Supplementary Applied Mathematics

Chenghao Dong

January 3, 2024

CONTENTS

1 Introduction **2**

1.1 Notations and Basic Concepts 2

2 Eigenfunction Methods **3**

2.1 Function Spaces 3

2.2 Inhomogeneous BVP with Homogeneous BCs 5

2.3 Inhomogeneous BVP with Inomogeneous BCs 7

2.4 Zero Eigenvalues : Existence and Uniqueness of Solutions . . 10

2.5 Sturm-Liouville Theory 11

3 Green's Function **13**

3.1 Dirac Delta Function 13

3.2 Greens' Function and It's Construction 15

4 Distibutions **19**

4.1 Distibutions and Its Properties 19

4.2 Distibution Solutions 22

1 Introduction

1.1 Notations and Basic Concepts

Definition 1.1.1. 线性微分算子 (linear differential operators)
在本课程中，未经特殊说明，我们只考虑含有一个自变量的常微分方程。记 F^1 为所有一元函数的集合，线性微分算子是指一个作用在足够平滑的函数 $y \in F^1$ 上的线性变换 $L : F^1 \longrightarrow F^1$ *s.t.*

$$L_n[u(x)] = a_n(x)u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)u'(x) + a_0$$

其满足：$L_n[c_1u(x) + c_2v(x)] = c_1L_n[u(x)] + c_2L_n[v(x)]$，其中 c_1, c_2 为常数。特别地，记 L 表示任意阶的线性微分算子。

注意： 线性微分算子不应当包含常数项。比如，$L[y] = y'' + 2$ 就不是线性算子；但区分 $L[y] = y'' + 2 \cdot y$ 就是线性算子，但有时我们会把后者记为：$L = \frac{d^2}{dx^2} + 2$

Definition 1.1.2. 线性边界值问题 (linear boundary value problems LBVPs) 常微分方程中形如下述的问题称为线性边界值问题（本笔记中，在未产生歧义的情况下简称为边界值问题）

$$\begin{aligned} & L_n[u(x)] = f(x) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \quad & A_i[u(a)] + B_i[u(b)] = c_i \quad \text{s.t.} \quad i = 1 \cdots n \end{aligned}$$

称上述的 f 为施迫函数 *forcing function*，A_i, B_i 是线性微分算子，等式左端不含常数项。若 $f \equiv 0$ 则称这是一个线性齐次边界值问题 *homogeneous* BVP；若边界条件满足 $c_i = 0 \quad \text{for} \quad \forall i = 1 \cdots n$ 则称这个边界值问题有齐次边界条件 *homogeneous conditions*。更特别地，我们一般考虑 *well-separated homogeneous conditions*

$$A_i[u(a)] = 0 \quad \text{for} \quad \forall i = 1 \cdots k \quad \text{and} \quad B_j[u(b)] = 0 \quad \text{for} \quad \forall j = 1 \cdots l$$

其中 A_i, B_i 是线性微分算子，$k + l = n$。

2 Eigenfunction Methods

2.1 Function Spaces

Definition 2.1.1. 函数空间的内积和边界值问题的特征函数
考虑 $[a,b]$ 上的一个无限维且对线性边界值问题 1.1.2 具有良定义的函数内积空间 $F([a,b])$，规定其带权内积如下：

$$\langle u,v\rangle_\rho = \int_a^b \rho(x)\cdot u\cdot \overline{v}\ dx \quad \text{for} \quad \rho(x)\geq 0 \quad \text{if} \quad x\in[a,b]$$

其中ρ 为实值函数；该边界值问题的特征函数 $y_i(x)\not\equiv 0$ 与对应的特征值 λ_i，定义为 $\{(y_i,\lambda_i)\}_{i=1}$ s.t.

$$L_n[y_i]=\lambda_i\cdot\rho\cdot y_i \quad \text{under homogeneous conditions}$$

在解特征值问题时，我们要特别注意以下几点

Key Points about Eigenfunctions 1 齐次边界条件
在求特征方程时都默认是对应的齐次边界条件；在解特征问题时需要对 λ 分类讨论以确保特征函数不恒为 0。

Key Points about Eigenfunctions 2 特征值权重
ρ 的选取应当方便特征问题的求解。此外，如果 $L_1[y_i]=\rho(x)\cdot L_2$

$$L_2[y_i]=\lambda_i y \iff (\rho(x)\cdot L_2)[y_i]=\rho(x)\lambda_i y_i \iff L_1[y_i]=\rho(x)\lambda_i y_i$$

详细例题见**Problem Sheet 01, Q3**。

Definition 2.1.2. 边界值问题的伴随问题（adjoint problems）
对线性边界值问题 1.1.2 规定其对应的齐次问题为 BVP $=(Lu,\text{HBC})$，其中方程与边界条件均其次 $f,c_i=0$。给定另一组齐次边界条件 HBC* 与一个算子 L^*，如果对满足 HBC 的 u 和满足 HBC* 的 v，有

$$\langle Lu,v\rangle_1=\langle u,L^*v\rangle_1$$

称，二元组 BVP* $=(L^*v,\text{HBC}^*)$ 为 BVP $=(Lu,\text{HBC})$ 的伴随问题。若 $L^*=L$ 则称这个算子为 *self-adjoint operator*，或 *formally self-adjoint*；若 $L^*=L$ 且 HBC* $=$ HBC 则称这个 BVP 为*self-adjoint* BVP，或 *fully self-adjoint*。

Key Points about Adjoint 1 齐次边界条件 不论问题本身是什么类型的边界条件，我们在求其伴随问题时都默认是对应的齐次边界条件；同时，在应用等式 $\langle Lu, v\rangle_1 = \langle u, L^*v\rangle_1$ 时，务必确认函数 u, v 分别满足对应位置上的齐次边界条件 $u \in \mathrm{HBC}\,(a,b) \wedge v \in \mathrm{HBC}^*\,(a,b)$。详细例题见**Problem Sheet 01, Q4**，当 $u \notin \mathrm{HBC}\,(a,b) \wedge v \in \mathrm{HBC}^*\,(a,b)$ 时分部积分有可能出现：

$$\langle Lu, v\rangle_1 = \langle u, L^*v\rangle_1 + F\,(a,b) \neq \langle u, L^*v\rangle_1$$

其中 $F\,(a,b)$ 为分部积分后的积分余项，可以用问题本身的边界条件消除或化简，但只有在 $u \in \mathrm{HBC}\,(a,b)$ 时才能一定为 0。

Key Points about Adjoint 2 内积定义 不论特征函数与特征值相对于哪个权重函数，在计算伴随问题时，都使用权重函数 1。详细例题见**Problem Sheet 01, Q3**。

Key Points about Adjoint 3 确定伴随问题的步骤 通常确定一个 BVP 的伴随问题，需要经历以下步骤：首先，采用分部积分将导数从 u 转移到 v；最后，在不含积分号的余项中，利用 HBC 分别对 u 在 a, b 处的导数合并同类项，规定合并后括号内涉及 v 在 a, b 处导数的部分为 0，从而得到 HBC^*。

Key Points about Adjoint 4 伴随算子的快速求法 还有另一种更快的确定伴随问题的方法，即

$$L^* = L \text{ 将系数函数移至求导算子内部，同时改变奇次导数的符号}$$

于是

$$L\,[u] = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x)\,u^{(i)} \quad \Rightarrow \quad L^*\,[v] = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left[a_i\,(x)\,v\right]^{(i)}$$

此时，将 $a_i v$ 视为整体，可以配凑出

$$uL^*\,[v] - vL\,[u] = (*)' \quad \Rightarrow \quad \langle u, L^*v\rangle_1 = \langle Lu, v\rangle_1 + (*)\,|_b^a$$

Properties 2.1.1. 关于伴随算子的一些结论

1） BVP 与 BVP* 享有共轭特征值：$Ly = \lambda\rho y \Rightarrow \exists\ w : L^*w = \overline{\lambda}\rho w$。

2） BVP 与 BVP* 的非共轭特征值对应的特征函数相对于权函数 ρ 正交。

3） $L^* = L$, HBC well-separated, 则有 $\mathrm{HBC}^* = \mathrm{HBC}$, BVP fully self-adjoint。

4） $\left(\frac{d^n}{dx^n}\right)^* = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}$，即自伴算子不能只包含奇次导数项。

2.2 Inhomogeneous BVP with Homogeneous BCs

考虑不含 0 特征值的齐次条件 well-separated 的非齐次 BVP

$$\begin{aligned} & L_n[u(x)] = f(x) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \quad & A_i[u(a)] = 0 \quad \text{for} \quad \forall i = 1 \cdots k \quad \text{and} \quad B_j[u(b)] = 0 \quad \text{for} \quad \forall j = 1 \cdots l \end{aligned}$$

其中 $k + l = n$，采用如下过程解该微分方程：

STEP 1 找到伴随问题 (L^*v, HBC^*) (此处的内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$)
STEP 2 解关于原问题 (Lu, HBC) 的特征值问题，并找到 $\{(y_i, \lambda_i)\}_{i=1}$

$$Ly = \lambda \rho y \quad \text{w.r.t} \quad \text{HBC}$$

STEP 3 解关于伴随问题 (L^*v, HBC^*) 的特征值问题，并找到 $\{(w_k, \lambda_k)\}_{i=k}$，注意如果为 fully-adjoint 可以省略此步骤

$$L^*w = \lambda \rho w \quad \text{w.r.t} \quad \text{HBC}^*$$

STEP 4 设方程的解为特征方程的线性组合

$$u = \textstyle\sum_{i=1} c_i \cdot y_i$$

STEP 5 配对好 $\{(y_k, w_k, \lambda_k)\}_{i=k}$ 两边同时对 w_k 作内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ 来确定系数

$$\begin{aligned} \langle Lu, w_k \rangle_1 = \langle f, w_k \rangle_1 & \Rightarrow \boldsymbol{\langle u, L^* w_k \rangle_1 = \langle f, w_k \rangle_1} \\ & \Rightarrow \overline{\lambda}_k \langle \textstyle\sum_{i=1} c_i y_i, \rho w_k \rangle_1 = \langle f, w_k \rangle_1 \\ & \Rightarrow \overline{\lambda}_k \cdot \textstyle\sum_{i=1} c_i \langle y_i, w_k \rangle_\rho = \langle f, w_k \rangle_1 \\ & \Rightarrow \overline{\lambda}_k \cdot c_k \langle y_k, w_k \rangle_\rho = \langle f, w_k \rangle_1 \\ & \Rightarrow \boldsymbol{c_k = \frac{\langle f, w_k \rangle_1}{\overline{\lambda}_k \langle y_k, w_k \rangle_\rho}} \quad (*) \end{aligned}$$

STEP 6 最终解为 $u = \sum_{k=1} c_k \cdot y_k$

Remark 关于最核心的 STEP 5 有诸多关键需要深入讨论，推荐详细考虑例题 **Problem Sheet 01, Q4**（或将在下文给出）。具体来说有如下几个要点：

1) 伴随变换涉及的必要性 下面提供了一种错误的推导方式，其与 STEP 5 中正确的推导方式仅在第一步有主要区别，并且不涉及伴随变换：

$$\begin{aligned} & \langle Lu, w_k \rangle_1 = \langle f, w_k \rangle_1 \Rightarrow \langle L \left[\textstyle\sum_{i=1} c_i y_i \right], w_k \rangle_1 = \langle f, w_k \rangle_1 \\ \Rightarrow & \langle \textstyle\sum_{i=1} c_i L \left[y_i \right], w_k \rangle_1 = \langle f, w_k \rangle_1 \Rightarrow \textstyle\sum_{i=1} c_i \lambda_i \langle \rho y_i, w_k \rangle_1 = \langle f, w_k \rangle_1 \\ \Rightarrow & c_k \lambda_k \langle y_k, w_k \rangle_\rho = \langle f, w_k \rangle_1 \Rightarrow c_k = \langle f, w_k \rangle_1 / (\lambda_k \langle y_k, w_k \rangle_\rho) \end{aligned}$$

这种推理看似合理，实际上却很可能导致错误，一方面，分母上的特征值变成了 $\overline{\lambda}_k$ 而非其共轭；另外这种推导在处理非齐次边界条件时出现了极大的漏洞，它并没有涉及到考虑这些 (非齐次) 条件（见后文或例题 Problem Sheet 01, Q4）。最大的问题在于第一步，由于我们将解的形式设为了一个无穷级数，在一般的情形下并不能确保逐项求导的收敛性。即，在推导的第二至第三步时，$L\left[\sum_{i=1} c_i y_i\right] \Rightarrow \sum_{i=1} c_i L\left[y_i\right]$ 并不能确保微分算子可以放到求和号的后面又保持级数的收敛性。

2） 应用伴随变换或者公式 $(*)$ 的条件　STEP 5 中推导的第一步运用了伴随变换的定义，注意这里可以使用的条件是这个问题的目标函数 $u \in \mathrm{HBC}$ 本身是符合齐次边界条件的（对于 w_k，由于其推导自默认齐次条件的特征问题，显然 $w_k \in \mathrm{HBC}^*$）；因此，由于推导的第一步就默认了整体的其次边界条件，最后推出的公式 $(*)$ 也显然只能在齐次边界条件的问题中使用。

3） 非齐次边界条件的变形解法　上述步骤也可以完全照搬到非齐次边界条件的情境中使用，同样还是设 $u=\sum_i c_i y_i$ 但需要注意的是此时 STEP 5 的第一步的伴随变换已然不成立，因为第一个位置上的 u 不再符合齐次边界条件，公式 $(*)$ 也不能直接使用。此时需要将 STEP 5 的第一步更改为直接分部积分：

$$\begin{aligned}
&\langle Lu, w_k\rangle_1 = \langle f, w_k\rangle_1 \Rightarrow \boldsymbol{\int_a^b L\left[u\right] w_k dx = \langle f, w_k\rangle_1}\\
&\Rightarrow \boldsymbol{\langle u, L^* w_k\rangle_1 + F\left(a,b\right) = \langle f, w_k\rangle_1} \qquad (**)\\
&\Rightarrow \overline{\lambda}_k \langle \textstyle\sum_{i=1} c_i y_i, \rho w_k\rangle_1 + F\left(a,b\right) = \langle f, w_k\rangle_1\\
&\Rightarrow \overline{\lambda}_k \cdot \textstyle\sum_{i=1} c_i \langle y_i, w_k\rangle_\rho + F\left(a,b\right) = \langle f, w_k\rangle_1\\
&\Rightarrow \overline{\lambda}_k \cdot c_k \langle y_k, w_k\rangle_\rho = \langle f, w_k\rangle_1 - F\left(a,b\right)\\
&\Rightarrow \boldsymbol{c_k = \frac{\langle f, w_k\rangle_1 - F\left(a,b\right)}{\overline{\lambda}_k \langle y_k, w_k\rangle_\rho}} \qquad (***)
\end{aligned}$$

注意此处，分子上多出了积分余项，而这个余项可以结合特征函数本身和非齐次边界条件进行进一步的化简。而读者可能会怀疑结果的合理性，因为每一项特征函数 y_k 都满足齐次边界条件，为何由他们线性组合出来的函数 $u=\sum_i c_i y_i$ 确能够满足非齐次条件？这是由于犯了一个常见的错误，当我们在考虑 $u\left(x\right)$ 端点的“取值”时，我们实际上是在讨论其在端点处的极限，即$u\left(a\right)=\lim_{x\to a+}\sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k\left(x\right)$（resp. $u\left(b\right)$），然而无穷求和号与外侧极限能进行交换的条件不普遍成立，即：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to a+} c_k y_k\left(x\right) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad u\left(a\right) = \lim_{x\to a+} \sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k\left(x\right) = 0$$

2.3 Inhomogeneous BVP with Inomogeneous BCs

考虑不含 0 特征值的非齐次条件（well-separated）非齐次 BVP

$$
\begin{aligned}
& L_n\left[u(x)\right] = f(x) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\
\text{w.r.t.} \quad & A_i\left[u(a)\right] = \alpha_i \quad \text{for} \quad \forall i = 1\cdots k \quad \text{and} \quad B_j\left[u(b)\right] = \beta_j \quad \text{for} \quad \forall j = 1\cdots l
\end{aligned}
$$

其中 $k + l = n$，一种方法是如前一章讨论的，采用如下过程解该微分方程：

Method I Eigenfunction

STEP 1 找到伴随问题 (L^*v, HBC^*) (此处的内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$)

STEP 2 解关于原问题 (Lu, HBC) 的特征值问题，并找到 $\{(y_i, \lambda_i)\}_{i=1}$

$$Ly = \lambda\rho y \quad \text{w.r.t} \quad \mathrm{HBC}$$

STEP 3 解关于伴随问题 (L^*v, HBC^*) 的特征值问题，并找到 $\{(w_k, \lambda_k)\}_{i=k}$，注意如果为 fully-adjoint 可以省略此步骤

$$L^*w = \lambda\rho w \quad \text{w.r.t} \quad \mathrm{HBC}^*$$

STEP 4 设方程的解为特征方程的线性组合

$$u = \sum_{i=1} c_i \cdot y_i$$

STEP 5 配对好 $\{(y_k, w_k, \lambda_k)\}_{i=k}$ 两边同时对 w_k 作内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 来确定系数

$$
\begin{aligned}
& \langle Lu, w_k\rangle_1 = \langle f, w_k\rangle_1 \Rightarrow \int_a^b L\left[u\right] w_k dx = \langle f, w_k\rangle_1 \\
& \Rightarrow \langle u, L^* w_k\rangle_1 + F(a,b) = \langle f, w_k\rangle_1 \\
& \Rightarrow \overline{\lambda}_k \langle \textstyle\sum_{i=1} c_i y_i, \rho w_k\rangle_1 + F(a,b) = \langle f, w_k\rangle_1 \\
& \Rightarrow \overline{\lambda}_k \cdot \textstyle\sum_{i=1} c_i \langle y_i, w_k\rangle_\rho + F(a,b) = \langle f, w_k\rangle_1 \\
& \Rightarrow \overline{\lambda}_k \cdot c_k \langle y_k, w_k\rangle_\rho = \langle f, w_k\rangle_1 - F(a,b) \\
& \Rightarrow c_k = \frac{\langle f, w_k\rangle_1 - F(a,b)}{\overline{\lambda}_k \langle y_k, w_k\rangle_\rho}
\end{aligned}
$$

STEP 6 最终解为 $u = \sum_{k=1} c_k \cdot y_k$

一般还有另外一种比较常见的方法，即将原问题化为另外两个简单问题：

Method II Decomposition

$$\begin{aligned} & L_n\left[u(x)\right]=f(x) \quad \text{s.t.} \quad a<x<b \\ \text{w.r.t.} \quad & A_i\left[u(a)\right]=\alpha_i \quad \text{for} \quad \forall i=1\cdots k \\ & B_j\left[u(b)\right]=\beta_j \quad \text{for} \quad \forall j=1\cdots l \end{aligned}$$

STEP 1 将原问题化为如下两个问题，一个是齐次边界非齐次方程 (∗)，一个为齐次方程非齐次边界 (∗∗)：

$$\begin{aligned} & L_n\left[u_1(x)\right]=f(x) \quad \text{s.t.} \quad a<x<b \\ \text{w.r.t.} \quad & A_i\left[u_1(a)\right]=0 \quad \text{and} \quad B_j\left[u_1(b)\right]=0 \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & L_n\left[u_2(x)\right]=0 \quad \text{s.t.} \quad a<x<b \\ \text{w.r.t.} \quad & A_i\left[u_2(a)\right]=\alpha_i \quad \text{and} \quad B_j\left[u_2(b)\right]=\beta_j \qquad (**) \end{aligned}$$

STEP 2 分开解方程 $(*),(**)$，得到 $u_1(x), u_2(x)$，最终解为

$$u(x)=u_1(x)+u_2(x)$$

解的合理性不难由算子的线性性质得出。

下面用方法一解一例题（取自 Problem Sheet 01, Q4）

Example 2.3.1. 特征方程法解非齐次边界条件方程 用特征法解如下方程 $y''=0$ s.t. $y(0)=0$, $y(1)=1$，已知其为完全自伴随问题（可以省略第一、三步）。为方便对照，从 STEP 2 开始标注步骤

STEP 2 解关于原问题 (Lu, HBC) 的特征值问题，并找到 $\{(y_i,\lambda_i)\}_{i=1}$

$$y''=\lambda y \quad \text{w.r.t} \quad \mathrm{y}(0)=0 \quad , \quad \mathrm{y}(1)=0$$

显然只有当 $\lambda<0$ 时能有非平凡解，带入齐次边界：

$$y_k(x)=sin(k\pi x)=w_k(x) \quad , \quad \lambda_k=-k^2\pi^2 \quad \text{s.t.} \quad k\in\mathbb{N}$$

STEP 4 设方程的解为特征方程的线性组合

$$u=\sum_{i=1} c_i\cdot y_i$$

STEP 5 两边同时对 w_k 作内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ 来确定系数

$$\begin{aligned}\langle Ly, w_k\rangle_1 &= \int_0^1 y'' w_k dx = \int_0^1 y w_k'' dx + \{y'w_k - yw_k'\}|_0^1 \\ &= \langle u, L^* w_k\rangle_1 + F(0,1) \\ &= \overline{\lambda}_k \langle \textstyle\sum_{i=1} c_i y_i, w_k\rangle_1 + F(0,1) = \overline{\lambda}_k \cdot \textstyle\sum_{i=1} c_i \langle y_i, w_k\rangle_1 + F(0,1) \\ &= \overline{\lambda}_k \cdot c_k \langle y_k, w_k\rangle_1 + F(0,1) = \langle 0, w_k\rangle_1 = 0\end{aligned}$$

不难求得

$$\begin{aligned}F(0,1) &= \{y'w_k - yw_k'\}|_0^1 = y' sin(k\pi x)|_0^1 - k\pi \cdot y \cdot cos(k\pi x)|_0^1 \\ &= 0 - k\pi \cdot y(1) \cdot cos(k\pi) + k\pi \cdot y(0) \cdot cos(0) \\ &= -k\pi \cdot 1 \cdot (-1)^k + k\pi \cdot 0 \cdot 1 = -k\pi \cdot (-1)^k \quad \text{(using BC)}\end{aligned}$$

此外 $\langle y_k, w_k\rangle_1 = \langle y_k, y_k\rangle_1 = \int_0^1 sin^2(k\pi x)\, dx = 1/2$，于是有：

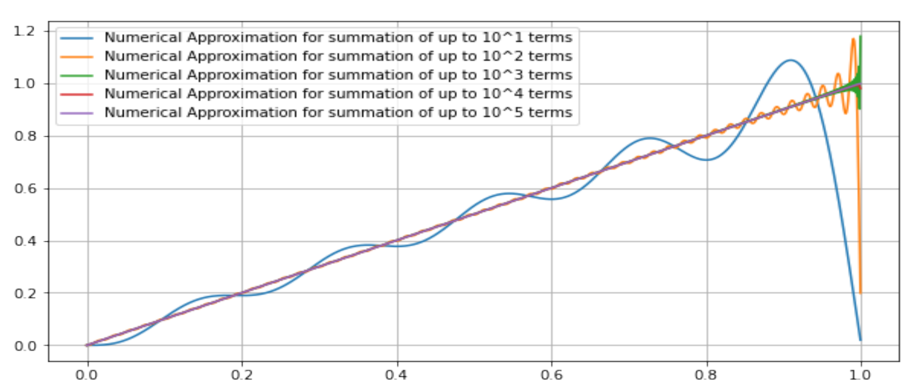
$$c_k = \frac{2(-1)^{(k+1)}}{k\pi}$$

最终解为

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{(k+1)}}{k\pi} \cdot sin(k\pi x)$$

正好是 $y = x$ 的傅里叶展开。注意显然求和号里的各项在 $x = 1$ 处为 0，但是我们依然有（见下图）：

$$y(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{(k+1)}}{k\pi} \cdot sin(k\pi x) = 1$$



2.4 Zero Eigenvalues : Existence and Uniqueness of Solutions

在上述的讨论中我们默认了所讨论的问题不存在 0 特征值。如果存在某个特征函数 y_0 的特征值为 0，对于其次边界条件，这意味着

$$c_0\lambda_0\langle y_0, w_0\rangle_\rho = \langle f, w_0\rangle_1 \quad \Rightarrow \quad \langle f, w_0\rangle_1 = 0$$

如果 $\langle f, w_0\rangle_1 \neq 0$，则意味着 BVP 无解。反之则意味着，$c_0$ 可以取任意值，所以方程有无数解。对于非齐次边界，同样地需要讨论 $\langle f, w_0\rangle_1 - F(a, b)$ 是否为 0。

Theorem 2.4.1. 零特征值与边界值解的存在性 *考虑如下 BVP，其有 well-separated homogeneous boundary condition*

$$\begin{aligned} &L_n\Big[u(x)\Big] = f(x) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \quad &A_i\Big[u(a)\Big] = 0 \quad \text{for} \quad \forall i = 1\cdots k \quad \text{and} \quad B_j\Big[u(b)\Big] = 0 \quad \text{for} \quad \forall j = 1\cdots l \end{aligned}$$

如果问题存在零特征值 $\lambda_0 = 0$ s.t. $y_0 \neq 0$，则

1) 若 $\langle f, w_0\rangle_1 = 0$，则方程有无数解：$u = Cy_0 + \sum_{i=1} c_i y_i$

2) 若 $\langle f, w_0\rangle_1 \neq 0$，则方程无解

至此，我们还余下两个关于特征值解法的问题需要解决。其一是，我们如何知道任意一个解都能被写作特征函数的展开？其二，我们为什么只需要考虑实数特征值 (这一点在前面的笔记中没有被特别强调，但在 Lecture notes 中是默认的)？前一个问题涉及到比较复杂的泛分析，在本课程中暂不涉及。后一个问题可以通过下一节对 Strum-Liouville Theory 的讨论解释。

2.5 Sturm-Liouville Theory

Definition 2.5.1. Sturm-Liouville Problem（SL）

形如下的二阶常微分方程边界值问题称为 *Sturm-Liouville Problem*，对在 $[a,b]$ 上不改变符号的函数 $p(x)$

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x)\quad \text{s.t.}\quad a<x<b$$

其总满足 $L=L^*$。特别地，在下列 well-separated HBC 下，其为 fully self-adjoint problem

$$\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)=0 \quad \text{and} \quad \beta_1 u(b)+\beta_2 u'(b)=0$$

如果 $p(a)=p(b)$，则 $\langle Lu,v\rangle_1=\langle u,L^*v\rangle_1$ 可以不依赖于 HBC 与 HBC* 恒成立。Sturm-Liouville Problem 的特征值问题满足如下关系

$$Ly=\lambda\rho(x)y \quad \text{where} \quad \rho(x)\geq 0$$

如果 SL Problem 还满足如下的几个条件则称为 *Regular Sturm-Liouville Problem*:

1） $p>0$，$\rho>0$ strictly over $[a,b]$, $q\geq 0$ over $[a,b]$

2） $\alpha_1\alpha_2\leq 0$，$\beta_1\beta_2\geq 0$

Properties 2.5.1. 对于 SL Problem with well-separated HBC，有

1） 任意两个对应不同特征值的特征 h 函数均对权函数 ρ 正交。

2） 存在无数（但 countable ）个特征值，且特征值均为实数。若定义域 $[a,b]$ 有界，则 $\{\lambda_k\}$ 可严格升序排列 $\lambda_k\uparrow\infty$。如果为 Regular Sturm-Liouville Problem，则所有特征值$\lambda_k\geq 0$。

3） 特征值函数 $\{y_k\}$ 的张成空间完备 complete，即有特征函数展开

$$\forall\ h\quad \text{s.t.}\quad ||h||_\rho<\infty\ :\ h=\sum_k^\infty\frac{\langle h,y_k\rangle_\rho}{\langle y_k,y_k\rangle_\rho}y_k\in\operatorname{span}(\{y_k\})$$

4） *Oscillation Theorem* 第 k 个特征函数 y_k（对应递增的第 k 个特征值 λ_k）在开区间 (a,b) 上有 k 个根。

5） *Monotonicity Theorem* 考虑两个边界条件相同的 SL 与 $\widetilde{\text{SL}}$，若满足

$$\tilde{p}\geq p\ ,\ \tilde{q}\geq q\ ,\ \tilde{\rho}\leq\rho\ ,\ (\tilde{a},\tilde{b})\subseteq(a,b)$$

且至少有一个不等号（或 $\subseteq$）严格成立，则升序排列后 $\widetilde{\lambda_k}>\lambda_k$

考虑到 SL problem 的诸多好处，一个自然的想法是在什么情况下可以把其他的边界值问题转换成 SL。

Theorem 2.5.1. SL 的转化 考虑如下的二阶常微分方程 $Ly = f(x)$。其齐次边界条件 well-separated。算子 L 满足如下形式：

$$Lu = a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u$$

则我们可以通过对方程两边各乘上一个积分因子 $I(x) = -\frac{1}{a_2}e^{\int a_1/a_2 \mathrm{d}x}$，从而使得新的 BVP 为 SL，有 $p = e^{\int a_1/a_2 \mathrm{d}x}$，$q = -\frac{a_0}{a_2}e^{\int a_1/a_2 \mathrm{d}x}$

$$\hat{L}u = I(x)f(x) \quad \text{s.t.} \quad \hat{L} = I(x)L$$

若原 BVP 的特征值、特征函数满足 $Ly_k = \lambda_k y_k$，则转化后 $\hat{L}y_k = \lambda_k I(x)y_k$，即 $\rho(x) = I(x)$。在没有零特征值的情况下，BVP 的解形如

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k \quad \text{s.t.} \quad c_k = \frac{\langle If, w_k\rangle_1}{\lambda_k\langle y_k, w_k\rangle_I} = \frac{\langle f, w_k\rangle_{I(x)}}{\lambda_k\langle y_k, w_k\rangle_{I(x)}}$$

Proof Theorem 2.5.1 考虑 $I\cdot a_2u'' + I\cdot a_1u' + I\cdot a_0u = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu$，我们有

$$I\cdot a_2u'' + I\cdot a_1u' + I\cdot a_0u = -pu'' - p'u' + qu$$

令 $I\cdot a_2 = -p$，$I\cdot a_1 = -p' \;\Rightarrow\; p'/p = a_1/a_2$ 即可解得

$$I(x) = -\frac{1}{a_2}e^{\int a_1/a_2 \mathrm{d}x}$$

同时 $p = e^{\int a_1/a_2 \mathrm{d}x}$，$q = -\frac{a_0}{a_2}e^{\int a_1/a_2 \mathrm{d}x}$

3 Green's Function

3.1 Dirac Delta Function

Definition 3.1.1. Dirac Delta Function - I 我们定义符合如下性质的函数为 δ 函数

$$\forall x \neq 0 \ : \ \delta(x) = 0 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$$

注意，这只是一种启发式描述。任何实数域上有定义的传统函数都不具备这种性质。

Lecture Notes 上使用实数函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 逼近 $\delta(x)$ 的方法只能算是一种理解这个函数的途径。但从分析的角度论证是不严谨的，特别是涉及到交换函数列极限与积分的部分证明。所以本笔记不会完全参照这些内容（Lecture Notes pp. 28-29），而是会在陈述 $\delta(x)$ 的部分性质时采用另一种更严谨的定义（定义 II）证明。

Definition 3.1.2. Dirac Delta Function - II 从测度论的角度来说，δ 函数的一个相对严谨的定义是一种符合如下性质的函数：

$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}\delta_0}{\mathrm{d}m} \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \text{ Lebesgue intrgrable } : \int_E f(x)\, \mathrm{d}\delta_0 = \int_E f(x)\, \delta(x)\, \mathrm{d}m$$

不严谨地说，$\delta(x)$ 是 Dirac measure $\delta_0(E) = 1_E(0)$ 相对于 Lebesgue measure m 的 "Radon-Nikodym Derivative"。但是注意，由于 δ_0 相较于 m 并不是绝对连续的（*i.e.*, $m(E) = 0 \not\Rightarrow \delta_0(E) = 0$），所以这种函数在传统意义上并不存在。

在测度论中，我们严格地证明了 $\int_E f(x)\, \mathrm{d}\delta_0 = f(0) \cdot 1_E(0)$；于是不难验证，在定义 II 下，定义 I 的后一条 $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$ 自然成立。

Definition 3.1.3. Heaviside Function δ 的反导数称为 *Heaviside Function* 记为

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)\, dx = 1_{[0,+\infty)}(x)$$

这由定义 II 很容易得到

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)\, dx = \int_{(-\infty,x]} 1 d\delta_0 = 1_{(-\infty,x]}(0) = 1_{[0,+\infty)}(x)$$

Properties 3.1.1. Delta Function 的性质
$\delta(x)$ 有如下几条性质，由简单的积分换元即可得到证明。

1） ***Sifting property*** $\int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(a-x) f(x)\, dx = f(a)$

2） ***Scaling property*** $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

3） ***Integration by parts*** $\int_a^b f \cdot \delta dx = \int_a^b f dH = f \cdot 1_{[0,+\infty)}|_a^b - \int_a^b f' \cdot 1_{[0,+\infty)} dx$

Proof Properties 3.1.1 (1) 换元 $t = x - a$，有（第二个等号同理，不过注意换元后积分上下限要颠倒）

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(t) f(t+a)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t+a)\, d\delta_0 = f(0+a) = f(a)$$

(2) 换元 $t = ax$，当 a 为正数时显然，我们证明当 $a < 0$ 时的情况。

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(ax)\, dx = \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(t)\, dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx$$

(3) 当 $ab \geq 0$ 时显然，证略。现在考虑 $0 \in (a, b)$ 的情形

$$f \cdot 1_{[0,+\infty)}|_a^b - \int_a^b f' \cdot 1_{[0,+\infty)} dx = f(b) - \int_0^b f' dx = f(b) - f(x)|_0^b = f(0) = \int_a^b f \cdot \delta dx$$

3.2 Greens' Function and It's Construction

本节讨论对如下边界值问题 $(*)$ 的求解，注意其边界条件齐次，不一定 well-saparated

$$\begin{aligned} & L_n\left[u\left(x\right)\right]=f\left(x\right)\quad \text{s.t.}\quad a<x<b \\ \text{w.r.t.}\qquad & A_i\left[u\left(a\right)\right]+B_i\left[u\left(b\right)\right]=0\quad \text{s.t.}\quad i=1\cdots n \end{aligned}$$

Definition 3.2.1. Greens' Function
如果存在一个函数 $g\left(x;t\right)$ 使得边界值问题 $(*)$ 的解为

$$u\left(x\right)=\int_a^b g\left(x;t\right)f\left(t\right)dt$$

则称该函数为 *Greens' Function*。如果 $g\left(x;t\right)=g\left(t;x\right)$，则称 *Greens' Function* 对称 *symmetric*。

构造这种形式的解的原因是，我们可以将前一章中对相同齐次 well-saparated 边界条件的 BVP 特征函数解做如下变换，记 $n_k=\langle y_k,w_k\rangle_\rho$

$$\begin{aligned} u\left(x\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}c_k y_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle f,w_k\rangle_1}{\overline{\lambda}_k n_k}y_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_a^b f\left(t\right)\cdot w_k\left(t\right)dt}{\lambda_k n_k}y_k\left(x\right) \\ &=\int_a^b\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\lambda}_k n_k}y_k\left(x\right)\cdot w_k\left(t\right)f\left(t\right)dt \end{aligned}$$

我们令 $g\left(x;t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\lambda}_k n_k}y_k\left(x\right)\cdot w_k\left(t\right)$，则有 $u\left(x\right)=\int_a^b g\left(x;t\right)f\left(t\right)dt$

Definition 3.2.2. Eigenfunction Expansion for Greens' Function
如果 BVP $(*)$ 的边界条件齐次且没有零特征值。$(\lambda_k,y_k,\overline{\lambda}_k,w_k)$ 分别是其自身与伴随问题 BVP* 的特征值特征函数对。则，Greens' Function 有特征函数展开

$$g(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\lambda}_k\langle y_k,w_k\rangle_\rho}y_k(x)\cdot w_k(t)$$

当 BVP 为 fully self-adjoint 时，Greens' Function $g(x;t)$ symmetric。回顾对于 Sturm-Liouville Problem，$g(x;t)$ 还可以有另一种特征值展开 2.5.1 (4)，于是：

$$g(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle g,y_k\rangle_\rho}{\langle y_k,y_k\rangle_\rho}\cdot y_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k(t)}{\lambda_k\langle y_k,y_k\rangle_\rho}\cdot y_k(x)$$

即我们有 $\lambda_k\langle g,y_k\rangle_\rho=y_k(t)$，参见**Problem Sheet 03, Q2**。

下文中我们将具体讨论如何利用前一节的 δ 函数构造 Greens' Function 。

Theorem 3.2.1. Construction of Greens' Function
考虑齐次边界的 BVP $(*)$

$$\begin{aligned} L_n\left[u(x)\right] &= f(x) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \qquad A_i\left[u(a)\right] + B_i\left[u(b)\right] &= 0 \quad \text{s.t.} \quad i = 1\cdots n \end{aligned}$$

如果存在一个连续函数 $g(x;t)$ 使得

$$\begin{aligned} L_n\left[g(x;t)\right] &= \delta(x-t) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \qquad A_i\left[g(a;t)\right] + B_i\left[g(b;t)\right] &= 0 \quad \text{s.t.} \quad i = 1\cdots n \end{aligned}$$

则足够光滑的 $g(x;t)$ 即为所解问题的 Greens' Function, 易证边界值问题 $(*)$ 的解为

$$u(x) = \int_a^b g(x;t)\, f(t)\, dt$$

Theorem 3.2.2. Adjoint Greens' Function Adjoint Problem 的 Greens' Function 称为 Adjoint Greens' Function。记原问题的 Greens' Function 为 $g(x;t)$，其伴随 Greens' Function 为 $g^*(x;t)$。则必然有

$$g^*(x;t) = g(t;x)$$

特别地，fully self-adjoint BVP 的 Greens' Function 必对称，*i.e,*

$$g^*(t;x) = g^*(x;t) = g(x;t) = g(t;x)$$

Proof Theorem 3.2.1 假设 $g(x;t)$ 足够光滑，则可以交换导数与积分号。注意 L_n 作用于 x，所以可以在积分号内提出 $f(t)$

$$\begin{aligned} L_n\left[u(x)\right] = L_n\left[\int_a^b g(x;t)\, f(t)\, dt\right] &= \int_a^b L_n\left[g(x;t)\right] f(t)\, dt \\ &= \int_a^b \delta(x-t)\, f(t)\, dt = f(x) \end{aligned}$$

Proof Theorem 3.2.2 记 u 为原问题的解：$u(t) = \int f(t)\, g(t;x)\, dx$；此外，还有对任意的施迫函数 f

$$u(t) = \langle u, \delta(x-t)\rangle = \langle u, L^* g^*\rangle = \langle Lu, g^*\rangle = \langle f, g^*\rangle = \int f(x)\, g^*(x;t)\, dx$$

即 $\int f(x)\, g^*(x;t)\, dx = u(t) = \int f(t)\, g(t;x)\, dx$ 对对任意的施迫函数 f 恒成立。故 $g^*(x;t) = g(t;x)$。对于 fully self-adjoint BVP，必然有 $g^*(x;t) = g(x;t)$，又有 $g(x;t) = g^*(t;x)$，对称性自然成立。

Construction of Greens' Function

下面我们给出求解 $g(x;t)$ 的具体步骤，我们的目标是求解 $(**)$

$$
\begin{aligned}
& L_n\left[g(x;t)\right] = \delta(x-t) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\
\text{w.r.t.} \quad & A_i\left[g(a;t)\right] + B_i\left[g(b;t)\right] = 0 \quad \text{s.t.} \quad i = 1\cdots n
\end{aligned}
$$

STEP 1 分段 $x \in (a,t)$ 与 $x \in (t,b)$ 解方程 $(**)$, 在这些区间内 $\delta(x-t) \equiv 0$, 注意求解时的积分常数都是关于 t 的函数 $C_i(t)$

$$
\begin{aligned}
& L_n\left[g(x;t)\right] = 0 \quad \text{s.t.} \quad a < x < t \quad \& \quad L_n\left[g(x;t)\right] = 0 \quad \text{s.t.} \quad t < x < b \\
& \text{w.r.t.} \quad A_i\left[g(a;t)\right] + B_i\left[g(b;t)\right] = 0 \quad \text{s.t.} \quad i = 1\cdots n
\end{aligned}
$$

带入边界条件后应当能得到两个分段函数 $g^-(x;t)$ 与 $g^+(x;t)$，但还缺少相应的条件解出其中的部分 $C_i(t)$，即解得

$$
g(x;t) = g^-(x;t)\cdot 1_{(a,t)}(x) + g^+(x;t)\cdot 1_{(t,b)}(x)
$$

STEP 2 接下来我们通过对 $g(x;t)$ 在 $x=t$ 处的连续性得到额外的条件来确认余下的 $C_i(t)$。首先，对 $L_n\left[g(x;t)\right] = \delta(x-t)$ 在 $x=t$ 两侧同时对 x 积分，并对 $L_n\left[g(x;t)\right]$ 的第一项（最高阶导数）分部积分

$$
\begin{aligned}
& \int_{t^-}^{t^+} L_n\left[g(x;t)\right] dx = \int_{t^-}^{t^+} \delta(x-t)\, dx \equiv 1 \\
\Rightarrow \quad & \int_{t^-}^{t^+} \left\{a_n g^{(n)} + a_{n-1} g^{(n-1)} + \cdots + a_0 g\right\} dx = 1 \\
\Rightarrow \quad & a_n g^{(n-1)}\Big|_{t^-}^{t^+} + \int_{t^-}^{t^+} \left\{\left(a_{n-1} - a_n'\right) g^{(n-1)} + \cdots + a_0 g\right\} dx = 1
\end{aligned}
$$

为了确保积分项为 0，我们只需要确保 $g(x;t)$ 的 $0 \sim (n-2)$ 阶导数在 $x=t$ 是连续的即可，即

$$
g^{(n-2)}(x;t)\Big|_{t^-}^{t^+} = \cdots = g^{(1)}(x;t)\Big|_{t^-}^{t^+} = g(x;t)\Big|_{t^-}^{t^+}
$$

要求低阶导数连续的目的，除了为了使积分项为 0 之外，也是为了确保可以存在 $(n-1)$ 阶导数用于拟合 $\delta(x)$。我们还剩下最后一个条件（$\Rightarrow$ 成立是因为我们要求 $a_n(x)$ 连续）

$$
a_n(x)\cdot g^{(n-1)}(x;t)\Big|_{t^-}^{t^+} = 1 \;\Rightarrow\; a_n(t)\cdot g^{(n-1)}(x;t)\Big|_{t^-}^{t^+} = 1
$$

最后（齐次边界）BVP 的解是对 t 积分 $u(x) = \int_a^b g(x;t)\, f(t)\, dt$。注意 Green Function 的构造与施迫函数 $f(t)$ 无关。

Example 3.2.1. 构造 Green's Function 解 BVP
考虑解如下有齐次边界条件的 BVP，对 $0 < x < 1$

$$g'' + g = 1 \quad \text{s.t.} \quad g(0) = g'(1) = 0$$

STEP 1 考虑分段 $x \in (0, t)$ 与 $x \in (t, 1)$ 解方程 $g'' + g = \delta(x - t)$，在这些区间内 $\delta(x - t) \equiv 0$，避免重复只需要解一个方程即可

$$g'' + g = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x; t) = A_i(t)\, sin(x) + B_i(t)\, cos(x) \quad \text{s.t.} \quad i = 1, 2$$

带入边界条件 $g(0; t) = g'(1; t) = 0$ 后应当能得到分段函数

$$g(x; t) = A_1(t) sin(x) \cdot 1_{(0,t)}(x) + B_2(t) cos(1 - x) \cdot 1_{(t,1)}(x)$$

STEP 2 接下需要确保 $g(x; t)$ 满足以下的连续性条件

$$\begin{cases} g(x; t)\,|_{t^-}^{t^+} = 0 \\ g'(x; t)\,|_{t^-}^{t^+} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} sin(t) & -cos(1 - t) \\ cos(t) & -sin(1 - t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得

$$A_1(t) = -\frac{cos(t - 1)}{cos(1)} \quad , \quad B_2(t) = -\frac{sin(t)}{cos(1)}$$

STEP 3 于是，BVP 的解是对 t 积分 $u(x) = \int_0^1 g(x; t)\, f(t)\, dt$, Green Function 的构造与施迫函数 $f(t)$ 无关。

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^1 \left\{ -\frac{cos(t - 1)}{cos(1)} sin(x) \cdot 1_{(0,t)}(x) - \frac{sin(t)}{cos(1)} cos(1 - x) \cdot 1_{(t,1)}(x) \right\} \cdot 1 dt \\
&= -\frac{sin(x)}{cos(1)} \int_0^1 \left\{ cos(t - 1) \cdot 1_{(0,t)}(x) \right\} dt - \frac{cos(1 - x)}{cos(1)} \int_0^1 \left\{ sin(t) \cdot 1_{(t,1)}(x) \right\} dt \\
&= -\frac{sin(x)}{cos(1)} \int_0^1 \left\{ cos(t - 1) \cdot 1_{(x,1)}(t) \right\} dt - \frac{cos(1 - x)}{cos(1)} \int_0^1 \left\{ sin(t) \cdot 1_{(0,x)}(t) \right\} dt \\
&= -\frac{sin(x)}{cos(1)} \int_x^1 cos(t - 1)\, dt - \frac{cos(1 - x)}{cos(1)} \int_0^x sin(t)\, dt \\
&= -\frac{sin(x)}{cos(1)} sin(t - 1)\,|_x^1 + \frac{cos(1 - x)}{cos(1)} cos(t)\,|_0^x \\
&= \frac{sin(x)}{cos(1)} sin(x - 1) + \frac{cos(1 - x)}{cos(1)} \Big(cos(x) - 1 \Big) = 1 - \frac{cos(1 - x)}{cos(1)}
\end{aligned}$$

4 Distibutions

4.1 Distibutions and Its Properties

Definition 4.1.1. 测试函数（test functions） 如果定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$，则称其为一个 *test function*，即要求

1） ϕ 无穷可微

2） ϕ 有 *compact support*，*i.e,* $\exists\ X > 0$ s.t. $\forall\ x \notin [-X, X]\ :\ \phi(x) = 0$

Definition 4.1.2. 局部可积函数（locally integrable functions） 若定义在 Ω 上的函数 f 满足

$$\forall \text{ compact } K \subset \text{int}(\Omega)\ :\ f \in L_1(K)$$

则称 f 在 Ω 上局部可积 *locally integrable*，记

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{\ f\ :\ f \text{ locally integrable over } \Omega\ \}$$

Definition 4.1.3. 泛函（functional） 给定一个集合 V，将 V 中的元素映射到实数域上的函数称为一个泛函 *functional* $j : V \mapsto \mathbb{R}$。如果对任意常数 α, β，以及 $u, v \in V$ 有

$$j(\alpha u + \beta v) = \alpha j(u) + \beta j(v)$$

则称泛函是一个线性泛函 *linear functional*。特别地，在下文中我们将默认考虑 $V = C_0^\infty(\mathbb{R})$ 的情形。

Definition 4.1.4. 连续泛函（continuity） 给定测试函数集合 $C_0^\infty(\mathbb{R})$，$j(\phi)$ 为定义在上面的泛函。若其满足 $\forall\ X > 0\ :\ \exists\ L_X > 0\ \&\ N_X \in \mathbb{N}_0$ s.t.

$$\forall\ \phi \in C_0^\infty\big([-X, X]\big)\ :\ |j(\phi)| \le L_X \cdot ||\phi||_{C^{N_X}([-X,X])}$$

则称该泛函是一个连续泛函。连续泛函满足 *Heine Theorem*

$$\lim_{n\to\infty} j(\phi_n) = j\left(\lim_{n\to\infty} \phi_n\right)$$

Definition 4.1.5. 分布（distribution） 定义在 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上的线性连续泛函 $d(\phi)$ 称为一个分布。$\forall\ f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$，定义其自然分布 *natural distribution* 为

$$d_f(\phi) := \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \phi \ dx$$

证明见 Lecture Notes p.39。特别地，对定义在 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上的泛函 $j(\phi)$ 若

$$\exists\ f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \quad \text{s.t.} \quad j(\phi) = d_f(\phi)$$

则称 $j(\phi)$ 为一个正规分布 *regular distribution*，否则称为一个奇异分布 *singular distribution*。

Example 4.1.1. Delta Function as a Distribution
前文的 *delta* 函数可以视为定义在 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上的 *delta* 分布 $\delta(\phi) = \phi(0)$ 的诱导函数 $\delta(\phi) = d_{\delta(x)}(\phi)$。该泛函显然是线性且连续的。实际上，这一概念可以被进一步推广为

$$a \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{N}_0\ :\ \delta_a^{(n)}(\phi) = \phi^{(n)}(a)$$

Definition 4.1.6. 弱导数（weak derivative） 局部可积函数 $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ 的弱导数定义为满足如下条件的函数 f'

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\ :\ \int_{\mathbb{R}} f \cdot \phi' dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi \cdot f' dx$$

Definition 4.1.7. 分布的运算
记以下的 d，d_1，d_2 均为分布，为其定义如下运算

1) **Addition** 任给 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，定义 $(\alpha d_1 + \beta d_2)(\phi) = \alpha d_1(\phi) + \beta d_2(\phi)$
2) **Multiplication** 任给 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$，定义 $(g \cdot d)(\phi) = d(g\phi)$
3) **Differentiation** 定义分布 $d(\phi)$ 的导数为 $d'(\phi) = -d(\phi')$
4) **Limit** 对（可以是连续参数 α 下的）分布列 $\{d_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，若存在另一个分布 d，有 $\forall\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\ :\ d(\phi) = \lim_{\alpha\to\alpha_0} d_\alpha(\phi)$，则称 d 为 $\{d_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 在 $\alpha \to \alpha_0$ 时的极限，记作 $\lim_{\alpha\to\alpha_0} d_\alpha = d$

显然，分布的线性组合，乘法，导数以及极限仍是一个分布（线性连续泛函）。此外，若记 H 为 *Heaviside function*，易证有 $d_H' = \delta$。

Theorem 4.1.1. 正规分布的运算
若存在 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 使得 $d = d_f$ 为正规分布，则必有

1） **Multiplication** 任给 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$，$(g \cdot d)(\phi) = \left(g \cdot d_f\right)(\phi) = d_{fg}(\phi)$
2） **Differentiation*** 若 f 存在其弱导数 f'，则 $d'(\phi) = d'_f(\phi) = d_{f'}(\phi)$
3） **Translation** 有换元关系 $d(\phi(x+a)) = d_f(\phi(x+a)) = d_{f(x-a)}(\phi)$

总结函数 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 的自然分布 $d_f(\phi) = \langle f, \phi\rangle$ 满足如下的运算关系

1） **Addition** $\langle \alpha f_1 + \beta f_2, \phi\rangle = \alpha\langle f_1, \phi\rangle + \beta\langle f_2, \phi\rangle$
2） **Multiplication** $\langle fg, \phi\rangle = \langle f, g\phi\rangle$
3） **Differentiation** $\langle f', \phi\rangle = -\langle f, \phi'\rangle$；特别地，$\langle H', \phi\rangle = \delta(\phi)$
4） **Translation** $\langle f(x-a), \phi(x)\rangle = \langle f(t), \phi(t+a)\rangle = \langle f(x), \phi(x+a)\rangle$

在不产生歧义的情况下，我们可以对常规的分布做如下记号规定，从而使得一般分布运算的形式可以和上述使用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 记号的公式一致，记 $d(\phi) := \langle d, \phi\rangle$。

Remark 求导公式 $*$ 的证明 $d'_f(\phi) = -d_f(\phi') = -\langle f, \phi'\rangle = \langle f', \phi\rangle = d_{f'}(\phi)$

Example 4.1.2. 分布公式的证明 试证明分布等式 $(x^2H)''' = 2\delta = x^2H'''$
先证前一个等式

$$\begin{aligned}
(x^2H)'''(\phi) &= \langle (x^2H)''', \phi\rangle = -\langle H, x^2\phi'''\rangle && (1)\\
&= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\cdot x^2\phi'''(x)dx && (2)\\
&= -\int_0^{+\infty} x^2\phi'''(x)dx = -2\int_0^{+\infty}\phi'(x)dx && (3)\\
&= -2\phi|_0^{+\infty} = 2\phi(0) = 2\delta(\phi) && (4)
\end{aligned}$$

(1) 的第二个等号利用了 def 4.1.7 (2)/(3)；(3) 利用了分部积分；(4) 利用了 ϕ 有 compact support，故 $\phi(+\infty) = 0$。下面证明后一个等式

$$\begin{aligned}
x^2H'''(\phi) &= \langle x^2H''', \phi\rangle = \langle H''', x^2\phi\rangle && (5)\\
&= \langle H', (x^2\phi)''\rangle = \langle H', 2\phi + 4x\phi' + x^2\phi''\rangle && (6)\\
&= \langle \delta, 2\phi + 4x\phi' + x^2\phi''\rangle && (7)\\
&= 2\phi(0) + 4\cdot 0\cdot\phi'(0) + 0^2\cdot\phi''(0) && (8)\\
&= 2\phi(0) = 2\delta(\phi) && (9)
\end{aligned}$$

(6) - (7) 利用了 def 4.1.7 (3)；(7) - (8) 利用了 $d'_H = \delta$；(8) - (9) 利用了 δ 分布的定义。

4.2 Distibution Solutions

Definition 4.2.1. 典型解（classical solutions） 若 $u(x) \in C^n(\,[a,b]\,)$ 为线性边界值问题

$$\begin{aligned} & L_n\left[u\left(x\right)\right] = f\left(x\right) \quad \text{s.t.} \quad a < x < b \\ \text{w.r.t.} \quad & A_i\left[u\left(a\right)\right] + B_i\left[u\left(b\right)\right] = c_i \quad \text{s.t.} \quad i = 1 \cdots n \end{aligned}$$

的解，则称之为一个典型解。

Definition 4.2.2. 伴随算子（adjoint operators） 记 L 为线性微分算子，且 $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$，则若有

$$d_{Lu}(\phi) = \langle Lu, \phi \rangle = \langle u, L^*\phi \rangle = d_u(L^*\phi)$$

对任意测试函数 ϕ 均成立，则称 L^* 为 L 的一个伴随算子。

Definition 4.2.3. Distribution Solutions
若对线性常微分方程 $Lu = f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 有 $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$，使得

$$d_{Lu}(\phi) = d_u(L^*\phi) = d_f(\phi) \quad \text{or} \quad \langle Lu, \phi \rangle = \langle u, L^*\phi \rangle = \langle f, \phi \rangle$$

对任意测试函数 ϕ 均成立，则称 u 为一个 *distribution solution*。在该定义下，微分方程的解不一定要可微，只需要局部可积即可。

Theorem 4.2.1. Links to Green's Functions
前一章中的 *Green's Functions* 实际上是方程

$$\langle Lg\left(x;t\right), \phi \rangle = \langle g\left(x;t\right), L^*\phi \rangle = \phi\left(t\right) = \langle \delta\left(x-t\right), \phi \rangle$$

的一个 *distribution solution*。