江 西 理 工 大 学 考 试 卷 A

试卷编号：

<table>
<tr><td>20______—20______ 学年第________学期</td><td>考试性质：[正考]、[补考]、[其它]</td></tr>
<tr><td>课程名称：______线性代数__________</td><td>考试方式：[开卷]、[闭卷]</td></tr>
<tr><td>考试时间:______ 年____月____日（100 分钟）</td><td>试卷类别（A、B、C):[   ] 共 四 大题</td></tr>
<tr><td colspan="2">温 馨 提 示
请考生自觉遵守考试纪律，争做文明诚信的大学生。如有违犯考试纪律，将严格按照《江西理工大学学生违纪处分暂行规定》处理。</td></tr>
</table>

班级____________________学号 __________姓名______参考答案________

题号	一	二	三	四	总 分
得分					

一、填空题（每空 **3** 分，共 **24** 分）

1．已知 n 阶矩阵 A 各列元素之和为 0，则 $|A|=$____0______.

2．三阶方阵 A 的行列式为 2，则 $|A^*|=$____4______； $|A^{-1}+A^*|=$______$\frac{27}{2}$________.

3．齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_3=0 \\ 2x_2-x_4=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$ 基础解系为______$\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$__________.

4．已知三阶方阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $B=3E-2A$ 的特征值为___1，-1，-3___.

5．已知 $A=\begin{pmatrix}5&1&0\\4&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}1&-1&0\\-4&5&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}}$.

6．若向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）可以相互线性表示，则称向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）___等价___ .

7．设 A，B 均为 n 阶矩阵，且 B 为可逆矩阵，若 $AB=B$，则 $A=$ __E__ .

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}(ad-bc\neq 0)$，则 A^{-1} 为（ A ）.

（A）$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ （B）$\dfrac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

（C）$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}-c&b\\d&-a\end{pmatrix}$ （D）$\dfrac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix}d&-a\\-b&c\end{pmatrix}$

2．向量组 $\begin{matrix}\alpha_1=(0,0,1,2,-1)^T,\alpha_2=(1,3,-2,2,-1)^T,\\ \alpha_3=(2,6,-4,5,7)^T,\alpha_4=(-1,-3,4,0,-19)^T\end{matrix}$ 的秩为（ C ）.

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

3．设 A、B 均为 n 阶非零矩阵，且 AB=0，则 A 和 B 的秩（ B ）.

（A）必有一个等于 0 （B）都小于 n

（C）一个小于 n，一个等于 n （D）都等于 n

4．对方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1\\-2x_1+4x_2-2x_3=2\end{cases}$，（ D ）成立.

（A）有唯一解 （B）有两个解 （C）有无穷解 （D）无解

5．设 A 为正交阵，则 A^{-1} 为（ C ）.

（A）对称阵　　（B）单位阵　　（C）正交阵　　（D）对角阵

三、计算题（共 53 分）

1．（8 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解：D=18

2．（10 分）求解矩阵方程 $XA=B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

解：$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$X=BA^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

3．（10 分）求解非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$.

解：$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 12 & 0 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

因为$R(A) = R(B) = n = 3$，所以有唯一解为：$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

4．（12 分）求行向量组$\alpha_1 = (1,3,4,-2), \alpha_2 = (2,1,3,-1), \alpha_3 = (3,-1,2,0), \alpha_4 = (4,-3,1,1)$的秩及一个极大无关组，且求出其余向量由这一极大无关组线性表示的表达式.

解：$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以秩为 2，

α_1, α_2为一个最大无关组

$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$，$\alpha_4 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$

（若取α_1, α_3为最大无关组，则$\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3$，$\alpha_4 = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_3$）

5．（13 分）设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$，求一可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 & 4 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$

故得特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，由 $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$ 解得 $p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=1$ 时,由 $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$ 解得 $p_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=2$ 时,由 $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$ 解得 $p_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

所求可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

四、证明题（本题 8 分）

设 λ_1、λ_2 是方阵 A 的特征值，对应的特征向量分别为 p_1、p_2，

证明：若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 p_1+p_2 不会是 A 的特征向量.

证明：假设 p_1+p_2 是 A 的特征向量，则存在常数 λ，使得 $A(p_1+p_2)=\lambda(p_1+p_2)$，

即 $\lambda_1p_1+\lambda_2p_2=\lambda(p_1+p_2)\Rightarrow(\lambda_1-\lambda)p_1+(\lambda_2-\lambda)p_2=0$，

又$\lambda_1 \neq \lambda_2$，即$\lambda_1 - \lambda$与$\lambda_2 - \lambda$不同时为 0，则p_1与p_2线性相关，

这是不可能的（方阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关）。

所以假设不成立，即$p_1 + p_2$不会是A的特征向量.