c_1$ on $u = 0$ ；其解曲面为： $u = \frac{1}{2}(x + y) + F(x - y)$ ，现在考虑下面三种可能的初始条件：

- 1) $u(x, -x) = 0$, i.e., $u = 0$ on $y = -x$ 此时得到**唯一解** $u = \frac{1}{2}(x + y)$
- 2) $u(x, x) = 0$, i.e., $u = 0$ on $y = x$ 此时得到 $F(0) = -x$ **解不存在**
- 3) $u(x, x) = x$, i.e., $u = x$ on $y = x$ 此时得到 $u = \frac{1}{2}(x + y) + F(x - y)$ s.t. $\forall F(0) = 0$ **有无数解**

一般来说，形如：

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (*)$$

$$\text{w.r.t. } u_0 = U_0(x_0, y_0) \text{ if } f(x_0, y_0) = 0$$

或者初值条件符合参数式：

$$\text{w.r.t. } \gamma_0(s) = x_0(s)\mathbf{i} + y_0(s)\mathbf{j} + u_0(x_0(s), y_0(s))\mathbf{k}$$

的问题 (**), 其解有三种可能的情况：

- 1) **初始投影** $f(x, y)$ 与每条特征投影在交点处不相切 此时微分方程（至少在局部）**有唯一解**；
- 2) **初始投影** $f(x, y)$ 与任何一条特征投影在交点处相切 此时微分方程（一般来说）**没有解**；
- 3) 属于第二种情况但在初始曲线上满足 $\frac{x'_0(s)}{a(\gamma_0)} = \frac{u'_0(s)}{c(\gamma_0)}$ 此时微分方程**有多解**。

Definition 3.3.1. 柯西问题与柯西数据 (Cauchy problem and Cauchy data) 定义能使上述微分方程 (*) (至少局部) 存在唯一解的初值条件称为柯西数据。柯西数据和上述问题 (**) 统称为柯西问题。

Theorem 3.3.1. 柯西问题解的存在性 (Cauchy-Kowalevski) 考虑初值条件为参数形式的问题 (**)

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u)$$

$$\text{w.r.t. } \gamma_0(s) = x_0(s) \mathbf{i} + y_0(s) \mathbf{j} + u_0(x_0(s), y_0(s)) \mathbf{k}$$

若 a, b, c 在 γ_0 的某个邻域内解析 (无穷可微), 则该初值问题在 γ_0 的邻域内有唯一解 (为 *Cauchy problem*) 当且仅当

$$J_0 = \begin{vmatrix} a_0 & x'_0(s) \\ b_0 & y'_0(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

这等价于初值曲线的切线投影 $\langle x'_0(s), y'_0(s) \rangle$ 与矢量场 (或者特征曲线的切线) 的投影 $\langle a, b \rangle$ 在交点处不共线。特别地, 如果

$$\frac{x'_0(s)}{a(\gamma_0)} = \frac{y'_0(s)}{b(\gamma_0)}$$

即使不满足上述不等关系, 仍可能有多个解。

Part of Proof Theorem 3.3.1 我们在 γ_0 上考虑 u 的偏导数, 有

$$u'_0(s) = u_x \cdot x'_0(s) + u_y \cdot y'_0(s)$$

再由偏微分方程, 在边界上本来就有:

$$c(\gamma_0) = u_x \cdot a(\gamma_0) + u_y \cdot b(\gamma_0)$$

将他们整理成线性方程组:
$$\begin{bmatrix} a(\gamma_0) & b(\gamma_0) \\ x'_0(s) & y'_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\gamma_0) \\ u'_0(s) \end{bmatrix}$$

为了确保 u_x 和 u_y 在 γ_0 上唯一, 需要系数矩阵可逆。当系数矩阵不可逆时, 只有 $x'_0(s)/a(\gamma_0) = y'_0(s)/b(\gamma_0)$ 可以使方程组能有多解。同样的推理可以拓宽到 k 阶导数, 比如:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = u_{xx} \cdot x'_0(s) + u_{xy} \cdot y'_0(s)$$

再对 $a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u)$ 两边同时取 x 偏导数:

$$(a_x + a_u u_x) u_x + a u_{xx} + (b_x + b_u u_x) u_y + b u_{yx} = c_x + c_u u_x$$

整理得到:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = u_{xx} x'_0(s) + u_{xy} y'_0(s)$$

$$(a_x + a_u u_x) u_x + a u_{xx} + (b_x + b_u u_x) u_y + b u_{yx} = c_x + c_u u_x$$

Theorem 3.3.2. Unique evaluation of the solution 最后, 如果我们解出了唯一的参数解 $x(s, \tau)$, $y(s, \tau)$, $u(s, \tau)$, 我们还需要 u 是 x, y 的“函数”, 即唯一的 (x, y) 会给出唯一的 u 的值。由于可以通过坐标变换 $(s, \tau) \mapsto (x, y)$ 实现 $\tilde{u}(x, y) = u(s(x, y), \tau(x, y)) = u(s, \tau)$, 我们希望这套坐标变换是可逆的:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \tau)} = \begin{vmatrix} x_\tau & x_s \\ y_\tau & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x_s \\ b & y_s \end{vmatrix} \neq 0 \ \& \ \infty$$

几何上来说, 这意味着 xOy 平面上符合上述条件的点 $(x, y)|_{(s, \tau)}$ 不是不同特征曲线的交点。可以通过引入包络线 (见下文) 来排除这些点。

Definition 3.3.2. 包络 Envelope 若在 xOy 平面上有一关于参数 s 的含参曲线簇 $F_s(x, y; s) = 0$, 且存在一条曲线 $E(x, y) = 0$, 使得该簇曲线中的每一条都至少与 E 相切于一点。则称曲线 E 是曲线簇 F_s 的包络线 *Envelope*。

Theorem 3.3.3. 包络线的求法 记 $F(\tau; s) = x(\tau; s)\mathbf{i} + y(\tau; s)\mathbf{j}$ 为 xOy 平面上关于参数 s 的曲线簇参数方程, 则其包络线上的点应同时满足如下方程, 包络线可以通过联立消去参数 τ 得到:

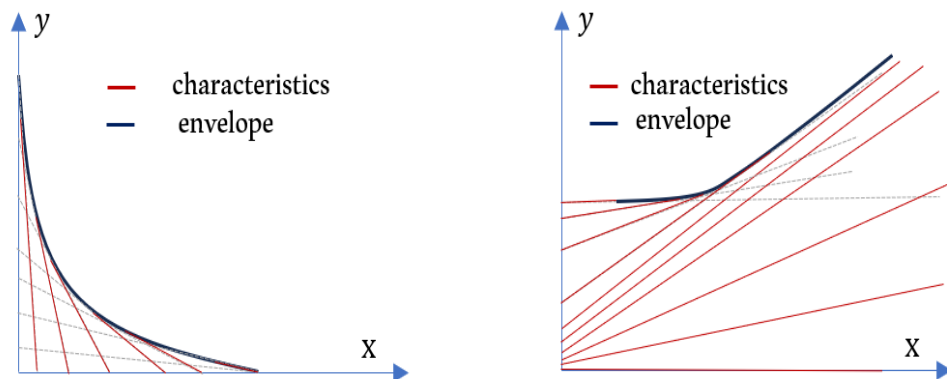
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \tau)} &= x_\tau y_s - y_\tau x_s = 0 \\ F(\tau; s) &= x(\tau; s)\mathbf{i} + y(\tau; s)\mathbf{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$$

如果曲线簇的方程形如 $F(x, y; s) = 0$ (隐函数形式), 则同样可以通过联立下面两个方程消参 s 得到包络线:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y; s) &= 0 \\ \partial_s F(x, y; s) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E(x, y) = 0$$

若存在, 包络线要么和曲线簇中的每根曲线都相切, 要么是簇中所有曲线的交点 (很可能是 *singularity*)。注意, 参数形式下消掉的参数为 τ 而不是 s 。

Theorem 3.3.4. 特征投影与包络线 同簇特征投影包络线上的点就是 *Thm 3.2.2* 中坐标变换不可逆的点, i.e., u has multiple values。故对于同一簇特征投影, 一般规定它们在触碰到其包络后停止延伸。这样一般可以确保同一簇特征投影不相交。



Proof Theorem 3.3.3 先证参数形式, 给定 s , 假设 $F(\tau; s) = X(\tau; s)\mathbf{i} + Y(\tau; s)\mathbf{j}$ 与 E 相交于点

$$(x(s), y(s)) = (X(\tau(s); s), Y(\tau(s); s))$$

在 $E(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ 上, 曲线的切矢量为

$$\langle x'(s), y'(s) \rangle = \langle X_\tau \tau'(s) + X_s, Y_\tau \tau'(s) + Y_s \rangle$$

同时, $F_s(\tau)$ 在同一个切点上的切矢量为 $\langle X_\tau, Y_\tau \rangle$, 我们要有

$$\langle x'(s), y'(s) \rangle // \langle X_\tau, Y_\tau \rangle \Rightarrow X_\tau Y_s = Y_\tau X_s$$

再证非参数形式, 同时对 $F(x, y; s) = 0$ 的两边取 s 与 τ 的全导数, 有

$$\begin{cases} \frac{dF}{d\tau} = F_x X_\tau + F_y Y_\tau = 0 \\ \frac{dF}{ds} = F_x X_s + F_y Y_s + F_s = 0 \end{cases} \Rightarrow F_y (X_\tau Y_s - X_s Y_\tau) + F_s X_\tau = 0$$

在 E 上对所有 X_τ 均成立, 由 $X_\tau Y_s = Y_\tau X_s$ 即可得到 $F_s = 0$, 证毕。

3.4 Domain of Definition

最后我们考虑 PDE 有合理解的定义域，因为我们的解曲面是由特征线加上初值线决定的，我们只需要考虑他们在自变量平面 (x, y) 内的投影可以覆盖的区域即可。记我们解出的解曲面的参数方程为：

$$x = X(s, \tau), \quad y = Y(s, \tau), \quad u = U(s, \tau)$$

他们实际上也可以看作是，以 s 为参数的特征线簇

$$C(\tau; s) = X(\tau; s)\mathbf{i} + Y(\tau; s)\mathbf{j} + U(\tau; s)\mathbf{k}$$

通过消除 $x = X(s, \tau)$, $y = Y(s, \tau)$ 的参数 τ 得到特征在 xOy 平面上的特征投影簇 $F(x, y; s) = 0$ ，即

$$\left. \begin{array}{l} x = X(s, \tau) \\ y = Y(s, \tau) \end{array} \right\} \Rightarrow F(x, y; s) = 0$$

同理，我们通过合并初始曲线 $\gamma_0(s) = X_0(s)\mathbf{i} + Y_0(s)\mathbf{j} + U_0(s)\mathbf{k}$ 的参数方程（消除 s ）得到其初始投影，即

$$\left. \begin{array}{l} x = X_0(s) \\ y = Y_0(s) \end{array} \right\} \Rightarrow H_0(x, y) = 0$$

接着，我们画出 $H_0(x, y) = 0$ ，与 $F(x, y; s) = 0$ ，并 **(1) 保留 $F(x, y; s) = 0$ 与 $H_0(x, y) = 0$ 严格相交的区域**，有时需要删去被 $H_0(x, y) = 0$ 截断的区域，保留方向与 τ 增大时特征的方向一致，即满足 thm 3.3.1 的存在唯一解曲面的区域；**(2) 绘制出特征投影簇的包络线**，去除特征投影超出包络线的部分（保留与初始投影在包络线同侧的部分）；**(3) 去除 singularity**，即函数值可能 blow up (tend to infinity) 的区域，singularity 一般是特征投影簇的交点；**(4) 如果进过前三步后还存在有特征投影相交的区域**，则从定义域中去除这一部分。在上述流程中，特征投影只会在两种情形下终止：即遇到 singularity 或者接触到 envelope。具体步骤如下

使用参数方程寻找柯西问题定义域的步骤

考虑以 s 为参数的特征线簇（其实是解曲面的参数方程）

$$C(\tau; s) = X(\tau; s) \mathbf{i} + Y(\tau; s) \mathbf{j} + U(\tau; s) \mathbf{k}$$

STEP 1 通过消除 $x = X(s, \tau)$, $y = Y(s, \tau)$ 的参数 τ 得到特征在 xOy 平面上的特征投影簇 $F(x, y; s) = 0$, 即

$$\left. \begin{array}{l} x = X(s, \tau) \\ y = Y(s, \tau) \end{array} \right\} \Rightarrow F(x, y; s) = 0 \quad \text{s.t.} \quad a < s < b$$

接着, 绘制出这簇曲线在 s 取端点值 a, b 时的图像, 作为区域的参考边界 1、2。

STEP 2 合并初始曲线 $\gamma_0(s) = X_0(s) \mathbf{i} + Y_0(s) \mathbf{j} + U_0(s) \mathbf{k}$ 的参数方程（消除 s ）得到其初始投影, 即

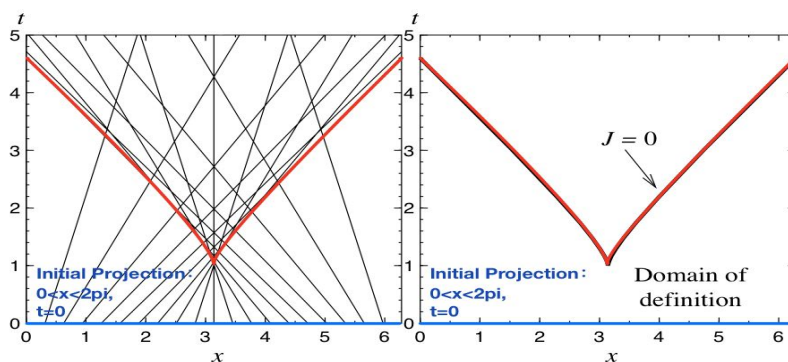
$$\left. \begin{array}{l} x = X_0(s) \\ y = Y_0(s) \end{array} \right\} \Rightarrow H_0(x, y) = 0$$

绘制出该曲线作为区域的参考边界 3, 保留特征与之严格相交的区域, 有时需要考虑是否仅保留被初始曲线截断的部分, 方向与 τ 增大时特征的方向一致。

STEP 3 计算曲线簇 $F(x, y; s) = 0$ 的包络

$$\left. \begin{array}{l} F(x, y; s) = 0 \\ \partial_s F(x, y; s) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E(x, y) = 0$$

绘制出该曲线作为区域的参考边界 4, 保留与初始投影在包络线同侧的部分。



STEP 4 沿特征线方向考察 u 的极限, 去除函数值趋于无穷 blow up 的部分。绘制出参考边界 5。剔除其他特征投影可能相交的区域, 注意特征投影簇可以穿过非同类特征投影簇的 envelope (见上图, 两簇特征投影在触碰到各自的包络之前可能会相交)。

4 Weak Solutions and Shocks

4.1 Weak Solutions

本章依旧考虑如下方程 (**)

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u) \quad \text{if } (x, y) \in \Omega$$

$$\text{w.r.t. } \gamma_0(s) = x_0(s) \mathbf{i} + y_0(s) \mathbf{j} + u_0(x_0(s), y_0(s)) \mathbf{k}$$

其中 Ω 为解的定义域, a, b, c 均为连续函数。在之前我们讨论的都是该方程的典型解, 即

Definition 4.1.1. 典型解 classical solution 对形如 (**) 的一阶边界值问题, 如果解 u 满足 $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则称之为一个典型解。

有时, 我们允许适当放宽条件, 使得 $u \notin C^1(\Omega)$, 此时有如下结论

Theorem 4.1.1. 如果在定义域内, 存在曲线 $C(x, y) \subset \Omega$ 使得 (**) 的解 $u(x, y)$ 在其两边一阶导数不连续 (但依旧有 u 在 $\bar{\Omega}$ 上连续), 则 $C(x, y)$ 只能是一条 characteristic projection。

Proof Theorem 4.1.1 假设 $C(x, y)$ 有参数式 $C(\tau) = x(\tau) \mathbf{i} + y(\tau) \mathbf{j}$, 由 u 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 沿着 $C(x, y)$ 有

$$\left. \begin{aligned} \partial_\tau u &= \partial_x^+ u \cdot x'(\tau) + \partial_y^+ u \cdot y'(\tau) \\ \partial_\tau u &= \partial_x^- u \cdot x'(\tau) + \partial_y^- u \cdot y'(\tau) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x'(\tau) [\partial_x u]_-^+ + y'(\tau) [\partial_y u]_-^+ = 0$$

又由 $u(x, y)$ 为方程的解且 a, b, c 为连续函数, 有

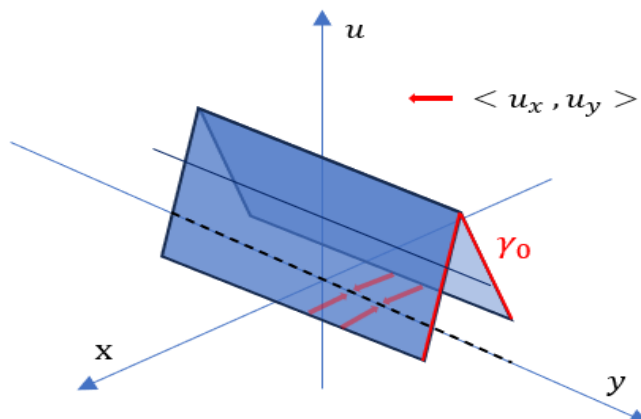
$$\left. \begin{aligned} a \cdot \partial_x^+ u + b \cdot \partial_y^+ u &= c(x, y, u) \\ a \cdot \partial_x^- u + b \cdot \partial_y^- u &= c(x, y, u) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a [\partial_x u]_-^+ + b [\partial_y u]_-^+ = 0$$

综上, 如果允许存在非频繁解 $[\partial_x u]_-^+$ 与 $[\partial_y u]_-^+$, 必须要有系数行列式等于 0, 即在 $C(\tau)$ 上满足

$$b \cdot x'(\tau) - a \cdot y'(\tau) = 0$$

注意到对于任何一条 characteristic projection 我们都有

$$x'(\tau) = a \quad \& \quad y'(\tau) = b \quad \Rightarrow \quad b \cdot x'(\tau) - a \cdot y'(\tau) = 0$$



上图给出了一种 Theorem 4.1.1 讨论的简单情形。注意在 $C(\tau) = \tau \mathbf{j}$ ，即 $x = 0$ 这条特征投影两侧， $\langle u_x, u_y \rangle$ 分别为 $\langle 1, 0 \rangle$ 与 $\langle -1, 0 \rangle$ 。但有些情形下，我们希望可以进一步放宽对解曲面的光滑度要求，弱解 weak solution 的存在允许我们对 u 的光滑度进一步放宽到可积。在引入方程 (**) 的弱解之前，还需要先引入下面几个概念：

Definition 4.1.2. Conservation form 若二元一阶偏微分方程能化成如下的形式

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x, y, u) + \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y, u) = R(x, y, u)$$

则称之为该方程的 *Conservation form*。任何形如 (**) 式的拟线性（即 a, b 与 u 无关）二元一阶 PDE 都有 *Conservation form*，且其形式不唯一。特别地，有（但注意这往往不一定是最简单的形式！可以进行凑微分的操作，或确保守恒式存在某种物理意义，见 *Lecture Notes p.26 Example 15/16*）

$$\frac{\partial}{\partial x} (au) + \frac{\partial}{\partial y} (bu) = c + a_x u + b_y u$$

Lemma 4.1.1. Green's formula 若 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为单连通闭区域（或含有限个洞的复连通闭区域），规定边界 ∂D 的方向为诱导定向（外逆内顺），若矢量函数 $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$ 的分量 P, Q 均在区域 D 内有连续偏导数，则

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

如果要将 *Green's formula* 与 *Divergence Theorem* 统一起来，那么

$$\iint_D (P_x + Q_y) dx dy = \oint_{\partial D} P dy - Q dx$$

Definition 4.1.3. 弱解 weak solution 将 (**) 中的二元一阶偏微分方程化为 Conservation form $\frac{\partial}{\partial x}P(x, y, u) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y, u) = R(x, y, u)$, 并使得其初始曲线 γ_0 和另一条曲线 γ_1 围成求解区域 D s.t. $\partial D = \gamma_0 + \gamma_1$ 。若存在一个解 u 使得其对任意测试函数 test function $\psi \in C^1(D)$ s.t. $\psi(\gamma_1) \equiv 0$, 满足

$$\int_{\gamma_0} \psi (Pdy - Qdx) = \iint_D (P\psi_x + Q\psi_y + R\psi) dxdy$$

则称 u 为方程 (**) 的一个弱解。此时, u 只要满足可积即可; 下面讨论式子的构造过程。

Discussion Definition 4.1.3 构造 weak solution 的流程和其他 PDE 差不多, 首先要求对 $\forall \psi \in C^1(\Omega)$ s.t. $\psi(\gamma_1) \equiv 0$

$$\iint_D \psi \frac{\partial}{\partial x}P + \psi \frac{\partial}{\partial y}Q dxdy = \iint_D R\psi dxdy$$

上式可以进一步化成

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(P\psi) - \frac{\partial}{\partial y}(-Q\psi) dxdy = \iint_D (P\psi_x + Q\psi_y + R\psi) dxdy$$

假设可以使用 Green's formula, 结合 $\psi(\gamma_1) \equiv 0$ 则有

$$\int_{\gamma_0} (P\psi) dy - (Q\psi) dx = \iint_D (P\psi_x + Q\psi_y + R\psi) dxdy$$

即为我们构造的 weak solution。注意最后一步的 Green's formula 并不是严格成立的。使用该公式的前提是 P, Q 均对 x, y 有连续导数。考虑到 P, Q 中也含有 $u(x, y)$, 如 u 不连续, 则显然 P, Q 对 x, y 有连续导数的假设就不成立。然而, 如果 u 为典型解, 则最后一步利用 Green's formula 自然成立, 说明其必然可以满足弱解的条件。

Theorem 4.1.2. 我们将经常使用如下推论: 若将 (**) 中的二元一阶偏微分方程化为 Conservation form $\frac{\partial}{\partial x}P(x, y, u) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y, u) = R(x, y, u)$, 且 u 为 D 上的典型解, 则下式对任意函数 $\psi \in C^1(D)$ 总成立:

$$\oint_{\partial D} \psi (Pdy - Qdx) = \iint_D (P\psi_x + Q\psi_y + R\psi) dxdy$$

4.2 Shocks and Nonuniqueness of Weak Solutions

我们下面讨论非连续 weak solution 的间断点分布特征。

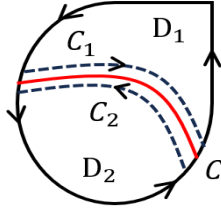
Definition 4.2.1. Shock 若存在一条曲线 $C(x, y) \subset \Omega$ 使得 $(**)$ 的一个 weak solution $u(x, y)$ 在其两边不连续, 称该曲线为一个 shock。

Theorem 4.2.1. Rankine-Hugoniot Condition 将 $(**)$ 中的二元一阶偏微分方程化为 Conservation form $\frac{\partial}{\partial x}P(x, y, u) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y, u) = R(x, y, u)$ 。若 $C(x, y) \subset \Omega$ 为非连续 weak solution $u(x, y)$ 的一个 shock, 且 u 在除了 C 以外的地方连续可微 (分段 classical solution)。则 $C(x, y)$ 应满足方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[Q]_{-}^{+}}{[P]_{-}^{+}}$$

其中 $[Q]_{-}^{+} = Q(x, y, u_{+}) - Q(x, y, u_{-})$, $[P]_{-}^{+}$ 同理。特别地, 如果函数 u 在除了 C 上处处满足方程 $(**)$, 则其为一个 valid weak solution 当且仅当在 C 上满足 Rankine-Hugoniot condition。利用该定理不难证明, 拟线性方程的 shock 只能是特征曲线。

Proof Theorem 4.2.1 假设 shock C 将求解区域 D 分成两块 D_1, D_2 , 且在 D 两侧分别与 γ_0, γ_1 相交。如下图所示, 则有



$$\begin{aligned}
 & \iint_D (P\psi_x + Q\psi_y + R\psi) dx dy \\
 &= \iint_{D_1} (P\psi_x + Q\psi_y + R\psi) dx dy + \iint_{D_2} (P\psi_x + Q\psi_y + R\psi) dx dy \\
 &= \iint_{D_1} \left((P\psi)_x + (Q\psi)_y + \psi(R - P_x - Q_y) \right) dx dy \\
 &\quad + \iint_{D_2} \left((P\psi)_x + (Q\psi)_y + \psi(R - P_x - Q_y) \right) dx dy \\
 &= \iint_{D_1} (P\psi)_x + (Q\psi)_y dx dy + \iint_{D_2} (P\psi)_x + (Q\psi)_y dx dy \\
 &= \oint_{\partial D_1} \psi(Pdy - Qdx) + \oint_{\partial D_2} \psi(Pdy - Qdx) \\
 &= \oint_{\partial D + C_1 - C_2} \psi(Pdy - Qdx) = \int_{\gamma_0 + C_1 - C_2} \psi(Pdy - Qdx)
 \end{aligned}$$

其中第二到第三个等号是因为 u 在除了 C 以外的地方为分段 classical solution, 所以必然满足 conservation form $P_x + Q_y = R$ 。最后, 由 weak solution 的定义

$$\int_{\gamma_0} \psi (Pdy - Qdx) = \int_{\gamma_0 + C_1 - C_2} \psi (Pdy - Qdx)$$

即有

$$\int_{C_1 - C_2} \psi (Pdy - Qdx) = \int_C \psi ([P]_-^+ dy - [Q]_-^+ dx) = 0$$

考虑上式对 $\forall \psi \in C^1(\Omega)$ s.t. $\psi(\gamma_1) \equiv 0$ 恒成立, 有

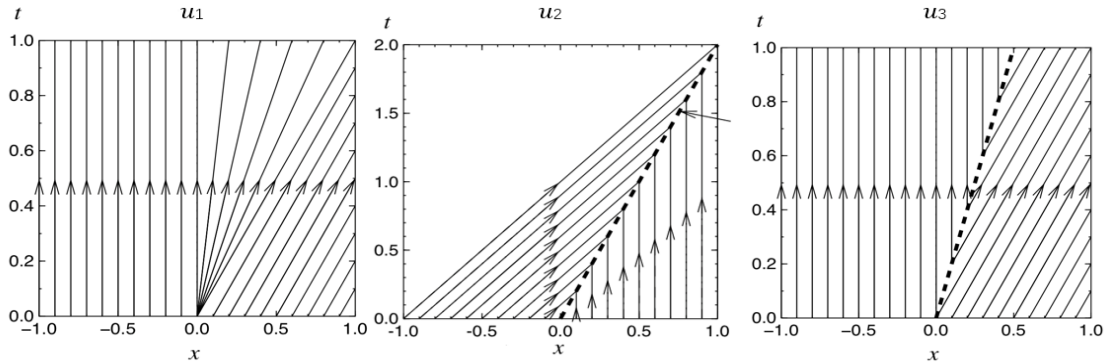
$$[P]_-^+ dy - [Q]_-^+ dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{[Q]_-^+}{[P]_-^+}$$

在前文中, 我们处理特征投影相交的情形是利用 Envelope 把这一部分从定义域中删去。而引入 weak solution 以及 Shock 则允许我们对此类情形进行更深刻的研究。但是 weak solution 也存在一定的缺陷, 其中一点便是其**唯一性得不到保障**。为此, 我们需要人为地为合理的 weak solution 设置标准。其中最常见的标准为 causality。

Theorem 4.2.2. Causality and the Uniqueness of Weak Solutions

当弱解存在 shock 时 (表现为**特征投影相交**), 其解因满足**特征投影总是从初始曲线出发指入 shock**, 而不是从 shock 指出。此时, 称该 weak solution 是 *causal* 的, 符合这一标准的弱解**唯一存在**。Causality 有时也会被等价地描述为 *Entropy* 或 *Viscosity*, 这些标准都指代同一个解。

下面这个例子来自 Lecture Notes p.24/27 Example 14/17, 分别为 Burgers Equation $u_t + uu_x = 0$ s.t. $u(x, 0) = 1_{\{x < 0\}}$ 的三类不同的弱解的特征投影。其中解 u_1 采用了 Characteristic 解法; 解 u_2, u_3 分别各自含有一个 shock。根据 thm 4.2.2 的标准, 若考虑包含 shock 的解, 应当舍去 u_3 保留 u_2



4.3 Introducing Shocks into Solutions

在之前我们遇到特征投影在被各自的 singularity 还有 envelope bound 之后仍相交的区域 D 时，我们的做法是将那一块区域直接从定义域中剔除。在定义了弱解和 shock 之后，我们可以通过在这部分区域引入 shock 从而实现弱解在 D 上的唯一取值。具体做法如下

在定义域中引入 shock

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u) \quad \text{if } (x, y) \in \Omega$$

$$\text{w.r.t. } \gamma_0(s) = x_0(s)\mathbf{i} + y_0(s)\mathbf{j} + u_0(x_0(s), y_0(s))\mathbf{k}$$

STEP 1 照常解 PDE 并绘制出特征投影；注意特征投影始于初值投影，且在遇到各自的 singularity 还有 envelope 时终止延伸。如果在经过上述的操作之后（在符合物理意义的区域）各类特征投影簇不存在相交，则无需引入 shock；如果在某区域 D 内仍有两类特征投影存在相交（注意特征投影簇可以穿过非同类特征投影簇的 envelope），则可以在该区域内引入 shock。

STEP 2 考虑区域 D ，假设在该区域内存在两类特征投影相交的情形，记引入的 shock 在 xOy 平面的表达式为 $y = y_s(x)$ ，方程化为守恒式

$$\frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q = R$$

再分别列出在 shock 两侧特征曲线的参数式，+ 表示投影在右侧的特征曲线簇

$$C_{\pm}(\tau_{\pm}; s_{\pm}) = X_{\pm}(\tau_{\pm}; s_{\pm})\mathbf{i} + Y_{\pm}(\tau_{\pm}; s_{\pm})\mathbf{j} + U_{\pm}(\tau_{\pm}; s_{\pm})\mathbf{k}$$

STEP 3 如果运气好，两侧都可以消参找到 u 的显示表达式，那直接带入 Rankine-Hugoniot condition 求解 ODE 即可，积分参数可以要求通过设置 shock 穿过 D 的某个顶点消去，在 shock 上分别 evaluate $u_{\pm}(x, y_s)$

$$u_{\pm}(x, y) = U_{\pm}(\tau_{\pm}(x, y); s_{\pm}(x, y)) \Rightarrow \frac{dy_s}{dx} = \frac{[Q]_{-}^{+}}{[P]_{-}^{+}}$$

运气不好，用 $U_{\pm}(\tau_{\pm}; s_{\pm})$ 代替消去 $[Q]_{-}^{+}$ 与 $[P]_{-}^{+}$ 中的 u_{\pm} ，联立另外的四个方程（如下）和 Rankine-Hugoniot condition，可以用五个条件解五个未知数 $\tau_{\pm}, s_{\pm}, y_s(x)$

$$y_s = Y_{\pm}(\tau_{\pm}; s_{\pm}) \quad \& \quad x = X_{\pm}(\tau_{\pm}; s_{\pm}) \quad \& \quad \frac{dy_s}{dx} = \frac{[Q]_{-}^{+}}{[P]_{-}^{+}}$$

Example 4.3.1. Introducing Shocks 考虑如下 $u(x, t)$ s.t. $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ 的方程与边界条件, 分别指出可以在哪块区域 D 引入 shock, 并指出该如何构造 shock。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & u_t + uu_x = 0 \quad \text{s.t.} \quad u(x, 0) = x \cdot 1_{\{0 \leq x < 1\}} - 1_{\{x \geq 1\}} \\ \text{(ii)} \quad & u_t + uu_x = 0 \quad \text{s.t.} \quad u(x, 0) = x(1-x) \cdot 1_{\{0 < x < 1\}} \end{aligned}$$

首先不难发现这两个问题的边界条件均为连续函数。由于方程相同, 利用特征法, 不难求出特征投影为

$$x = u_0(s)t + s$$

对于 (i), (ii), 我们分别有参数化的 $u_0(s)$ 为

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & u_0(s) = 0 \cdot 1_{\{s < 0\}} - s \cdot 1_{\{0 \leq s < 1\}} - 1 \cdot 1_{\{s \geq 1\}} \\ \text{(ii)} \quad & u_0(s) = 0 \cdot 1_{\{s < 0\}} + s(1-s) \cdot 1_{\{0 \leq s < 1\}} + 0 \cdot 1_{\{s \geq 1\}} \end{aligned}$$

于是分别有

$$\text{(i)} \quad x = \begin{cases} s & \text{if } s < 0 \\ s(1-t) & \text{if } 0 \leq s < 1 \\ -t + s & \text{if } s \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad x = \begin{cases} s & \text{if } s < 0 \\ s(1-s)t + s & \text{if } 0 \leq s < 1 \\ s & \text{if } s \geq 1 \end{cases}$$

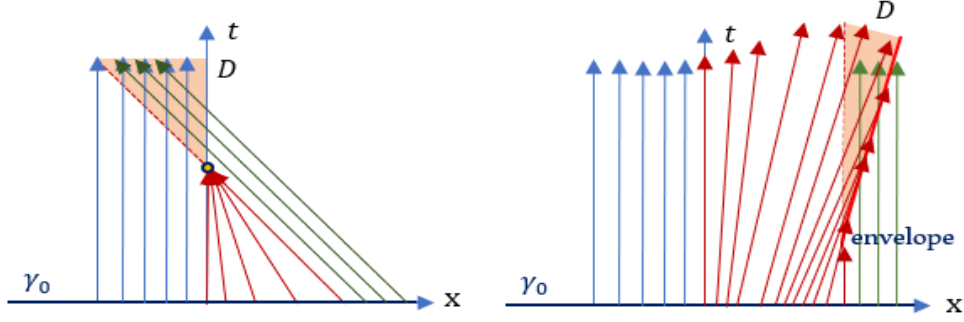
特别地, 对 (i) 中 $0 \leq s < 1$ 的投影簇 $x = s(1-t)$, 存在 singularity ($x=0, t=1$) (也可以通过求 Envelope 得到一样的结果), 此时

$$u = -s = \frac{x}{t-1} \rightarrow \infty \quad \text{as } t \rightarrow 1$$

此外, 对 (ii) 中 $0 \leq s < 1$ 的投影簇 $x = s(s-1)t + s$, 存在 Envelope

$$\left. \begin{aligned} x &= s(s-1)t + s \\ 0 &= (1-2s)t + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{(1+t)^2}{4t} > 1$$

绘制投影, 各簇投影曲线在碰到自己的 singularity 和 Envelope 时停止延伸, 保留与初始曲线在同侧的部分, 见下图



对于 (i), 左图, 可以在阴影区域 D 引入 shock, 并要求 shock 穿过 singularity $(0,1)$ 。该图中的 shock 由 $s < 0$ 和 $s \geq 1$ 的两簇特征投影产生; 对于 (ii), 右图, 同样在阴影区域 D 引入 shock, 并要求 shock 穿过 $s = 1$ 时 Envelope 的始发点 $(1,1)$ 。该图中的 shock 由 $0 \leq s < 1$ 和 $s \geq 1$ 的两簇特征投影产生。下面我们简单计算一下这两个 shock 的表达式。

显然方程可以化为 conservation form

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$$

于是, 由 Rankine-Hugoniot condition

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_+^2 - u_-^2}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2}$$

对于 (i), $u_+ = -1$, $u_- = 0$, 分别为绿色和蓝色特征投影上对应的 u 值。同时要求 shock 穿过 singularity $(0,1)$, 于是

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}, \quad t(0) = 1 \Rightarrow t = 1 - 2x$$

同理, (ii), $u_+ = 0$, $u_- = s(1-s)$, 分别为绿色和红色特征投影上对应的 u 值。同时要求 shock 穿过 $(1,1)$, 于是

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s(1-s)}{2} = \frac{1}{4} - \frac{(1 \pm \sqrt{\Delta})^2}{4t^2}, \quad t(1) = 1 \Rightarrow \dots$$

其中 $\Delta = (t+1)^2 - 4tx$, 可以用数值法求解后找到一个合理的 shock。

5 First Order Nonlinear Equations

5.1 Charpit's Equations

考虑关于 $u(x, y)$ 的一阶（一般是非准线性）边界值问题

$$F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

其参数化边界条件由初始曲线 γ_0 决定

$$\gamma_0(s) = x_0(s)\mathbf{i} + y_0(s)\mathbf{j} + u_0(s)\mathbf{k}, \quad a < s < b$$

记 $p = u_x$, $q = u_y$, 得到 $F(p, q, u, x, y) = 0$, 并有 $p_y = q_x$ 。对 $F = 0$ 的两边分别求 x, y 的偏导数

$$F_p p_x + F_q q_x = -F_x - pF_u \Rightarrow F_p p_x + F_q p_y = -F_x - pF_u \quad (1)$$

$$F_p p_y + F_q q_y = -F_y - qF_u \Rightarrow F_p q_x + F_q q_y = -F_y - qF_u \quad (2)$$

上述的公式 (1), (2) 分别是两个一阶准线性 PDE, 因此我们使用特征解法的关系, 给出四个方程

$$x_\tau = F_p \quad (3)$$

$$y_\tau = F_q \quad (4)$$

$$p_\tau = -F_x - pF_u \quad (5)$$

$$q_\tau = -F_y - qF_u \quad (6)$$

最后, 求 u 对 τ 的导数给出最后的方程

$$u_\tau = u_x x_\tau + u_y y_\tau = pF_p + qF_q \quad (7)$$

我们可以用上述 (3) ~ (7) 的五个方程解出 $p = u_x, q = u_y, u, x, y$ 的关于 (τ, s) 的参数式。其中关于导数的边界条件 $p_0(s)$ 与 $q_0(s)$ 可以通过联立下面两个式子解出

$$u'_0(s) = p_0 x'_0(s) + q_0 y'_0(s) \quad (8)$$

$$F(p_0, q_0, u_0, x_0, y_0) = 0 \quad (9)$$

上述的方程 (3) ~ (7) 称为 Charpit's Equations, 在 xOy 平面上, 满足 $x_\tau = F_p$, $y_\tau = F_q$ 的曲线簇 $C_s(\tau) = x(\tau; s)\mathbf{i} + y(\tau; s)\mathbf{j}$ 称为 **characteristics (projections)** 或者 **rays**。有如下定理

Theorem 5.1.1. Charpit's Equations

考虑关于 $u(x, y)$ 的一阶 (一般是非准线性) 边界值问题

$$F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

其参数化边界条件由初始曲线 γ_0 决定

$$\gamma_0(s) = x_0(s)\mathbf{i} + y_0(s)\mathbf{j} + u_0(s)\mathbf{k}, \quad a < s < b$$

则解对应方程 $F(p, q, u, x, y) = 0$ 的 *Charpit's Equations* (含两个边界条件)

$$\begin{aligned} x_\tau &= F_p \\ y_\tau &= F_q \\ p_\tau &= -F_x - pF_u \\ q_\tau &= -F_y - qF_u \\ u_\tau &= pF_p + qF_q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0 x'_0(s) + q_0 y'_0(s) &= u'_0(s) \\ F(p_0, q_0, u_0, x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

即可在合理的区域内 (*) 得到 PDE 的参数解, 且 $p = u_x$, $q = u_y$ 。另外, 称在 xOy 平面上的曲线簇 $C_s(\tau) = x(\tau; s)\mathbf{i} + y(\tau; s)\mathbf{j}$ 为 *characteristics* (*projections*) 或者 *rays*。

在之前为了构造方程组, 我们规定了 $p = u_x$, $q = u_y$ 。实际上这种规定不是必须的, 只要满足 Charpit's Equations, 则在合理的区域内, 求出的 p, q, u, x, y 一定满足方程 $F(p, q, u, x, y) = 0$, 且有 $p = u_x$, $q = u_y$ 。下面给出这一论断的证明:

Proof Theorem 5.1.1 首先我们证明沿着特征曲线, 在满足 Charpit's Equations 的情况下, 曲线上的点对方程 $F(p, q, u, x, y) = 0$ 总是成立

$$\begin{aligned} F_\tau &= F_p p_\tau + F_q q_\tau + F_u u_\tau + F_x x_\tau + F_y y_\tau \\ &= -F_p(F_x + pF_u) - F_q(F_y + qF_u) + F_u(pF_p + qF_q) + F_x F_p + F_y F_q = 0 \end{aligned}$$

于是 F 沿特征曲线为常数; 而边界条件规定有在 $\tau = 0$ 时 $F(p_0, q_0, u_0, x_0, y_0) = 0$, 即特征曲线上的点对方程 $F(p, q, u, x, y) = 0$ 恒成立。由于曲面 u 由特征曲线构成, 其上对于 $F = 0$ 必然处处成立。下面我们证明在合理定义域内, 总有 $p = u_x$, $q = u_y$

定义 $\phi_s(\tau) = \phi(s, \tau) = u_s - px_s - qy_s$, 对 τ 求偏导数, 有

$$\begin{aligned}
 \phi_\tau &= u_{s\tau} - px_{s\tau} - p_\tau x_s - q_\tau y_s - qy_{s\tau} \\
 &= u_{s\tau} - px_{s\tau} + (F_x + pF_u)x_s + (F_y + qF_u)y_s - qy_{s\tau} \\
 &= (F_p p_s - F_p p_s) + (F_q q_s - F_q q_s) + (F_u u_s - F_u u_s) + u_{s\tau} \\
 &\quad - px_{s\tau} + (F_x x_s + pF_u x_s) + (F_y y_s + qF_u y_s) - qy_{s\tau} \\
 &= (F_p p_s + F_q q_s + F_u u_s + F_x x_s + F_y y_s) - F_u (u_s + px_s + qy_s) \\
 &\quad + u_{s\tau} - F_p p_s - px_{s\tau} - F_q q_s - qy_{s\tau} \\
 &= F_s - F_u \phi + (u_{s\tau} - F_p p_s - pF_{ps} - F_q q_s - qF_{qs}) \\
 &= F_s - F_u \phi + \partial_s (u_\tau - pF_p - qF_q)
 \end{aligned}$$

由于沿着初值曲线, F 恒为 0, 故 $F_s = 0$; 此外, 由 Charpit's Equations 中第五个方程 $u_\tau = pF_p + qF_q$, 有 $u_\tau - pF_p - qF_q = 0$, 所以 $\partial_s (u_\tau - pF_p - qF_q) = 0$ 。于是上述方程化为

$$\phi_\tau = -F_u \phi$$

将 s 视为常数, 由边界条件 $p_0 x'_0 + q_0 y'_0 = u'_0$, 知道 $\phi_s(0) = \phi(s, 0) = 0$ 。于是不难发现 $\phi_s(\tau) = 0$ 为上述关于 τ 的方程 $\phi'_s(\tau) = -F_u \phi_s$ 的一个解。由 Picard's Existence and Uniqueness Theorem, 若 $-F_u \phi_s$ 与 $\partial_{\phi_s}(-F_u \phi_s) = -F_u$ 在包含 $\tau = 0$, $\phi_s(\tau) = 0$ 的某矩形区域内存在且连续, 则在该初值点 $(0, \phi_{s0})$ 的某邻域内只有唯一解。即存在 $(0, \phi_{s0})$ 的一个邻域: $\phi_s(\tau) \equiv 0$ 恒成立。由于是对任意的 s , $\phi(s, \tau) \equiv 0$ 在包含初始曲线的某个定义域内恒成立。于是, 联立 Charpit's Equations 中第五个方程和 $\phi = 0$, 在定义域内有

$$\begin{aligned}
 u_x x_\tau + u_y y_\tau &= u_x F_p + u_y F_q = u_\tau = pF_p + qF_q \\
 u_x x_s + u_y y_s &= u_s = px_s + qy_s
 \end{aligned}$$

即有关于未知数 p, q 的线性方程

$$\begin{aligned}
 F_p(p - u_x) + F_q(q - u_y) &= 0 \\
 x_s(p - u_x) + y_s(q - u_y) &= 0
 \end{aligned}$$

如果在定义域内, 系数矩阵可逆, 即 $F_p y_s - F_q x_s = x_\tau y_s - y_\tau x_s = 0$, 则只能有 $p = u_x$, $q = u_y$ 。注意这等价于要求 $(x, y) \leftrightarrow (\tau, s)$ 可逆, 或 $u(x, y)$ 在定义域 D_{xy} 内有唯一取值。

上述的讨论告诉我们，在定义域内，想要 Charpit's Method 成立，必须要有关于坐标转换的雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \tau)} = \begin{vmatrix} x_\tau & x_s \\ y_\tau & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_p & x_s \\ F_q & y_s \end{vmatrix} \neq 0$$

这等价于寻找 rays 的 Envelope。同时，由于我们要联立边界条件

$$\begin{aligned} x'_0(s) p_0 + y'_0(s) q_0 - u'_0(s) &= 0 \\ F(p_0, q_0, u_0, x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

由隐函数定理， p_0 ， q_0 能被表示成关于自变量 s 的函数同样需要有

$$\begin{vmatrix} F_{p_0} & x'_0(s) \\ F_{q_0} & y'_0(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

这等价于要求在始发点，rays 与 initial curve 不相切。综上所述，寻找 First Order Nonlinear Equations 定义域的步骤与 First Order Quasilinear Equations 一致，即

Theorem 5.1.2. 定义域 Domain of Definitions 利用 Charpit's Equations 求解一阶非线性方程 $F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$ s.t. $p = u_x$ ， $q = u_y$ ，其定义域内要求雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \tau)} = \begin{vmatrix} x_\tau & x_s \\ y_\tau & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_p & x_s \\ F_q & y_s \end{vmatrix} \neq 0$$

满足条件的点构成了同簇 rays 的 Envelope；在初值曲线 γ_0 附近，同样要求

$$J_0 = \begin{vmatrix} F_{p_0} & x'_0(s) \\ F_{q_0} & y'_0(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

满足条件的 rays 在始发点与 initial curve 不相切。寻找定义域的流程和求解准线性方程类似。但是引入 shock 的流程更复杂，可以尝试化成守恒式 conservation form 使用 Rankine-Hugoniot condition，但一般来说很难找到守恒式。

利用 Charpit's Method 解一阶非线性 PDE

$$F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

$$\text{w.r.t. } \gamma_0(s) = x_0(s)\mathbf{i} + y_0(s)\mathbf{j} + u_0(s)\mathbf{k}, \quad a < s < b$$

STEP 1 记 $p = u_x$, $q = u_y$, 得到 $F(p, q, u, x, y) = 0$, 并有 $p_y = q_x$ 。

STEP 2 对 $F = 0$ 两边分别求 x, y 的偏导数 (将 p, q 视为 x, y 的函数), 利用关系 $p_y = q_x$ 替换出两个分别关于 p, q 的一阶准线性方程, 整理至左侧只包含对 p 或者 q 二者之一的偏导数项。注意实际操作求 F_x 和 F_y 时, 可以直接求, 不要套下面的公式。

$$F_p p_x + F_q q_x = -F_x - pF_u \Rightarrow F_p p_x + F_q p_y = -F_x - pF_u \quad (1)$$

$$F_p p_y + F_q q_y = -F_y - qF_u \Rightarrow F_p q_x + F_q q_y = -F_y - qF_u \quad (2)$$

STEP 3 根据第二步中的方程, 写出四个 characteristic equations

$$x_\tau = F_p \quad (3)$$

$$y_\tau = F_q \quad (4)$$

$$p_\tau = -F_x - pF_u \quad (5)$$

$$q_\tau = -F_y - qF_u \quad (6)$$

STEP 4 求 u 对 τ 的导数补全最后一个方程

$$u_\tau = u_x x_\tau + u_y y_\tau = pF_p + qF_q \quad (7)$$

STEP 5 联立下面两个式子解出关于导数 $p_0(s)$ 与 $q_0(s)$ 的边界条件。其中第一个方程是对 $u_0(x_0(s), y_0(s))$ 对 s 求导

$$x'_0(s)p_0 + y'_0(s)q_0 = u'_0(s) \quad (8)$$

$$F(p_0, q_0, u_0, x_0, y_0) = 0 \quad (9)$$

直接记住 Theorem 中的公式比较困难, 记住上述基本流程即可。例题可见 **Lecture Notes pp.30-31 Example 20 / Problem Sheet 02, Q3/Q4**。

6 First Order Quasilinear Systems

6.1 Method of Characteristics

在本节中我们主要考虑含有双自变量（因变量个数任意）的偏微分方程组，其写成矩阵形式的通式如下

$$\mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_y = \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u}) \quad (1)$$

$$\gamma_0(s) : x = x_0(s), y = y_0(s), \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s), s_1 < s < s_2 \quad (2)$$

其中 $\mathbf{u} = [u_1 \cdots u_n]^T$, $\mathbf{c} = [c_1 \cdots c_n]^T$, $\mathbf{u}_0(s)$ 为 \mathbb{R}^n 中的列向量； \mathbf{A} , \mathbf{B} 分别为 n 阶函数方阵。许多双自变量高阶 PDE 也可以等价转换为上述类型的 PDE system。在整理矩阵形式时，**将同类偏导数按因变量顺序分块对齐即可**。因为一般很难直接描绘超空间 (x, y, \mathbf{u}) 中的曲线，所以我们习惯上直接称 $\gamma_0(s)$ 在 xOy 上的投影 $x_0(s)\mathbf{i} + y_0(s)\mathbf{j}$ 为 initial curve。

Example 6.1.1. 将方程组整理成矩阵式

$$\begin{aligned} h_t + u h_x + h u_x &= 0 \\ u_t + h_x + u u_x &= 0 \end{aligned}$$

可以整理成

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_t \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & h \\ 1 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ u_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Example 6.1.2. 将高阶 PDE 整理成矩阵式

试将方程 $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ 化为一阶方程组并转为矩阵式：换元 $u = \phi_x$, $v = \phi_y$ 。我们有（第一个方程利用 $\phi_{xy} = \phi_{yx}$ ）

$$\begin{aligned} v_x - u_y &= 0 \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned}$$

可以整理成

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

下面我们想办法将前文中 scalar PDE 特征曲线的概念推广到 PDE system。注意到之前在构造特征曲线时，我们实际上默认要求了**在特征曲线上，因变量的一阶导数不能被唯一确定**，即

$$\begin{cases} x_\tau \cdot u_x + y_\tau \cdot u_y = u_\tau \\ a \cdot u_x + b \cdot u_y = c \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_\tau & y_\tau \\ a & b \end{vmatrix} = bx_\tau - ay_\tau = 0$$

这条规定可以被推广到 PDE system 中，即我们同样要求

$$\begin{cases} x_\tau \cdot \mathbf{u}_x + y_\tau \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_\tau \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_x + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_\tau I_n & y_\tau I_n \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \det(x_\tau \mathbf{B} - y_\tau \mathbf{A}) = 0$$

分块矩阵行列式的运算规则可以查阅此[链接](#)，此处不多加说明。我们可以记特征投影上， y 关于 x 的导数为 λ ，即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau} / \frac{dx}{d\tau} = \lambda \Rightarrow \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0$$

同样地，我们习惯上直接称 $x = x(\tau; s)$ ， $y = y(\tau; s)$ ， $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\tau; s)$ 在 xOy 上的投影 $x(\tau; s)\mathbf{i} + y(\tau; s)\mathbf{j}$ 为 characteristic (projection)。于是我们定义

Definition 6.1.1. Characteristics for PDE Systems

双自变量偏微分方程组 $\mathbf{A}(x, y, \mathbf{u})\mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u})\mathbf{u}_y = \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u})$ ， $\gamma_0(s) : x = x_0(s)$ ， $y = y_0(s)$ ， $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s)$ ， $s_1 < s < s_2$ 的特征是指在 xOy 平面上函数 \mathbf{u} 的一阶导数不唯一确定的曲线（簇） $\det(x_\tau \mathbf{B} - y_\tau \mathbf{A}) = 0$ 。其满足特征值问题

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y, \mathbf{u}) \iff \eta_\lambda(s) = F_\lambda(x, y, \mathbf{u}) \quad \text{for} \quad \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0$$

其中 $\eta_\lambda(s)$ 在确定初始位置 $P_0(s) \in \gamma_0(s)$ 的特征曲线上为常数。称 $\eta_\lambda(s) = F_\lambda(x, y, \mathbf{u})$ 为方程对应特征值 $\lambda(x, y, \mathbf{u})$ 的**一簇**特征曲线簇。

除此之外，记得之前我们也证明过特征曲线是唯一两侧一阶导数可能不连续的曲线，这一性质也被继承到了方程组的特征曲线中

Theorem 6.1.1. 如果 PDE system 的连续解 \mathbf{u} 的一阶偏导数沿着某曲线两侧不连续，则该曲线只能是特征曲线。有时这条性质也会被作为特征定义从 scalar PDE 到 PDE system 的推广。

Proof Theorem 6.1.1 假设解 \mathbf{u} 沿某 xOy 曲线 $(x(\tau), y(\tau))$ 两侧一阶导数不连续。则沿着该曲线两侧，分别有

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{u}_x^\pm x_\tau + \mathbf{u}_y^\pm y_\tau \Rightarrow x_\tau \cdot \mathbf{u}_x|_-^+ + y_\tau \cdot \mathbf{u}_y|_-^+ = 0$$

由于 \mathbf{u} 还是方程的解，所以

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{u}_x^\pm + \mathbf{B}\mathbf{u}_y^\pm \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u}_x|_-^+ + \mathbf{B}\mathbf{u}_y|_-^+ = 0$$

因为一阶导数不连续， $[\mathbf{u}_x|_-^+, \mathbf{u}_y|_-^+] \neq \mathbf{0}$ ，即下述齐次方程要有 nontrivial solution

$$\begin{cases} x_\tau I_n \mathbf{u}_x|_-^+ + y_\tau I_n \mathbf{u}_y|_-^+ = 0 \\ \mathbf{A}\mathbf{u}_x|_-^+ + \mathbf{B}\mathbf{u}_y|_-^+ = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_\tau I_n & y_\tau I_n \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \det(x_\tau \mathbf{B} - y_\tau \mathbf{A}) = 0$$

即， $(x(\tau), y(\tau))$ 为一条 characteristic。

在进一步介绍如何利用特征解方程组之前，我们需要先解释 xOy 平面上的点所对应的函数值 $\mathbf{u}(x, y)$ 是如何通过特征被确定的。在下文的讨论中，我们都只考虑一种理想的情况，即方程组总是存在 n 个不同的特征值。

Definition 6.1.2. Hyperbolic PDE Systems

若双自变量偏微分方程组 $\mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_y = \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u})$ ， $\gamma_0(s) : x = x_0(s)$ ， $y = y_0(s)$ ， $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s)$ ， $s_1 < s < s_2$ 存在 n 个不同的实特征值 (对应 n 个因变量)，则称其为一个 Hyperbolic System。

注意，理论上来说，如果存在 n 个不同的特征值 (因此有对应的 n 簇特征曲线簇)，且 xOy 上的某个点 $P(x_p, y_p)$ 能被 n 根来自不同特征簇的特征曲线 $\eta_{\lambda_n}(s_n) = F_{\lambda_n}(x_p, y_p, \mathbf{u}(x_p, y_p))$ 穿过 (注意这些特征不一定是从同一个初始点发出的)，上述关系给出了 n 个关于未知数 $\mathbf{u}(x_p, y_p) = (u_1(x_p, y_p) \cdots u_n(x_p, y_p))^T$ 的方程。因此在理想情况下足够确定在该点 P 的函数值。

下面我们讨论如何利用特征解方程组。虽然 n 簇特征曲线已经足以帮助我们确定定义域内各点的函数值，但遗憾的是，我们往往不能够在 \mathbf{u} 未知的情况下直接求解特征方程： $\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y, \mathbf{u})$ 得到特征簇。因此我们仍需要构造其他的方程或关系来进一步帮助求解方程组。

现在假设在 λ 对应的特征曲线上, y_λ 能被表示成关于 x 的函数 (即假设特征曲线能被 x 参数化)

$$\begin{aligned}\frac{dy_\lambda}{dx} &= \lambda(x, y_\lambda(x), \mathbf{u}(x, y_\lambda(x))) \\ \eta_\lambda(s) &= F_\lambda(x, y_\lambda(x), \mathbf{u}(x, y_\lambda(x)))\end{aligned}$$

同时假设 $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{A}$ 为 singular, 且有左特征向量 l 使得

$$l^T(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow l^T\mathbf{B} = \lambda l^T\mathbf{A}$$

此时原方程组 (在特征曲线上) 可化为

$$l^T(\mathbf{A}\mathbf{u}_x + \mathbf{B}\mathbf{u}_y) = l^T\mathbf{c} \Rightarrow l^T\mathbf{A}(\mathbf{u}_x + \lambda\mathbf{u}_y) = l^T\mathbf{c}$$

注意在特征曲线上 $\frac{dy}{dx} = \lambda$, 所以 $\mathbf{u}_x + \lambda\mathbf{u}_y = \frac{d\mathbf{u}}{dx}$, 即原方程化为 ODE

$$l^T\mathbf{A}\frac{d\mathbf{u}}{dx}(x, y_\lambda(x)) = l^T\mathbf{c}$$

其中, $l^T\mathbf{A}$ 是一个行向量, $d\mathbf{u}/dx$ 是一个列向量。所以上述表达式是一个含有 $n+1$ 个因变量 (包括 y_λ) 与一个自变量 x 的 ODE。显然在一般情况下这个 ODE 是解不出来的, 除非上式能被转换成

$$\frac{d}{dx}R_\lambda(x, y_\lambda(x), \mathbf{u}(x, y_\lambda(x))) = 0$$

这意味着 R_λ 沿着 (被 x 参数化的) 特征曲线为常数, 故称其为特征值 λ 对应的一个黎曼不变量 Riemann invariant。我们知道, 在给定始发点特征曲线上 (s fixed), $F_\lambda(x, y_\lambda, \mathbf{u}_\lambda) = \eta_\lambda(s)$ 也是常数。所以 R_λ 为常数当且仅当 F_λ 为常数, 由此可得

$$\exists \varphi_\lambda \text{ s.t. } R_\lambda = \varphi_\lambda(F_\lambda)$$

由于上述关系是对 λ 对应的特征簇中的每一条特征曲线都成立的, 所以该关系对于 xOy 平面内每一个被特征簇扫过的点都成立, 因此我们可以去掉 $y_\lambda, \mathbf{u}_\lambda$ 的下标, 得到

$$R_\lambda(x, y, \mathbf{u}) = \varphi_\lambda(F_\lambda(x, y, \mathbf{u}))$$

对定义域内的每一个被相应特征曲线穿过的点都成立, 其中 φ_λ 可以通过带入初始曲线求得

$$R_\lambda(x_0(s), y_0(s), \mathbf{u}_0(s)) = \varphi_\lambda(\eta_\lambda(s))$$

如果能找到 n 个上述关系, 就能确定所有被 n 根不同特征值对应特征曲线穿过的点上的函数值 \mathbf{u} 。

Definition 6.1.3. 黎曼不变量 (Riemann Invariant)

考虑双自变量偏微分方程组 $\mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_y = \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u})$, $\gamma_0(s) : x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s)$, $s_1 < s < s_2$ 。若存在一函数

$$R_\lambda(x, y_\lambda, \mathbf{u}_\lambda) \equiv \text{const}(s)$$

沿着 λ 对应的特征簇中的每一条特征曲线 (初始点固定, 即 s 固定) 都是常数, 则称其为特征值 λ 对应的一个黎曼不变量。若特征曲线能够解出隐式解 $\eta_\lambda(s) = F_\lambda(x, y_\lambda, \mathbf{u}_\lambda)$, 则 $\exists \varphi_\lambda$ s.t.

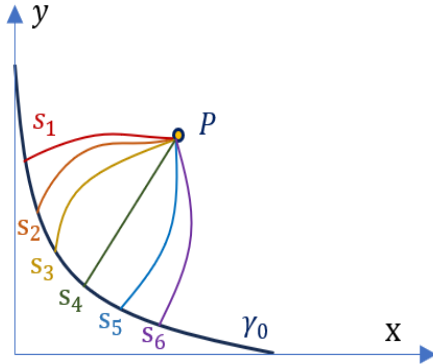
$$R_\lambda(x, y, \mathbf{u}) = \varphi_\lambda(F_\lambda(x, y, \mathbf{u}))$$

对定义域内所有被 λ 对应特征簇扫过的点恒成立。

Definition 6.1.4. 2×2 System 的分类

双自变量双因变量的方程组 $\mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_y = \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u})$, 其中 $\mathbf{u} = (u, v)^T$ 。根据 $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0$ 解的情况可以分成如下三类:

- 1) 有 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两个相异实根, 则称该方程组为 *Hyperbolic*;
- 2) 有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为两个相同实根, 则称该方程组为 *Parabolic*;
- 3) 有 λ_\pm 为两个共轭复根, 则称该方程组为 *Elliptic*。



如上图所示, 假设 $n = 6$, 在 P 点有六条来自不同簇 (分别用六个颜色表示) 的特征曲线相交, 每条曲线给出一个 (Riemann invariant) 关系 $R_{\lambda_n}(x, y, \mathbf{u}) = \varphi_{\lambda_n}(F_{\lambda_n}(x, y, \mathbf{u}))$, 从而可以确定 P 点的函数值。可以看出, 想要使用解析法求得方程组的显式解, 特征曲线的 (隐式) 解 $\eta_\lambda = F_\lambda(x, y_\lambda, \mathbf{u}_\lambda)$ 以及对应的 Riemann invariant $R_\lambda(x, y_\lambda, \mathbf{u}_\lambda)$ 都是必须的。

6.2 Examples When Method of Characteristics Works

利用特征法解一阶准线性 PDE Systems

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_y &= \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u}) \\ \gamma_0(s) : x &= x_0(s), y = y_0(s), \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s), s_1 < s < s_2 \end{aligned}$$

要求方程组为 **Hyperbolic**, 即有 n 个不同的实特征值; 同时也要求每个特征值对应一个不同的 Riemann invariant (n 个黎曼不变量)。

STEP 1 将方程组化为标准矩阵式, 将同类偏导数按因变量顺序分块对齐放在一起即可。

STEP 2 求特征根, 并解出相应的特征簇。此时, 将特征簇看做对于 x 参数化, 即有 $y_\lambda = y_\lambda(x)$, $\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{u}_\lambda(x, y_\lambda(x))$

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \frac{dy_\lambda}{dx} = \lambda(x, y_\lambda, \mathbf{u}_\lambda) \Rightarrow \eta_\lambda(s) = F_\lambda(x, y_\lambda, \mathbf{u}_\lambda)$$

此处没必要在一开始就把 $\eta_\lambda(s)$ 的表达式求出来, 可以留到最后再求; 此外, 也可以求 $\det(\mathbf{A} - \lambda' \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \frac{dx_\lambda}{dy} = \lambda'(y, x_\lambda, \mathbf{u}_\lambda)$, 此时 y 为参数, 看那种结构简单用哪个。

STEP 3 对每一个 λ , 求解左特征向量 l , 可以用下面两种方法中的任意一种求解: $l^T(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0 \iff (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A})^T l = 0$

STEP 4 对原方程组 $\mathbf{A} \mathbf{u}_x + \mathbf{B} \mathbf{u}_y = \mathbf{c}$ 左乘左特征向量, 并结合 $\frac{dy_\lambda}{dx} = \lambda$, 将其化为 $l^T \mathbf{A} \frac{d\mathbf{u}_\lambda}{dx} = l^T \mathbf{c}$, 并通过凑微分尝试找到黎曼不变量

$$\begin{aligned} l^T(\mathbf{A} \mathbf{u}_x + \mathbf{B} \mathbf{u}_y) &= l^T \mathbf{c} \Rightarrow l^T \mathbf{A}(\mathbf{u}_x + \lambda \mathbf{u}_y) = l^T \mathbf{c} \Rightarrow l^T \mathbf{A} \frac{d\mathbf{u}}{dx}(x, y_\lambda(x)) = l^T \mathbf{c} \\ l^T \mathbf{A} \frac{d\mathbf{u}}{dx}(x, y_\lambda(x)) &= l^T \mathbf{c} \Rightarrow \frac{d}{dx} R_\lambda(x, y_\lambda, \mathbf{u}_\lambda) = 0 \end{aligned}$$

STEP 5 对每一个 λ , 都有 $\varphi_\lambda(t)$ 使得 $R_\lambda(x, y, \mathbf{u}) = \varphi_\lambda(F_\lambda(x, y, \mathbf{u}))$ 对定义域内的每一个被相应特征曲线穿过的点都成立, 其中 φ_λ 可以通过带入初始曲线求得 $R_\lambda(x_0(s), y_0(s), \mathbf{u}_0(s)) = \varphi_\lambda(\eta_\lambda(s))$

STEP 6 联立 n 个关系 $R_{\lambda_n}(x, y, \mathbf{u}) = \varphi_{\lambda_n}(F_{\lambda_n}(x, y, \mathbf{u}))$ 求出 $u_1 \sim u_n$ 的显式表达式。

使用上述方法求解的条件或许过于严苛。首先，对于大部分非线性 PDE system 来说，也许在第二步就不能求出特征簇的显式解。有的即使可以顺利完成第二步，也不一定能找到 n 个黎曼不变量。但对于一些特殊结构的方程组来说，这一套流程总是适用的，有下述定理

Theorem 6.2.1. PDE System 可解性的判定

形如 $A(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_x + B(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_y = \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u})$ 的准线性 PDE system，如果方程组是 **hyperbolic** 的，则

- 1) $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ，我们总是可以找到 n 个不同的黎曼不变量（注意找不变量不一定需要解出特征，即 STEP 2 fail 不一定影响 STEP 3,4）；
- 2) 如果所有系数 A, B 都是线性的（只包含 x, y ），则我们一定可以解出 n 类特征簇的表达式；
- 3) 结合前两点，齐次线性方程组 $A(x, y) \mathbf{u}_x + B(x, y) \mathbf{u}_y = \mathbf{0}$ 一定可以使用上述方法求解。

Example 6.2.1. 利用特征法解方程组

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= 0 \\ u_y - v_x &= 0 \end{aligned}$$

此为齐次线性微分方程组，可以使用特征法求解。化为矩阵形式（同类偏导按照因变量顺序放在一起）

$$\begin{aligned} u_x + 0 \cdot v_x + 0 \cdot v_y &= 0 \\ 0 \cdot u_x - v_x + u_y + 0 \cdot v_y &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第二步，计算特征值与左特征向量

$$\det(B - \lambda A) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm 1$$

$$(B - \lambda A)^T l = \begin{bmatrix} \mp 1 & -1 \\ 1 & \pm 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow l_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

由特征方程解得两簇特征曲线

$$\frac{dy}{dx} = \lambda = \pm 1 \Rightarrow \eta_{\pm} = y \mp x$$

对原方程左乘 l^T , 化为 ODE

$$l_{\pm}^T A \frac{d\mathbf{u}}{dx} = l_{\pm}^T \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x, y_{\lambda_{\pm}}(x)) \\ v'(x, y_{\lambda_{\pm}}(x)) \end{bmatrix} = 0$$

整理化简得到两个不变量 (各对应一个特征值 λ_{\pm})

$$\begin{bmatrix} 1 & \mp 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{\pm} \\ v'_{\pm} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u'_{\pm} \mp v'_{\pm} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} (u_{\pm} \mp v_{\pm}) = 0$$

即对于两个特征值 λ_{\pm} , 我们各有

$$\lambda_+ = 1 : \begin{cases} \eta_+ = y - x \\ R_+ = u_+ - v_+ \end{cases} ; \quad \lambda_- = -1 : \begin{cases} \eta_- = y + x \\ R_- = u_- + v_- \end{cases}$$

所以存在 $\varphi_+(t), \varphi_-(t)$ 使得

$$\begin{cases} u - v = \varphi_+(y - x) \\ u + v = \varphi_-(y + x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} [\varphi_-(y + x) + \varphi_+(y - x)] \\ v = \frac{1}{2} [\varphi_-(y + x) - \varphi_+(y - x)] \end{cases}$$

带入边界条件可以求得 $\varphi_+(t), \varphi_-(t)$ 的显式表达式。

对于 2×2 hyperbolic system, 实际上还有更快的求解办法。可以发现, 在某些情况下, 方程组的解实际上是 $\eta_{\lambda} = F_{\lambda}(x, y)$ 的函数 (如上例, 这要求特征曲线的表达式只和自变量有关)。由于 2×2 hyperbolic system 正好提供两个 η_1, η_2 (分别对应两个特征值 λ), 我们可以通过对原方程组进行换元 $(x, y) \mapsto (\eta_1, \eta_2)$ 寻找不变量, 这样可以省去求解特征向量的步骤。我们在下一页给出此法的具体求解过程。

2×2 一阶线性 PDE Systems 的快速解法

$$\mathbf{A}(x, y) \mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, y) \mathbf{u}_y = \mathbf{c}(x, y)$$

$$\gamma_0(s) : x = x_0(s), y = y_0(s), \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s), s_1 < s < s_2$$

要求方程组为“纯线性”（即所有系数项均不显式地包含 \mathbf{u} ），因变量个数 $n = 2$ 为 **Hyperbolic**；同时也要求有两个不同的 Riemann invariant。

STEP 1 将方程组化为标准矩阵式，将同类偏导数按因变量顺序分块对齐放在一起。

STEP 2 求特征根，并解出相应的特征簇，即对 $i = 1, 2$ 计算

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda_i(x, y) \Rightarrow \eta_i = F_i(x, y)$$

也可以求 $\det(\mathbf{A} - \lambda' \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \lambda'_i(y, x)$ ，看那种结构简单用哪个。

STEP 3 换元 $(x, y) \mapsto (\eta_1, \eta_2)$ ，将 $x(\eta_1, \eta_2), y(\eta_1, \eta_2)$ 与 $\eta_1(x, y), \eta_2(x, y)$ 分别视为彼此的函数，即

$$\left. \begin{array}{l} \eta_i = F_i(x, y) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\eta_1} \partial_{\eta_1} + \mathbf{u}_{\eta_2} \partial_{\eta_2} \\ \mathbf{A} \mathbf{u}_x + \mathbf{B} \mathbf{u}_y = \mathbf{c} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{D}(\eta_1, \eta_2) \mathbf{u}_{\eta_1} + \mathbf{E}(\eta_1, \eta_2) \mathbf{u}_{\eta_2} = \hat{\mathbf{c}}(\eta_1, \eta_2)$$

其中（不难证明）

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \eta_{1x} + \mathbf{B} \eta_{1y}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \eta_{2x} + \mathbf{B} \eta_{2y}$$

$$\hat{\mathbf{c}}(\eta_1, \eta_2) = \mathbf{c}(x(\eta_1, \eta_2), y(\eta_1, \eta_2))$$

STEP 4 此时换元后的方程组往往可以化成两个仅含有单一变量 η_i 导数的新方程组，即系数增广矩阵可以化为

$$[\mathbf{D} \ \mathbf{E} \mid \hat{\mathbf{c}}] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} D'_{11} & D'_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E'_{21} & E'_{22} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{c}'_1 \\ \mathbf{c}'_2 \end{array} \right] \Longleftrightarrow \begin{cases} D'_{11} u_{\eta_1} + D'_{12} v_{\eta_1} = \mathbf{c}'_1 \\ E'_{21} u_{\eta_2} + E'_{22} v_{\eta_2} = \mathbf{c}'_2 \end{cases}$$

如果能解上述方程组即可得到黎曼不变量。

Example 6.2.2. 利用快速法解 2×2 方程组

$$\begin{aligned}u_x - v_y &= 0 \\u_y - v_x &= 0\end{aligned}$$

化为矩阵形式

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第二步，计算特征值并解得两簇特征曲线（即两个新的变量）

$$\det(B - \lambda A) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda = \pm 1 \Rightarrow \eta_{\pm} = y \mp x$$

对原方程换元 $(x, y) \mapsto (\eta_+, \eta_-)$ ，有

$$\begin{aligned}[u_{\eta_+} \cdot (-1) + u_{\eta_-} \cdot (1)] - [v_{\eta_+} \cdot (1) + v_{\eta_-} \cdot (1)] &= 0 \\[u_{\eta_+} \cdot (1) + u_{\eta_-} \cdot (1)] - [v_{\eta_+} \cdot (-1) + v_{\eta_-} \cdot (1)] &= 0\end{aligned}$$

将对相同变量的导数放在一起以便观察

$$\begin{aligned}-u_{\eta_+} - v_{\eta_+} + u_{\eta_-} - v_{\eta_-} &= 0 \\u_{\eta_+} + v_{\eta_+} + u_{\eta_-} - v_{\eta_-} &= 0\end{aligned}$$

不难看出由高斯消元法，上述方程可以化成

$$\begin{aligned}u_{\eta_+} + v_{\eta_+} &= 0 \\u_{\eta_-} - v_{\eta_-} &= 0\end{aligned}$$

解之得

$$\begin{cases} u_{\eta_+} + v_{\eta_+} = 0 \\ u_{\eta_-} - v_{\eta_-} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = f(\eta_-) = f(y + x) \\ u - v = g(\eta_+) = g(y - x) \end{cases}$$

剩余步骤和 Example 6.2.1 一致。

Example 6.2.3. 求解方程组不一定要直接求出 n 个不变量

$$u_x - v_y = u + v$$

$$u_y - v_x = 0$$

首先，计算特征值与左特征向量，以及特征曲线。和前两个例子完全一致，此处省略，直接给出

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \pm 1 \\ \eta_{\pm} &= y \mp x \end{aligned} \quad , \quad l_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

对原方程左乘 l^T ，整理化简得到两个 ODE

$$l_{\pm}^T A \frac{d\mathbf{u}}{dx} = l_{\pm}^T \mathbf{c} = u_{\pm} + v_{\pm} \Rightarrow u'_{\pm} \mp v'_{\pm} = u_{\pm} + v_{\pm}$$

显然我们现在只能解出一个不变量

$$\frac{d}{dx} (u_- + v_-) = u_- + v_- \Rightarrow e^{-x} (u_- + v_-) = \text{const}$$

即在定义域内，我们处处有 $e^{-x}(u + v) = \varphi_-(\eta_-) = \varphi_-(y + x)$ 。我们可以利用这个关系构造出另一个不变量，即在另一簇特征上 $y - x = \eta_+$ ， η_+ 可视作常数，有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (u_+ - v_+) &= u_+ + v_+ = e^x \varphi_-(y + x) \\ &= e^x \varphi_-(\eta_+ + 2x) \end{aligned}$$

两边对 x 积分，有

$$\begin{aligned} u_+ - v_+ &= \int_{-\eta_+/2}^x e^t \varphi_-(\eta_+ + 2t) dt + \text{const} \\ &= \int_{-\eta_+/2}^x e^{\frac{m-\eta_+}{2}} \varphi_-(m) d\left(\frac{m-\eta_+}{2}\right) + \text{const} \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{-\eta_+}{2}} \int_0^{2x+\eta_+} e^{\frac{m}{2}} \varphi_-(m) dm + \text{const} \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{x-y}{2}} \int_0^{x+y} e^{\frac{m}{2}} \varphi_-(m) dm + \text{const} \end{aligned}$$

于是另一个不变量为

$$u_+ - v_+ - \frac{1}{2} e^{\frac{x-y}{2}} \int_0^{x+y} e^{\frac{m}{2}} \varphi_-(m) dm = \text{const}$$

即在定义域内有

$$u - v - \frac{1}{2}e^{\frac{x-y}{2}} \int_0^{x+y} e^{\frac{m}{2}} \varphi_-(m) dm = \varphi_+(y-x)$$

存在两个关系

$$\begin{aligned} u + v &= e^x \varphi_-(y+x) \\ u - v &= \frac{1}{2}e^{\frac{x-y}{2}} \int_0^{x+y} e^{\frac{m}{2}} \varphi_-(m) dm + \varphi_+(y-x) \end{aligned}$$

可以解出显式解。这个例子告诉我们，有时可以先求出若干不变量中的几个，转换为全局关系后回代不变量 ODE 解除余下的不变量关系。此处如果给了初值边界条件，还可以先把 φ_- 的表达式解出来之后再回代，可以进一步简化计算。

6.3 Initial Data and Domain of Definition

本节我们考虑方程组 (*)

$$\mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) u_x + \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u}) u_y = \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u}) \quad (1)$$

$$\gamma_0(s) : x = x_0(s), y = y_0(s), \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s), s_1 < s < s_2 \quad (2)$$

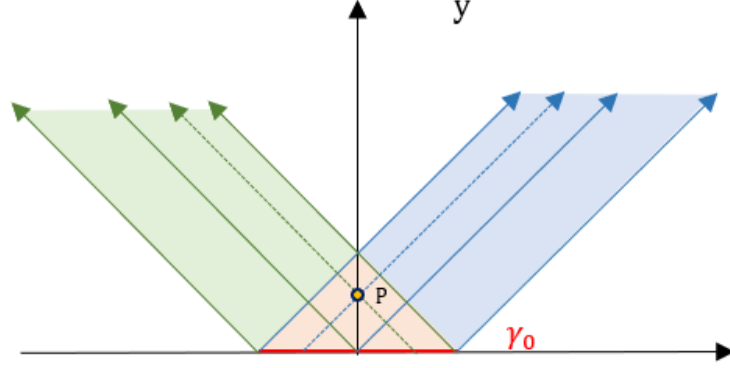
的定义域与解的存在性问题。我们知道，上述方程的解，即 xOy 平面上一点 $P(x, y)$ 上的函数值取决于穿过该点的特征线。所以定义

Definition 6.3.1. 依赖域 (Domain of Dependence) 考虑方程组 (1)，足够确定 xOy 平面内一点 $P(x, y)$ 上函数值 $\mathbf{u}(P)$ 的所有信息所覆盖的最小区域，构成了该点的依赖域 $Dep(P)$ 。一般可以考虑 initial curve 与穿过 (并终止于) 点 P 的所有特征线形成的闭包区域。区域 $\Omega \subset xOy$ 的依赖域: $Dep(\Omega) = \bigcup_{P \in \Omega} Dep(P)$ 。

Definition 6.3.2. 影响域 (Region of Influence) 考虑方程组 (1)，initial curve 上一子集 $l_0 \subseteq \gamma_0$ 的影响域指从该区域引出的 (至多) n 簇特征曲线所扫过的所有区域。即影响域内的每一个点都被至少一条特征曲线穿过。

Definition 6.3.3. 定义域 (Domain of Definition) 含有 n 个因变量的方程组 (1) 的定义域是指，被从 initial curve 引出的 n 簇特征曲线都覆盖到的区域。即定义域内的每一个点都被 n 条对应不同特征值的特征曲线穿过。

取初值曲线 $y = 0, -1 < x < 1$ ，前一节例 6.2.1 中方程组的影响域，定义域，以及定义域内一点 P 的示意图如下 (特征线簇 $\eta_{\pm} = y \mp x$)



上图中红色阴影区域为定义域；有颜色的阴影区域为整条初始曲线的影响域；两条虚线特征线以下（bounded by initial curve）的三角区域为 P 的依赖域。最后，我们讨论初值条件需要满足的要求。和之前讨论的单因变量方程所要满足的条件一样，好的初始数据需要能在初值曲线上确定唯一的 \mathbf{u} 及其一阶导数。对 $\mathbf{u}_0(s)$ 沿 s 求导并在初值曲线上联立方程组，我们可以得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\gamma_0) & \mathbf{B}(\gamma_0) \\ x'_0(s)I_n & y'_0(s)I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}(\gamma_0) \\ \mathbf{u}'_0(s) \end{bmatrix}$$

显然我们需要方程的系数矩阵可逆，即 $\det(x'_0\mathbf{B}_0 - y'_0\mathbf{A}_0) \neq 0$

Theorem 6.3.1. Generalized Cauchy-Kowalevski

考虑初值条件为参数形式的问题 (*)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) u_x + \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u}) u_y &= \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u}) \\ \gamma_0(s) : x &= x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s), \quad s_1 < s < s_2 \end{aligned}$$

若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{c}, x_0(s), y_0(s), \mathbf{u}_0(s)$ 在 γ_0 的某个邻域内解析（无穷可微），则该初值问题在 γ_0 的邻域内有唯一解（为 *Cauchy problem*）当且仅当

$$J_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}(\gamma_0) & \mathbf{B}(\gamma_0) \\ x'_0(s)I_n & y'_0(s)I_n \end{vmatrix} = \det(x'_0\mathbf{B}_0 - y'_0\mathbf{A}_0) \neq 0$$

此时，初始条件能使上述微分方程组 (*)（至少局部）存在唯一解，称为柯西数据。当初值条件为柯西数据时，(*) 称为柯西问题。定理的证明不做要求，可参考补充材料 6.3.1.1/2。

6.4 Weak Solutions and Shocks

本章考虑如下一阶准线性方程组的弱解。

$$\mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u}) \mathbf{u}_y = \mathbf{c}(x, y, \mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\gamma_0(s) : x = x_0(s), y = y_0(s), \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s), s_1 < s < s_2 \quad (4)$$

其中 $\mathbf{u}, \mathbf{c}, \mathbf{u}_0(s)$ 为 \mathbb{R}^n 中的列向量; \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为 n 阶函数方阵。

Definition 6.4.1. Conservation form 若二元一阶偏微分方程组能化成如下的形式

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}(x, y, u) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{Q}(x, y, u) = \mathbf{R}(x, y, u) \quad (5)$$

其中 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 为函数向量, 则称之为该方程的 *Conservation form*。任何形如 (3, 4) 式的拟线性 (即 \mathbf{A}, \mathbf{B} 与 u 无关) 二元一阶 PDE 都有 *Conservation form*, 且其形式不唯一。特别地, 有

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}u) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{B}u) = \mathbf{c} + \mathbf{A}_x u + \mathbf{B}_y u$$

Definition 6.4.2. 弱解 weak solution 初始曲线 γ_0 和另一条曲线 γ_1 围成求解区域 D s.t. $\partial D = \gamma_0 + \gamma_1$ 。若存在一个解 u 使得其对任意测试函数 *test function* $\psi \in C^1(D)$ s.t. $\psi(\gamma_1) \equiv 0$, 使得其对 conservation form (5) 满足

$$\int_{\gamma_0} \psi (P dy - Q dx) = \iint_D (P \psi_x + Q \psi_y + R \psi) dx dy$$

则称 u 为方程 (**) 的一个弱解。此时, u 只要满足可积即可; 式子的构造过程与 Definition 4.1.3 一致。

Definition 6.4.3. Shock 若存在一条曲线 $C(x, y) \subset \Omega$ 使得 (**) 的一个 *weak solution* $u(x, y)$ 在其两边不连续, 称该曲线为一个 *shock*。

Theorem 6.4.1. Rankine-Hugoniot Condition 若 $C(x, y) \subset \Omega$ 为 conservation form (5) 的一个非连续 *weak solution* $u(x, y)$ 的 *shock*, 且 u 在除了 C 以外的地方连续可微 (分段 *classical solution*)。则 $C(x, y)$ 应满足方程

$$[\mathbf{P}]_-^+ \frac{dy}{dx} = [\mathbf{Q}]_-^+$$

特别地, 如果函数 u 在除了 C 上处处满足方程 (**), 则其为一个 *valid weak solution* 当且仅当在 C 上满足 Rankine-Hugoniot condition。可以证明, 拟线性方程组的 *shock* 必然是特征曲线。定理证明和 Theorem 4.2.1 一致, 对 Definition 6.4.2 中的第二个积分算两次。

Theorem 6.4.2. Causality of Weak Solutions

考虑有 n 簇特征曲线的 hyperbolic system : 当弱解存在 shock 时, 应当舍弃 $n-1$ 簇从 shock 指出的特征曲线, 保留 $n+1$ 簇从 initial curve 指入 shock 的特征曲线。

Discussion Theorem 6.4.2 考虑有 n 簇特征曲线的 hyperbolic system : 当弱解存在 shock 时, 在其两侧各有 n 簇特征曲线相交 (分别对应两个分段典型解), 因而在 shock 上的任意一点 (x_s, y_s) 总共给出了 $2n$ 个方程:

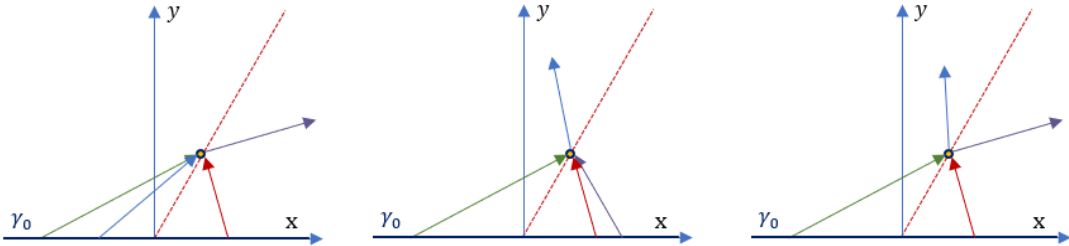
$$\eta_{\lambda^+} = F_{\lambda^+}(x_s, y_s, \mathbf{u}_+)$$

$$\eta_{\lambda^-} = F_{\lambda^-}(x_s, y_s, \mathbf{u}_-)$$

同时, 在 shock 上 Rankine-Hugoniot Condition 又给出了 n 个额外的方程

$$[\mathbf{P}]_-^+ \frac{dy}{dx}|_{(x_s, y_s)} = [\mathbf{Q}]_-^+$$

所以总计有 $3n$ 个条件。同时在 shock 上, 涉及这些方程的有 $2n+1$ 个未知数, 分别为 \mathbf{u} 在 shock 两侧的取值 $\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-$ (各 n 个) 与 shock 的斜率 $\frac{dy}{dx}$ 。为了唯一确定这些未知数, 在 shock 上应当也只保留 $2n+1$ 个条件, 故要舍弃 $n-1$ 簇从 shock 指出的特征曲线, 保留 $n+1$ 簇从 initial curve 指入 shock 的特征曲线。见下图, 当 $n=2$ 时, causal weak solution 应当有三簇特征指入 shock, 一簇指出 (图一, 二)。



Example 6.4.1. Causality of Weak Solutions

$$h_t + uh_x + hu_x = 0$$

$$u_t + h_x + uu_x = 0$$

先求上述方程组的特征曲线簇，再讨论使得其弱解 causal 的条件（初始曲线为 x 轴）。写成矩阵式

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} u & h \\ 1 & u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

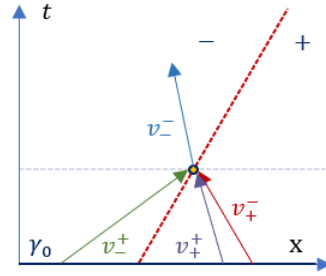
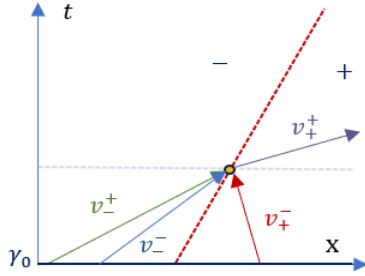
解特征值

$$\begin{bmatrix} u - \lambda & h \\ 1 & u - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = u \pm \sqrt{h}$$

因此在特征曲线上 $v := \frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{h}$ 。在 shock 两侧分别有

$$v_+^\pm = u_+ \pm \sqrt{h_+} \quad v_-^\pm = u_- \pm \sqrt{h_-}$$

记 shock 的斜率为 $v_s := \frac{dx_s}{dt}$ ，有如下两种情况能使 weak solution causal，注意下图中 x 为横轴，且 $v_+^+ < v_-^-$ 自然成立：



$$\begin{cases} v_s < v_-^- = u_- - \sqrt{h_-} \\ v_s < v_-^+ = u_- + \sqrt{h_-} \\ v_s < v_+^+ = u_+ + \sqrt{h_+} \\ v_s > v_+^- = u_+ - \sqrt{h_+} \end{cases} \text{ hold naturally}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v_s - u_-)^2 > h_- \\ (v_s - u_+)^2 < h_+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_s > v_-^- = u_- - \sqrt{h_-} \\ v_s < v_-^+ = u_- + \sqrt{h_-} \\ v_s > v_+^+ = u_+ + \sqrt{h_+} \\ v_s > v_+^- = u_+ - \sqrt{h_+} \end{cases} \text{ hold naturally}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v_s - u_-)^2 < h_- \\ (v_s - u_+)^2 > h_+ \end{cases}$$

7 Second Order Semilinear Equations

7.1 Introduction and Cauchy Data

本节考虑如下的二阶拟线性方程

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1)$$

其参数化边界条件由初始曲线 γ_0 确定

$$\gamma_0(s) = x_0(s)\mathbf{i} + y_0(s)\mathbf{j}, \quad a < s < b$$

该类方程的 Cauchy Data 为解在初始曲线上函数及 normal derivative 值

$$u = u_0(s) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = v_0(s) \quad (2)$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 可以等价地用一阶导数值代替

$$u = u_0(s) \quad u_x = p_0(s) \quad u_y = q_0(s) \quad (3)$$

于是 $\frac{\partial u}{\partial n} = v_0(s) = \langle p_0(s), q_0(s) \rangle \cdot \langle y'_0(s), -x'_0(s) \rangle / \sqrt{[x'_0(s)]^2 + [y'_0(s)]^2}$

Theorem 7.1.1. Necessary Condition for the Cauchy Data

柯西数据 (2, 3) 能局部确定 u 的一个必要条件是

$$a(\gamma_0) [y'_0(s)]^2 - b(\gamma_0)x'_0(s)y'_0(s) + c(\gamma_0) [x'_0(s)]^2 \neq 0$$

Proof Theorem 7.1.1 沿初始曲线对 p_0, q_0 求导并联立原方程, 得到

$$\begin{aligned} f(\gamma_0) &= a(\gamma_0) \cdot u_{xx} + b(\gamma_0) \cdot u_{xy} + c(\gamma_0) \cdot u_{yy} \\ p'_0(s) &= x'_0(s) \cdot u_{xx} + y'_0(s) \cdot u_{xy} \\ q'_0(s) &= x'_0(s) \cdot u_{yx} + y'_0(s) \cdot u_{yy} \end{aligned}$$

如果柯西数据 (2, 3) 能局部确定 u , 则二阶导 u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} 也被唯一确定。故行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x'_0(s) & y'_0(s) & 0 \\ 0 & x'_0(s) & y'_0(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

展开即得 $a(\gamma_0) [y'_0(s)]^2 - b(\gamma_0)x'_0(s)y'_0(s) + c(\gamma_0) [x'_0(s)]^2 \neq 0$ 。

Definition 7.1.1. Characteristics

方程 $a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ 的特征是指在 xOy 平面上函数 u 的二阶导数不唯一确定的曲线 (簇)

$$a \cdot [y'(\tau; s)]^2 - b \cdot x'(\tau; s)y'(\tau; s) + c \cdot [x'(\tau; s)]^2 = 0$$

其满足特征值问题

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y) \iff \eta_\lambda(s) = F_\lambda(x, y) \quad \text{for} \quad a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$$

其中 $\eta_\lambda(s)$ 在确定初始位置 $P_0(s) \in \gamma_0(s)$ 的特征曲线上为常数。称 $\eta_\lambda(s) = F_\lambda(x, y)$ 为方程对应特征值 $\lambda(x, y)$ 的一簇特征曲线簇。沿特征曲线求全微分, 易证在定义域内总有

$$dF_\lambda(x, y) = \partial_x F_\lambda \cdot dx + \partial_y F_\lambda \cdot dy = 0 \Rightarrow \partial_x F_\lambda / \partial_y F_\lambda = -\lambda$$

Proof Definition 7.1.1 证明与上述 Theorem 7.1.1 的证明一致。对 $a \cdot [y'(\tau; s)]^2 - b \cdot x'(\tau; s)y'(\tau; s) + c \cdot [x'(\tau; s)]^2 = 0$ 两边同时除以 $[x'(\tau; s)]^2$ 得到

$$a \cdot \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 - b \cdot \frac{dy}{dx} + c = 0$$

记 $\lambda := \frac{dy}{dx}$ 即可得到对应的特征值问题。

Theorem 7.1.2. 如果方程 $a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ 的连续解 u 的二阶偏导数沿着某曲线两侧不连续, 则该曲线只能是特征曲线。有时这条性质也会被作为该类方程特征的定义, 证明与之前 Theorem 4.1.1 类似。

Definition 7.1.2. 二阶拟线性 PDE 的判别式与分类

方程 $a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ 的判别式 *discriminant* 为

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

可将方程分为三类

- 1) *Hyperbolic* $\Delta > 0$, 特征多项式 $a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$ 有两个相异实根 λ_\pm ;
- 2) *Elliptic* $\Delta < 0$, 特征多项式 $a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$ 有两个共轭复根 $\lambda, \bar{\lambda}$;
- 3) *Parabolic* $\Delta = 0$, 特征多项式 $a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$ 有两个相同实根 λ .

7.2 Canonical Forms

Theorem 7.2.1. 二阶拟线性方程的坐标转换

对方程 $a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ 换元

$$(x, y) \mapsto (\xi, \eta) \quad \text{s.t.} \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

记 $u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, 可以得到

$$A(\xi, \eta)\tilde{u}_{\xi\xi} + B(\xi, \eta)\tilde{u}_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)\tilde{u}_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) \quad (4)$$

其中

$$A = a \cdot \xi_x^2 + b \cdot \xi_x \xi_y + c \cdot \xi_y^2 \quad (5)$$

$$B = 2a \cdot \xi_x \eta_x + b \cdot (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2c \cdot \xi_y \eta_y \quad (6)$$

$$C = a \cdot \eta_x^2 + b \cdot \eta_x \eta_y + c \cdot \eta_y^2 \quad (7)$$

$$F = f - \tilde{u}_\xi(a \cdot \xi_{xx} + b \cdot \xi_{xy} + c \cdot \xi_{yy}) - \tilde{u}_\eta(a \cdot \eta_{xx} + b \cdot \eta_{xy} + c \cdot \eta_{yy}) \quad (8)$$

坐标变换不改变方程的类型, 前后 Δ 正负号不变

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac) \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right|^2 \quad (9)$$

上述定理的证明见 MATH 323 笔记, 此处省略。

Theorem 7.2.2. 双曲型方程的标准型

对双曲型方程 $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f$ 换元 $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, 其中

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_+ \Rightarrow \xi(x, y) = \text{const} \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_- \Rightarrow \eta(x, y) = \text{const} \quad (11)$$

记 $u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, 可以得到 $A(\xi, \eta) = C(\xi, \eta) = 0$, 且

$$\tilde{u}_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta)/B(\xi, \eta) \quad (12)$$

Theorem 7.2.3. 椭圆型方程的标准型

对椭圆型方程 $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f$ 换元 $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, 其中

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \text{ (or } \bar{\lambda}) \Rightarrow \xi(x, y) + \eta(x, y)i = \text{const} \quad (13)$$

记 $u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, 可以得到 $A(\xi, \eta) = C(\xi, \eta) = 0$, $B(\xi, \eta) \neq 0$, 且

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta)/A(\xi, \eta) \quad (14)$$

Theorem 7.2.4. 抛物型方程的标准型

对**抛物型**方程 $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f$ 换元 $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, 其中

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \Rightarrow \eta(x, y) = \text{const} \quad (15)$$

记 $u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, 可以得到 $B(\xi, \eta) = C(\xi, \eta) = 0$, 且

$$\tilde{u}_{\xi\xi} = F(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta)/A(\xi, \eta) \quad (16)$$

上述的 $\xi(x, y)$ 可取任意与 $\eta(x, y)$ 线性无关的函数, 一般直接取 $\xi(x, y) = x$ 或者 $\xi(x, y) = y$ 。

上述定理的证明见 MATH 323 笔记, 此处不再重复。下面介绍几个简单二阶 PDE 的解

Theorem 7.2.5. 几个简单二阶方程的解

1) Hyperbolic $\tilde{u}_{\xi\eta} = \phi(\xi, \eta)$ 分别对两个变量积分, 记 f, g 为任意函数

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int \left(\int \phi \, d\eta \right) d\xi + f(\xi) + g(\eta)$$

2) Hyperbolic $\tilde{u}_{\xi\eta} + p(\xi)\tilde{u}_\eta = 0$ 对 η 积分, 记 f 为任意函数

$$\tilde{u}_\xi + p(\xi)\tilde{u} = f(\xi)$$

采用常数变易法可得 $I(\xi) = e^{\int p(\xi)d\xi}$ 与 $\frac{\partial}{\partial \xi} [I(\xi)\tilde{u}] = I(\xi)f(\xi)$

$$I(\xi)\tilde{u} = \int I(\xi)f(\xi)d\xi + g(\eta)$$

3) Elliptic $\tilde{u}_{\xi\xi} = \phi(\xi, \eta)$ 对变量 ξ 积两次, 记 f, g 为任意函数

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int \left(\int \phi \, d\xi \right) d\xi + f(\eta)\xi + g(\eta)$$

8 Second Order Hyperbolic Equations

8.1 Non-Cauchy Data

Definition 8.1.1. 双曲型边界条件的分类 双曲型方程（二阶拟线性）的**非连续**边界上实际所需的边界条件数等于从该边界（沿正方向）进入求解域的特征曲线簇个数。当有两簇特征从该边界进入求解域，则称此类边界为 *space-like*，需要给定两个边界条件；当只有一簇特征进入求解域，则称此类边界为 *time-like*，需要给定一个边界条件；最后，当没有特征从该边界进入求解域，则无需在该边界上给定边界条件。

8.2 Riemann's Method

本节讨论形如下式的**线性**双曲型方程解法

$$u_{xy} + d(x, y) \cdot u_x + e(x, y) \cdot u_y + f(x, y) \cdot u = g(x, y) \quad (1)$$

记 $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + d(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + e(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y)$ ，方程可化为 $\mathcal{L}[u] = g(x, y)$ 。**与坐标轴处处不平行的**初始曲线 $\gamma_0 = \langle x_0(s), y_0(s) \rangle$ 上有边界条件 $u = u_0(s)$, $u_x = p_0(s)$, $u_y = q_0(s)$ 。

Definition 8.2.1. 伴随算子 定义上述算子 \mathcal{L} 的伴随算子为

$$\mathcal{L}^*[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(d \cdot v) - \frac{\partial}{\partial y}(e \cdot v) + f(x, y)$$

伴随算子的构造是为了使得 $v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[v]$ 为某一个矢量函数的散度从而方便散度定理的使用。一般采用如下的手法构造：**将原算子 \mathcal{L} 的系数函数 d, e, f 移到导数后，并改变奇数导数前的符号**。不难验证， $v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[v]$ 满足

$$v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[v] = \nabla \cdot (vu_y + duv, -uv_x + evv) \quad (2)$$

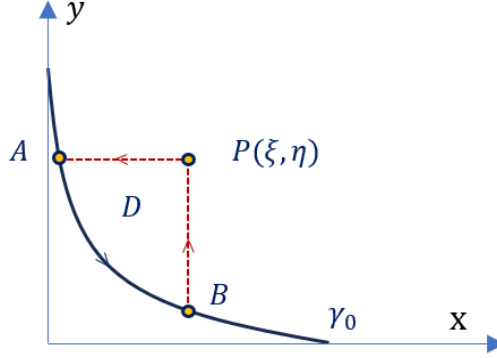
Theorem 8.2.1. 黎曼函数 Riemann's Function 任取 $P(\xi, \eta) \in \Omega$ (Ω 为求解区域)，算子 \mathcal{L} 的黎曼函数 $R(x, y; \xi, \eta)$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}^*[R] = 0 & \text{if } x, y < \xi, \eta \\ R_x = eR & \text{if } y = \eta \\ R_y = dR & \text{if } x = \xi \\ R = 1 & \text{if } x, y = \xi, \eta \end{cases} \quad (3)$$

记 $y = \eta$ 与 $x = \xi$ 交 γ_0 于点 A, B ; 三条边界围成区域 D 。此时, 方程 (1) 的解为

$$u(\xi, \eta) = \iint_D Rg \, dx dy + R(B)u(B) - \int_A^B \left\{ R(u_y + du) \, dy + u(R_x - eR) \, dx \right\}$$

直接记住上面的公式比较复杂, 故需要熟练该公式的推导, 如下



Proof Theorem 8.2.1 对 $R\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[R] = \nabla \cdot (Ru_y + duR, -uR_x + euR)$ 在区域 D 积分, 结合散度定理 (格林公式) 得到

$$\begin{aligned} \iint_D R\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[R] \, dx dy &= \oint_{\partial D} (Ru_y + duR)dy - (-uR_x + euR)dx \\ &= \int_{AB} (Ru_y + duR)dy + (uR_x - euR)dx \\ &\quad + \int_B^P R(u_y + du)dy + \int_P^A u(R_x - eR)dx \\ &= \int_A^B R(u_y + du)dy + u(R_x - eR)dx \\ &\quad + Ru|_B^P + \int_B^P u(Rd - R_y)dy + \int_P^A u(R_x - eR)dx \\ &= \int_A^B R(u_y + du)dy + u(R_x - eR)dx + R(\xi, \eta)u(\xi, \eta) - R(B)u(B) + 0 + 0 \end{aligned}$$

其中第三个等号利用了分部积分; 最后一个等号由 (3) 的第 2, 3 条得到。进一步规定 $\mathcal{L}^*[R] = 0$ if $x, y < \xi, \eta$ 与 $R(\xi, \eta) = 1$, 最终有

$$\iint_D R\mathcal{L}[u] \, dx dy = \int_A^B \left\{ R(u_y + du)dy + u(R_x - eR)dx \right\} + u(\xi, \eta) - R(B)u(B)$$

由 $\mathcal{L}[u] = g$ 整理可得

$$u(\xi, \eta) = \iint_D Rg \, dx dy + R(B)u(B) - \int_A^B \left\{ R(u_y + du)dy + u(R_x - eR)dx \right\}$$

Definition 8.2.2. 黎曼函数的广义函数定义 假设求解区域 Ω 的边界由初始曲线与另一条曲线 γ 组成, 即 $\partial\Omega = \gamma_0 + \gamma$ 。记 $\delta(x)$ 为 delta 函数, 任取 $P(\xi, \eta) \in \Omega$ 。下列黎曼函数的定义与 Theorem 8.2.1 中等价

$$\begin{cases} \mathcal{L}^*[R] = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) & \text{if } (x, y) \in S \\ R = \frac{\partial R}{\partial n} = 0 & \text{if } (x, y) \in \gamma \end{cases} \quad (4)$$

此时 $R \sim H(\xi - x) H(\eta - y)$ as $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, 其中 $H(x) = 1_{[0, +\infty)}(x)$ 为 Heaviside function。

9 Second Order Elliptic Equations

9.1 Well-posed Boundary Data

第七章中所给出的 Cauchy data (在边界上同时给定 u 与 $\frac{\partial u}{\partial n}$) 对于椭圆型方程来说是 ill-posed 的。一方面, 对初值条件的微小扰动可能导致解的大幅变化; 另一方面, 奇异点可能在边界的任意近邻域内出现。在本节中, 我们主要考虑如下的 well-posed elliptic BVP

Definition 9.1.1. Well-posed Elliptic BVP 考虑如下的线性椭圆型方程, 其中求解区域 D 为有界开集, 其边界 ∂D 为一闭合曲线

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f(x, y) & \text{if } (x, y) \in D \\ u = g(x, y) & \text{if } (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (1)$$

在边界上给定 u 的表达式, 称为 *Dirichlet Problem*。或

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f(x, y) & \text{if } (x, y) \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y) & \text{if } (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (2)$$

在边界上给定 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的表达式, 称为 *Neumann Problem*。此时 (*Neumann Problem*) 方程有解的一个必要条件是满足 *solvability / orthogonality condition*

$$\iint_D \nabla^2 u \, dx dy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \Rightarrow \iint_D f \, dx dy = \oint_{\partial D} g \, ds \quad (3)$$

其中第一个式子为散度定理。线性方程 $\nabla^2 u = f(x, y)$ 称为 *Poisson's Equation*; 当 $f \equiv 0$ 时, 称为 *Laplace Equation* 或 *Harmonic Equation*。

Theorem 9.1.1. Poisson 方程 BVP 解的唯一性定理 若 Dirichlet Problem (1) 的解存在, 则必唯一; 若 Neumann Problem (2) 满足 solvability condition (3) 且解存在, 则任意两个相异解 $u_1 \neq u_2$ 仅相差一个常数 $u_1 - u_2 = \text{const}$ (*Fredholm alternative*)。

Theorem 9.1.2. Maximum Principle 若 D 上的 Poisson's Equation $\nabla^2 u = f(x, y)$ 满足 $f \geq 0$ 在 D 上恒成立, 则 u 只能在边界 ∂D 上取 **最大值**; 满足 $f \leq 0$ 在 D 上恒成立, 则 u 只能在边界 ∂D 上取 **最小值**。证明不做要求, 可见 NSPDE 笔记。

Proof Theorem 9.1.1 Dirichlet Problem (1) 的任意两个相异解 $u_1 \neq u_2$, 满足 $\phi = u_1 - u_2$ 且

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 & \text{if } (x, y) \in D \\ \phi = 0 & \text{if } (x, y) \in \partial D \end{cases}$$

考虑狄利克雷积分 $\iint_D \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) \, dx dy$, 一方面, 对内部展开, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) \, dx dy &= \iint_D \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \nabla \phi \, dx dy \\ &= \iint_D \|\nabla \phi\|^2 + \phi \nabla^2 \phi \, dx dy = \iint_D \|\nabla \phi\|^2 \, dx dy \end{aligned}$$

另一方面, 由散度定理

$$\iint_D \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) \, dx dy = \oint_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot n \, ds = \oint_{\partial D} \phi \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0$$

联立二者, 有

$$\iint_D \|\nabla \phi\|^2 \, dx dy = \oint_{\partial D} \phi \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0 \Rightarrow \|\nabla \phi\| = 0 \Rightarrow \nabla \phi = 0$$

于是在 D 上 $\phi = \text{const}$ 。由于在边界 ∂D 上有 $\phi = 0$, 易得 $\phi = 0$ 在 D 上恒成立。即有, $u_1 = u_2$ 。同理易证 Neumann Problem 的情形。

9.2 Green's Function

Definition 9.2.1. Delta Function

定义符合如下性质的函数为定义在 \mathbb{R}^n 上的 δ 函数

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq 0 \\ \infty & \text{if } x = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) dx = 1$$

该广义函数有如下性质

- 1) $\delta(x) = \delta(-x)$ 为偶函数
- 2) $\forall f$ Lebesgue integrable : $\int_D f(x) \delta(x) dm = \int_D f(x) d\delta_0$
- 3) $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-z) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(z-x) f(x) dx = f(z)$

Theorem 9.2.1. 基本解 Fundamental Solution

称函数

$$\Gamma_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln ||x|| & \text{if } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)S_n} ||x||^{2-n} & \text{if } n \geq 3 \end{cases} \quad (4)$$

为以 $x=0$ 为奇点的 Laplace 方程的基本解; $\Gamma_n(x, z) = \Gamma_n(x-z)$ 为以 $x=z$ 为奇点的 Laplace 方程的基本解; S_n 为 \mathbb{R}^n 中单位球面的表面积。该基本解有如下性质

$$\nabla_x^2 \Gamma_n(x-z) = \delta(x-z) \quad \text{for } x, z \in D \quad (5)$$

Lemma 9.2.1. 径向函数

在 \mathbb{R}^n 上的径向函数为 $f(x) = v(r)$, 其中 $r = ||x||$ 。径向函数的取值与角度无关, 只与坐标的模长有关。在中心为原点的球面 $B_r(0)$ 上, 径向函数的 normal derivative 满足 $\frac{\partial}{\partial n} f(x) := \frac{\partial v}{\partial n} = v'(r)$ 。此外, 有偏导数 $r_{x_i} = \frac{x_i}{r}$ 。

Proof Theorem 9.2.1 构造径向函数 $v(r)$ 使得 $u(x) = v(||x-z||)$, $r = ||x-z||$ 。要求 u 在 $x \neq z$ 时满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$ 。有偏导数

$$r_{x_i} = \frac{x_i - z_i}{r} \quad u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i - z_i}{r} \quad u_{x_i x_i} = v'' \frac{(x_i - z_i)^2}{r^2} + v' \frac{r^2 - (x_i - z_i)^2}{r^3}$$

从而 $\nabla^2 u = v'' + v' \frac{n-1}{r}$ 。要 $\nabla^2 u = 0$ 当且仅当

$$(\ln |v'|)' = \frac{v''}{v'} = -\frac{n-1}{r} \Rightarrow v' = \frac{A}{r^{n-1}}$$

$$v(r) = \begin{cases} A \ln r + B & \text{if } n = 2 \\ Ar^{2-n} + B & \text{if } n \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow u(x) = \begin{cases} A \ln ||x - z|| + B & \text{if } n = 2 \\ A||x - z||^{2-n} + B & \text{if } n \geq 3 \end{cases}$$

记 $\Gamma_n(x) := v(||x||)$, $u(x) = \Gamma_n(x - z)$ 在 $x \neq z$ 时处处满足 Laplace 方程。要构造 $\nabla_x^2 \Gamma_n(x - z) = \delta(x - z)$, 还要有 $\int_{\mathbb{R}^n} \nabla^2 u(x) dx = 1$ 。取以 z 为心的半径为 r 的球 $B_r(z)$, 并在其上对 $\nabla^2 u(x)$ 积分, 由于 $\nabla^2 u(x)$ 仅在 $x = z$ 时不为 0, 故

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^2 u(x) dx &= \int_{B_r(z)} \nabla^2 u(x) dx = \int_{B_r(z)} \nabla^2 v(||x - z||) dx \\ &= \int_{B_r(0)} \nabla_{x'}^2 v(||x'||) dx' = \oint_{\partial B_r(0)} \nabla_{x'} v(r) \cdot n ds \\ &= \oint_{\partial B_r(0)} v'(r) ds = v'(r) \oint_{\partial B_r(0)} 1 ds = v'(r) S_n r^{n-1} = 1 \end{aligned}$$

故要求 $v'(r) = \frac{1}{S_n} r^{1-n}$ 特别有 $S_2 = 2\pi$ (二维单位球表面积即为单位圆周长) 于是当 $n = 2$ 时, $A = \frac{1}{2\pi}$, B 为任意常数。同理, 当 $n \geq 3$ 时, $A(2-n)r^{1-n} \cdot S_n r^{n-1} = A(2-n)S_n = 1$, $A = \frac{1}{(2-n)S_n}$, B 为任意常数。从而

$$\Gamma_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln ||x|| & \text{if } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)S_n} ||x||^{2-n} & \text{if } n \geq 3 \end{cases}$$

最后, 证明 $\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x^2 \Gamma_n(x - z) \phi(x) dx = \phi(z)$ 从而使得 $\nabla_x^2 \Gamma_n(x - z)$ 满足 delta 函数的所有性质。

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x^2 \Gamma_n(x - z) \phi(x) dx &= \int_{B_r(z)} \nabla_x^2 \Gamma_n(x - z) \phi(x) dx = \int_{B_r(0)} \nabla_{x'}^2 \Gamma_n(x') \phi(x' + z) dx' \\ &= \int_{B_r(0)} \nabla_x^2 \Gamma_n(x) \phi(x + z) dx \end{aligned}$$

利用求导公式 $\nabla^2 f \cdot g = g \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot (g \nabla f) - \nabla g \cdot \nabla f$; 交换 f, g 有 $\nabla^2 g \cdot f = \nabla \cdot (f \nabla g) - \nabla g \cdot \nabla f$ 。两式结合消去 $\nabla g \cdot \nabla f$ 有

$$\nabla^2 f \cdot g = \nabla^2 g \cdot f + \nabla \cdot (g \nabla f - f \nabla g)$$

结合分部积分与散度定理

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x^2 \Gamma_n(x - z) \phi(x) dx &= \int_{B_r(0)} \nabla_x^2 \Gamma_n(x) \phi(x + z) dx \\ &= \int_{B_r(0)} \Gamma_n(x) \nabla_x^2 \phi(x + z) dx + \oint_{\partial B_r(0)} [\phi(x + z) \nabla_x \Gamma_n(x) - \Gamma_n(x) \nabla_x \phi(x + z)] \cdot n ds \\ &= \int_{B_r(0)} \Gamma_n(x) \nabla_x^2 \phi(x + z) dx + \oint_{\partial B_r(0)} \phi(x + z) \frac{\partial}{\partial n} \Gamma_n(x) ds - \oint_{\partial B_r(0)} \Gamma_n(x) \frac{\partial}{\partial n} \phi(x + z) ds \\ &= I(r) + J(r) - K(r) \rightarrow 0 + \phi(z) - 0 \quad \text{as } r \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Theorem 9.2.2. 格林函数 Green's Function - Dirichlet Problem

考虑定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Dirichlet Problem (1), i.e.,

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f(x) & \text{if } x \in D \\ u = g(x) & \text{if } x \in \partial D \end{cases}$$

任取 $z \in D$, 定义黎曼函数 $G(x; z)$ 满足

$$\begin{cases} \nabla_x^2 G = \delta(x - z) & \text{if } x \in D \\ G = 0 & \text{if } x \in \partial D \end{cases} \quad (6)$$

此时, Dirichlet Problem (1) 的解为

$$u(z) = \int_D G f \, dx + \oint_{\partial D} g \frac{\partial G}{\partial n} \, ds_x$$

该定理的证明与黎曼函数的构造类似, 由于 Laplace 算子的伴随算子就是其本身 $\mathcal{L} = \nabla^2 = \mathcal{L}^*$, 故在区域 D 内计算积分 $\int_D G \mathcal{L}[u] - u \mathcal{L}^*[G] \, dx$, 即

$$\int_D G \nabla^2 u - u \nabla^2 G \, dx$$

可以利用 Proof Theorem 9.2.1 中的推论

$$g \cdot \nabla^2 f - f \cdot \nabla^2 g = \nabla \cdot (g \nabla f - f \nabla g)$$

Theorem 9.2.3. 格林函数的构造 - Dirichlet Problem

考虑定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Dirichlet Problem (1)。取奇点 $z \in D$ 并构造基本解 $\Gamma_n(x - z)$, 若存在一个函数 $\widetilde{G}(x; z)$ 满足 BVP

$$\begin{cases} \nabla_x^2 \widetilde{G} = 0 & \text{if } x \in D \\ \widetilde{G} = \Gamma_n(x - z) & \text{if } x \in \partial D \end{cases} \quad (7)$$

则此时 $G(x; z) = \Gamma_n(x - z) - \widetilde{G}(x; z)$ 即为符合 Theorem 9.2.2 要求的格林函数。证明显然, 省略。

Proof Theorem 9.2.2

$$\begin{aligned} \int_D G \nabla^2 u - u \nabla^2 G \, dx &= \int_D \nabla \cdot (G \nabla u - u \nabla G) \, dx \\ &= \oint_{\partial D} (G \nabla u - u \nabla G) \cdot n \, ds_x = - \oint_{\partial D} g \frac{\partial G}{\partial n} \, ds_x \end{aligned}$$

又有 $\int_D G \nabla^2 u - u \nabla^2 G \, dx = \int_D G f - u \cdot \delta(x - z) \, dx = \int_D G f \, dx - u(z)$ 所以 $u(z) = \int_D G f \, dx + \oint_{\partial D} g \frac{\partial G}{\partial n} \, ds_x$

Theorem 9.2.4. 格林函数 Green's Function - Neumann Problem

考虑定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Neumann Problem (2), *i.e.*,

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f(x) & \text{if } x \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(x) & \text{if } x \in \partial D \\ \int_D f \, dx = \oint_{\partial D} g \, ds \end{cases}$$

任取 $z \in D$, 定义黎曼函数 $G(x; z)$ 满足

$$\begin{cases} \nabla_x^2 G = \delta(x - z) - C & \text{if } x \in D \\ \frac{\partial G}{\partial n} = 0 & \text{if } x \in \partial D \end{cases} \quad (8)$$

其中 $C = \frac{1}{V_D}$ 为区域 D 体积 V_D 的倒数, 用于拟合 solvability condition。此时, Neumann Problem (2) 的解为

$$u(z) = \bar{u} + \int_D G f \, dx - \oint_{\partial D} g G \, ds_x \quad \text{s.t.} \quad \bar{u} = \frac{1}{V_D} \int_D u \, dx$$

该定理的证明与之前的完全类似。

Proof Theorem 9.2.4 首先, 想要 BVP (8) 有解, 则必须满足 solvability condition 即

$$\int_D \delta(x - z) - C \, dx = \oint_{\partial D} 0 \, ds$$

即 $C = \frac{1}{V_D}$, 接着与之前类似

$$\begin{aligned} \int_D G \nabla^2 u - u \nabla^2 G \, dx &= \int_D \nabla \cdot (G \nabla u - u \nabla G) \, dx \\ &= \oint_{\partial D} (G \nabla u - u \nabla G) \cdot n \, ds_x = \oint_{\partial D} g G \, ds_x \end{aligned}$$

又有 $\int_D G \nabla^2 u - u \nabla^2 G \, dx = \int_D G f - u \cdot \delta(x - z) + C u \, dx = \int_D G f \, dx - u(z) + \bar{u}$
所以 $u(z) = \bar{u} + \int_D G f \, dx - \oint_{\partial D} g G \, ds_x$

9.3 Method of Images

本节介绍如何通过反射法 Method of Images 构造 Dirichlet Problem 所需的格林函数 $G(x; z) = \Gamma_n(x - z) - \widetilde{G}(x; z)$, 即求解如下的 BVP

$$\begin{cases} \nabla_x^2 \widetilde{G} = 0 & \text{if } x \in D \\ \widetilde{G} = \Gamma_n(x - z) & \text{if } x \in \partial D \end{cases} \quad (9)$$

Theorem 9.3.1. 基本解的性质 考虑定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Dirichlet Problem (1), 若 $\psi(x) = ax + z$ 为一个关于 x 的线性函数, a 为一个常数。则函数 $\Gamma_n(\psi(x))$ 在除了奇点 $\psi(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{a}z$ 以外的地方处处满足 Laplace Equation, 即总有,

$$\nabla_x^2 \Gamma_n(\psi(x)) = \nabla_x^2 \Gamma_n(ax + z) = 0, \quad x \neq -\frac{1}{a}z$$

特别地, 当 $a = 1$ 时, $\Gamma_n(\psi(x))$ 是关于 $-z$ 的基本解。注意, $\nabla_x^2 \Gamma_n(\psi(x))$ 在此时不一定等于 delta 函数 (除非 $a = 1$)。

Definition 9.3.1. 反射点 Image Point 考虑定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Dirichlet Problem (1), 如果存在一个映射 $\tilde{\cdot}: z \in \text{int}(D) \mapsto \tilde{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ 将求解区域内的每一个点都映射到其外部, 则称像点 \tilde{z} 为 z 对应的一个反射点。

Theorem 9.3.2. 反射法的构造 构造区域 D 内点 z 的反射映射 $\tilde{\cdot}: z \in \text{int}(D) \mapsto \tilde{z}$ 从而使其满足 $\tilde{z} \notin \overline{D}$ 。若存在一个关于 z 的放缩系数 $a_z \in \mathbb{R}^+$ 使得对于边界上的点 $x \in \partial D$, 总有

$$\|a_z \cdot (x - \tilde{z})\| = \|x - z\|, \quad x \in \partial D \quad \text{即} \quad a_z = \|x - z\| / \|x - \tilde{z}\|, \quad x \in \partial D$$

其几何意义表示边界点 x 到原奇点 z 的距离为到像点 \tilde{z} 距离的 a_z 倍, 则此时

$$\begin{cases} \nabla_x^2 \Gamma_n(a_z \cdot (x - \tilde{z})) = 0 & \text{if } x \in D \\ \Gamma_n(a_z \cdot (x - \tilde{z})) = \Gamma_n(x - z) & \text{if } x \in \partial D \end{cases}$$

记 $\widetilde{G}(x; z) = \Gamma_n(a_z \cdot (x - \tilde{z}))$, 即定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Dirichlet Problem (1) 有格林函数为

$$G(x; z) = \Gamma_n(x - z) - \Gamma_n(a_z \cdot (x - \tilde{z}))$$

该定理的证明显然, 省略。在某些情况下, 将式子改为

$$G(x; z) = \Gamma_n(x - z) + \Gamma_n(a_z \cdot (x - \tilde{z}))$$

可以构造符合 Neumann Problem 的格林公式, 具体情况具体分析。

Theorem 9.3.3. 常见的反射点构造

1. 若区域为半平面 $D = \{x : x_i \geq 0\}$, 取 $\tilde{z} \mapsto (z_1, \dots, -z_i, \dots, z_n)$, $a_z = 1$
2. 若区域为以原点为中心, r 为半径的 n 维球 $D = B_r(0)$, 取 $\tilde{z} \mapsto \frac{r^2}{\|z\|^2}z$,
 $a_z = \frac{\|z\|}{r}$

Proof Theorem 9.3.1 直接带入 Γ_n 的表达式, 有

$$\Gamma_n(ax + z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \|ax + z\| = \frac{1}{2\pi} \ln |a| + \Gamma_n(x + z/a) & \text{if } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)S_n} \|ax + z\|^{2-n} = |a|^{2-n} \Gamma_n(x + z/a) & \text{if } n \geq 3 \end{cases}$$

显然 $\Gamma_n(x + z/a)$ 是以 $-z/a$ 为奇点的基本解, 故总有 $\nabla_x^2 \Gamma_n(x + z/a) = 0$, 即

$$\nabla_x^2 \Gamma_n(ax + z) = \begin{cases} \nabla_x^2 \Gamma_n(x + z/a) = 0 & \text{if } n = 2 \\ |a|^{2-n} \nabla_x^2 \Gamma_n(x + z/a) = 0 & \text{if } n \geq 3 \end{cases}$$

Proof Theorem 9.3.3 第一条易证, 省略; 仅证明第二条。首先证明反射点不再圆内 $\|\tilde{z}\| = \frac{r^2}{\|z\|^2} \|z\| = \frac{r}{\|z\|} r > r$; 其次, 证明边界上的点距离两个奇点相差 a_z 倍

$$\begin{aligned} \|a_z \cdot (x - \tilde{z})\|^2 &= \frac{\|z\|^2}{r^2} \|x - \tilde{z}\|^2 = \frac{\|z\|^2}{r^2} (x^T - \tilde{z}^T)(x - \tilde{z}) \\ &= \frac{\|z\|^2}{r^2} (\|x\|^2 - 2x^T \tilde{z} + \|\tilde{z}\|^2) \\ &= \frac{\|z\|^2}{r^2} (r^2 - 2 \frac{r^2}{\|z\|^2} x^T z + \frac{r^4}{\|z\|^4} \|z\|^2) \\ &= \|z\|^2 - 2x^T z + r^2 = \|x - z\|^2 \end{aligned}$$

9.4 Conformal Mappings

关于共形映射 Conformal Mappings 的详细讨论见 MATH323 第四章笔记, 这里仅列举必要的定义和结论。共形映射常用于简化二维 Laplace 方程 $\nabla^2 \phi(x, y) = 0$ 的边界 ∂D 。

Theorem 9.4.1. 解析复变函数 复变函数 $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ 在开区域 D 上解析当且仅当: $u, v \in C^1(D)$ 且满足 Cauchy-Riemann Equation $u_x = v_y$ and $u_y = -v_x$ 。此时 $f'(z) = f_x = -if_y$

Theorem 9.4.2. 解析复变函数与拉普拉斯方程

复变函数 $\psi(z) = \psi(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ 在开区域 D 上解析, 则其实部虚部均为拉普拉斯方程的解 $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$ 。

特别地, 若解析函数 $\psi(z)$ 的实部 (resp., 虚部) $\text{Re}[\psi(z)]$ 在边界满足所需的 Dirichlet 条件 $\text{Re}[\psi(z)]|_{z \in \partial D} = g(x, y)$, 则 $u(x, y) = \text{Re}[\psi(z)]$ 即为 Dirichlet Problem 的解。例题见 Lecture Notes pp.64-65 Example 43。

Definition 9.4.1. 共形映射 $f: A \mapsto B$ 为开域 $A \subset \mathbb{C}$ 上的单值可逆映射, 其为共形映射当且仅当 f 在 A 上解析且 $f'(z) \neq 0$ 。

Theorem 9.4.3. Riemann Mapping Theorem 对任何单连通开集合 $A \subset \mathbb{C}$ s.t. $A \neq \mathbb{C}$, 总存在一个 (可逆) 共形映射 $f: A \mapsto B_1(0)$ 将其映射到单位开圆盘 $B_1(0)$ 内, 且 $f^{-1}: B_1(0) \mapsto A$ 也是一个共形映射。

Theorem 9.4.4. 共形映射与拉普拉斯方程 $f: A \mapsto B$ 为可逆共形映射, $w = f(z)$, 记 $z = x + yi$, $w = u(x, y) + v(x, y)i$ 。利用 $w = f(z)$ 进行坐标变换 (包括边界条件), 则函数 ϕ 在 A 上满足 $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ 当且仅当在 B 上满足 $\phi_{uu} + \phi_{vv} = 0$ 。选取 A, B 中简单的区域进行求解后换回想要的坐标即可。

Theorem 9.4.5. 共形映射与格林函数 记 z_0 为格林函数的奇点, $cf(\cdot; z_0): A \mapsto B$ 为可逆共形映射, $w = cf(z; z_0)$, 记 $z = x + yi$, $w = u(x, y) + v(x, y)i$ 。若 cf 将 ∂D 映射到单位圆 $|w| = 1$, z_0 映射到原点 $cf(z_0; z_0) = 0$, 则 Dirichlet Problem (1) 的格林函数为

$$G(z; z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |cf(z; z_0)|$$

10 Second Order Parabolic Equations

10.1 Well-posed Boundary Data

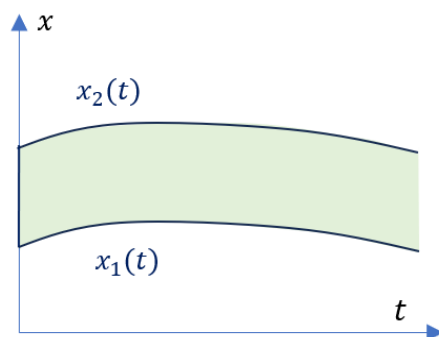
Definition 10.1.1. Well-posed Elliptic BVP

考虑求解区域为 $D = \{(x, t) : 0 \leq t \leq \tau, x_1(t) \leq x \leq x_2(t)\}$ 的线性抛物型方程 (reaction-diffusion equation)

$$u_{xx} = u_t + f(x, t)$$

其中 $x_1(t), x_2(t)$ 与 x 轴处处不平行且无交点, 适定边界条件通常为

$$\begin{cases} u = u_0(x) & \text{if } t = 0 \\ u = g_1(t) & \text{if } x = x_1(t) \\ u = g_2(t) & \text{if } x = x_2(t) \end{cases} \quad (1)$$



Theorem 10.1.1. Leibnitz' Rule

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x, t) dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + x_2'(t) f(x_2, t) - x_1'(t) f(x_1, t)$$

Theorem 10.1.2. 解的唯一性定理 若 BVP (1) 的解存在, 则必唯一。

Theorem 10.1.3. Maximum Principle 若 BVP (1) 满足 $f \geq 0$ 在 D 上恒成立, 则 u 只能在边界 $t = 0$, $C_1 : x = x_1(t)$ 或 $C_2 : x = x_2(t)$ 上取最大值。证明不做要求, 可见 NSPDE 笔记。

Sketch Proof Theorem 10.1.1 记 $F(x_1(t), x_2(t), t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x, t) dx$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x_1(t), x_2(t), t) &= F_{x_1} x_1'(t) + F_{x_2} x_2'(t) + F_t \\ &= -f(x_1, t) x_1'(t) + f(x_2, t) x_2'(t) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx \end{aligned}$$

Proof Theorem 10.1.2 BVP (1) 的任意两个相异解 $u_1 \neq u_2$, 满足 $\phi = u_1 - u_2$ 且

$$\begin{cases} \phi_{xx} = \phi_t & \text{if } (x, t) \in \text{int}(D) \\ u = 0 & \text{if } t = 0 \\ u = 0 & \text{if } x = x_1(t) \\ u = 0 & \text{if } x = x_2(t) \end{cases}$$

考虑积分 $I(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi^2 dx \geq 0$, 由 Leibnitz' Rule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= -\phi^2(x_1, t) x_1'(t) + \phi^2(x_2, t) x_2'(t) + 2 \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi \phi_t dx \\ &= 2 \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi \phi_{xx} dx = 2 \phi \phi_x \Big|_{x_1}^{x_2} - 2 \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi_x^2 dx \\ &= -2 \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \phi_x^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

故 $I(t)$ 为关于 t 的非增函数。又 $I(0) \equiv 0$, 知恒有 $I(t) \equiv 0$ 。故 $\phi \equiv 0$ 。

10.2 Green's Function

在讨论之前我们先总结一下在前面所有章节中，构造 Green's Function 的固定流程

Green's Function 的构造流程

$$\mathcal{L}[u] = f(x)$$

以上 \mathcal{L} 为线性微分算子，所有导数项都在等式的左侧，等式右侧不含导数。

STEP 1 构造伴随算子 \mathcal{L}^* ，一般采用如下的手法构造：将原算子 \mathcal{L} 的系数函数移到导数后，并改变奇数导数前的符号。

STEP 2 将 $G\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[G]$ 整理成某个表达式的散度

$$\nabla \cdot (\cdot, \cdot) = G\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[G]$$

利用散度定理计算 $G\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[G]$ 在合适区域上的积分

$$\int_D G\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[G] \, dx = \oint_{\partial D} (\cdot, \cdot) \cdot n \, ds_x$$

STEP 3 利用边界条件化简 $\oint_{\partial D} (\cdot, \cdot) \cdot n \, ds_x$ ，规定 G 的边界条件以消除所有 u 有关的未知量。

STEP 4 按需求规定 $\mathcal{L}^*[G] = 0$ 或者 $\mathcal{L}^*[G] = \delta(x - z)$ （如果 $\oint_{\partial D} (\cdot, \cdot) \cdot n \, ds_x$ 不产生 $u(z)$ ）。于是等式左侧可以化为

$$\int_D G\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[G] \, dx = \begin{cases} \int_D Gf \, dx & \text{if } \mathcal{L}^*[G] = 0 \\ \int_D Gf \, dx - u(z) & \text{if } \mathcal{L}^*[G] = \delta(x - z) \end{cases}$$

STEP 5 整理出所有关于 G 的条件。

下面我们仿照上述流程构造抛物型方程 (1) 的格林函数。记 $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$, 有伴随算子 $\mathcal{L}^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}$ 。观察到

$$\begin{aligned} G\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[G] &= Gu_{xx} - uG_{xx} - Gu_t - uG_t \\ &= Gu_{xx} + G_x u_x - G_x u_x - uG_{xx} - \partial_t(uG) \\ &= \partial_x(Gu_x) + \partial_x(-G_x u) + \partial_t(-uG) \\ &= \nabla_{(x,t)} \cdot (Gu_x - G_x u, -uG) \end{aligned}$$

利用散度定理 (格林公式) 在 D 积分

$$\begin{aligned} \int_D G\mathcal{L}[u] - u\mathcal{L}^*[G] dx dt &= \oint_{\partial D} (Gu_x - G_x u) dt + uG dx \\ &= \int_{t=0} uG dx + \int_{t=\tau} uG dx + \int_{x=x_1(t)} (Gu_x - G_x u) dt \\ &\quad + uG dx + \int_{x=x_2(t)} (Gu_x - G_x u) dt + uG dx \\ &= \int_{x_2(0)}^{x_1(0)} u_0 G dx + \int_{x_1(\tau)}^{x_2(\tau)} uG dx + \int_0^\tau (Gu_x - G_x g_1) + Gg_1 x'_1(t) dt \\ &\quad + \int_\tau^0 (Gu_x - G_x g_2) + Gg_2 x'_2(t) dt \end{aligned}$$

显然, 上述的 u_x 为未知量, 构造 G 使含有 u_x 的部分消除。于是

$$\left. \begin{aligned} G &= 0 \quad \text{if } x = x_1(t) \\ G &= 0 \quad \text{if } x = x_2(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{x_2(0)}^{x_1(0)} u_0 G dx + \int_{x_1(\tau)}^{x_2(\tau)} uG dx - \int_0^\tau G_x g_1 dt - \int_\tau^0 G_x g_2 dt$$

同时, u 在 τ 上的取值也是未知量, 可以利用其构造出 $u(\xi, \tau)$

$$G = \delta(x - \xi) \quad \text{if } t = \tau \Rightarrow \int_{x_2(0)}^{x_1(0)} u_0 G dx + u(\xi, \tau) - \int_0^\tau G_x g_1 dt - \int_\tau^0 G_x g_2 dt$$

结合在 D 上 $\mathcal{L}[u] = f$, 规定 $\mathcal{L}^*[G] = 0$ if $(x, t) \in D$, 得到

$$\int_D Gf dx dt = \int_{x_2(0)}^{x_1(0)} u_0 G dx + u(\xi, \tau) - \int_0^\tau G_x g_1 dt - \int_\tau^0 G_x g_2 dt$$

于是整理得

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= \int_D Gf dx dt + \int_{x_1(0)}^{x_2(0)} u_0 G(x, 0; \xi, \tau) dx \\ &\quad + \int_0^\tau g_1 G_x(x_1, t; \xi, \tau) - g_2 G_x(x_2, t; \xi, \tau) dt \end{aligned}$$

Theorem 10.2.1. 格林函数 Green's Function - Parabolic Equation

考虑定义在 $D = \{(x, t) : 0 \leq t \leq \tau, x_1(t) \leq x \leq x_2(t)\}$ 上的 BVP (1), i.e.,

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + f(x, t) & \text{if } (x, t) \in D \\ u = u_0(x) & \text{if } t = 0 \\ u = g_1(t) & \text{if } x = x_1(t) \\ u = g_2(t) & \text{if } x = x_2(t) \end{cases}$$

其中 $x_1(t), x_2(t)$ 与 x 轴处处不平行且无交点。任取 $(\xi, \tau) \in D$, 定义黎曼函数 $G(x, t; \xi, \tau)$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}^*[G] = G_{xx} + G_t = 0 & \text{if } (x, t) \in D \\ G = 0 & \text{if } x = x_1(t) \text{ or } x_2(t) \\ G = \delta(x - \xi) & \text{if } t = \tau \end{cases} \quad (2)$$

此时, BVP (1) 的解为

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) = & \int_D G f \, dx dt + \int_{x_1(0)}^{x_2(0)} u_0 G(x, 0; \xi, \tau) \, dx \\ & + \int_0^\tau g_1 G(x_1, t; \xi, \tau) - g_2 G(x_2, t; \xi, \tau) \, dt \end{aligned}$$

上述格林函数的边界值问题 (2) 满足 *backward diffusion equation*, 边界条件在未来某一时刻 τ 换元求解 $\tilde{t} = \tau - t$, $\tilde{x} = x - \xi$ 得到

$$\begin{aligned} \widetilde{D} &= [x_1(\tau - \tilde{t}) - \xi, x_2(\tau - \tilde{t}) - \xi] \times [0, +\infty) \\ \begin{cases} G_{\tilde{x}\tilde{x}} - G_{\tilde{t}} = 0 & \text{if } (\tilde{x}, \tilde{t}) \in \widetilde{D} \\ G = 0 & \text{if } \tilde{x} = x_1(\tau - \tilde{t}) - \xi \text{ or } x_2(\tau - \tilde{t}) - \xi \\ G = \delta(\tilde{x}) & \text{if } \tilde{t} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

特别地, 当 $D = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ 时, 满足 (2) 的格林函数基本解为

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tilde{t}}} \exp\left\{-\frac{\tilde{x}^2}{4\tilde{t}}\right\} \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow \infty$$

其在 $t = \tau$ 有奇点 $(\xi, \tau) \in D$ 。可以利用该基本解与反射法构造需要满足其他边界条件的格林函数。例题见 **Lecture Notes p.72 Example 49**。