JIR 2016., 12. rujna

1. [4B] Zadan je vektorski prostor $X = (\mathbb{Z}_3)^3$ nad poljem $F = \mathbb{Z}_3$.

a) [2B] Odredite skup Y svih rješenja $(a, b, c) \in X$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$, takvih da je $a + 2b + 2c = 0$. Koliko elemenata ima skup Y?

b) [2B] Je li Y vektorski potprostor od X? Obrazložite!

2. [7B] Zadan je linearni operator $A : P_3 \to P_2$ definiran sa $A((p(x)) = p''(x) + p'(x))$.

a) [2B] Provjerite da je A linearni operator.

b) [3B] Odredite matricu tog linearnog operatora u paru kanonskih baza prostora P_3 i P_2.

c) [2B] Odredite rang i defekt tog operatora.

3. a) [3B] Neka su A i B dvije ulančane matrice. Dokažite da je $(AB)^T = A^T B^T$.

b) [2B] Neka su A i B simetrične matrice istog reda. Provjerite da je umnožak AB simetrična matrica onda i samo onda ako je $AB = BA$.

4. a) [2B] Neka je X unitarni prostor i $Y = L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ njegov potprostor razapet vektorima e_i koji su međusobno ortogonalni i svi različiti od 0. Za zadani vektor $x \in X$ odredite koeficijente λ_i u vektoru $y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \in Y$ tako da udaljenost $\|x - y\|$ od x do y bude minimalna. Provjerite da se radi o minimumu.

b) [4B] U Lebesgueovom prostoru $X = L^2(0, 2\pi)$, sa standardnim skalarnim produktom, promatramo ravninu $Y = L(f, g)$, gdje je $f(x) = \cos 3x$ i $g(x) = \sin 2x$. Provjerite jesu li funkcije f i g međusobno okomite. Za funkciju $h(x) = x$ odredite njenu najbolju aproksimaciju s pomoću vektora $y \in Y$, tj. odredite y tako da vrijednost $\|h - y\|$ bude minimalna.

5. a) [1B] Formulirajte Hamilton-Cayleyev teorem.

b) [3B] Zadana je matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Koristeći Hamilton Cayleyev teorem, izrazite matricu A^{-2} kao linearnu kombinaciju matrica I, A i A^2.

6. [8B] a) [3B] Definirati skalarni produkt u $\mathbb{C}^n$ i navesti osnovna svojstva tog skalarnog produkta. Dokažite da za svaku kompleksnu kvadratnu matricu A reda n i za bilo koja dva vektora $x, y \in \mathbb{C}^n$ vrijedi $(Ax \mid y) = (x \mid A^* y)$, gdje je $A^* := \bar{A}^T$.

b) [2B] Za kvadratnu matricu S s kompleksnim koeficijentima kažemo da je unitarna ako su joj stupci ortonormirani s obzirom na skalarni produkt u $\mathbb{C}^n$. Dokazati da je $S^{-1} = S^*$.

c) [2B] Provjerite da unitarne matrice S čuvaju Euklidsku normu, tj. $\|Sx\| = \|x\|$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Uvjerite se da je umnožak dviju unitarnih matrica opet unitarna matrica.

d) [2B] Odredite sve unitarne matrice reda 2 oblika $S = \begin{bmatrix} a & i/2 \\ -i/2 & b \end{bmatrix}$ gdje je i imaginarna jedinica, te $a, b \in \mathbb{R}$.

---

7. [8B] a) [2B] Zadan je niz kvadratnih matrica (A_k) istog tipa. Što to znači da niz matrica A_k konvergira k nekoj matrici A? Što znači da red matrica $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ konvergira (te da je zbroj jednak matrici S)?

b) [3B] Neka je x zadani realan broj i $A_k = \begin{bmatrix} x^k & (x-1)^k \\ 2^{-k} & 1/k! \end{bmatrix}$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Odrediti sve $x \in \mathbb{R}$ za koje red $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ konvergira i za svaki takav x odrediti odgovarajući zbroj $S = S(x)$.

c) [3B] Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Odredite sve parove realnih brojeva a i b koji Neumannov red $S := \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergira. Za svaki takav par brojeva a i b izračunajte determinantu matrice S.

---

8. [7B] a) [4B] Formulirajte teorem o Geršgorinovim krugovima i dokažite ga.

b) [3B] Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} -2+2i & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -3-i & -1 \\ 1+i & 1-i & -3-2i \end{bmatrix}$ pri čemu je i imaginarna jedinica.

S pomoću Geršgorinova teorema pokažite da $e^{At} \to 0$ kad $t \to +\infty$.

---

150 MIN, nema papira.