Završni ispit iz Linearne algebre

11. lipnja 2012.

1. **[2 boda]** Zadana je matrica
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$
i vektor $\mathbf{b} = (3,3)^\top$, s elementima iz polja $\mathbb{Z}_7$. Izračunajte $\mathbf{A}^{-1}$ i riješite jednadžbu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

2. **[3 bodova]** Zadan je skup X svih matrica oblika
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a-c & a+2b \\ 3a-b & b+c \end{bmatrix}$$
gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (a) (1 bod) Pokažite da je X vektorski podprostor prostora $M_{2,2}$ svih matrica s realnim koeficijentima.

   (b) (2 boda) Za vektorski prostor X odredite neku bazu i izračunajte njegovu dimenziju.

3. **[4 boda]** Zadan je linearni operator $F\colon M_{2,2} \to M_{2,2}$ sa
$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 2b+d \\ a-b-d & a+b+c \end{bmatrix}.$$

   (a) (2 boda) Odredite matricu tog linearnog operatora u kanonskoj bazi prostora $M_{2,2}$.

   (b) (2 boda) Ispitajte postoji li inverzni operator F^{-1}.

4. **[2 boda]** Zadan je linearni operator $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ matricom
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
u bazi koju čine vektori $\mathbf{e}_1 = (1,-1)^\top$ i $\mathbf{e}_2 = (2,1)^\top$. Odredite matricu $\mathbf{A}'$ tog istog operatora u bazi koju čine vektori $\mathbf{f}_1 = (1,2)^\top$ i $\mathbf{f}_2 = (4,-1)^\top$.

5. **[2 boda]** Zadani su linearni operatori $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, sa $A(a,b) = (a+b, a-2b, a+2b)$ i $B(a,b) = A(b, 2a)$. Nađite udaljenost operatora A i B s obzirom na operatorsku 1-normu.

6. **[3 boda]** Pretpostavimo da je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica čije su sve vlastite vrijednosti strogo lijevo od imaginarne osi u Gaussovoj ravnini. Dokažite da onda vrijedi
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\mathbf{A}t} = 0.$$

Okrenite!

7. **[2 boda]** (a) (1 bod) Formulirajte teorem o konvergenciji Neumannovog reda $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$, gdje je $\mathbf{A}$ zadana kvadratna matrica. (Teorem ne treba dokazivati)

   (b) (1 bod) Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix}$. Rabeći (a) odredite sve realne brojeve λ za koje Neumannov red $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergira.

8. **[5 bodova]** Spektralna norma $\|\mathbf{A}\|_2$ bilo koje realne kvadratne matrice $\mathbf{A}$ reda n definira se kao $\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$, gdje su vektori x iz $\mathbb{R}^n$, a $\|x\|_2$ je Euklidska norma.

   (a) (1 bod) Dokažite da za za svaki $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $(\mathbf{A}x \,|\, y) = (x \,|\, \mathbf{A}^\top y)$, gdje su lijevo i desno od znaka jednakosti uobičajeni skalarni produkti u $\mathbb{R}^n$. Naputak: za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $(x|y) = x^\top \cdot y$, gdje x i y interpretiramo kao vektore stupce, a $\cdot$ znači matrično množenje.

   (b) (3 boda) Rabeći (a) dokažite da za bilo koju realnu matricu $\mathbf{A}$ vrijedi $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{r(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$, gdje je $r(\,\cdot\,)$ spektralni radius matrice.

   (c) (1 bod) Rabeći (b) izračunajte spektralnu normu matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. **[6 bodova]** Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

   (a) (2 boda) Crtanjem Geršgorinovih krugova pokažite da je matrica regularna.

   (b) (2 boda) Opišite Jacobijevu metodu za rješavanje općenitog sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Formulirajte teorem o nužnim i dovoljnim uvjetima za konvergenciju te metode (ne treba dokazivati).

   (c) (2 boda) Pokažite da za navedenu matricu Jacobijeva metoda za rješavanje jednadžbe $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konvergira za bilo koji $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Ako je početna iteracija jednaka nul-vektoru, za $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^\top$ izračunajte sljedeće dvije iteracije Jacobijeve metode.

10. **[6 bodova]** Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

    (a) (3 boda) Odredite skraćenu singularnu dekompoziciju te matrice.

    (b) (2 boda) Izračunajte pseudoinverz matrice $\mathbf{A}$.

    (c) (1 bod) Odredite Frobeniusovu normu matrice $\mathbf{A}$.

11. **[5 boda]** Neka je $\mathbf{A}$ realna kvadratna matrica reda n.

    (a) (2 boda) Definirajte matricu $e^{\mathbf{A}}$ pomoću beskonačnog reda i iskažite teorem o konvergenciji tog reda.

    (b) (1 bod) Neka je $A = (a_{ij})$ matrica reda 3 takva da je $a_{i,1+i} = 1$ za $i = 1, 2$, a inače nula. Rabeći definiciju u (a) izračunajte matricu $e^{\mathbf{A}t}$, gdje je t bilo koji realan broj.

    (c) (2 boda) Za matricu pod (b) riješite diferencijalnu jednadžbu $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$ uz početni uvjet $\mathbf{x}(0) = (1, 2, -3)^\top$.