Zadan je skup X svih matrica oblika

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 3\lambda + 5\mu \\ \lambda - \mu & 3\lambda + 2\mu \end{bmatrix}$$

gdje su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. a) Dokaži da je X potprostor vektorskog prostora $M_{2,2}$ svih kvadratnih matrica reda 2. b) Odredi neku bazu u X i nađi $\dim X$.

Zadani su polinomi $p_1(t) = 1 + t$, $p_2(t) = 1 - 2t - t^3$, $p_3(t) = 1 + 3t + t^2$, $p_4(t) = 2t - t^2$, gdje je $t \in \mathbb{R}$.

a) Odredi $\dim L(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

b) Na prostoru P_3 svih polinoma stupnja ≤ 3 zadan je skalarni produkt

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \mid b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3) = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + 3a_2 b_2 + 4a_3 b_3.$$

Dokaži da je to skalarni produkt na P_n i odredi ortogonalnu projekciju polinoma p_1 na p_2 s obzirom na taj skalarni produkt.

Zadana je matrica $A(t) = \begin{bmatrix} 2t & 1+t \\ 1+4t & 3t^{-1} \end{bmatrix}$ s koeficijentom $t \in \mathbb{Z}_5$. Izračunaj $A(t)^{-1}$ i riješi jednadžbu

$$A(4) \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

s koeficijentima u polju $\mathbb{Z}_5$.

Definiraj prostor $L^2(1,\infty)$. Pronađi sve realne brojeve a za koje je
$$\frac{x^a}{1+x^{-5}} \in L^2(1,\infty)$$

---

a) Odredi ortogonalnu projekciju funkcije $f(x)=x+2$ na funkciju $g(x)=\sin 2x$ ~~na~~ prostoru $L^2(0,\pi)$.

b) Odredi ortogonalnu projekciju od f na potprostor $L(1,g)$, gdje su f i g iz a).

Zadan je polinom $p(x)=2+x+x^2$. Koristeći matricu prijelaza napiši $p(x)$ kao linearnu kombinaciju polinoma $e(x)=1+x$, $f(x)=2+x^2$, $g(x)=1+x+2x^2$.

---

a) U $\mathbb{R}^2$ su zadana točka s radius vektorom $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$. Skicirajte skup svih točaka u $\mathbb{R}^2$ za čiji radius vektor $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ vrijedi
$$\|\vec{r}-\vec{a}\|_1 \leq 1.$$

b) Odredi udaljenost točaka $A(2,3)$ i $B(-1,7)$ u metrici koju generira $\| \ \|_1$ u $\mathbb{R}^2$.

Zadani su vektori $a=(1,2,0,3)$, $b=(1,-1,1,0)$ i $c=(2,1,1,3)$. Odredi $\dim L(a,b,c)^{\perp}$ i nađi neku bazu u $L(a,b,c)^{\perp}$.

Odredite najbolju aproksimaciju funkcije $f(x)=2+x$ u prostoru $L(1,g)$, gdje je $g(x)=\sin 2x$, s obzirom na metriku u $L^2(0,\pi)$.

Odredite parametar $a\in\mathbb{R}$ tako da funkcije $f(x)=x+a\cdot\cos 4x$, $g(x)=\cos 4x$ budu ortogonalne u prostoru $L^2(0,2\pi)$.

Za svaku matricu $A\in M_{2,2}$, $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ definiramo $\|A\|=|a|+|b|+|c|+|d|$. Dokaži da je to norma na vektorskom prostoru $M_{2,2}$. Odredi udaljenost matrica A i B ako je $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 2\end{bmatrix}$.

1.) Odredite matricu operatora $A : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ definiranog s $A(x,y,z) = \begin{bmatrix} x-y & y-z \\ z-x & x+y+z \end{bmatrix}$ u kanonskom paru baza.

2.) Neka je linearni operator $A : P^3[x] \to \mathbb{R}^2$ definiran s $A(p) = (p(0), p(2))$. Nadite mu matricu u paru kanonskih baza. Opišite $\mathrm{Im}\,A$ i $\mathrm{Ker}\,A$.

3.) Odredite matricu lin. operatora $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiranog s $T(x,y) = (x+2y, x+y, x)$ u kanonskom paru baza. Odredite, zatim, $T(v)$ pri čemu je $v = (1,9)$ direktno (uvštavanjem) i matrično (korištenjem matričnog prikaza operatora T)

4.) Lin. preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dano je s

$f(1,0,0) = (0,0,1)$
$f(1,1,0) = (0,1,1)$
$f(1,1,1) = (1,1,1)$

Odredite $f(x,y,z)$ za $x,y,z \in \mathbb{R}$. Odredite matricu operatora f u bazi $B = \{(1,2,0), (2,1,0), (0,2,1)\}$. Ako je $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator definiran s $g(x,y,z) = (2x, y+z, -x)$, odredite matrični prikaz operatora $g \circ f$ u bazi B.

5.) Neka je $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i (e') baza dana s

$e'_1 = 3e_1 + e_2 + 2e_3$
$e'_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$
$e'_3 = -e_1 + 2e_2 + 5e_3$

Neka je matrični prikaz lin. operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ u bazi (e) dan s

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Odredite matrični prikaz operatora A u bazi (e').

6.) Neka je lin. operator $f: \mathcal{P}^3[x] \to \mathcal{P}^3[x]$ definiran s

$$f(a+bx+cx^2+dx^3) = a + (d-c-a)x + (d-c)x^2$$

Odredite matrični prikaz od f u bazi

(a) $\{1, x, x^2, x^3\}$

(b) $\{1+x^3, x, x+x^3, x^2+x^3\}$

7.) Neka je $f: \mathcal{P}^2[x] \to \mathcal{P}^2[x]$ definirana s

$$f(p(x)) = x^2 p'(x).$$

Pokažite da je f linearan operator i odredite baze za $\operatorname{Im} f$ i $\operatorname{Ker} f$.

8.) Je li kompleksno konjugiranje ($f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = x-iy$) linearan operator

(a) ako $\mathbb{C}$ shvatimo kao realan vektorski prostor?

(b) ako $\mathbb{C}$ shvatimo kao kompleksan vektorski prostor?

9.) Neka je V prostor polinoma u dvije varijable stupnja ≤ 2. Preciznije

$$V = \{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$$

Pokažite da je $B = \{x^2, xy, y^2, x, y, 1\}$ baza za V.

Za $g \in V$ definiramo preslikavanje $\varphi: V \to V$ na sljedeći način:

$$\varphi(g) := \frac{\partial}{\partial x} \int g(x,y)\,dy + \frac{\partial}{\partial y} \int g(x,y)\,dx$$

Pokažite da je φ linearan operator i odredite mu matrični prikaz u bazi B.