Međuispit iz Linearne algebre

2. svibnja 2016.

1. **[5 bodova]**
(a) Zadani su vektori $\mathbf{a} = (1,2,2)$ i $\mathbf{b} = (2,1,3)$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}_5$. (2b) Provjerite jesu li vektori **a** i **b** linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{Z}_5$. (1b) Napišite sve elemente podprostora $L(\mathbf{a})$ vektorskog prostora $\mathbb{Z}_5^3$ nad poljem $\mathbb{Z}_5$.

(b) Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}_5$. (2b) Riješite matričnu jednadžbu $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, ako je $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

2. **[7 boda]** Neka je P_2 vektorski prostor svih polinoma $p = p(t)$ stupnja najviše 2. Neka je $Ap = p''(t) + t \cdot p'(t)$.
(a) (2b) Dokažite da je $A : P_2 \to P_2$ linearni operator.
(b) (3b) Odredite jezgru tog operatora. Odredite također rang i defekt tog operatora.
-3
(c) (2b) Odredite matricu tog operatora u kanonskoj bazi u P_2.

3. **[5 bodova]** U vektorskom prostoru V^3 zadani su vektori $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Neka je $A : V^3 \to V^3$ linearni operator ortogonalnog projiciranja na ravninu $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
(a) (2b) Odredite matricu **A** tog operatora u kanonskoj bazi.
(b) (2b) Dijagonalizirajte matricu **A** (ako je to moguće), tj. odredite bazu s obzirom na koju je matrica **D** tog operatora dijagonalna i nađite **D**.
(c) (1b) Izračunajte $A(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$.

4. **[5 bodova]** Zadani su linearni operatori $A : X \to Y$ i $B : Y \to Z$, te neke tri baze u konačno-dimenzionalnim vektorskim prostorima X, Y i Z. Neka su **A** i **B** pripadajuće matrice operatora A i B u odgovarajućim parovima baza.
(a) (2b) Ako je **C** matrica linearnog operatora $B \circ A : X \to Z$ u odgovarajućem paru baza,
-2
dokažite da je $\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.
(b) (3b) Zadana su dva linearna operatora $A,\ B : V^3 \to V^3$ sa $A(\mathbf{a}) = ((\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}), \mathbf{a})\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})$ i $B(\mathbf{a}) = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times \mathbf{a}$, za bilo koji vektor $\mathbf{a} \in V^3$, gdje je s $(\cdot\,,\cdot)$ označen skalarni produkt, a s '×' vektorski produkt dvaju vektora u V^3. Odredite matricu linearnog operatora $B \circ A : V^3 \to V^3$ u kanonskoj bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Okrenite!

f(x) h(x) → OKOMITE

5. **[7 bodova]** Zadane su funkcije $f(x) = \sin 3x$ i $g(x) = \sin 3x + \cos 3x$ u Lebesgueovom prostoru $L^2(-\pi, \pi)$, s uobičajenim skalarnim produktom.

   (a) (1b) Provjerite jesu li funkcije f i g međusobno okomite u tom prostoru.

   (b) (2b) Provjerite da funkcije f i g razapinju isti podprostor kao i funkcije f i h, gdje $h(x) = \cos 3x$ (tj. provjerite da vrijedi $f, g \in L(f, h)$ i $f, h \in L(f, g)$).

   (c) (3b) Odredite funkciju $e = e(x)$ u vektorskom podprostoru $L(f, g)$ koja je najbliža funkciji $h(x) = x$ s obzirom na normu u prostoru $L^2(-\pi, \pi)$.

   (d) (1b) Izračunajte $\|g\|$ u Lebesgueovom prostoru $L^2(-\pi, \pi)$.

6. **[5 bodova]** Neka je $A : X \to X$ linearni operator koji u bazi $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ima matricu $\mathbf{A}$, a u bazi $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ matricu $\mathbf{A}'$.

   (a) (3b) Dokažite da je $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, gdje je $\mathbf{T}$ matrica prijelaza iz prve baze u drugu.

   (b) (2b) Zadan je linearni operator $A : V^2 \to V^2$ sa $Av_1 = v_1 + 2v_2$ i $Av_2 = v_1 - v_2$, gdje je $v_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $v_2 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi.

7. **[4 boda]** Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) (2b) Rabeći Hamilton-Cayleyev teorem, izračunajte $\mathbf{A}^{-1}$.

   (b) (1b) Rabeći Hamilton-Cayleyev teorem, izrazite $\mathbf{A}^3$ kao linearnu kombinaciju matrica $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^2$.

8. **[7 bodova]** Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1b) Odredite vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

   (b) (3b) Odredite odgovarajuće vlastite vektore matrice $\mathbf{A}$.

   (c) (3b) Dokažite da se matrica $\mathbf{A}$ može dijagonalizirati. Odredite matricu sličnosti $\mathbf{T}$. F
mulom napišite vezu između matrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$ i dijagonalne matrice $\mathbf{D}$.

pit se piše 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pr
je. Svaki zadatak rješavajte na zasebnom listu papira te ih prilikom
lajte po redu.