Informe de Estadística en Física Experimental: Ejercicio 13 de la guia 8, 13 y 14 de la Guía 9

Andrés Babino

20 de julio de 2015

1. Introducción

El lenguaje utilizado para programar todas los ítems fue Python. El código utilizado para generar los datos, gráficos y este mismo informe fue controlado con git, tiene licencia MIT y está almacenado en `https://github.com/ababino/efe`.

Guía 8, Ejercicio 13, ítem a

Como las mediciones son a tiempo fijo la variable aleatoria es poissonian. Si se desea ajustar la curva $y(t) = a_1 + a_2 e^{-t/209{,}69s} + a_3 e^{-t/34{,}244s}$ a un conjunto de datos se deben usar las fórmulas de cuadrados mínimos lineal. Los parámetros quedan determinados por:

$$\vec{\theta} = \left(AV^{-1}A\right)^{-1} AV^{-1}y$$

Donde θ es el vetor de parametros (a_1, a_2, a_3) y A es una matriz que tiene unos en la primera columna $e^{-t/209{,}69s}$, en la segunda y $e^{-t/34{,}244s}$ en la tercera. V es la matriz de covarianza de la variable independiente. En este caso la matriz es diagonal porque los datos no están correlacionados y la varianza es poisson.

La matriz de covarianza de los parámetros ajustados se puede calcular de la siguiente manera:

$$Cov(\vec{\theta}) = \left(AV^{-1}A\right)^{-1}$$

Los resultados de este ajuste fueron:

$$\vec{\theta} = (10{,}1, 128, 960)$$

$$V(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 0{,}70 & -3{,}3 & 7{,}0 \\ -3{,}3 & 38 & -99 \\ 7{,}0 & -99 & 100 \end{pmatrix}$$

Usando estos datos podemos calcular el valor esperado del cociente a_2/a_3 y usando la fórmula de propagacón de errores su error:

$$\frac{a_2}{a_3} = 0{,}134 \pm 0{,}050$$

Guía 8, Ejercicio 13, ítem b

Si a_4 y a_5 son desconocidos la función a ajustar no es lineal en los parámetros. Linealizando la función χ^2 con respecto a los parámetros obtenemos:

$$\vec{\theta} = (10\ 128\ 957\ 210\ 34)$$

$$Cov(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 4{,}0 & 34 & 0{,}44 & -61 & -3{,}1 \\ 34 & 530 & 150 - 74 & -53 & \\ 0{,}44 & 150 & 2600 & -98 & -79 \\ -61 & -740 & -98 & 1200 & 69 \\ -3{,}1 & -53 & -79 & 69. & 7{,}5 \end{pmatrix}$$

Guía 8, Ejercicio 13, ítem c

En este caso la función chi^2 es:

$$t(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - a_1 - a_2 e^{-t/a_4} - a_3 e^{-t/a_5}\right)^2}{y_i}$$

que debido a que los parámetros a_4 y a_5 están en las exponenciales el chi^2 no es cuadrático en los parámetros.

Si en el argumento de t dejamos fijo $a_1 = a_1*$, $a_2 = a_2*$ y $a_3 = a_3*$ los valore óptimos ya calculados obtenomos una función de a_4 y a_5. Otra opción es para cada par (a_4, a_5) calcular la terna óptima (a_1, a_2, a_3) y con ellos calcular el chi^2. En el gráfico de la figura1 se muestra la curva de nivel $t = t_{\text{mín}} + 1$ para las dos funciones.

Guía 9

Ejercicio 13

Ítem a

Por simple inspección ocular se pueden ordenar los histogramas como se muestra en la figura2

Ítem b

En la figura3 se muestra un histograma de los primeros 3000 datos. Sobre estos se graficó las cuentas esperadas asumiendo una distribución $N(0, 2{,}5)$. Si aplicamos un test chi^2 sobre estos datos obtenemos que un valor $chi^2 = chi2 = 67$. El número de grados de libertad de la chi^2 es 56 (el número de bines) por lo

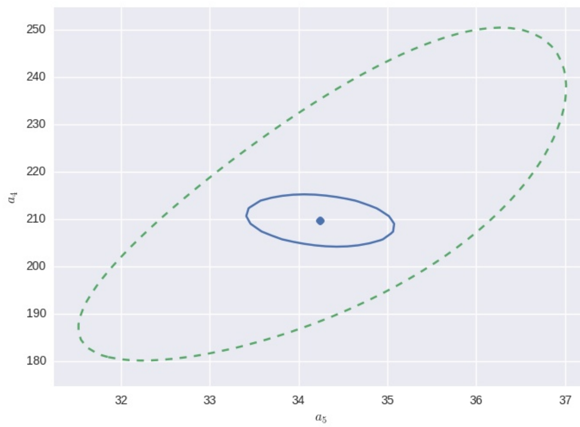

Figura 1

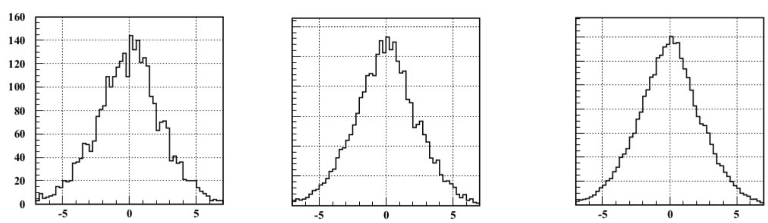

Figura 2

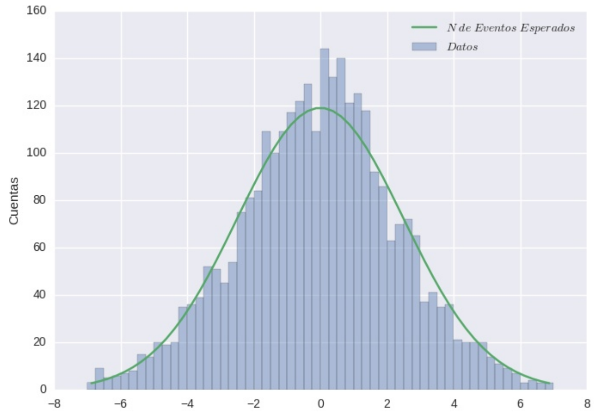

Figura 3

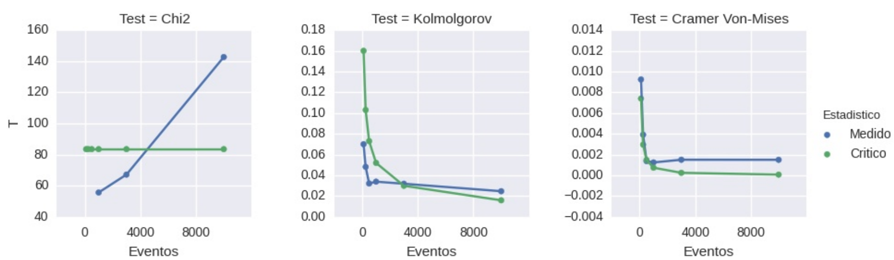

Figura 4

tanto el p valor del test es $pval = 0{,}15$. Con este p valor no podemos rechazar la hipótestis nula.

Si sobre los mismos datos aplicamos los tests de Kolmolgorov y de Cramer Von-Mises obtenemos valores $t_k = 0{,}032$ y $t_c = 0{,}0015$ respectivamente. Comparando con las tablas de valores críticos vemos que en los dos casos podemos rechazar la hipótesis nula con un 99 % de nivel de confianza.

Ítem c

En los gráficos de la figura4 se muestra la variación de los estádisticos y sus vaores críticos para distinto tamaños de muestra. Se puede observar que a medida que el tamaño de la muestra crece todos los test rechazan la hipótesis nula con más de 99 % de nivel de confianza.