

ZIMSKI ISPITNI ROK
14.02.2019.

1. (10 bodova) Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.
- (a) Za koje vrijednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ je matrica \mathbf{A} regularna?
- (b) Pronađite inverz \mathbf{A}^{-1} regularne matrice \mathbf{A} .
2. (10 bodova) Marija, Igor i Ana kupuju voće u istoj voćarnici. Marija je 2 kg jabuka, 4 kg mandarina i 1 kg kivija platila 46 kn. Igor je 1 kg jabuka, 5 kg mandarina i 2 kg kivija platio 56 kn. Ana je za 3 kg jabuka, 1 kg mandarina i 2 kg kivija dala 50 kn. Kolika je cijena kilograma pojedinog voća?
3. (10 bodova) Zadan je skup $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ u \mathbb{R}^3 .
- (a) Dokažite da je L potprostor od \mathbb{R}^3 .
- (b) Odredite neku bazu od L i dimenziju od L .
- (c) Neka je $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operator ortogonalne projekcije na potprostor L . Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi od \mathbb{R}^3 : $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
4. (10 bodova)
- (a) Dokažite da su sljedeća svojstva linearnog operatora $A : X \rightarrow Y$ ekvivalentna:
- (i) Defekt od A jednak je $d = 0$, to jest jezgra $\text{Ker}(A) = \{0\}$.
- (ii) Operator A je injekcija, to jest jednadžba $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ima točno jedno rješenje za svaki $\mathbf{b} \in \text{Im}A$.
- Uputa: dokažite $(i) \Rightarrow (ii)$ i $(ii) \Rightarrow (i)$.
- (b) Dokažite: ako je $A : X \rightarrow Y$ regularni linearni operator, onda je inverzno preslikavanje A^{-1} linearni operator.
5. (10 bodova) Odredite točku T koja se preslikava u ishodište $O(0, 0, 0)$ s obzirom na osnu simetriju čija je os p zadana kao presjek dviju ravnina
- $$p \cdots \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$$
6. (10 bodova)
- (a) Odredite sve vlastite (svojstvene) vrijednosti i vlastite (svojstvene) vektore od matrice
- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
- (b) Neka je \mathbf{A} simetrična matrica reda n . Dokažite sljedeće tvrdnje:
- (i) Sve vlastite vrijednosti od \mathbf{A} su realni brojevi.
- (ii) Vlastiti vektori od \mathbf{A} koji odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima od \mathbf{A} su međusobno ortogonalni.

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.