Techniques et systèmes de communications numériques sans-fil
(TS218)

Romain Tajan

Plan

Signal émis

Expression du signal émis en **bande de base** :

$$s_l(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s)$$

Expression du signal émis en **bande étroite** (ou bande transposée) :

$$s(t) = Re\left(s_l(t)e^{j2\pi f_c t}\right)$$

Notations

- a_m : **symboles complexes**,
- $s_l(t)$: **enveloppe complexe du signal émis**,
- T_s : **temps symbole**,
- $R_s = T_s^{-1}$: **débit symbole**,
- $h(t)$: **filtre de mise en forme à l'émission**, (filtre demi-Nyquist)
- f_c : **fréquence porteuse**.

Signal reçu dans le cas mono-trajet BBAG[1] :

$$r(t) = Re\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t-\tau-mT_s)e^{j2\pi(f_c+\delta_f)t+j\phi}\right) + w(t)$$

But :

Récupérer l'information transmise (détection des symboles a_n)

Problème :

Les paramètres $\mathbf{p} = [\phi, \tau, T_s, \delta_f]$ sont inconnus ...

- ϕ : Déphasage entres oscillateurs aux émetteur/récepteur
  $\Rightarrow$ **Synchronisation en phase**
- τ : Temps de propagation du signal
  $\Rightarrow$ **Synchronisation en temps**
- T_s : Rythme symbole
  $\Rightarrow$ **Synchronisation du rythme**
- δ_f : Décalage en fréquence (effet Doppler, différences f_c émetteur/récepteur)
  $\Rightarrow$ **Synchronisation en fréquence**

1. Bruit Blanc Additif Gaussien

Plan

1. Contexte
2. Synchronisation en phase / fréquence
3. Synchronisation temporelle / récupération du rythme

Plan

Plan

Problématique

- **Approche retenue pour la synchronisation**
  - Estimations des paramètres $[\tau, T_s]$ et $[\phi, \delta_f]$ réalisées séparément
  - Erreur sur $[\tau, T_s]$ négligée : **paramètres connus**

- **Autre approche possible**
  - Estimations conjointe des paramètres $[\tau, T_s, \phi, \delta_f]$
  - plus complexe, non abordé en cours

- **Avant de commencer ...**
  - **Signal reçu** :

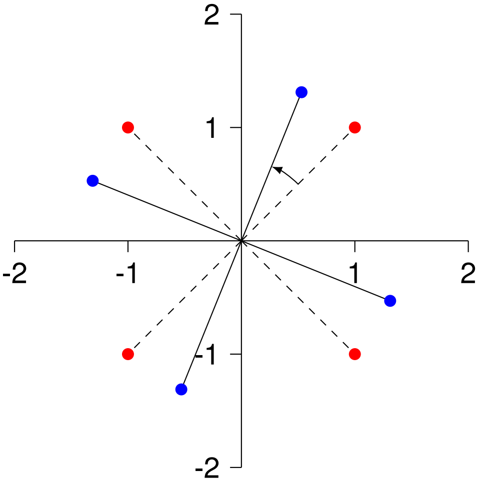
$$r(t) = Re\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s) e^{j2\pi(f_c+\delta_f)t+j\phi}\right) + w(t)$$

  - Expression en bande de base :

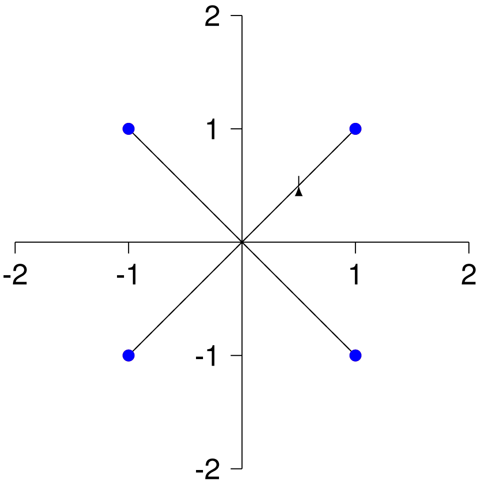
$$\begin{aligned} r_l(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s) e^{j2\pi\delta_f t+j\phi} + w_l(t) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s) e^{j\phi_t} + w_l(t) \end{aligned}$$

  - En supposant que h vérifie le critère de Nyquist et une transmission sans bruit : représenter la constellation $r_{l,k} = r_l(kT_s)$ pour des symboles 4-QAM dans les cas suivants :
    - → Déphasage constant $\phi_t = \phi$
    - → Déphasage variant linéairement dans le temps $\phi_t = 2\pi\delta_f t + \phi$

Déphasage constant



Déphasage variant linéairement dans le temps



Plan

On se concentre ici sur le cas d'une porteuse non modulée (avec $s_l(t) = A, A \in \mathbb{R}$), le cas d'une porteuse modulée par un signal sera traité ensuite.

• **Porteuse non-modulée** :

$$r(t) = A\cos\left(j2\pi f_c t + \phi_t\right) + w(t)$$

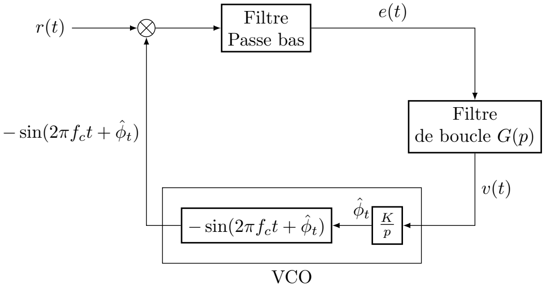
avec

$$\phi_t = 2\pi\delta_f t + \phi.$$

$\rightarrow$ **On veut estimer** ϕ_t

• **Boucle d'asservissement de phase** (Phase Lockded Loop, PLL)
$\rightarrow$ Asservir la phase $\hat{\phi}_t$ du signal de sortie d'un VCO (oscillateur commendé en tension) à la phase ϕ_t du signal reçu

- **Schéma de principe d'une PLL** :



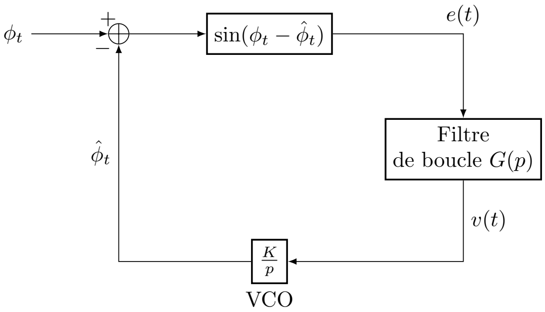
- **Multiplicateur + Filtre passe bas = Comparateur de phase**

But : produire un signal fonction de l'erreur d'estimation $\phi_t - \hat{\phi}_t$
Signal en sortie du filtre proportionnel à :

$$e(t) = sin(\phi_t - \hat{\phi}_t)$$

- **Filtre de boucle : Fixe les performances de l'asservissement**
- **VCO : génère une sinusoïde à la fréquence**

- **PLL** (modèle sur les phases) :



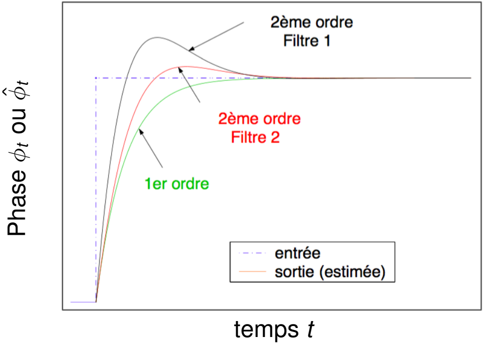
- **Analyse petite erreur** ($\hat{\phi}_t \sim \phi_t$) :
  - → Dans ce cas : $\sin(\phi_t - \hat{\phi}_t) \sim \phi_t - \hat{\phi}_t$
  - → Le système bouclé ci-dessus devient linéaire
  - → Sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{KG(p)/p}{1 + KG(p)/p}$$

- **Choix du filtre de boucle**
  - → Boucle du **premier ordre** : $G(p) = 1$,
  - → Boucle du **second ordre** :
    - → Filtre 1 :
$$G(p) = \frac{1 + \tau_2 p}{\tau_1 p}$$
    - → Filtre 2 :
$$G(p) = \frac{1 + \tau_2 p}{1 + \tau_1 p}$$

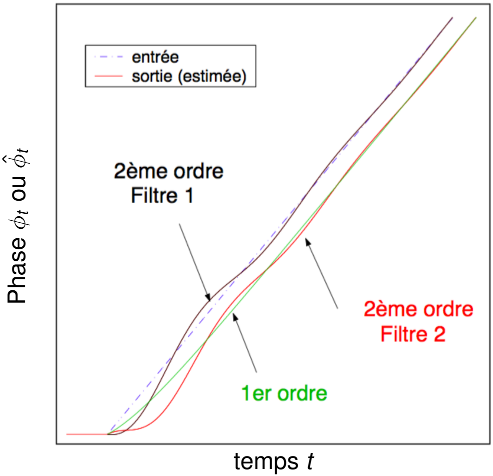
Les paramètres τ_1 et τ_2 sont des paramètres qui contrôlent la bande-passante de la boucle.

- **Performance des PLLs** - Réponse à un saut de phase $\phi_t = \phi_0 U(t)$



$\rightarrow$ Toutes les boucles accrochent : en régime établi erreur nulle

- **Performance des PLLs** - Réponse à un saut de fréquence $\phi_t = 2\pi\delta_f tU(t)$



$\rightarrow$ Erreur de phase nulle seulement pour la boucle du 2ème ordre - Filtre 1

$\rightarrow$ Toutes les boucles ont une erreur de fréquence nulle

• **Version numérique des PLL et Maximum de vraisemblance**
Modèle d'observation après échantillonnage au rythme T_s de $r_l(t)$:

$$r_{l,k} = e^{j\phi_k} + w_k$$

On cherche toujours à estimer ϕ_k

• **Phase constante** : $\phi_k = \phi$ inconnue
Vecteur d'observations : $\mathbf{r}_k = (r_{l,0}, r_{l,1}, \ldots, r_{l,k})$
Le canal étant ABBG et les échantillons de bruits iid $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$

$$p(\mathbf{r}_k|\phi) =$$

• **Version numérique des PLL et Maximum de vraisemblance**

Modèle d'observation après échantillonnage au rythme T_s de $r_l(t)$:

$$r_{l,k} = e^{j\phi_k} + w_k$$

On cherche toujours à estimer ϕ_k

• **Phase constante** : $\phi_k = \phi$ inconnue

Vecteur d'observations : $\mathbf{r}_k = (r_{l,0}, r_{l,1}, \ldots, r_{l,k})$

Le canal étant ABBG et les échantillons de bruits iid $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$

$$p(\mathbf{r}_k|\phi) = \prod_{n=0}^{k} \frac{1}{\sigma^2\pi} \exp\left(-\frac{\left|r_{l,n} - e^{j\phi}\right|^2}{\sigma^2}\right)$$

• Version numérique des PLL et Maximum de vraisemblance

Modèle d'observation après échantillonnage au rythme T_s de $r_l(t)$:

$$r_{l,k} = e^{j\phi_k} + w_k$$

On cherche toujours à estimer ϕ_k

• Phase constante : $\phi_k = \phi$ inconnue

Vecteur d'observations : $\mathbf{r}_k = (r_{l,0}, r_{l,1}, \dots, r_{l,k})$

Le canal étant ABBG et les échantillons de bruits iid $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$

$$p(\mathbf{r}_k|\phi) = \prod_{n=0}^{k} \frac{1}{\sigma^2\pi} \exp\left(-\frac{\left|r_{l,n} - e^{j\phi}\right|^2}{\sigma^2}\right)$$

$\rightarrow$ Estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV) vérifie :

• **Version numérique des PLL et Maximum de vraisemblance**

Modèle d'observation après échantillonnage au rythme T_s de $r_l(t)$:

$$r_{l,k} = e^{j\phi_k} + w_k$$

On cherche toujours à estimer ϕ_k

• **Phase constante** : $\phi_k = \phi$ inconnue

Vecteur d'observations : $\mathbf{r}_k = (r_{l,0}, r_{l,1}, \ldots, r_{l,k})$

Le canal étant ABBG et les échantillons de bruits iid $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$

$$p(\mathbf{r}_k|\phi) = \prod_{n=0}^{k} \frac{1}{\sigma^2\pi} \exp\left(-\frac{\left|r_{l,n} - e^{j\phi}\right|^2}{\sigma^2}\right)$$

$\rightarrow$ Estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV) vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial\phi} ln\left(p(\mathbf{r}_k|\phi)\right) = 0$$

• **Version numérique des PLL et Maximum de vraisemblance**
Modèle d'observation après échantillonnage au rythme T_s de $r_I(t)$:

$$r_{I,k} = e^{j\phi_k} + w_k$$

On cherche toujours à estimer ϕ_k

• **Phase constante** : $\phi_k = \phi$ inconnue
Vecteur d'observations : $\mathbf{r}_k = (r_{I,0}, r_{I,1}, \ldots, r_{I,k})$
Le canal étant ABBG et les échantillons de bruits iid $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$

$$p(\mathbf{r}_k|\phi) = \prod_{n=0}^{k} \frac{1}{\sigma^2\pi} \exp\left(-\frac{\left|r_{I,n} - e^{j\phi}\right|^2}{\sigma^2}\right)$$

$\rightarrow$ Estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV) vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial\phi} ln\left(p(\mathbf{r}_k|\phi)\right) = 0$$

Montrer que

$$\hat{\phi}_k = \arctan \frac{\sum_{n=0}^{k} r_{Q,n}}{\sum_{n=0}^{k} r_{I,n}}$$

• Version numérique des PLL et Maximum de vraisemblance

Pour $\hat{\phi}_k \sim \phi_k$ on a

$$\sum_{n=0}^{k} Im(r_n e^{-j\phi_k}) = Im(r_k e^{-j(\hat{\phi}_k - \hat{\phi}_{k-1}) + j\hat{\phi}_{k-1}}) + \sum_{n=0}^{k-1} Im(r_n e^{-j(\hat{\phi}_k - \hat{\phi}_{k-1}) + j\hat{\phi}_{k-1}}) = 0$$

En utilisant le développement $\epsilon = \left|\hat{\phi}_k - \hat{\phi}_{k-1}\right| \ll 1$

$$Im(ze^{j\epsilon}) \sim Im(z) + \epsilon Re(z)$$

Montrer que $\hat{\phi}_k$ peut s'écrire récursivement comme :

$$\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{k-1} + \mu_k Im(r_k e^{-j\hat{\phi}_{k-1}}) \qquad (1)$$

avec

$$\mu_k = \left[\sum_{n=0}^{k} Re(r_k e^{-j\hat{\phi}_{k-1}})\right]^{-1}$$

L'équation (1) est appelée PLL numérique.

Plan

1. Contexte

2. Synchronisation en phase / fréquence
   - Contexte
   - Asservissement de phase : cas de la porteuse non-modulée
   - Asservissement de phase : cas de la porteuse modulée

3. Synchronisation temporelle / récupération du rythme

Télécommunications : la porteuse est modulée

$$r(t) = Re\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s) e^{j\phi_t} e^{j2\pi f_c t}\right) + w(t)$$

$\Rightarrow$ **On ne peut pas utiliser directement la PLL sur ce signal !**

Télécommunications : la porteuse est modulée

$$r(t) = Re\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s) e^{j\phi_t} e^{j2\pi f_c t}\right) + w(t)$$

$\Rightarrow$ **On ne peut pas utiliser directement la PLL sur ce signal !**

Les solutions proposées sont les suivantes :

- $\rightarrow$ Boucle à quadrature
- $\rightarrow$ Boucle de Costas
- $\rightarrow$ Boucle avec séquence d'apprentissage
- $\rightarrow$ Boucle à remodulation

- Cas de la modulations BPSK : $a_m \in \{A, -A\}$ et $h(t) = \Pi_{T_s}(t)$

Dans ce cas on observe que pour $t \in [nT_s(n+1)T_s[$

$$r(t)^2 = (a_n \cos(2\pi f_c t + \phi_t) + w(t))^2$$

- Cas de la modulations BPSK : $a_m \in \{A, -A\}$ et $h(t) = \Pi_{T_s}(t)$

Dans ce cas on observe que pour $t \in [nT_s(n+1)T_s[$

$$r(t)^2 = (a_n \cos(2\pi f_c t + \phi_t) + w(t))^2$$

D'où

$$r(t)^2 = \frac{\sigma_a^2}{2} + \frac{\sigma_a^2}{2}\cos(4\pi f_c t + 2\phi_t)) + \tilde{w}(t)$$

- Cas de la modulations BPSK : $a_m \in \{A, -A\}$ et $h(t) = \Pi_{T_s}(t)$

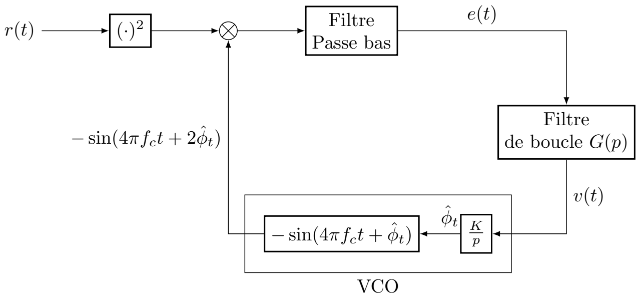
Dans ce cas on observe que pour $t \in [nT_s(n+1)T_s[$

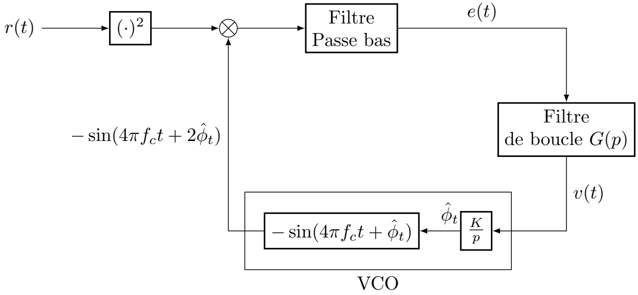
$$r(t)^2 = (a_n \cos(2\pi f_c t + \phi_t) + w(t))^2$$

D'où

$$r(t)^2 = \frac{\sigma_a^2}{2} + \frac{\sigma_a^2}{2}\cos(4\pi f_c t + 2\phi_t)) + \tilde{w}(t)$$

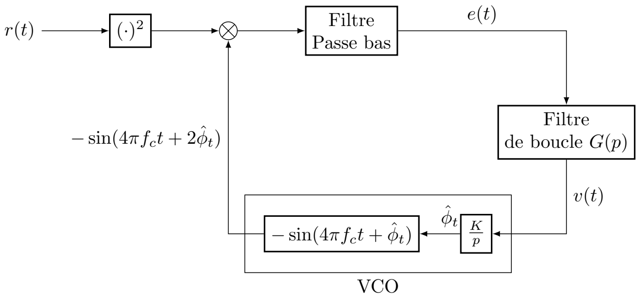
$\rightarrow$ On peut récupérer $2\phi_t$ avec une PLL





Comment faire pour une M-PSK ?

$$a_n \in (1, e^{j\frac{2\pi}{M}}, e^{j\frac{4\pi}{M}} \dots e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}})$$

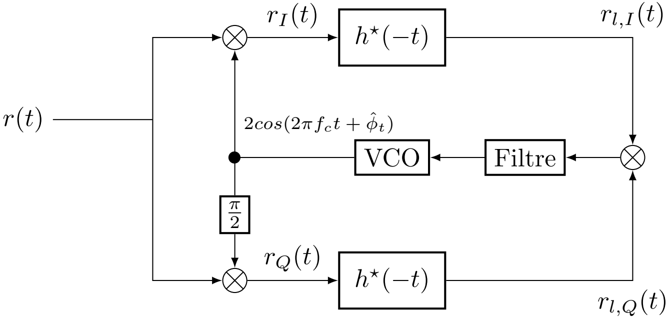


Comment faire pour une M-PSK ?

$$a_n \in (1, e^{j\frac{2\pi}{M}}, e^{j\frac{4\pi}{M}} \dots e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}})$$

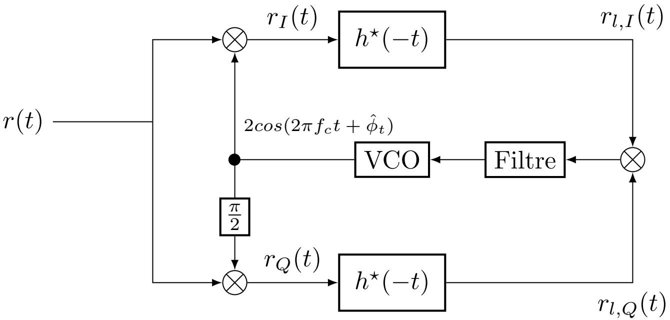
$\rightarrow$ Méthode généralisable en élevant à la puissance M.

Boucle de Costas



Pourquoi cette boucle fonctionne-t'elle ?

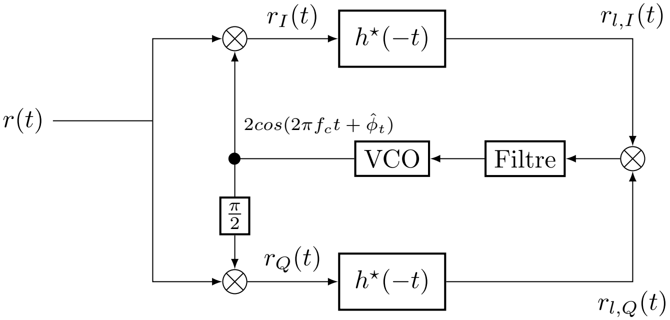
Boucle de Costas



Après calcul :

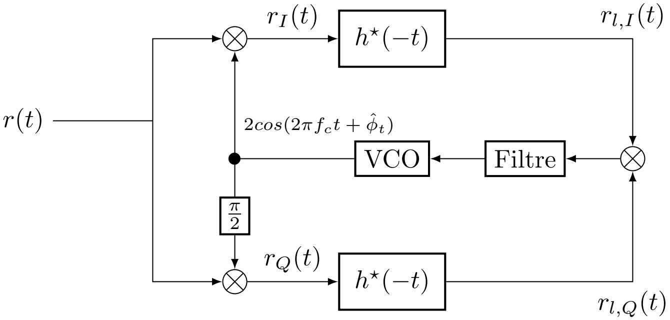
$$e(t) = r_{l,I}(t) r_{l,Q}(t) \propto -\sin(2(\phi_t - \hat{\phi}_t)) \left(\sum_n a_n g(t - nT_s) \right)^2$$

Boucle de Costas



Quand la boucle est accrochée on a $\hat{\phi}_t = \phi_t(\pi) \Rightarrow$ ambiguïté sur la phase

Boucle de Costas



Quand la boucle est accrochée on a $\hat{\phi}_t = \phi_t(\pi) \Rightarrow$ ambiguïté sur la phase
$\rightarrow$ Solution : **codage différentiel**

Boucles à remodulation

- Les systèmes présentés jusqu'ici sont des estimateurs **aveugles**.

$\Rightarrow$ Ils n'exploitent pas une éventuelle séquence d'apprentissage.

Soit une séquence d'apprentissage $\{a_n\}_{n=1\ldots N}$, en sortie de filtre adapté, et échantillonnage on peut montrer que l'estimateur

$$\hat{\phi}_k = \arctan \frac{\sum_{n=0}^{N} Im(r_n a_n^*)}{\sum_{n=0}^{N} Re(r_n a_n^*)}$$

$\Rightarrow$ l'estimateur en ligne suivant :

$$\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{k-1} + \mu Im(r_k a_k^* e^{-j\hat{\phi}_{k-1}})$$

Plan

Retour sur le signal reçu dans le cas mono-trajet BBAG en bande de base :

$$r_l(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - \tau - mT_s) + w_l(t)$$

But :

Estimer τ et $T_s \Leftrightarrow$ estimer les instants d'échantillonnage $mT_s + \tau_m$

Contexte :

On suppose que la synchronisation en fréquence/phase est réalisée

Approche avec séquence d'apprentissage

Retour sur le signal reçu en bande de base, en sortie du filtre adapté :

$$y_l(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m g(t - \tau - mT_s) + w_l'(t)$$

Le critère considéré ici est le critère d'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) :

$$J_{EQM}(\tau') = \mathbb{E}\left[\left|y_l(mT_s + \tau') - a_m\right|^2\right]$$

Algorithme du Gradient Stochastique :

$$\tau_{m+1} = \tau_m - \mu \frac{d}{d\tau'} \left|y_l(mT_s + \tau') - a_m\right|^2\Big|_{\tau'=\tau_m}$$

Approche avec séquence d'apprentissage

Algorithme du Gradient Stochastique (suite) :

$$\tau_{m+1} = \tau_m - \mu Re \left(\frac{d}{dt} y_l(t) \bigg|_{t=mT_s+\tau_m} [y_l(mT_s + \tau_m) - a_m]^* \right)$$

En théorie : La dérivée du signal reçu est obtenue à partir de la formule d'interpolation de Shannon.

En pratique : On utilise une estimation par différence finie (à deux points).

Approche sans séquence d'apprentissage

Idée générale : le signal $r_l(t)$ est **cyclostationnaire** de période T_s

$\Rightarrow$ on applique une non-linéarité à $r_l(t)$ qui fait apparaître des composantes sinusoïdales aux fréquences $\frac{k}{T_s}$

$\Rightarrow$ on récupère $1/T_s$ avec une PLL

Exemple de non-linéarité :

$$\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] = \sigma_a^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |g(t - mT_s - \tau)|^2 + \sigma^2$$

Approche sans séquence d'apprentissage

Décomposition en série de Fourier de $\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right]$:

$$\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] = \sum_k c_k e^{j2\pi kt/T_s}$$

avec

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] e^{-j2\pi kt/T_s} dt \\ &= \frac{\sigma_a^2}{T} e^{-j2\pi \frac{k\tau}{T_s}} \int_{-\infty}^{\infty} G(f)G^*(t - \frac{k}{T})df + \sigma^2\delta(k) \end{aligned}$$

Remarques

- Généralement, $c_k = 0$ pour $k > 1$, en effet le filtre de mise en forme possède généralement une bande passante inclue dans $[\frac{-1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$
- Roll-off faible $\Rightarrow |c_1| = |c_{-1}|$ faible

Approche sans séquence d'apprentissage

Remarque (suite)

On obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] = c_0 + c_1 e^{j2\pi\frac{t}{T_s}} + c_{-1} e^{j2\pi\frac{t}{T_s}}$$

En supposant que $g(t)$ est paire on a

$$\mathbb{E}\left[|r_l(t)|^2\right] = c_0 + |c_1|\cos(2\pi\frac{t-\tau}{T_s})$$

Donc

$$|r_l(t)|^2 = c_0 + |c_1|\cos(2\pi\frac{t-\tau}{T_s}) + w_l''(t)$$

$\Rightarrow$ c_0 est enlevé via filtrage passe haut/bande
$\Rightarrow$ τ/T_s estimés avec une PLL

Contact : Romain Tajan

- THE END -