



Memoria de Alumno Interno:

# Órbitas Canard en Sistemas Lineales a Trozos y Aplicaciones

Alejandro Bandera Moreno  
Doble Grado en Física y Matemáticas

---

Tutelado por:  
Soledad Fernández García  
Macarena Gómez Mármol  
Junio de 2019

---

DPTO. ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO - US



# Resumen

El estudio de los sistemas dinámicos continúa teniendo una gran importancia en el mundo actual, ya que estos sistemas modelan múltiples fenómenos que evolucionan con el tiempo. Dichos fenómenos provienen de campos tan diversos como la Medicina, la Física o la Economía. Una clase de estos sistemas especialmente interesante es la de los sistemas con múltiples escalas de tiempo, en los que aparecen fenómenos sumamente complejos. En este trabajo se realiza un estudio sobre órbitas *canard*, presentes en sistemas dinámicos con varias escalas de tiempo, desde el punto de vista de la modelización lineal a trozos. Veremos que los sistemas lineales a trozos son capaces de reproducir fenómenos canard clásicos, reduciendo la complejidad de los modelos originales. Además, comprobaremos los resultados teóricos presentados en un modelo aerodinámico de pérdida de estabilidad de los aviones realizando un giro en la tierra, que sabemos que exhibe el fenómeno canard.

# Abstract

Nowadays, the study of dynamical systems continues having a major importance, because of the great quantity of phenomena that evolves with time that they model. These phenomena come from fields so diverse as Medicine, Physics or Economy. A class of this systems specially interesting are systems with multiple time scales, in which extremely complex phenomena appear. In this work we will consider a study of *canard* orbits, appearing in dynamical systems with multiple time scales, from the point of view of piecewise linear modeling. We will see that piecewise linear models are able to reproduce classic canard phenomena, reducing the complexity of original models. In addition, we will check the theoretical results of an aerodynamic model of loss of lateral stability of an aircraft turning on the ground, which we know that exhibits the canard phenomenon.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Resultados Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .	5
1.1.1. Existencia y Unicidad de Solución . . . . .	5
1.1.2. Órbitas y Estabilidad . . . . .	9
1.2. Teorema de la Función Implícita . . . . .	15
1.3. Bifurcaciones . . . . .	16
1.3.1. Bifurcaciones en Dimensión Uno . . . . .	16
1.3.2. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf . . . . .	19
<b>2. Sistemas diferenciables Lento-Rápido</b>	<b>25</b>
2.1. Sistemas Dinámicos con Múltiples Escalas de Tiempo . . . . .	25
2.1.1. La Variedad Crítica y el Flujo Lento . . . . .	26
2.1.2. Explosión Canard . . . . .	28
2.2. La Ecuación de Van der Pol . . . . .	31
2.2.1. La Variedad Crítica y el Flujo Lento . . . . .	32
2.2.2. Explosión Canard . . . . .	34
<b>3. Aproximación Lineal a Trozos</b>	<b>37</b>
3.1. Existencia y Unicidad de Solución . . . . .	37
3.2. Primeros Modelos . . . . .	40
3.2.1. Sistema Lineal a Trozos con una Esquina . . . . .	40
3.2.2. Sistema Lineal a Trozos con dos Esquinas . . . . .	41
3.3. Sistemas Lineales a Trozos con Tres Zonas . . . . .	42
3.3.1. Primeras Propiedades . . . . .	43
3.3.2. Resultados principales . . . . .	46
3.4. Similitudes y Diferencias con el Caso Diferenciable . . . . .	57
3.4.1. Primeros Modelos . . . . .	57
3.4.2. Sistemas Lineales a Trozos con Tres Zonas . . . . .	58
3.5. Conclusiones . . . . .	60

<b>4. Estudio de un ejemplo concreto: Ciclos Canard en la Dinámica de Aeronaves en Tierra</b>	<b>63</b>
4.1. Presentación del Caso . . . . .	64
4.1.1. Introducción . . . . .	64
4.1.2. Modelo de la Aeronave . . . . .	64
4.2. Resultados del Caso Diferenciable . . . . .	66
4.2.1. Investigación Uniparamétrica . . . . .	66
4.2.2. Identificación de Ciclos Canard . . . . .	67
4.2.3. Modelo Plano de la Explosión Canard . . . . .	69
4.3. Construcción del Modelo Lineal a Trozos . . . . .	70
4.3.1. Estudio de la Variedad Crítica del Sistema Diferenciable . . . . .	71
4.3.2. Modelo Lineal a Trozos con Tres Zonas . . . . .	72
4.3.3. Modelo Lineal a Trozos con Cuatro Zonas . . . . .	75
4.4. Simulación y Validación . . . . .	78
4.4.1. Caso Reversible con Pendiente uno . . . . .	79
4.4.2. Caso Reversible con Pendiente distinta de uno . . . . .	84
<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>

# Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos continúa teniendo una gran importancia en el mundo actual. Esto se debe, entre otros factores, a que modelan múltiples fenómenos que evolucionan con el tiempo. Dichos fenómenos provienen de campos muy diversos, como pueden ser la Neurociencia, la Física o la Economía. Dentro de los sistemas dinámicos, el estudio de los sistemas con múltiples escalas de tiempo goza de gran interés.

En los sistemas con múltiples escalas de tiempo o sistemas lento-rápido, aparecen fenómenos sumamente complejos que requieren del conocimiento de métodos de la Teoría Geométrica de las Perturbaciones Singulares para su estudio. En los últimos años se ha comprobado que los sistemas lineales a trozos son útiles para reproducir el comportamiento de los sistemas lento-rápido de una manera más sencilla. No obstante, la teoría clásica de ecuaciones diferenciales no se puede aplicar a estos sistemas, por lo que es necesaria la construcción de una nueva teoría que nos permita estudiar los sistemas lineales a trozos de forma sencilla.

Uno de los fenómenos más interesantes que aparecen en algunos sistemas con múltiples escalas de tiempo es el fenómeno *canard*, objeto en el que centraremos nuestro estudio durante este trabajo. La característica principal asociada al fenómeno *canard* es la *explosión canard*, que se manifiesta como una transición muy rápida, con variaciones pequeñas de los parámetros, desde pequeños ciclos provenientes de una bifurcación de Hopf a *oscilaciones de relajación*, ciclos límite de gran amplitud formados por segmentos rápidos y lentos alternantes. Esta transición ocurre a través de una familia de ciclos límite cuya propiedad característica es que contienen *segmentos canard*, segmentos de la órbita que siguen la variedad lenta repulsiva. Este tipo de fenómenos se encuentra, por ejemplo, en modelos de la actividad neuronal, como el de FitzHugh-Nagumo [11].

Para el análisis de los modelos que vamos a estudiar en este trabajo es necesario recordar algunos resultados fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales, como son la existencia y unicidad de solución de un sistema diferencial [22], y algunos resultados sobre órbitas y su estabilidad [21], [23]; recordaremos, a su vez, el Teorema de la Función Implícita [20] y enunciaremos algunas herramientas de la teoría de bifurcaciones en una y dos dimensiones, centrándonos en la Bifurcación de Poincaré-

Andronov-Hopf [12] y [19]. Todo esto se situará en el Capítulo 1.

En el Capítulo 2, vamos a presentar el fenómeno de la explosión canard en los sistemas diferenciables lento-rápido, tomando como ejemplo el sistema de Van der Pol, analizando las condiciones necesarias para que el sistema exhiba este tipo de comportamiento que vamos a estudiar [4], [10].

El Capítulo 3 está dedicado íntegramente, siguiendo con el sistema de Van der Pol como ejemplo, a presentar una aproximación lineal a trozos de los sistemas originales. En primer lugar, presentaremos un resultado sobre existencia y unicidad de solución en este tipo de sistemas [9], y continuaremos estudiando los primeros modelos que se propusieron para modelar el comportamiento de la explosión canard [2] y [13]. Veremos que el modelo estudiado en [2] reproduce de forma fiel ciertas características de las órbitas canard, pero aún no cuenta con todas las propiedades del fenómeno clásico. Así, será necesario añadir una zona más de linealidad para poder reproducir el fenómeno en su totalidad. Esto es lo que se realiza en [9], como se presenta al final de este capítulo.

Realizaremos también una aplicación a un modelo físico en el Capítulo 4. Presentaremos un modelo sobre la pérdida de estabilidad lateral de un avión cuando realiza un giro mientras está posado en tierra [17], en el que se da el fenómeno de la explosión canard, para posteriormente construir un modelo lineal a trozos asociado y estudiar si efectivamente se puede reproducir la dinámica observada en el modelo original. Para terminar el capítulo nos centraremos en visualizar numéricamente ("cazar") una de las órbitas canard que están presentes en nuestro modelo lineal a trozos.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

En este capítulo veremos algunos resultados importantes que son necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo. Algunos de ellos se han presentado en asignaturas del Grado en Matemáticas (como son EDO [22], AED [21] y DFVV [20]), mientras que otros resultados no se han tratado durante el Doble Grado en Física y Matemáticas (Teoría de Bifurcaciones [12] y [19]).

### 1.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Para lograr un correcto entendimiento de los resultados que presentamos en este trabajo, es necesario recordar algunos conceptos de cursos anteriores (como son el *función globalmente y localmente lipchitziana, solución e intervalo maximal*, entre otros).

Para el desarrollo de esta sección se han seguido principalmente las referencias [21] y [22].

#### 1.1.1. Existencia y Unicidad de Solución

##### Funciones Lipchitzianas

Consideremos fijado un conjunto no vacío,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , cuyos puntos denotamos por  $(t, x)$  con  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1** Se dice que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función globalmente lipschitziana respecto de la variable  $x$  en  $\Omega$ , si existe una constante  $L > 0$  (dependiente de  $f$ ), tal que:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \Omega.$$

A  $L$  se le denomina constante de Lipschitz respecto de la variable  $x$  para  $f$  en  $\Omega$ .

Al conjunto de todas las funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que sean globalmente lipschitzianas respecto de la variable  $x$  en  $\Omega$ , lo denotaremos por  $Lip(x, \Omega)$ . Es inmediato comprobar que  $Lip(x, \Omega)$ , con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función, es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Obsérvese que, en particular, todas las funciones constantes pertenecen a  $Lip(x, \Omega)$ .

**Observación 2** En general, dada una función  $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $n \geq 1$  y  $m \geq 1$  enteros, se dice que  $h$  es globalmente lipschitziana en  $D$ , si existe una constante  $L_h > 0$  tal que:

$$|h(z_1) - h(z_2)| \leq L_h |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in D.$$

La noción que nosotros hemos introducido en la Definición 1, aunque empareñada con la de función globalmente lipschitziana precedente, es diferente, y está motivada por su utilidad en el estudio del Problema de Cauchy para un Sistema Diferencial Ordinario (SDO) en forma normal, que efectuaremos con posterioridad.

**Definición 3** Supongamos que  $\Omega$  es abierto. Se dice que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función localmente lipschitziana respecto de la variable  $x$  en  $\Omega$ , si para cada punto  $(t_0, x_0) \in \Omega$  existe una bola abierta de centro dicho punto, contenida en  $\Omega$ , y tal que la restricción de  $f$  a dicha bola es globalmente lipschitziana respecto de la variable  $x$ . Es decir,  $f$  es localmente lipschitziana respecto de la variable  $x$  en  $\Omega$ , si para cada punto  $(t_0, x_0) \in \Omega$  existen un  $\varepsilon(t_0, x_0)$ , y una constante  $L(t_0, x_0) > 0$ , tales que:

$$B((t_0, x_0), \varepsilon(t_0, x_0)) \subset \Omega,$$

y para todo  $(t, x_1), (t, x_2) \in B((t_0, x_0), \varepsilon(t_0, x_0))$ ,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t_0, x_0) |x_1 - x_2|.$$

Si  $\Omega$  es abierto, al conjunto de todas las funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  que sean localmente lipschitzianas respecto de la variable  $x$  en  $\Omega$ , lo denotaremos por  $Lip_{loc}(x, \Omega)$ .

Es inmediato comprobar que  $Lip_{loc}(x, \Omega)$ , con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función, es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , y que  $Lip(x, \Omega) \subset Lip_{loc}(x, \Omega)$  de forma estricta.

### Lema de Gronwall

**Teorema 1 (Lema de Gronwall)** Se tienen los siguientes resultados:

1. Supongamos dados  $-\infty < x_0 < x_1 < +\infty$ , dos funciones  $u, k \in C([x_0, x_1])$ , y una constante  $h \in \mathbb{R}$ , tales que  $k(x) \geq 0$ , y

$$u(x) \leq h + \int_{x_0}^x k(s)u(s)ds, \quad \forall x \in [x_0, x_1].$$

En tal caso, también se satisface

$$u(x) \leq he^{\int_{x_0}^x k(s)ds}, \quad \forall x \in [x_0, x_1].$$

2. Supongamos dados  $-\infty < x_1 < x_0 < +\infty$ , dos funciones  $u, k \in C([x_1, x_0])$ , y una constante  $h \in \mathbb{R}$ , tales que  $k(x) \geq 0$ , y

$$u(x) \leq h + \int_x^{x_0} k(s)u(s)ds, \quad \forall x \in [x_1, x_0].$$

En tal caso, también se satisface

$$u(x) \leq he^{\int_x^{x_0} k(s)ds}, \quad \forall x \in [x_1, x_0].$$

■

## Existencia y Unicidad de Solución

Para el desarrollo de esta sección se ha seguido la referencia [22], donde se pueden consultar las demostraciones de los resultados presentados a continuación.

Para  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  vamos a enunciar un resultado de existencia y unicidad de solución global para un problema de Cauchy:

$$(PC) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \text{ donde } (t, x) \in \Omega, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde  $x$  es función de  $t$  y  $\dot{x}$  denota la derivada con respecto a  $t$  de  $x$ .

Para ello, debemos empezar por conocer el resultado que se tiene para intervalos lo suficientemente pequeños:

**Teorema 2 (de Picard)** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un conjunto abierto no vacío, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap Lip_{loc}(x, \Omega).$$

Con estas condiciones, para cada  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , existe un  $\delta > 0$ , tal que si denotamos

$$I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

existe una y sólo una solución del problema (PC) en  $I_\delta$ . ■

Veamos ahora bajo qué condiciones puede extenderse esta solución y el concepto de solución maximal. Primero veamos una sencilla aplicación del *Lema de Gronwall* con la que obtenemos el siguiente resultado de unicidad global:

**Teorema 3 (de Unicidad Global)** *Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un abierto no vacío, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:  $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap Lip_{loc}(x, \Omega)$ , y consideremos fijado un punto  $(t_0, x_0) \in \Omega$ . En estas condiciones, si  $(I_1, \phi_1)$  e  $(I_2, \phi_2)$  son dos soluciones locales del problema (PC), entonces,*

$$\phi_1(t) = \phi_2(t), \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

■

**Definición 4** *Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un abierto no vacío, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación tal que:  $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap Lip_{loc}(x, \Omega)$ . Para cada  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , denotemos por  $(I(t_0, x_0), \phi(\cdot; t_0, x_0))$  a la solución maximal del problema (PC). Se definen el conjunto*

$$\Theta = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2}; (t_0, x_0) \in \Omega, t \in I(t_0, x_0)\},$$

y la función

$$\phi : (t, t_0, x_0) \in \Theta \mapsto \phi(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n.$$

A la función  $\phi : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$  así definida se la denomina la solución (*maximal*) del (PC) expresada en función de los datos iniciales.

**Teorema 4 (de Existencia y Unicidad de Solución Global)** *Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un abierto no vacío, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación tal que:  $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap Lip_{loc}(x, \Omega)$ . Entonces, para cada  $(t_0, x_0) \in \Omega$  dado, existe una y sólo una solución maximal o global del problema (PC) que denominaremos  $(I(t_0, x_0), \phi(\cdot; t_0, x_0))$ . Además, el intervalo  $I(t_0, x_0)$  de definición de la solución global es abierto.*

■

Con esto sabemos cuando existe solución de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y además si es única. Veamos ahora un resultado muy importante para la aplicación de los resultados de la sección anterior sobre el intervalo de definición de la solución maximal en el caso de los dominios banda.

**Proposición 5** *Supongamos que  $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap Lip(x, \Omega)$  siendo  $\Omega$  una banda de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es decir, un conjunto de la forma*

$$\Omega = I \times \mathbb{R}^N,$$

con  $I = (a, b)$ , un intervalo, siendo  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . En tal caso, se satisface

$$I(t_0, x_0) = I \quad \forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n,$$

es decir, el intervalo de definición de la solución maximal  $\phi(\cdot; t_0, y_0)$  es todo el intervalo  $I$ , cualquiera que sea el dato inicial  $(t_0, x_0)$  en la banda.

■

### 1.1.2. Órbitas y Estabilidad

#### Órbitas

Para los estudios que se presenten a continuación, es muy importante conocer los conceptos de órbita, y de algunas órbitas especiales, como son: los *puntos de equilibrio*, las *órbitas periódicas* y las *separatrices*, así como presentar algunos resultados relevantes correspondientes a ellos. Para el desarrollo de esta sección se han seguido las referencias [12], [19] y [21].

En esta sección, para  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto no vacío, analizaremos las propiedades cualitativas de las soluciones del problema autónomo:

$$\dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

con una función  $f$  satisfaciendo  $f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap Lip_{loc}(\Omega) = Lip_{loc}(\Omega)$ .

Empecemos por definir el concepto de órbita del sistema que pasa por un punto  $x_0 \in \Omega$ :

**Definición 6** Sea  $x_0 \in \Omega$  y denotemos  $I(x_0) = I(0, x_0)$ . Se llama órbita del sistema autónomo (1.1) asociada (o que pasa por)  $x_0$  al conjunto  $\gamma(y_0)$  dado por

$$\gamma(x_0) = \{\phi(t; 0, x_0) : t \in I(x_0)\} \subset \Omega.$$

De la propia definición se deduce que  $x_0 \in \gamma(x_0)$ , y que  $\gamma(x_0)$  es, en general, una curva en  $\mathbb{R}^n$ .

Pasamos a definir ahora el concepto de punto de equilibrio para el sistema (1.1):

**Definición 7** Sea  $x_0 \in \Omega$ , se dirá que  $x_0$  es un punto crítico (o punto de equilibrio) para el sistema (1.1) si  $f(x_0) = 0$ .

**Observación 8** Sea  $x_0 \in \Omega$ , es fácil comprobar que  $x_0$  es un punto crítico para el sistema (1.1) si y solo si se tiene que  $\phi(t; 0, x_0)) = x_0$  para cualquier  $t \in I(x_0) \equiv \mathbb{R}$ . Esto es,  $x_0$  es un punto crítico del sistema (1.1) si y solo si  $\gamma(x_0) = \{x_0\}$ . ■

**Definición 9** El conjunto,  $\Gamma = \{x \in \Omega \mid f_k(x) = 0\}$  se denomina *nulclina de la variable  $x_k$*  (o  $x_k$ -nulclina de forma abreviada).

**Observación 10** Un punto es crítico si y sólo si pertenece a la intersección de todas las nulclinas. ■

**Definición 11** Sea  $x_0 \in \Omega$ , se dice que la órbita  $\gamma(x_0)$  de (1.1) es cíclica, cerrada o periódica si  $I(x_0) = \mathbb{R}$  y existe  $T > 0$  tal que se tiene que

$$\phi(t + T; 0, x_0) = \phi(t; 0, x_0), \forall t \in \mathbb{R}.$$

En este caso, se dice que  $T$  es un periodo de la órbita. Además, si una órbita cíclica se reduce a un punto, se le llamará degenerada.

En un sistema dinámico cabe la posibilidad de que haya dos o más puntos críticos (de equilibrio) y por tanto, también es posible que existan órbitas conectando estos puntos.

**Definición 12** A las órbitas que conectan dos puntos críticos se les llama separatrices, y pueden darse dos casos:

- Si una órbita conecta dos puntos críticos (de equilibrio) diferentes, se llama órbita heteroclinia.
- Si una órbita conecta un punto crítico (de equilibrio) consigo mismo, se llama órbita homoclina.

**Observación 13** Cabe destacar que el ‘periodo’ de las órbitas homoclinas no está acotado superiormente, ya que al acercarse al punto de equilibrio la velocidad de la órbita tiende a hacerse nula, acercándose al punto de equilibrio para  $t \rightarrow \infty$ . ■

Veamos un ejemplo de cada tipo de órbitas separatrices. Para el caso heteroclinio, consideramos el sistema:

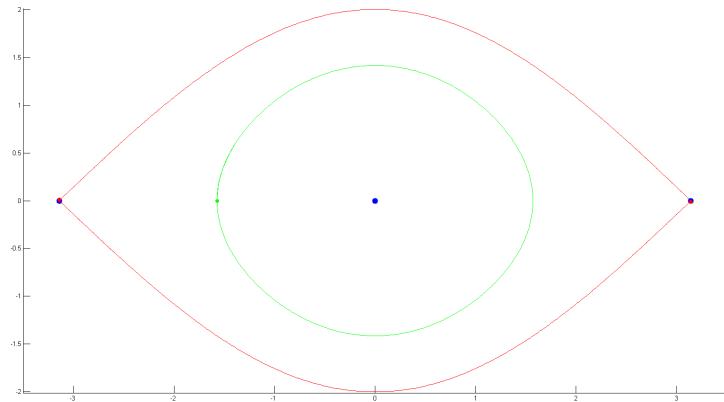
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\operatorname{sen}(x). \end{cases} \quad (1.2)$$

cuyos puntos de equilibrio se pueden calcular de forma inmediata, siendo el conjunto  $\{(k\pi, 0), \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ . En la Figura 1.1 se representan dos órbitas heteroclinas y una órbita cerrada para un sistema de este tipo.

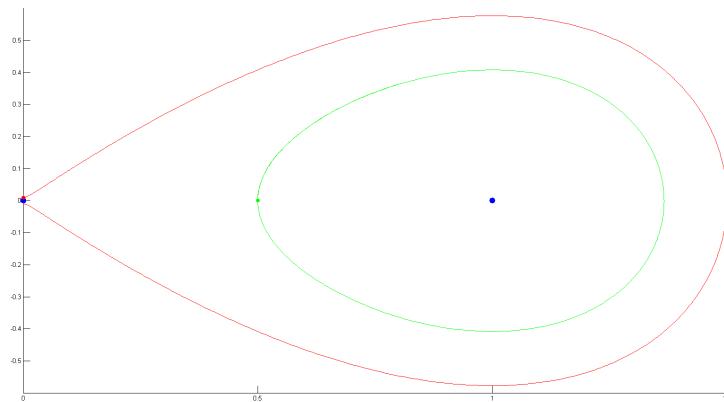
Mientras que para el caso homoclinico consideramos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^2. \end{cases} \quad (1.3)$$

cuyos puntos de equilibrio se pueden calcular de forma inmediata, siendo dos:  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . En la Figura 1.2 se representa una órbita homoclinica y una órbita cerrada para un sistema de este tipo.



**Figura 1.1:** Representación numérica de varias órbitas del sistema (1.2), se representan dos órbitas heteroclinas (en rojo) y una órbita cerrada (en verde), los puntos de equilibrio del sistema se presentan en azul. Los puntos iniciales son  $(-\pi, 0.01)$  y  $(\pi, -0.01)$  para las órbitas heteroclinas y  $(-\pi/2, 0)$  para la órbita cerrada.



**Figura 1.2:** Representación numérica de varias órbitas del sistema (1.3), se representan una órbita homoclina (en rojo) y una órbita cerrada interior (en verde). Los puntos de equilibrio del sistema,  $(0,0)$  y  $(1,0)$ , se presentan en azul. Los puntos iniciales son  $(0, 0.01)$  para la órbita homoclina y  $(1/2, 0)$  para la órbita cerrada.

## Estabilidad

Evidentemente, en la estimación del estado inicial de un sistema pueden producirse errores, por lo que resulta fundamental conocer cómo afectará este pequeño error a la verdadera solución del problema de Cauchy (*PC*). En esta sección empezaremos dando nociones sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio para acabar proporcionando un método para conocer el tipo topológico de los mismos. Para la elaboración de esta sección se ha seguido la referencia [12].

**Definición 14** Un punto de equilibrio  $x_0$  del sistema (1.1) se dice estable si dado  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, para cualquier  $x$  con  $\|x - x_0\| < \delta$ , la solución  $\phi(t, x)$  del sistema (1.1) que pasa por  $x$  en  $t = 0$  satisface la desigualdad  $\|\phi(t, x) - x_0\| < \varepsilon$ , para todo  $t \geq 0$ . El punto de equilibrio  $x_0$  se dirá inestable si no es estable.

**Definición 15** Un punto de equilibrio  $x_0$  se dice que es asintóticamente estable si es estable y, además, si existe  $r > 0$  tal que  $\|\phi(t, x) - x_0\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  para todo  $x$  satisfaciendo  $\|x - x_0\| < r$ .

En el siguiente teorema, estudiaremos la estabilidad de los puntos de equilibrios de los sistemas lineales, siendo  $A$  la matriz de coeficientes del sistema.

**Teorema 5** Si todos los autovalores de la matriz de coeficientes  $A$  en el sistema lineal  $\dot{x} = Ax$  tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio  $x_0 = 0$  es asintóticamente estable. Además, existen constantes positivas  $K$  y  $\alpha$  tales que

$$\|e^{At}x\| \leq Ke^{-\alpha t\|x\|}, \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Si uno de los autovalores de la matriz de coeficientes  $A$  tiene parte real positiva, entonces el punto de equilibrio  $x_0 = 0$  es inestable. ■

El tipo de estabilidad de un punto de equilibrio es una propiedad local. Por ello, es de esperar que bajo ciertas condiciones el tipo de estabilidad de  $x_0$  se pueda aproximar el campo vectorial  $f$  por sus derivadas, que se trata de un campo vectorial lineal. Suponemos que  $f$  de (1.1) es  $C^1(\Omega)$  y sea

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

la matriz Jacobiana de  $f$  en el punto  $x$ .

**Definición 16** Si  $x_0$  es un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$ , entonces la ecuación diferencial lineal

$$\dot{x} = Df(x_0)x$$

se denomina ecuación lineal variacional o la linealización del campo vectorial  $f$  en el punto de equilibrio  $x_0$ .

De igual forma que para los sistemas lineales, se tienen dos resultados sobre la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial (1.1) en función del signo de la parte real de los autovalores de  $Df(x_0)$ :

**Teorema 6** Sea  $f \in C^1(\Omega)$ . Si todos los autovalores de la matriz Jacobiana  $Df(x_0)$  tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio  $x_0$  de la ecuación diferencial (1.1) es asintóticamente estable. ■

**Teorema 7** Sea  $f \in C^1(\Omega)$ . Si al menos uno de los autovalores de la matriz Jacobiana  $Df(x_0)$  tienen parte real positiva, entonces el punto de equilibrio  $x_0$  de la ecuación diferencial (1.1) es inestable. ■

En la siguiente definición y el resultado posterior vamos a destacar aquellos puntos de equilibrio en los que se espera reproducir la dinámica no lineal mediante la linealización.

**Definición 17** Un punto de equilibrio  $x_0$  del sistema (1.1) se dice hiperbólico si todos los autovalores de la matriz Jacobiana  $Df(x_0)$  tienen parte real no nula.

En estos puntos de equilibrio la linealización nos da toda la información, como se recoge en el siguiente teorema:

**Teorema 8 (Grobman-Hartman)** Si  $x_0$  es un punto de equilibrio hiperbólico de (1.1), entonces existe un entorno de  $x_0$  en el cual  $f$  es topológicamente equivalente al campo vectorial  $\dot{x} = Df(x_0)x$ .

Restringiéndonos a dimensión dos, vamos a presentar una clasificación del tipo topológico de los equilibrios en función de su matriz de coeficientes, esta clasificación servirá tanto para sistemas lineales como sistemas linealizados en el caso en el que el equilibrio sea hiperbólico. Además, también nos dará una expresión de los autovalores de la matriz de coeficientes.

**Observación 18** Se considera el sistema lineal  $\dot{x} = Ax$  con  $x \in \mathbb{R}^2$ , y sean  $\delta = \det(A)$  y  $\tau = \text{traza}(A)$ . Entonces el punto de equilibrio  $x_0 = 0$  será:

- Un **punto de silla** si  $\delta < 0$ .

- *Un nodo estable si  $\delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\delta \geq 0$  y  $\tau < 0$ .*
- *Un nodo inestable si  $\delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\delta \geq 0$  y  $\tau > 0$ .*
- *Un foco estable si  $\delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\delta < 0$  y  $\tau < 0$ .*
- *Un foco inestable si  $\delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\delta < 0$  y  $\tau > 0$ .*
- *Un centro si  $\delta > 0$ ,  $\tau = 0$ .*

*Además, los valores propios de A se pueden escribir de la forma:*

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}.$$

■

De esta forma podremos saber, calculando el determinante y la traza de la matriz de coeficientes, cuál es el tipo topológico de un equilibrio y calcular los autovalores de la matriz de coeficientes.

Para terminar esta sección, realizaremos un estudio de las órbitas cercanas a una órbita periódica y utilizaremos la aplicación de Poincaré para determinar su estabilidad.

Sea  $\phi(t, p)$  una solución periódica con periodo mínimo  $T$  de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  y denotemos la órbita periódica correspondiente por  $\Gamma$ . Escogemos ahora un vector  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que,  $v$  y el vector tangente  $f(p)$  de  $\Gamma$  en  $p$  sean linealmente independientes. De esta forma, podemos definir un segmento:

$$L_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid x = p + av, 0 \leq |a| \leq \varepsilon\},$$

que se denomina sección transversal de la órbita periódica  $\Gamma$  en el punto  $p$ .

A continuación, se define una aplicación en un subconjunto de  $L_\varepsilon$  inducida por el flujo. Se elige un  $\varepsilon$  tan pequeño que  $L_\varepsilon$  intersecta a la curva  $\Gamma$  en un solo punto  $p$ , y que todas las órbitas que crucen  $L_\varepsilon$  lo hagan en la misma dirección. Como  $\phi(T, p) = p$  y sus soluciones dependen de forma continua del valor inicial, hay un  $\delta > 0$  tal que, si  $x_0 \in L_\delta$ , entonces hay un primer instante  $T(x_0) > 0$  en el que  $\phi(T(x_0), x_0) \in L_\varepsilon$ .

**Definición 19** *La aplicación de Poincaré en un entorno de una órbita periódica  $\Gamma$  se define como:*

$$\begin{aligned} \Pi : L_\delta &\longrightarrow L_\varepsilon \\ x_0 &\longmapsto \phi(T(x_0), x_0) \end{aligned}$$

Los puntos de la sección transversal  $L_\varepsilon$  tienen un orden natural: dos puntos  $x_0 = p + a_0 v$  y  $x_1 = p + a_1 v$  cumplen que  $x_0 \geq x_1$  en  $L_\delta$ , si y solo si,  $a_0 \geq a_1$ . Por tanto, una aplicación de Poincaré  $\Pi$  se dice que es monótona si  $x_0 \geq x_1$  en  $L_\delta$  implica que  $\Pi(x_0) \geq \Pi(x_1)$ .

**Teorema 9** *La aplicación de Poincaré tiene las siguientes propiedades:*

1. *La aplicación de Poincaré  $\Pi$  cerca de la órbita periódica  $\Gamma$  es una aplicación monótona de  $C^1$ .*
2. *La órbita  $\gamma(x_0)$  de un punto  $x_0 \in L_\delta$  es una órbita periódica si y solo si es punto fijo de la aplicación de Poincaré, es decir,  $\Pi(x_0) = x_0$ .*
3. *La órbita periódica  $\Gamma$ , con  $p \in \Gamma$ , es asintóticamente estable si  $\Pi'(p) < 1$ , e inestable si  $\Pi'(p) > 1$ .*

## 1.2. Teorema de la Función Implícita

En algunos casos necesitamos saber si una ecuación o conjunto de ecuaciones de varias variables permite definir a una de ellas o varias de ellas como función de las demás. Para el desarrollo de esta sección se ha seguido la referencia [20].

Una función  $y(x)$  está dada de forma implícita cuando está definida de la forma  $F(x, y) = 0$  en lugar de la forma habitual (explícita). Dada la ecuación  $F(x, y) = 0$  (lo que se conoce como función implícita), bajo ciertas exigencias sobre la derivada de  $F$  podríamos, al menos localmente, despejar  $y = f(x)$ . El siguiente Teorema nos da las condiciones suficientes para poder despejar una de las variables:

**Teorema 10 (de la Función Implícita)** *Sea  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $F \in C^1(\Omega)$ , y sea  $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  un punto tal que  $F(a, b) = 0$ . Escribimos entonces  $DF(a, b) = [D_x F(a, b), D_y F(a, b)]$  y supongamos que  $D_y F(a, b)$  es invertible. Entonces existe  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$  y  $W \subset \mathbb{R}^m$  con  $(a, b) \in U$  y  $a \in W$  tales que para cada  $x \in W$ , existe un único  $y$  tal que  $(x, y) \in U$  y*

$$F(x, y) = 0$$

*esto define una función  $G: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $G \in C^1(W)$  y que satisface:*

$$F(x, G(x)) = 0, \forall x \in W.$$

*Además,  $DG(x) = -[D_y F(x, G(x))]^{-1} D_x F(x, G(x)) \quad \forall x \in W$  y evidentemente  $G(a) = b$ .* ■

## 1.3. Bifurcaciones

La teoría de bifurcaciones es un campo matemático centrado en el estudio de los cambios en la estructura cualitativa o topológica del comportamiento de un conjunto de ecuaciones diferenciales. Esta teoría tiene una importancia práctica muy importante en ingeniería y física.

La teoría de bifurcaciones estudia el comportamiento de familias de soluciones de ecuaciones diferenciales. Generalmente en referencia a sistemas dinámicos, una *bifurcación* se da cuando una pequeña variación en los valores de los parámetros de un sistema (parámetros de bifurcación) causa un brusco cambio cualitativo o topológico en su comportamiento. A los valores de los parámetros en los que ocurren se les llama *puntos de bifurcación*. Las bifurcaciones pueden producirse tanto en sistemas continuos como en sistemas discretos. Para realizar esta sección se han seguido principalmente las referencias [12] y [19].

Antes de empezar, demos una definición sobre la forma más sencilla que adquiere una familia de sistemas.

**Definición 20** *Se llamará forma normal de una familia de ecuaciones diferenciales (o de sistemas de ecuaciones diferenciales) con el mismo comportamiento cualitativo a la ecuación diferencial (o sistema de ecuaciones diferenciales) más simple representativa de la familia de ecuaciones diferenciales (o de sistemas de ecuaciones diferenciales).*

### 1.3.1. Bifurcaciones en Dimensión Uno

La dinámica de los sistemas unidimensionales autónomos dependientes de un parámetro es sencilla. Sin embargo, son interesantes debido a la dependencia de los parámetros, ya que la estructura cualitativa del flujo puede cambiar a medida que varían los parámetros. En particular, los puntos críticos pueden ser creados o destruidos, o pueden cambiar su estabilidad.

Empecemos por una de las bifurcaciones más conocidas.

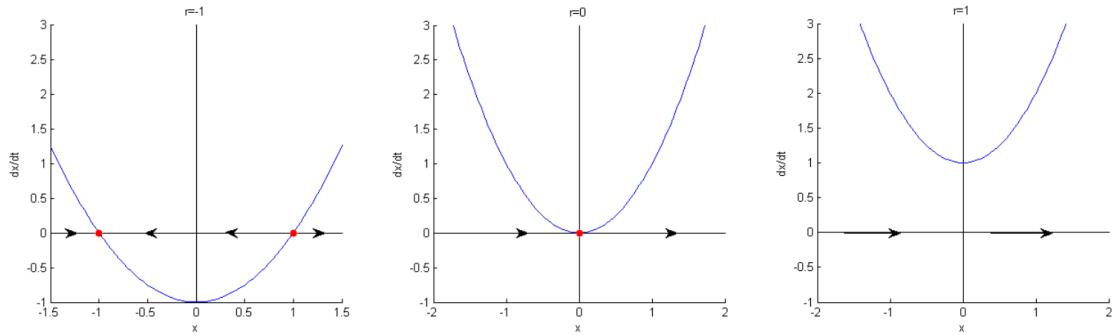
#### Bifurcación Silla-Nodo

Una bifurcación silla-nodo es un mecanismo básico por el que los puntos de equilibrio se crean o se destruyen. A medida que el parámetro varía, dos puntos críticos se van acercando, colisionan y se aniquilan mutuamente.

La forma normal de una bifurcación silla-nodo está dada por la ecuación diferencial de primer orden:

$$\dot{x} = r + x^2, \quad (1.5)$$

donde  $r$  es un parámetro, que puede ser positivo, negativo, o cero (ver Figura 1.3).



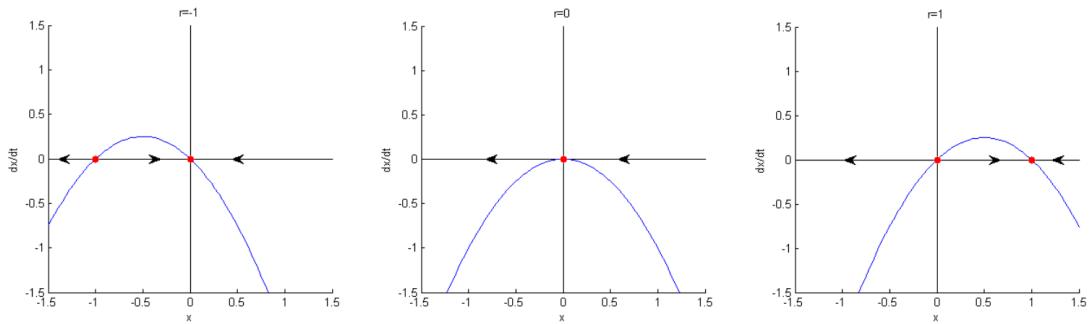
**Figura 1.3:** Plano de fases del sistema (1.5) para distintos valores de  $r$ . La curva  $\dot{x} = r + x^2$  se muestra en azul y los puntos críticos en rojo.

Cuando  $r$  es negativo, hay dos puntos críticos, uno estable y otro inestable. A medida que  $r$  se aproxima a 0 por la izquierda la parábola se desplaza hacia arriba y los puntos críticos se acercan. Cuando  $r = 0$ , los puntos críticos se funden en un punto crítico semiestable en  $x = 0$ . Este tipo de punto crítico es extremadamente delicado, se desvanece en cuanto  $r > 0$ , y ahora ya no hay ningún punto crítico.

En este ejemplo, decimos que la bifurcación ocurre en  $r = 0$ , ya que los campos vectoriales para  $r < 0$  y  $r > 0$  son cualitativamente diferentes.

### Bifurcación Transcrítica

Hay ciertas situaciones científicas donde debe existir un punto de equilibrio para todos los valores del parámetro y nunca pueden ser destruidos. Sin embargo, el punto de equilibrio puede cambiar su estabilidad si el parámetro varía. La bifurcación transcrítica es el mecanismo estándar de este cambio en la estabilidad.



**Figura 1.4:** Plano de fases del sistema (1.6) para distintos valores de  $r$ . La curva  $\dot{x} = rx - x^2$  se muestra en azul y los puntos críticos en rojo.

La forma normal de la bifurcación transcítica es:

$$\dot{x} = rx - x^2, \quad (1.6)$$

que se trata de la ecuación logística, pero ahora no se imponen restricciones sobre el signo de  $x$  y  $r$ .

La Figura 1.4 muestra el campo vectorial a medida que varía el parámetro  $r$ . Notemos que hay un punto crítico en  $x = 0$  para todos los valores de  $r$ .

Para  $r < 0$ , hay un punto crítico inestable en  $x = r$  y un punto crítico estable en  $x = 0$ . Conforme va creciendo  $r$ , el punto crítico inestable se acerca al origen y se fusiona con él cuando  $r = 0$ . Finalmente, cuando  $r > 0$ , el origen se ha vuelto inestable y  $x = r$  es ahora estable.

### Bifurcación Tridente

Ahora pasamos a un tercer tipo de bifurcación, la llamada bifurcación tridente. Este tipo de bifurcación es bastante común en problemas físicos que presentan simetría. En estos casos, los puntos de equilibrio tienden a aparecer y desaparecer por pares simétricos.

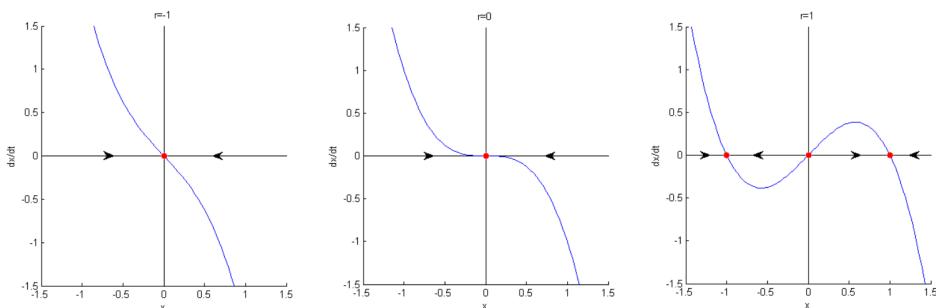
Hay dos tipos de bifurcación tridente. Al tipo más simple se le llama supercrítico y al otro tipo se le denomina subcrítico. Discutiremos primero el caso supercrítico.

#### Bifurcación Tridente Supercrítica

La forma normal de una bifurcación tridente supercrítica es:

$$\dot{x} = rx - x^3. \quad (1.7)$$

Notemos que esta ecuación es invariante bajo el cambio de variables  $x \rightarrow -x$ . La invariancia es la expresión matemática de la simetría izquierda-derecha mencionada anteriormente.



**Figura 1.5:** Plano de fases del sistema (1.7) para distintos valores de  $r$ . La curva  $\dot{x} = rx - x^3$  se muestra en azul y los puntos críticos en rojo.

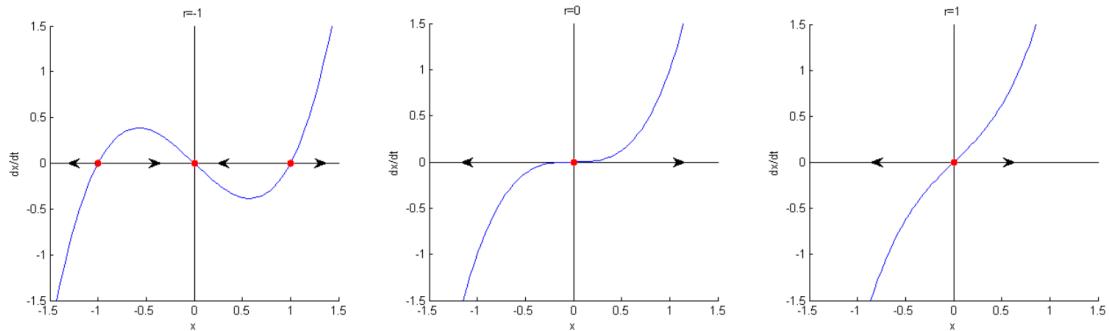
La Figura 1.5 muestra el campo vectorial para distintos valores de  $r$ . Cuando  $r < 0$ , el origen es el único punto de equilibrio, y es estable. Cuando  $r = 0$ , el origen sigue siendo estable, pero de forma más débil ya que el término lineal ha desaparecido. Finalmente, cuando  $r > 0$ , el origen se convierte en inestable y dos nuevos puntos críticos aparecen a ambos lados del origen, simétricamente localizados en  $x = \pm\sqrt{r}$ .

### Bifurcación Tridente Subcrítica

En el caso supercrítico, el término cúbico es *estabilizador*. Si en cambio el término cúbico fuese *desestabilizador*, como en

$$\dot{x} = rx + x^3, \quad (1.8)$$

tendríamos una bifurcación tridente subcrítica. En la Figura 1.6 se muestra el plano de fase para este sistema:



**Figura 1.6:** Plano de fases del sistema (1.8) para distintos valores de  $r$ . La curva  $\dot{x} = rx + x^3$  se muestra en azul y los puntos críticos en rojo.

Ahora los puntos críticos no nulos,  $x = \pm\sqrt{-r}$  son inestables y existen sólo ‘debajo’ de la bifurcación ( $r < 0$ ), que motiva el término subcrítico. Más importante es que el origen es estable para  $r < 0$  e inestable para  $r > 0$ , como en el caso supercrítico, pero ahora la inestabilidad para  $r > 0$  no es opuesta al término cúbico. De hecho, este efecto lleva a explosión en tiempo finito si tenemos una condición inicial  $x_0 \neq 0$ .

### 1.3.2. Bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf

Pasamos ahora a estudiar sistemas en dimensión 2. Suponemos un sistema bidimensional que tiene un punto crítico estable. ¿Cuáles son las formas posibles en las que puede perder la estabilidad a medida que varía un parámetro  $\mu$ ? Los autovalores del Jacobiano son la clave para encontrar la respuesta. Si el punto crítico es estable,

los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  tienen que pertenecer al semiplano izquierdo,  $Re(\lambda) < 0$ . Como los autovalores deben satisfacer una ecuación cuadrática con coeficientes reales, hay dos posibilidades:

1. Ambos autovalores son reales y negativos.
2. Ambos autovalores son complejos conjugados.

Para desestabilizar el punto crítico, necesitamos que uno (o ambos) autovalores crucen al semiplano derecho,  $Re(\lambda) > 0$ , conforme  $\mu$  varía.

En el apartado anterior hemos explorado los casos en los que un autovalor real pasa por  $\lambda = 0$ . Ahora consideramos el otro escenario posible, en los que dos autovalores complejos conjugados cruzan simultáneamente el eje imaginario hacia el semiplano derecho.

Se sigue del Teorema de la Función Implícita (10) que bajo pequeñas variaciones del campo vectorial, el punto crítico persiste y no se crean nuevos puntos críticos. Sin embargo, si el tipo de estabilidad del punto crítico cambia cuando está sujeto a variaciones, entonces este cambio está normalmente acompañado de la aparición o desaparición de pequeñas órbitas periódicas que circunscriben al punto crítico. En particular, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 11 (de Poincaré-Andronov-Hopf)** *Sea*

$$\dot{x} = A(\lambda)x + F(\lambda, x)$$

*un campo vectorial plano  $C^k$ , con  $k \geq 3$ , que depende del parámetro escalar  $\lambda$  y tal que  $F(\lambda, 0) = 0$  y  $D_x F(\lambda, 0) = 0$  para todo  $|\lambda|$  lo suficientemente pequeño. Asumimos que la parte lineal  $A(\lambda)$  en el origen tiene los autovalores  $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$  con  $\alpha(0) = 0$  y  $\beta(0) \neq 0$ . Además, suponemos que los autovalores cruzan el eje imaginario con velocidad no nula, esto es,*

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0.$$

*Entonces, en un entorno  $U$  del origen en  $\mathbb{R}^2$  y dado cualquier  $\lambda_0 > 0$  hay un  $\hat{\lambda}$  con  $\hat{\lambda} < \lambda_0$  tal que la ecuación diferencial  $\dot{x} = A(\hat{\lambda})x + F(\hat{\lambda}, x)$  tiene una órbita periódica no trivial en  $U$ .* ■

Dependiendo de si la órbita periódica no trivial que nace tras la bifurcación es estable o inestable, la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf (a partir de ahora, bifurcación de Hopf por brevedad) será supercrítica o subcrítica respectivamente.

## Bifurcación de Hopf Supercrítica

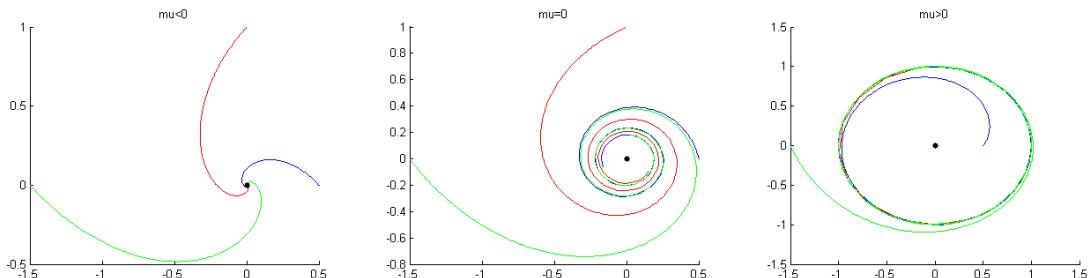
Una bifurcación de Hopf supercrítica ocurre cuando una espiral estable se transforma en una espiral inestable rodeada de un ciclo límite pequeño quasi-elíptico. La bifurcación de Hopf puede ocurrir en espacios de fases para cualquier dimensión  $n \geq 2$ , pero en este trabajo nos restringiremos a dos dimensiones.

Un ejemplo simple de una bifurcación de Hopf supercrítica está dado por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r - r^3, \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Hay tres parámetros:  $\mu$  controla la estabilidad del punto crítico en el origen,  $\omega$  da la frecuencia de las oscilaciones infinitesimales, y  $b$  determina la dependencia de la frecuencia con la amplitud para oscilaciones de gran amplitud.

En la Figura 1.7 se muestra el plano de fases para  $\mu$  antes y después de la bifurcación. Cuando  $\mu < 0$  el origen  $r = 0$  es una espiral estable cuyo sentido de rotación depende del signo de  $\omega$ . Para  $\mu = 0$  el origen sigue siendo una espiral estable, aunque muy débil. Finalmente, para  $\mu > 0$  hay una espiral inestable en el origen y un ciclo límite circular estable en  $r = \sqrt{\mu}$ .



**Figura 1.7:** Plano de fases (en cartesianas) del sistema (1.9) con  $b = 1$  y  $\omega = 1$  para distintos valores de  $\mu$ . Los puntos iniciales son (en coordenadas polares)  $(1/2, 0)$  para la curva azul,  $(1, \pi/2)$  para la curva roja y  $(3/2, \pi)$  para la curva verde. El único punto crítico del sistema  $(0, 0)$  se presenta en negro.

Veamos qué le ha ocurrido a los autovalores del jacobiano del sistema en este proceso. Cambiando a coordenadas cilíndricas y evaluando en el origen:

$$\begin{bmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \mu \pm i\omega.$$

Como esperábamos, los autovalores cruzan el eje imaginario desde la izquierda a la derecha a medida que  $\mu$  crece desde valores negativos a positivos.

## Bifurcación de Hopf Subcrítica

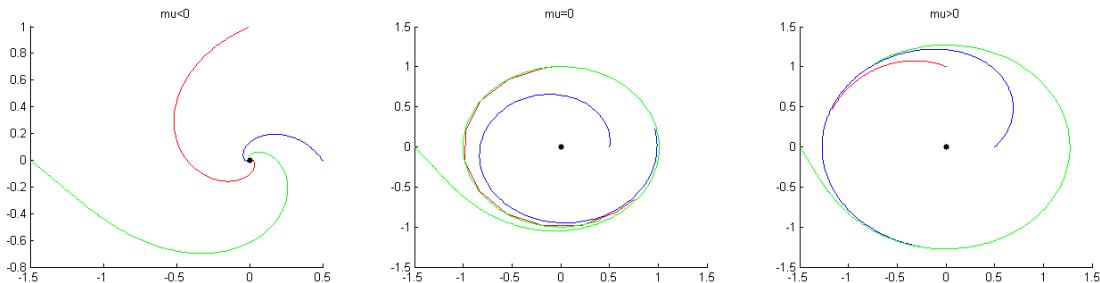
Como las bifurcaciones tridente, las bifurcaciones de Hopf tiene una variedad supercrítica y otra subcrítica. El caso subcrítico es siempre mucho más dramático y potencialmente peligroso en aplicaciones a la ingeniería. Despues de la bifurcación, las trayectorias deben *saltar* hacia un atractor distante, que puede ser un punto crítico, otro ciclo límite, el infinito, o (para tres o más dimensiones) un atractor caótico.

Consideramos el ejemplo bidimensional:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5, \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2.\end{aligned}\tag{1.10}$$

La diferencia importante con el caso supercrítico es que el término cúbico  $r^3$  es ahora desestabilizador, ayuda a llevar a las trayectorias lejos del origen.

En la Figura 1.8 se muestra el plano de fase. Para  $\mu < 0$  hay dos atractores, un ciclo límite estable y un punto crítico en el origen, entre ellos hay un ciclo inestable que va a ser el actor de esta bifurcación. A medida que  $\mu$  crece, el ciclo inestable se aprieta como una soga alrededor del punto crítico. Una bifurcación de Hopf subcrítica ocurre en  $\mu = 0$ , donde el ciclo inestable se encoge hasta amplitud nula y se traga al origen, convirtiéndolo en inestable. Para  $\mu > 0$ , el ciclo límite de gran amplitud es el único atractor del sistema. Las soluciones que solían permanecer cercanas al origen ahora se ven forzadas a crecer a oscilaciones de gran amplitud.



**Figura 1.8:** Plano de fases (en cartesianas) del sistema (1.10) con  $b = 1$  y  $\omega = 1$  para distintos valores de  $\mu$ . Los puntos iniciales son (en coordenadas polares)  $(1/2, 0)$  para la curva azul,  $(1, \pi/2)$  para la curva roja y  $(3/2, \pi)$  para la curva verde. El único punto crítico del sistema  $(0, 0)$  se presenta en negro.

Las bifurcaciones de Hopf subcríticas aparecen en la dinámica de las células nerviosas, en vibraciones de las alas de los aviones, y en las inestabilidades de flujos de fluidos.

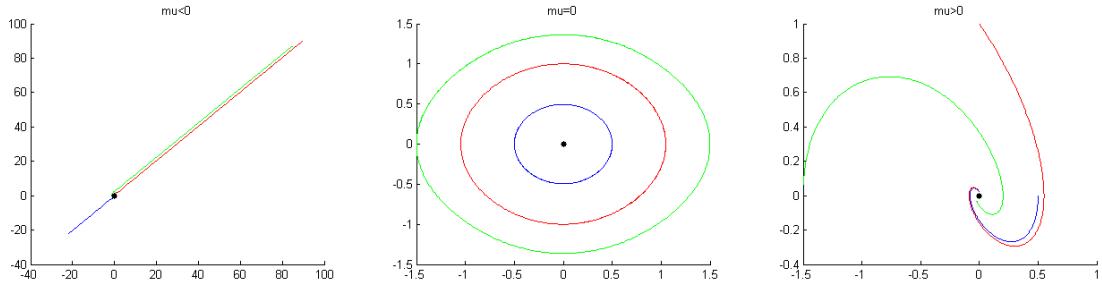
Cabe destacar que deducir el tipo de bifurcación de Hopf no es trivial, existe un método analítico [19], pero no es fácil de utilizar. Sin embargo, podemos resumir lo anterior diciendo que si un ciclo límite atractivo pequeño aparece inmediatamente después de que el punto crítico se vuelva inestable, y su amplitud decae a cero si reducimos el parámetro a cero, la bifurcación es supercrítica. De no ser así probablemente sea subcrítica. En este caso, el atractor más cercano está lejos del punto crítico y el sistema exhibe histérisis si el parámetro decrece.

### Bifurcación de Hopf Degenerada

Finalmente, también existen las *bifurcaciones de Hopf degeneradas*, en la que tras el cruce del eje imaginario por parte de los autovalores el punto crítico en el origen cambia de estable a inestable, sin embargo, en  $\mu = 0$  no tenemos una verdadera bifurcación de Hopf, ya que no hay ciclos límite en ninguno de los lados de la bifurcación, en su lugar para  $\mu = 0$  tenemos un continuo de órbitas cerradas rodeando al origen. Un ejemplo de sistema en el que se da este tipo de bifurcaciones es:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\mu y - \operatorname{sen}(x). \end{cases} \quad (1.11)$$

una representación su plano de fase se presenta en la Figura 1.9.



**Figura 1.9:** Plano de fases del sistema (1.11) para distintos valores de  $\mu$ . Los puntos iniciales son  $(1/2, 0)$  para la curva azul,  $(0, 1)$  para la curva roja y  $(-3/2, 0)$  para la curva verde. El único punto crítico del sistema  $(0, 0)$  se presenta en negro.



# Capítulo 2

## Sistemas diferenciables Lento-Rápido

Antes de estudiar el caso de los sistemas lineales a trozos conviene estudiar los sistemas diferenciables con varias escalas de tiempo para conocer las propiedades que queremos que nuestro sistema, a priori más simple, reproduzca y también para poder comparar si estas propiedades se "heredan" de forma que podamos sustituir el estudio de estos sistemas diferenciables por el estudio de una versión simplificada de los mismos.

Pasemos a un estudio pormenorizado de un tipo de sistemas que presentan unas características y propiedades bastante destacables.

### 2.1. Sistemas Dinámicos con Múltiples Escalas de Tiempo

Para la elaboración de esta sección se han consultado las referencias [4] y [10].

Buscaremos diseccionar los modelos en intervalos de tiempo donde se producen oscilaciones de amplitud pequeña y de amplitud grande. Cuando las transiciones entre intervalos son mucho más rápidas que las oscilaciones nos vemos obligados a buscar modelos con diferentes escalas temporales.

La geometría de estos sistemas con múltiples escalas temporales es intrincada. Un fenómeno prominente son las singularidades plegadas (folded) que se encuentran en un pliegue de la variedad crítica donde una hoja atractiva y una repulsiva se encuentran. Las singularidades plegadas producen equilibrios de un campo vectorial reducido, llamado desingularizado, construido en el límite singular de la escala temporal del parámetro.

Los métodos como las técnicas de explosión singular (comúnmente blow-up) para el estudio analítico de las dinámicas cerca de estas singularidades plegadas nos dan información sobre las órbitas que conectan las variedades lentas atractivas y repulsivas.

En este trabajo nos vamos a centrar en aquellos sistemas dinámicos cuyos modelos matemáticos presenten dos escalas temporales, en los que una o varias variables evolucionan de forma rápida mientras que las otras lo hacen de forma lenta. Estos sistemas modelan una gran variedad de comportamientos y tienen un amplio abanico de posibles aplicaciones, especialmente en el ámbito del análisis del comportamiento de las neuronas [11].

Consideramos un campo vectorial lento-rápido de la forma:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = \varepsilon \frac{dx}{d\tau} = f(x, y, \lambda, \varepsilon), \\ \dot{y} = \frac{dy}{d\tau} = g(x, y, \lambda, \varepsilon), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  son las variables espaciales,  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  son los parámetros del sistema  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  es un parámetro que representa el ratio de las escalas temporales, las funciones  $f$  y  $g$  se consideran lo suficientemente diferenciables, las variables  $x$  son las rápidas y las variables  $y$  las lentas.

Podemos reescalar el sistema haciendo el cambio de variable  $t = \frac{\tau}{\varepsilon}$ :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda, \varepsilon), \\ y' = \frac{dy}{dt} = \varepsilon g(x, y, \lambda, \varepsilon). \end{cases}$$

La Teoría Geométrica de Perturbaciones Singulares toma un punto de vista geométrico y se focaliza en las variedades invariantes, en las formas normales de las singularidades y en el análisis de su despliegues (unfoldings). Nos centraremos en aquellos resultados de esta teoría que son necesarios para nuestro estudio.

### 2.1.1. La Variedad Crítica y el Flujo Lento

Las soluciones de un sistema lento-rápido exhiben épocas rápidas y lentas caracterizadas por la velocidad a la que evoluciona la solución. Si  $\varepsilon \rightarrow 0$ , las trayectorias durante los intervalos rápidos convergen a las soluciones del *sistema rápido ó ecuaciones de capa (o de estratos)*:

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \lambda, 0), \\ y' = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Y durante los intervalos lentos convergen a las soluciones del *flujo lento* o *sistema reducido*:

$$\begin{cases} 0 = f(x, y, \lambda, 0), \\ \dot{y} = g(x, y, \lambda, 0). \end{cases} \quad (2.3)$$

Unas de las metas de la Teoría Geométrica de Perturbaciones Singulares es usar estos subsistemas para entender la dinámica del sistema completo para  $\varepsilon > 0$ . La primera ecuación de (2.3) define la *variedad crítica*:

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid f(x, y, \lambda, 0) = 0\}. \quad (2.4)$$

Remarcamos que  $S$  puede tener singularidades, pero asumiremos que esto no ocurre, por lo que  $S$  es una variedad diferenciable. Los puntos de  $S$  son puntos de equilibrio para el sistema rápido (2.2).

La Teoría de Fenichel (ver [8]) nos garantiza la persistencia de  $S$  (ó  $M \subset S$ ) como una variedad lenta para  $\varepsilon > 0$  si  $S$  (ó  $M$ ) es normalmente hiperbólica. En nuestro marco  $S$  consiste totalmente en equilibrios y este requerimiento se satisface si todos los puntos  $p \in S$  (ó  $M$ ) son equilibrios hiperbólicos de (2.2), i.e.,  $J(f)$  no tiene autovalores con parte real nula. Diremos que  $M \subset S$  es *atractiva* si los autovalores de  $J(f)$  tienen parte real negativa  $\forall p \in M$  y *repulsiva* si tienen parte real positiva. Si no es ni atractiva ni repulsiva, la llamaremos de *tipo silla*.

La hiperbolicidad normal falla en los puntos de  $S$  cuya proyección en el espacio de la variable lenta es singular. Esos puntos son *pliegues (fold)* en el sentido de la teoría de singularidades. Lejos de los puntos fold, el Teorema de la Función Implícita implica que  $S$  es localmente el grafo de una función  $h(y) = x$ . Entonces el sistema reducido (2.3) se puede expresar como:

$$\dot{y} = g(h(y), y, \lambda, 0).$$

Si conservamos la estructura de ecuación diferencial algebraica y escribimos (2.3) como la restricción a  $S$  del campo vectorial tenemos, derivando la primera ecuación y sustituyendo el valor de  $\dot{y}$ :

$$\begin{aligned} 0 = f(x, y, \lambda, 0) \xrightarrow{d/dt} 0 &= (D_x f)\dot{x} + (D_y f)\dot{y} \xrightarrow{\dot{y}=g} \dot{x} = -(D_x f)^{-1}(D_y f)g \\ &\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \pm(D_x f)^{-1}(D_y f)g, \\ \dot{y} = g(x, y, \lambda, 0). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Este campo vectorial explota si  $f$  es singular. En ese caso, se puede desingularizar reescalando la escala temporal por  $\pm(D_x f)$ , donde escogemos el signo de forma que la orientación de las trayectorias no cambie en las hojas atractivas de  $S$ . Este sistema desingularizado jugará un papel prominente en nuestro análisis. Si  $S$  es normalmente hiperbólico, no sólo  $S$ , sino también el flujo lento de  $S$  persiste para  $\varepsilon > 0$ , como se establece en el siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en [8]:

**Teorema 12 (de Fenichel)** Suponemos que  $M = M_0$  es una subvariedad compacta normalmente hiperbólica (posiblemente con frontera) de la variedad crítica  $S$  del sistema (2.1) y que  $f, g \in C^r$  con  $r < +\infty$ . Entonces para  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño se tiene que:

1. Existe una variedad localmente invariante  $M_\varepsilon$  difeomorfa a  $M_0$ .
2.  $M_\varepsilon$  tiene una distancia Hausdorff de  $O(\varepsilon)$  desde  $M_0$ .
3. El flujo de  $M_\varepsilon$  converge al flujo lento con  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
4.  $M_\varepsilon$  es  $C^r$ -diferenciable.
5.  $M_\varepsilon$  es normalmente hiperbólica y tiene las mismas propiedades de estabilidad respecto a las variables rápidas de  $M_0$ .
6. Usualmente  $M_\varepsilon$  no es única. En las regiones que se mantienen a una distancia fija de la frontera de  $M_\varepsilon$ , todas las variedades que satisfacen las propiedades 1-5 se encuentran a una distancia de Hausdorff de orden  $O(e^{-K/\varepsilon})$  las unas de las otras para algún  $K > 0$  con  $K = O(1)$ .

La variedad normalmente hiperbólica  $M_0$  tiene asociadas variedades localmente estables e inestables.

$$W_{loc}^s(M_0) = \bigcup_{p \in M_0} W_{loc}^s(p) \quad W_{loc}^u(M_0) = \bigcup_{p \in M_0} W_{loc}^u(p) \quad (2.5)$$

donde  $W_{loc}^s(p)$  son las variables locales estables de  $p$  como equilibrio hiperbólico de las ecuaciones de capa (2.2) mientras que  $W_{loc}^u(p)$  son las inestables.

Estas variedades también persisten para  $\varepsilon > 0$ , el resultado se mantiene si intercambiamos  $M_\varepsilon$  y  $M_0$  por  $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$  y  $W_{loc}^s(M_0)$ . ■

Llamaremos a  $M_\varepsilon$  la *variedad de Fenichel*, subclase de las variedades lentas, variedades invariantes en las que el campo vectorial tiene una velocidad que tiende a 0 en la escala temporal rápida con  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Geométricamente, la variedad estable  $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$  de una variedad de Fenichel  $M_\varepsilon$  consiste en los puntos cuyas trayectorias se aproximan a  $M_\varepsilon$  con el tiempo creciente; análogamente,  $W_{loc}^u(M_\varepsilon)$  consiste en los puntos cuyas trayectorias se aproximan a  $M_\varepsilon$  con el tiempo decreciente.

### 2.1.2. Explosión Canard

La dinámica de los sistemas lento-rápido en el entorno de los puntos de la variedad crítica en los que se pierde la normalidad hiperbólica puede ser sorprendentemente complicada y nada parecido a lo que conocemos con una única escala temporal.

Dentro del estudio de los sistemas con múltiples escalas temporales nos centraremos en el fenómeno *canard*. Su característica asociada, la *explosión canard* se manifiesta como una transición muy rápida, tras una pequeña variación de los parámetros que determinan el sistema, desde pequeños ciclos provenientes de una bifurcación de Hopf a *oscilaciones de relajación*, que son ciclos límite de gran amplitud formados por segmentos rápidos y lentos alternantes. Esta transición ocurre a través de una familia de ciclos cuya propiedad característica es que contienen *segmentos canard*, segmentos de la órbita que siguen a la variedad lenta repulsiva durante un tiempo  $O(1)$ .

El crecimiento rápido de la amplitud cerca de la bifurcación de Hopf es una explosión canard, más generalmente, uno se refiere a una trayectoria como *órbita canard* si sigue la variedad repulsiva para un tiempo  $O(1)$  en la escala temporal lenta. Una órbita canard se llama *canard maximal* si conecta las variedades lentas atractiva y repulsiva. Esta definición depende de la selección específica de las variedades lenta y rápida.

Este fenómeno se estudió por primera vez en el contexto del sistema de Van der Pol con un forzado constante [4] (que estudiaremos más adelante en la sección siguiente).

La principal condición geométrica es que la variedad crítica (2.4) tenga un fold  $(x_0, y_0)$  para el  $\lambda = \lambda^*$  tal que  $g(x_0, y_0, \lambda^*, 0) = 0$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el punto fold se encuentra en el origen y que  $\lambda^*$  es el vector de parámetros nulo.

Para  $\varepsilon = 0$ , un punto fold de la variedad crítica la divide localmente en dos partes, una rama atractiva,  $S_a$ , y otra rama repulsiva  $S_r$ , con respecto al flujo del sistema rápido (2.2). Lejos del límite singular y para valores de  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeños y positivos, estas dos variedades invariantes del sistema rápido persisten como variedades lentas localmente invariantes ( $S_a^\varepsilon$  y  $S_r^\varepsilon$ ).

Las variedades de Fenichel están bien definidas hasta los puntos fold donde la hiperbolidad normal de la variedad crítica falla. Éstas se pueden extender por el flujo y se comportan de forma diferente cerca de un fold genérico y cerca de un punto canard (un fold que satisface  $g(0, 0, 0, 0) = 0$  y las dos condiciones para la no-degeneración  $g_x(0, 0, 0, 0) \neq 0$  y  $g_\lambda(0, 0, 0, 0) \neq 0$ ).

- **Cerca de un fold genérico.** Una variedad lenta de Fenichel atractiva puede seguir muy de cerca la rama atractiva  $S_a$ , pasar por un entorno del fold y continuar siguiendo aproximadamente las dinámicas rápidas, pudiendo aparecer *oscilaciones de relajación*, ciclos límite de gran amplitud formados por segmentos rápidos y lentos alternantes.
- **Cerca de un punto canard.** Una variedad lenta de Fenichel atractiva puede seguir muy de cerca la rama atractiva  $S_a$ , pasar por un entorno del fold y continuar siguiendo muy de cerca la rama repulsiva  $S_r$ . Esto sugiere la existencia

de solución en el sistema original (para  $0 < \varepsilon \ll 1$ ) conteniendo *segmentos canard*.

Pasemos a enunciar un teorema clásico que resume cuando se va a producir una explosión canard dentro de un sistema plano lento-rápido, y cuya demostración se puede consultar en [15]:

**Teorema 13 (Explosión Canard en  $\mathbb{R}^2$ )** *Suponemos un sistema plano lento-rápido que tiene un punto tipo fold genérico  $p_* = (x_p, y_p) \in S$ , esto es,*

$$f(p_*, \lambda, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(p_*, \lambda, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(p_*, \lambda, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(p_*, \lambda, 0) \neq 0.$$

*Asumimos que la variedad crítica es localmente atractiva para  $x < x_p$  y repulsiva para  $x > x_p$  y que existe una singularidad fold para  $\lambda = 0$  en  $p_*$ , es decir,*

$$g(p_*, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} g(p_*, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} g(p_*, 0, 0) \neq 0.$$

*Entonces un bifurcación de Hopf aparece en:*

$$\lambda_H = H_1 \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2})$$

*y la Explosión Canard ocurre para:*

$$\lambda_C = (H_1 + K_1) \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2})$$

*Donde los coeficientes  $H_1$  y  $K_1$  se pueden calcular explícitamente.* ■

En el límite singular tenemos  $\lambda_H = \lambda_C$ . Para cualquier  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño el sistema lineal en el punto de la bifurcación de Hopf tiene un par de autovalores singulares.

$$\sigma(\lambda; \varepsilon) = \alpha(\lambda; \varepsilon) + i\beta(\lambda; \varepsilon)$$

con  $\alpha(\lambda_H; \varepsilon) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha(\lambda_H; \varepsilon) \neq 0$  y

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(\lambda_H; \varepsilon) = \infty$  en la escala temporal lenta  $\tau$  y  
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(\lambda_H; \varepsilon) = 0$  en la escala temporal rápida  $t$ .

Hay que resaltar que las variedades lentas típicamente no son únicas, sino que están exponencialmente cerca unas de otras. Esto permite el estudio de las posiciones relativas de las variedades lentas atractivas y repulsivas, y mostrar la existencia de canards. La presencia de términos exponencialmente pequeños en la  $\varepsilon$ -expansión de las variedades lentas implican que su posición respectiva puede cambiar con una variación exponencialmente pequeña del parámetro.

- Cuando  $S_a^\varepsilon$  está más cerca de la variedad crítica que  $S_r^\varepsilon$  en la región repulsiva, se fuerza la existencia de *canards sin cabeza*.
- Cuando  $S_r^\varepsilon$  está mas cerca de la variedad crítica que  $S_a^\varepsilon$  en la región repulsiva, pueden existir *canards con cabeza*.

La transición de un tipo a otro de canard ocurre cuando  $S_a^\varepsilon$  está conectada con  $S_r^\varepsilon$ , esto sucede a lo largo de una curva en el plano de los parámetros  $(\varepsilon, \lambda)$  y la solución canard asociada se llama *canard maximal*. Los ciclos canard se desarrollan a lo largo de una rama nacida en una bifurcación de Hopf y la explosión canard ocurre a una distancia  $O(\varepsilon)$  del punto de Hopf (muy cerca de la bifurcación), antes de la explosión, los ciclos tienen las características de un ciclo de Hopf típico.

Pasemos ahora a un sencillo caso de aplicación de estos resultados que nos servirá de base para el desarrollo de los resultados posteriores en los Sistemas Lineales a Trozos.

## 2.2. La Ecuación de Van der Pol

El contenido de esta sección, incluidas las gráficas y el tratamiento matemático, ha sido obtenido de [4] y [10].

Uno de los sistemas más simples en el que se manifiestan estos conceptos, siendo además el primer sistema donde se estudió el fenómeno canard, es la ecuación de Van der Pol con una constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  que indica que está forzado:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - \frac{1}{3}x^3 + x, \\ \dot{y} = \lambda - x. \end{cases} \quad (2.6)$$

Este sistema lento-rápido tiene sólo una variable rápida y otra lenta, pero exhibe dinámicas complejas.

Como

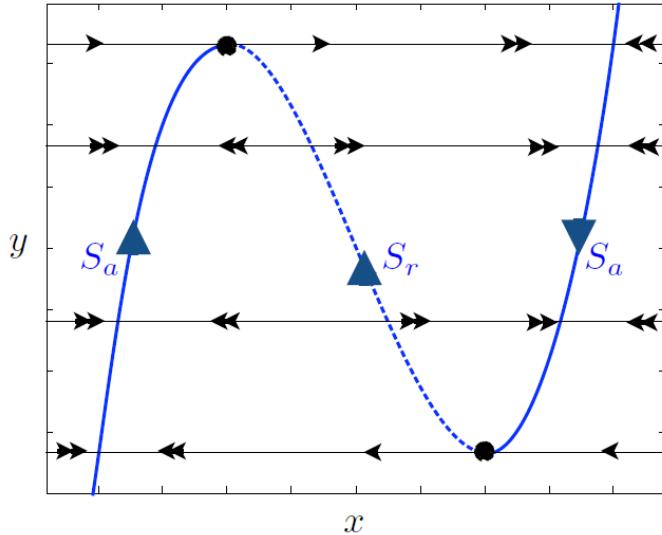
$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{1}{\varepsilon}(y - \frac{1}{3}x^3 + x), \\ g(x, y) = \lambda - x, \end{cases}$$

son  $C^\infty$ , también son localmente lipschitzianas,  $f, g \in Lip_{loc}(x, \mathbb{R})$ , esto implica que  $f, g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2) \cap Lip_{loc}(x, \mathbb{R})$ , por lo que el Teorema 4 (de Existencia y Unicidad de Solución) se aplica para todo  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Sin embargo, no podemos asegurar que la función sea globalmente Lipschitz, por tanto, podrían producirse fenómenos de explosión en tiempo finito. No obstante, dicho análisis queda fuera de los objetivos del presente trabajo, en el que nos centraremos en los fenómenos canard asociados a la naturaleza lento-rápida de este sistema.

### 2.2.1. La Variedad Crítica y el Flujo Lento

Si fijamos  $\varepsilon = 0$  en (2.6), obtenemos el sistema reducido con la ecuación algebraica que define la variedad crítica como la cúbica:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = c(x) := \frac{1}{3}x^3 - x\}. \quad (2.7)$$



**Figura 2.1:** Variedad Cónica Crítica con un punto fold genérico (a la izquierda) y un punto canard (a la derecha). La variedad central (discontinua) es repulsiva, mientras que las dos exteriores son atractivas. Figura modificada de [10].

$S$  es normalmente hiperbólica lejos de los extremos locales de la cónica ( $p_{\pm} = (\pm 1, \mp 2/3)$ ) donde  $S$  tiene un fold respecto a la variable rápida  $x$ . Por tanto, estos puntos descomponen naturalmente a  $S$  en tres ramas:

$$S = S^{a,-} \cup \{p_-\} \cup S^r \cup \{p_+\} \cup S^{a,+}, \quad (2.8)$$

donde  $S^{a,\pm}$  son las ramas atractivas y  $S^r$  es la rama repulsiva. Notemos que no dependen de  $\lambda$ . La dinámica de un punto que no esté en  $S$  se encuentra totalmente determinadas por la dirección de la variable rápida  $x$ . Observamos que espacialmente la rama de  $S$  situada en medio es repulsiva y las dos ramas no acotadas son atractivas (como se muestra en la Figura 2.1).

Para obtener el flujo lento en  $S$  en la ecuación de Van der Pol, no es realmente necesario resolver  $y = c(x)$  para  $x$  en una de las ramas. Es más conveniente escribir el flujo lento en términos de la variable rápida  $x$ .

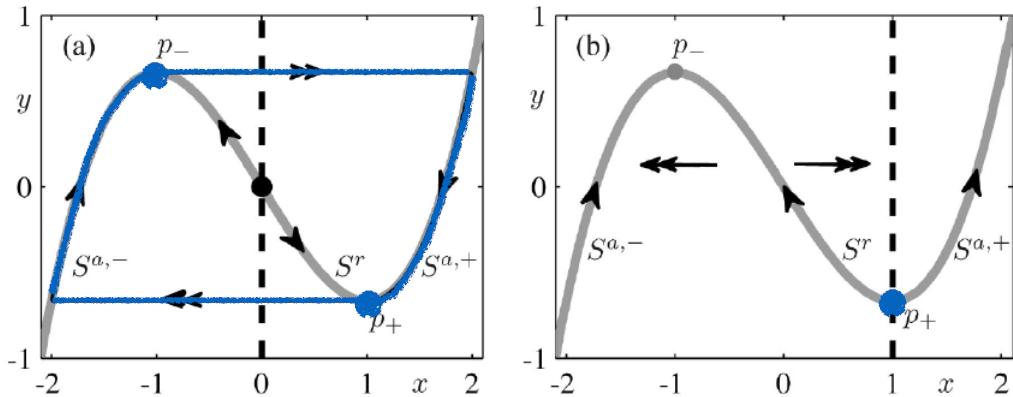
Diferenciamos  $f(x, y, \lambda, 0) = y - c(x) = 0$  respecto a  $\tau$  y obtenemos:

$$\dot{y} = \dot{x}x^2 - \dot{x} = \dot{x}(x^2 - 1), \quad (2.9)$$

que junto con la ecuación (2.6) para  $\dot{y}$  nos permite obtener una expresión para el flujo lento:

$$\dot{x} = \frac{\lambda - x}{x^2 - 1}. \quad (2.10)$$

El flujo lento depende de  $\lambda$ , porque la dirección del flujo está parcialmente determinada por la posición del equilibrio  $x = \lambda$  en  $S$ . El flujo lento está bien definido en las tres ramas salvo en  $x = \pm 1$ . Podemos desingularizar el flujo lento cerca de  $x = \pm 1$  reescalando el tiempo con el factor  $x^2 - 1$ . Esto nos proporciona la ecuación del *flujo lento desingularizado*,  $\dot{x} = \lambda - x$ . Este reescalamiento invierte la dirección del flujo en  $S^r$ , así que debemos tener cuidado cuando pasemos del espacio de fases de este sistema al del flujo lento original.



**Figura 2.2:** Planos de fase de la ecuación de Van der Pol (2.6) para  $\lambda = 0$  (a) y para  $\lambda = 1$  (b). Se muestra la variedad crítica  $S$  (curva gris sólida) y la nulclina en  $y$  (línea discontinua); las flechas dobles indican la dirección del flujo rápido y las flechas simples la del flujo lento. En el panel (a) se muestra una candidata a oscilación de relajación (en azul) rodeando un equilibrio inestable. El panel (b) es el momento de una relajación de Hopf singular con una singularidad fold en el equilibrio local  $p_+$ . Figura modificada de [4].

En primer lugar, vamos a centrarnos en el caso  $\lambda = 0$  (representativo para  $|\lambda| < 1$  y lejos de  $\lambda \approx 1$ ). En este caso, el origen es el único equilibrio, y se trata de una fuente para este valor de  $\lambda$ . La curva cerrada (Figura 2.2 (a)) es una órbita singular compuesta por dos trayectorias rápidas que empiezan en los fold ( $p_{\pm}$ ) concatenadas con segmentos de  $S$ . Estas concatenaciones continuas de las trayectorias de las ecuaciones de capa y el flujo lento son llamadas *candidatas*.

La órbita singular sigue al flujo lento en  $S$  hasta el fold, luego hace una transición al segmento de la trayectoria rápida que fluye hasta la otra rama atractiva de  $S$ , y el mismo mecanismo devuelve la órbita singular a su rama inicial de  $S$ .

La órbita singular se perturba para  $\varepsilon > 0$  a una órbita periódica de la ecuación de Van der Pol que se encuentra a una distancia  $O(\varepsilon^{2/3})$  de la candidata. Van der Pol introdujo el término *oscilación de relajación* para describir las órbitas periódicas que alternan entre las fases de movimiento lento y de movimiento rápido.

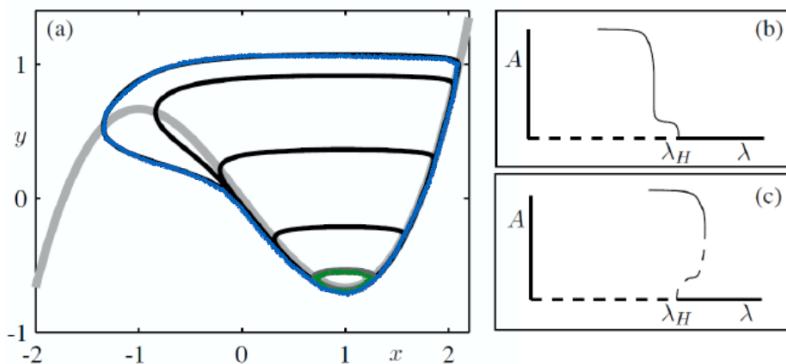
Pasemos ahora a ver que ocurre cuando  $|\lambda| \approx 1$ , donde tiene lugar la explosión canard.

### 2.2.2. Explosión Canard

El análisis de estabilidad lineal muestra que el único punto de equilibrio  $(x, y) = (\lambda, \frac{1}{3}\lambda^3 - \lambda)$  es una fuente para  $|\lambda| < 1$  pero un sumidero para  $|\lambda| > 1$ , con una bifurcación de Hopf para  $\lambda = \pm 1$ . Como resultado nos encontramos con órbitas periódicas emergiendo del punto de equilibrio, distinguimos dos casos genéricos en la bifurcación de Hopf:

- *Supercrítica*: Si las órbitas son estables.
- *Subcrítica*: Si las órbitas son inestables.

El tipo de bifurcación de Hopf está determinado por el signo del coeficiente de Lyapunov ( $\neq 0$  en el caso genérico). Cerca de la bifurcación, la amplitud de las órbitas periódicas es comparable con la raíz cuadrada de la distancia entre el parámetro y el punto de bifurcación.



**Figura 2.3:** Continuación numérica de las órbitas de la ecuación de Van der Pol (2.6) para  $\varepsilon = 0.05$ . El panel (a) muestra una selección de órbitas periódicas: la órbita verde oscura es un pequeño ciclo límite típico cerca de la bifurcación de Hopf en  $\lambda = \lambda_H$ , mientras que las órbitas en negro ocurren en un intervalo pequeño de variación del parámetro en  $\lambda \approx 0.993491$ . Los paneles (b) y (c) son esquemas de los diagramas de bifurcación correspondientes a las bifurcaciones de Hopf singulares supercrítica y subcrítica respectivamente; aquí,  $A$  denota la amplitud del ciclo límite. Figura modificada de [4].

Para la ecuación de Van der Pol en  $\lambda_H = \pm 1$  ocurre una bifurcación de Hopf supercrítica y las órbitas periódicas existen en el intervalo del parámetro  $|\lambda| < 1$ . El caso subcrítico lo podríamos observar en sistemas más complejos, como el de FitzHugh-Nagumo [11], el cual es una extensión del sistema de Van der Pol en el que añadimos otro parámetro que permite que varíe la pendiente de la y-nulclina.

El análisis de cómo cambian las dinámicas estables observadas en la ecuación de Van der Pol con  $\lambda$  de un foco estable a *oscilaciones de relajación* cuando  $\varepsilon > 0$  es pequeño fue un desarrollo importante en la teoría de los sistemas lento-rápido.

Como se aprecia en la Figura 2.3, cerca de la bifurcación de Hopf en  $\lambda_H = 1$  la órbita periódica es pequeña. Sin embargo, a medida que  $\lambda$  decrece la amplitud de la órbita crece rápidamente hasta que alcanza la forma de una oscilación de relajación. Hay un intervalo pequeño de  $\lambda$  en el que la órbita crece como una raíz cuadrada, como se espera cerca de una bifurcación de Hopf. Sin embargo, la amplitud después crece extremadamente rápido hasta que se estabiliza en oscilaciones de relajación.



# Capítulo 3

## Aproximación Lineal a Trozos

Actualmente, en la comunidad científica hay un gran interés por el análisis de sistemas diferenciables a trozos, ya que modelan una amplia variedad de fenómenos, como, por ejemplo, osciladores de impacto o convertidores AC/DC [5]. Un objeto de estudio interesante dentro de este campo son los Sistemas Lineales a Trozos (PWL, por sus siglas en inglés). Su estudio viene motivado por el modelado de circuitos electrónicos, a principios del siglo XX [1]. Desde entonces, se ha visto que este tipo de sistemas reproduce todos los aspectos de la dinámica no lineal y el hecho de que se puedan obtener soluciones explícitas en cada zona de linealidad hace posible describir explícitamente algunos elementos básicos de la dinámica y la geometría del sistema en cuestión.

Además, se ha observado que los sistemas PWL pueden mostrar nuevos comportamientos, imposibles de obtener bajo hipótesis de diferenciabilidad. Por ejemplo, el hecho de que la unión de dos sistemas lineales estables puede producir dinámica inestable. A pesar de estas ventajas, en estos sistemas no es posible obtener una solución general ni aplicar la teoría clásica de sistemas dinámicos diferenciables, por lo que se necesita una nueva teoría específica para los PWL.

### 3.1. Existencia y Unicidad de Solución

Antes de ponernos a trabajar en este contexto, comprobaremos que los sistemas que vamos a estudiar tienen solución, que además esta es única y está definida en  $\mathbb{R}$ . Así, una vez que obtengamos una propuesta de solución que cumpla con las ecuaciones, sabremos que se trata de la solución que estamos buscando.

Para el desarrollo de esta sección se ha seguido principalmente la referencia [9].

**Definición 21** Se dice que la ecuación autónoma

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

define un sistema lineal a trozos, bizonal y continuo (CPWL, por sus siglas en inglés) en  $\mathbb{R}^n$  si existen  $a_1, a_2, v \in \mathbb{R}^n$ , con  $v \neq 0$ ,  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $\delta \in \mathbb{R}$  tales que:

1.  $f(x) = \begin{cases} A_1x + a_1 & \text{si } (x, v) + \delta \leq 0, \\ A_2x + a_2 & \text{si } (x, v) + \delta > 0. \end{cases}$
2.  $A_1x + a_1 = A_2x + a_2$  cuando  $(x, v) + \delta = 0$ .

Al hiperplano  $(x, v) + \delta = 0$  se denomina la frontera de separación. Finalmente, al conjunto de todos los sistemas dinámicos que cumplen esta definición se le denominará por  $2CPWL_n$ .

El hiperplano de separación divide el espacio en dos regiones en las que el sistema (3.1) es lineal. Veremos en la siguiente proposición, que haciendo un cambio de variables apropiado, la frontera de separación se puede transformar en el hiperplano  $\{x_1 = 0\}$ .

**Proposición 22** El sistema CPWL (3.1) se puede escribir de la forma

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} A^-x + b & \text{si } x_1 \leq 0, \\ A^+x + b & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde  $b \in \mathbb{R}^n$  y las matrices  $A^+, A^- \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  satisfacen la relación:

$$A^+ - A^- = (A^+ - A^-)e_1 e_1^T.$$

■

*Demostración:* Consideramos la matriz de Householder  $H$ , que verifica la condición  $Hv = (\|v\|, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ . El cambio de variables  $y = H(x + \delta v / \|v\|^2)$  nos permite reescribir el sistema (3.1) como:

$$\dot{y} = \begin{cases} HA_1Hy + H(a_1 - A_1\delta v / \|v\|^2) & \text{si } y_1 \leq 0, \\ HA_2Hy + H(a_2 - A_2\delta v / \|v\|^2) & \text{si } y_1 > 0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la continuidad del campo podemos deducir, por un lado la coincidencia de las últimas  $n - 1$  columnas de las matrices  $HA_1H$  y  $HA_2H$  y, por otro lado, la igualdad

$$H(a_1 - A_1\delta v / \|v\|^2) = H(a_2 - A_2\delta v / \|v\|^2).$$

Tomando  $A^- = HA_1H$ ,  $A^+ = HA_2H$  y  $b = H(a_1 - A_1\delta v/\|v\|^2)$ , concluimos la prueba renombrando la variable  $y$  por  $x$ .  $\blacksquare$

El siguiente resultado se enuncia que la existencia y unicidad de solución del problema de valores inicial asociado a sistemas de la clase  $2CPWL_n$  está garantizada. En realidad, este resultado se podría generalizar a sistemas con  $m \in \mathbb{N}$  zonas de linalidad,  $mCPWL_n$ .

**Teorema 14** *El Problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

con  $f$  dada por la Definición 21 y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  posee una solución única que está definida en todo  $\mathbb{R}$ .  $\blacksquare$

*Demostración:* Es suficiente probar que  $f \in Lip(x, \mathbb{R}^{n+1})$ .

De la Proposición 22 podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que el campo  $f$  toma la forma (3.2). Consideramos la norma matricial eucídea. Para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , tenemos las siguientes posibilidades:

- Si  $x_1 \geq 0$  e  $y_1 \geq 0$ , entonces

$$\|f(x) - f(y)\| = \|A^+x - A^+y\| \leq \|A^+\| \|x - y\|.$$

- Si  $x_1 \leq 0$  e  $y_1 \leq 0$ , entonces

$$\|f(x) - f(y)\| = \|A^-x - A^-y\| \leq \|A^-\| \|x - y\|.$$

- Si  $x_1 > 0$  e  $y_1 < 0$ , tomamos

$$z = \frac{y_1}{y_1 - x_1}(x - y) + y,$$

entonces  $z_1 = 0$  y por la continuidad de  $f$  se sigue que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f(x) - f(z) + f(z) - f(y)\| \leq \\ &\leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| = \\ &= \|A^+x - A^+z\| + \|A^-z - A^-y\| \leq \\ &\leq \|A^+\| \|x - z\| + \|A^-\| \|z - y\| \leq \\ &\leq \max \{\|A^+\|, \|A^-\|\} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $K = \max \{\|A^+\|, \|A^-\|\}$ . Esto es,  $f$  es globalmente Lipschitz respecto de la variable en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , así que el problema de valores inciales (3.3) posee una única solución definida en  $\mathbb{R}$ .  $\blacksquare$

## 3.2. Primeros Modelos

Nos vamos a centrar en el fenómeno canard dentro de los sistemas PWL que ocurren en sistemas con múltiples escalas de tiempo. En primer lugar, estudiaremos los sistemas más sencillos y veremos por qué no son suficientes para modelar todas las características de los sistemas diferenciables originales. Una vez realizado ese estudio sabremos qué es lo mínimo que debemos pedirle a un sistema lineal a trozos para que exhiba ciclos canard.

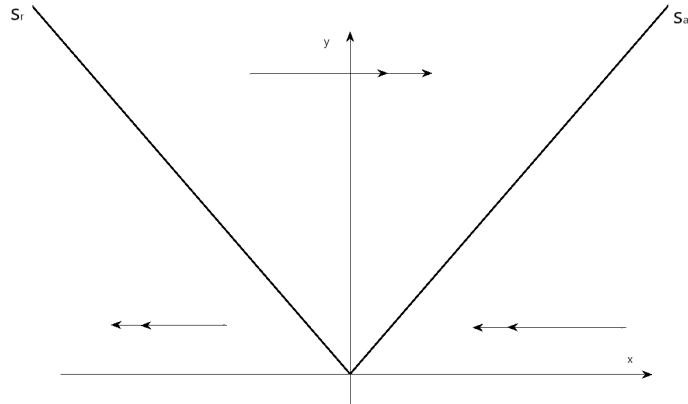
Para la elaboración de esta sección seguiremos principalmente las referencias [2], [13] y [16].

### 3.2.1. Sistema Lineal a Trozos con una Esquina

En primer lugar, al hablar de un modelo simplificado de un sistema diferenciable con un pliegue, el sistema más sencillo en el que podemos pensar se trata de uno en el que se divide el espacio en sólo dos zonas de linealidad. Veamos por qué esta simplificación es demasiado burda y no refleja de manera veraz las propiedades del sistema original.

Supongamos que estamos trabajando con un modelo de la ecuación de Van der Pol centrándonos solo en uno de los folds. Consideramos un sistema a trozos con sólo dos zonas de linealidad, tomando  $a \simeq 0$ :

$$\begin{cases} x' = y - |x|, \\ y' = -\varepsilon(x - a). \end{cases} \quad (3.4)$$



**Figura 3.1:** Representación del plano de fases del Sistema 3.4, se indican los flujos con flechas y las variedades lentas de forma mas gruesa. La  $y$ -nulclina será  $x = a$  y es variable.

Como vemos en la Figura 3.1, hay una variedad atractiva y otra repulsiva, que se unen en el origen. En este caso, lo que tenemos es un continuo de órbitas canard homoclínas cuando  $a = 0$ , pero no es posible obtener ciclos límite variando la posición de la  $y$ -nulclina.

### 3.2.2. Sistema Lineal a Trozos con dos Esquinas

Ya hemos visto que con sólo dos zonas no se pueden reproducir de manera fiel las propiedades del sistema diferenciable, por lo que el siguiente paso es considerar modelos con más de dos zonas de diferenciabilidad.

El modelo anterior (3.4) se puede extender a  $n$  zonas de la siguiente forma:

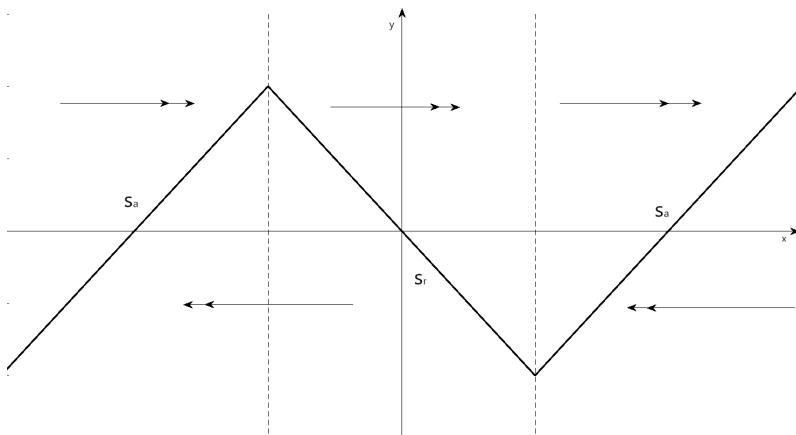
$$\begin{cases} x' = y - f(x), \\ y' = -\varepsilon(x - a). \end{cases} \quad (3.5)$$

siendo  $f$  una función lineal a trozos con  $n$  zonas.

En particular, en la referencia [13] se estudia la siguiente función con tres zonas:

$$f(x) = \begin{cases} x + k + 1 & \text{si } x < -1, \\ -kx & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ x - k - 1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (3.6)$$

donde  $0 < \varepsilon \ll 1, 0 \leq a < 1, k > 0$ . Los autores afirman que un sistema PWL de segundo orden (3.5) exhibe una "Solución Perdida" que no se presenta en el sistema bizonal (3.4), lo que implica un cambio repentino de la amplitud de oscilación debido a una variación pequeña de un parámetro.



**Figura 3.2:** Representación del plano de fases del Sistema 3.5, se indican los flujos con flechas y la variedad lenta de forma mas gruesa. La  $y$ -nulclina será  $x = a$  y es variable.

Por otro lado, en la referencia [16], se demuestra la existencia de un ciclo límite cuando el equilibrio está en la zona central, pero que para  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeño, este tiene la forma de una oscilación de relajación usual de una ecuación de Van der Pol, por lo que se concluye que en este sistema no hay ciclos límite canard.

Finalmente, en la referencia [2] se analiza de forma más profunda el sistema (3.5) y se nos presentan dos casos:

- **Caso Nodo:**  $4\varepsilon - k^2 < 0$ . La presencia de un nodo en la parte central hace que la transición a la oscilación de relajación sea instantánea (los autores llaman a este fenómeno nuevo, que no aparecía en el marco clásico, super-explosión canard). Esta propiedad del caso PWL es claramente diferente del caso diferenciable, donde la transición de estacionario a atractores periódicos mediante los ciclos canard es abrupta, pero nunca instantánea.
- **Caso Foco:**  $4\varepsilon - k^2 > 0$ . En este caso la explosión no es inmediata, sin embargo, el crecimiento de la amplitud del ciclo que nace es lineal. Tenemos bifurcaciones del tipo Hopf y cuasi-canards, debido a la ausencia de variedad lenta repulsiva, ingrediente principal de los ciclos canard clásicos, que siguen a la variedad lenta repulsiva por un tiempo  $O(1)$ .

### 3.3. Sistemas Lineales a Trozos con Tres Zonas

Una vez descartado el modelo con dos zonas y el modelo simple con tres zonas descrito en el apartado anterior y sabiendo qué ingredientes nos hacían falta para conseguir ciclos canard pasamos a estudiar un sistema formado por tres zonas bien diferenciadas:

1. Una zona con una variedad lenta atractiva.
2. Una zona con una variedad lenta repulsiva.
3. Una zona central pequeña que permite el paso de las soluciones desde la variedad atractiva a la repulsiva, esto es, soluciones canard.

Para el desarrollo de esta sección se ha seguido principalmente la referencia [10].

Analizaremos esta transición canard, estudiando en primer lugar las propiedades de cada una de las zonas para acabar probando la existencia del canard maximal, que corresponde a una conexión entre las variables lentas atractiva y repulsiva. Veremos cómo esta conexión se rompe con una variación exponencialmente pequeña del parámetro y cómo una familia de órbitas canard (sin cabeza) se define por las mismas ecuaciones hasta términos exponencialmente pequeños.

### 3.3.1. Primeras Propiedades

Siguiendo con la idea de añadir un trozo pequeño en la esquina para generar ciclos canard, consideramos la siguiente clase de PWL con tres zonas que dependen de tres parámetros:

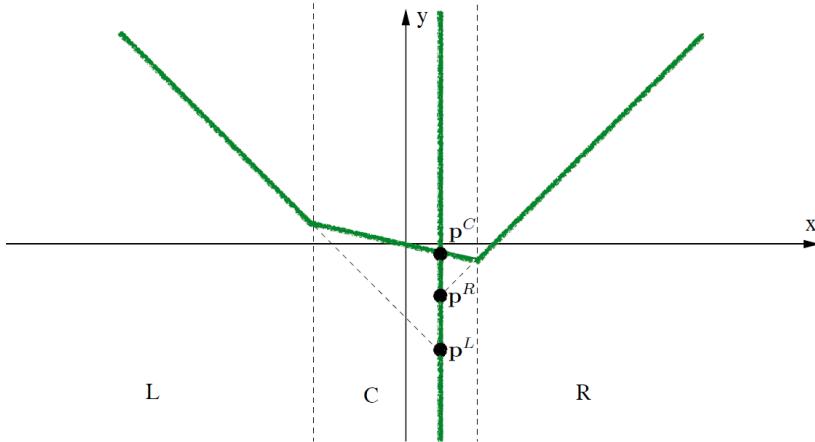
$$\begin{cases} \dot{x} = y + f(x, b, \varepsilon), \\ \dot{y} = \varepsilon(a - x), \end{cases} \quad (3.7)$$

donde

$$f(x, b, \varepsilon) = \begin{cases} x + \varepsilon & \text{si } x \leq -\varepsilon/(1-b), \\ bx & \text{si } -\varepsilon/(1-b) < x \leq \varepsilon/(1+b), \\ -x + \varepsilon & \text{si } x > \varepsilon/(1+b), \end{cases}$$

con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $|b| < 2\sqrt{\varepsilon}$  y  $a \in (-\varepsilon/(1-b), \varepsilon/(1+b))$ .

Notemos que la no linealidad se encuentra en la primera componente del campo vectorial, y que la segunda componente del campo vectorial es lineal. Las tres zonas de linealidad están separadas por las rectas verticales  $x = -\varepsilon/(1-b)$  y  $x = \varepsilon/(1+b)$ .



**Figura 3.3:** Zonas de linealidad, nulclinas y equilibrios (reales y virtuales) del sistema (3.7). Figura modificada de [10].

Para todo punto  $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y el vector de parámetros  $\eta = (a, b, \varepsilon)$ , denotamos por

$$\mathbf{x}(t; \eta, p) = (x(t; \eta, p), y(t; \eta, p))$$

a la solución del sistema (3.7) con parámetros  $a, b, \varepsilon$  y condición inicial  $\mathbf{x}(0; \eta, p) = p$ .

Ahora estamos en condiciones de poder mostrar algunas propiedades generales de esta familia de sistemas. El sistema (3.7) posee exactamente un punto de equilibrio que está en la zona central  $p^C = (a, -ab)$  cuyo tipo topológico depende únicamente del parámetro  $b$  y se puede comprobar con facilidad que la matriz del sistema en la

zona central es:

$$A^C = \begin{bmatrix} b & 1 \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,  $\delta^C = \det(A^C) = +\varepsilon > 0$ , y  $\tau^C = \text{Traza}(A^C) = b$ , de los que obtenemos tres casos:

- Si  $b = 0$ ,  $p^C$  es un centro.
- Si  $b < 0$ ,  $p^C$  es un foco estable.
- Si  $b > 0$ ,  $p^C$  es un foco inestable.

La orientación es la de las agujas del reloj en los tres casos.

A parte del punto de equilibrio  $p^C$ , hay otros dos puntos que no son equilibrios reales del sistema, pero que influyen en la dinámica de la misma forma en la que lo haría un equilibrio. A estos equilibrios se les suele llamar equilibrios virtuales en el contexto de los sistemas PWL. Estos son  $p^L = (a, -a - \varepsilon)$  y  $p^R = (a, a - \varepsilon)$ , puntos de equilibrio del sistema en las zonas izquierda y derecha, respectivamente, pero ambos localizados en la zona central. Es fácil obtener el tipo topológico de estos equilibrios, las matrices en las zonas respectivas son:

$$A^L = \begin{bmatrix} +1 & 1 \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad A^R = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

de las que se obtiene que  $\delta^L = \det(A^L) = \varepsilon = \delta^R$ , y  $\tau^L = \text{traza}(A^L) = +1 = -\tau^R$ , por tanto el tipo topológico de estos puntos de equilibrio virtuales es:

- $p^L$  es un nodo inestable.
- $p^R$  es un nodo estable.

Estudiemos los autovalores y el signo de los mismos en cada una de las zonas, así como la forma que adoptan los espacios invariantes asociados a cada autovalor. Los autovalores de la matriz de coeficientes de la zona izquierda están dados por:

$$\lambda_s^L = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2}; \quad \lambda_f^L = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2}. \quad (3.8)$$

Es fácil ver que  $\lambda_f^L > \lambda_s^L > 0$ , y que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_s^L = 0^+; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_f^L = 1^-.$$

Las rectas

$$\mu_s^L \equiv y = -\frac{\varepsilon(x - a)}{\lambda_s^L} - a - \varepsilon; \quad \mu_f^L \equiv y = -\frac{\varepsilon(x - a)}{\lambda_f^L} - a - \varepsilon, \quad (3.9)$$

son los espacios invariantes de los autovalores lento y rápido, respectivamente, para el punto de equilibrio virtual  $p^L$ . Notemos que son variedades invariantes sólo para el flujo en la zona izquierda. La pendiente de  $\mu_f^L$  tiende a cero con  $\varepsilon \rightarrow 0$  y la pendiente de  $\mu_s^L$  tiende a  $-1$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Consideramos ahora los autovalores de la matriz de coeficientes de la zona derecha:

$$\lambda_s^R = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2}; \quad \lambda_f^R = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2}. \quad (3.10)$$

Es fácil ver que  $\lambda_f^R < \lambda_s^R < 0$ , y que

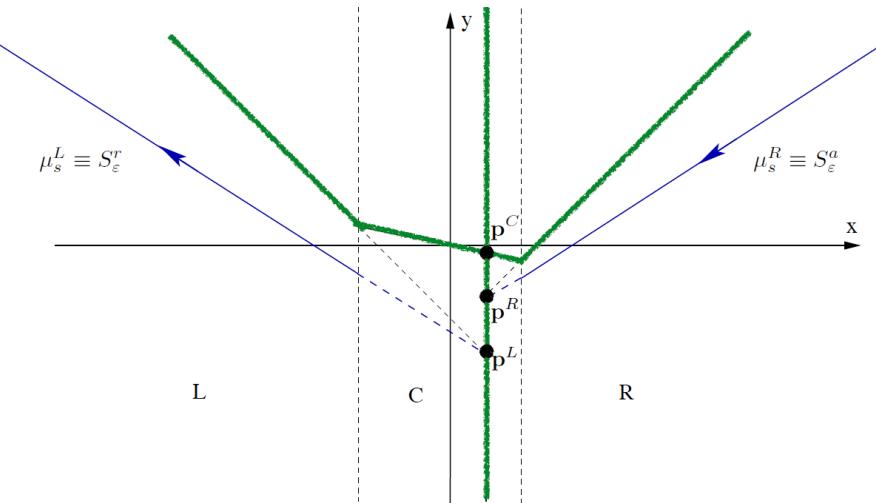
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_s^R = 0^-; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_f^R = -1^+,$$

Las líneas rectas

$$\mu_s^R \equiv y = -\frac{\varepsilon(x - a)}{\lambda_s^R} + a - \varepsilon; \quad \mu_f^R \equiv y = -\frac{\varepsilon(x - a)}{\lambda_f^R} + a - \varepsilon, \quad (3.11)$$

son los espacios o variedades invariantes correspondientes al autovalor lento y rápido, respectivamente, para el punto de equilibrio virtual  $p^R$ . Notemos que son variedades invariantes sólo para el flujo en la zona derecha. La pendiente de  $\mu_f^R$  tiende a cero con  $\varepsilon \rightarrow 0$  y la pendiente de  $\mu_s^R$  tiende a 1 con  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Se observa fácilmente que se dan, además, las siguientes igualdades:  $\lambda_s^L = -\lambda_s^R$  y  $\lambda_f^L = -\lambda_f^R$ .



**Figura 3.4:** Zonas de linealidad, nulclinas y equilibrios (reales y virtuales) del sistema (3.7) y las variedades lentas correspondientes a los nodos virtuales de las zonas exteriores. Figura modificada de [10].

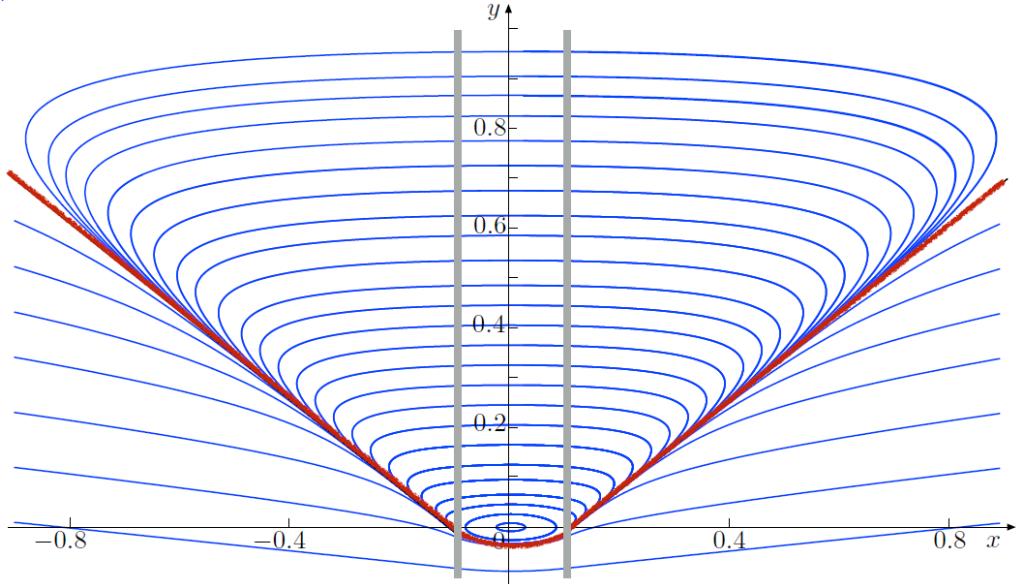
En nuestro caso, a diferencia del contexto clásico, sí podemos calcular las variedades canónicas de Fenichel de manera explícita. El espacio invariante de la zona derecha  $\mu_s^R$  es fuertemente atractivo y el espacio invariante de la zona izquierda  $\mu_s^L$  es fuertemente repulsivo. A medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$  se aproximan a la variedad crítica del sistema ( $y = |x|$ ). Se sigue entonces que (ver Figura 3.4):

- $\mu_s^R$  proporciona una elección canónica de una variedad lenta de Fenichel atractiva,  $S_a^\varepsilon$ .
- $\mu_s^L$  proporciona una elección canónica de una variedad lenta de Fenichel atractiva,  $S_r^\varepsilon$ .

Además, la zona central permite al flujo pasar a través de ella, desde la variedad atractiva  $S_a^\varepsilon$  hasta la variedad repulsiva  $S_r^\varepsilon$ . Así, la clase de sistemas (3.7) posee en principio todos los ingredientes para obtener ciclos canard.

### 3.3.2. Resultados principales

Nuestro objetivo principal es encontrar las condiciones bajo las cuales la familia de sistemas (3.7) posee una solución canard maximal. Para ello, empezamos analizando un sistema no genérico de la familia con  $a = b = 0$ .



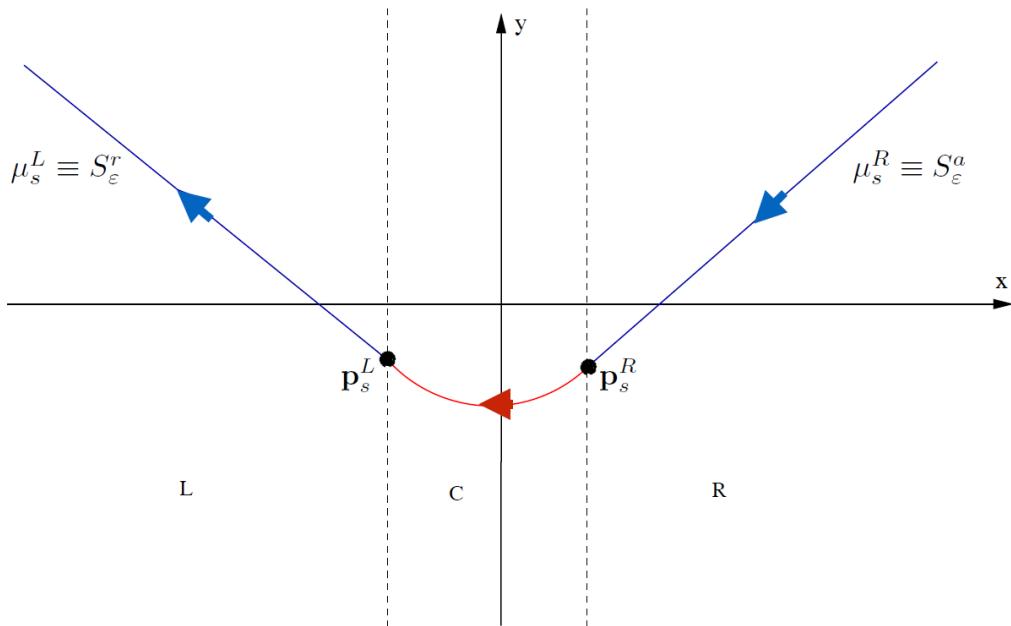
**Figura 3.5:** Plano de fase para el sistema (3.7) con  $a = b = 0$  y  $\varepsilon = 0,1$ . Además representamos las variables lentas  $\mu_s^L$  y  $\mu_s^R$  en rojo y en línea gris gruesa las líneas de separación. Figura modificada de [10].

**Teorema 15** El sistema (3.7) con  $a = b = 0$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$  posee un continuo de órbitas periódicas acotado inferiormente por las variedades lentes  $\mu_s^L$  y  $\mu_s^R$  en sus zonas correspondientes, y por la conexión de  $\mu_s^R$  a  $\mu_s^L$  en la zona central. Por debajo del continuo, las órbitas cruzan de la zona derecha a la central y después a la izquierda, en la que escapan al infinito. ■

La Figura 3.5 nos muestra el plano de fase del sistema (3.7) bajo estas hipótesis. Notemos que la situación no genérica descrita en el Teorema 15 es análoga a la del sistema Hamiltoniano encontrado en el análisis cerca del punto canard en el caso diferenciable [14]. En este caso encontramos una órbita especial que acota al continuo de órbitas periódicas. Esta órbita está formada por tres partes:

- Las variedades lentes invariantes  $\mu_s^L$  y  $\mu_s^R$  en sus zonas correspondientes.
- Una conexión entre ellas en la zona central,

como se aprecia en la Figura 3.6:



**Figura 3.6:** Representación de un posible canard maximal en el sistema (3.7). Figura modificada de [10].

Como hemos descrito anteriormente, en nuestro sistema (3.7) las variedades lentes invariantes  $\mu_s^L$  y  $\mu_s^R$  juegan el papel de las variedades lentes invariantes repulsiva

y atractiva  $S_r^\varepsilon$  y  $S_a^\varepsilon$ , respectivamente. Entonces podemos decir que esta órbita especial es la órbita canard maximal y que las órbitas periódicas del continuo son las órbitas canard periódicas.

La pregunta que naturalmente surge es si perturbando esta situación no genérica es posible encontrar valores apropiados para los parámetros de tal forma que la órbita canard maximal persista. En el siguiente teorema enunciamos la existencia de una curva en el espacio de parámetros  $a = \tilde{a}(b, \varepsilon)$  tal que el canard maximal se mantiene tras la perturbación.

**Teorema 16** *Existe una función  $a = \tilde{a}(b, \varepsilon)$ , analítica como función de  $(b, \sqrt{\varepsilon})$ , definida en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  conteniendo al origen y tal que para  $(b, \sqrt{\varepsilon}) \in U \cap \{\varepsilon > 0\}$ , el sistema (3.7) posee una órbita conectando las variedades lentes de las zonas exteriores.*

Además, tenemos que el desarrollo en serie de Taylor con respecto a  $b$  cerca de  $b = 0$  de la función  $a$  está dada por:

$$\begin{aligned}\tilde{a}(b, \varepsilon) &= \varepsilon((\tau^*/2) - 1)b/2 + O(b^3) \\ &= \left(\frac{\pi}{4}\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon)\right)b + O(b^3),\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde

$$\tau^* = \frac{\pi - \arcsin 2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}.\tag{3.13}$$

■

*Demostración:* A partir de ahora denotaremos  $p_S^R(\mu)$ , donde  $\mu = (a, b, \varepsilon)$ , al punto de intersección entre la variedad lenta derecha,  $\mu_S^R$ , y la recta de separación  $x = \varepsilon/(1+b)$ , y a  $p_S^L(\mu)$  al punto de intersección entre la variedad lenta izquierda,  $\mu_S^L$ , y la línea de separación  $x = -\varepsilon/(1-b)$ .

La existencia de una solución canard maximal se reduce a la existencia de una órbita conectando los puntos  $p_S^R(\mu)$  y  $p_S^L(\mu)$  (ver Figura 3.6). El conjunto de condiciones que caracterizan a esta conexión está dado por la existencia de:

$\tau > 0, 0 < \varepsilon \ll 1, |b| < 2\sqrt{\varepsilon}$  y  $a \in (-\varepsilon/(1-b), \varepsilon(b+1))$ , tales que, para

$$p_S^R(\mu) = (\varepsilon(b+1), a - \varepsilon - \varepsilon(\varepsilon/(1+b) - a)/\lambda_s^R)^T := (x_0^R, y_0^R)^T,\tag{3.14}$$

las siguientes condiciones se satisfacen:

$$x^C(\tau; \mu, p_S^R) = -\frac{\varepsilon}{1-b},\tag{3.15}$$

$$y^C(\tau; \mu, p_S^R) = -\frac{\varepsilon}{\lambda_S^L}(x^C(\tau; \mu, p_S^R) - a) - a - \varepsilon,\tag{3.16}$$

$$x^C(s; \mu, p_S^R) \in \left( -\frac{\varepsilon}{1-b}, \frac{\varepsilon}{1+b} \right) \quad \forall s \in (0, \tau). \quad (3.17)$$

En una primera etapa, analizamos la existencia de soluciones de las ecuaciones (3.15)-(3.16), que son las ecuaciones de cierre asociadas a la conexión. Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{cases} F(\tau, a, b, \varepsilon) = x^C(\tau; \mu, p_S^R) + \frac{\varepsilon}{1-b}, \\ G(\tau, a, b, \varepsilon) = y^C(\tau; \mu, p_S^R) + \frac{\varepsilon}{\lambda_S^L}(x^C(\tau; \mu, p_S^R) - a) + a + \varepsilon. \end{cases} \quad (3.18)$$

Entonces, la solución de las ecuaciones de cierre es equivalente a la solución  $(\tau, a, b, \varepsilon)$  del sistema

$$\begin{cases} F(\tau, a, b, \varepsilon) = 0, \\ G(\tau, a, b, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Además, la desigualdad (3.17) es equivalente a

$$F(s, a, b, \varepsilon) \in \left( 0, \frac{\varepsilon}{1-b} + \frac{\varepsilon}{1+b} \right) \quad \forall s \in (0, \tau). \quad (3.20)$$

Integrando el sistema lineal de la zona central con la condición inicial,  $p_S^R$ , obtenemos la siguiente expresión explícita de la solución:

$$\begin{cases} x^C(\tau; \mu, p_S^R) = \exp(b\tau/2) \frac{ab + a - \varepsilon}{(b+1)\sqrt{4\varepsilon - b^2}} \\ \quad \cdot ((b - 2\lambda_S^R) \sin(\beta\tau) - 2\beta \cos(\beta\tau)) + a, \\ y^C(\tau; \mu, p_S^R) = \exp(b\tau/2) \frac{ab + a - \varepsilon}{(b+1)\sqrt{4\varepsilon - b^2}} \\ \quad \cdot ((b(\lambda_S^R) + 2\varepsilon) \sin(\beta\tau) + 2\beta(b - \lambda_S^R) \cos(\beta\tau)) - ab, \end{cases} \quad (3.21)$$

donde

$$\beta(b, \varepsilon) = \sqrt{4\varepsilon - b^2}/2. \quad (3.22)$$

Tras reescalar los parámetros como sigue:

$$b = 2\hat{b}\sqrt{\varepsilon}; \quad \tau = \hat{\tau}/\varepsilon; \quad a = \hat{a}\varepsilon, \quad (3.23)$$

encontraremos una rama de soluciones del sistema (3.19).

Sean

$$\begin{aligned} \phi(\hat{\tau}, \hat{a}, \hat{b}, \varepsilon) &= \frac{\exp(\hat{b}\hat{\tau})(\hat{a} - 1 + 2\sqrt{\varepsilon}\hat{a}\hat{b})}{(1 + 2\sqrt{\varepsilon}\hat{b})\sqrt{1 - \hat{b}^2}}, \\ \theta(\hat{b}, \hat{\tau}) &= \hat{\tau}\sqrt{1 - \hat{b}^2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Se sigue de la definición de  $F$  (3.18) y de la fórmula para  $x^C$  (3.21) que  $F = \varepsilon \hat{F}$ , donde  $\hat{F}$  está dado por

$$\begin{aligned}\hat{F}(\hat{\tau}, \hat{a}, \hat{b}, \varepsilon) = & \phi\left(-\sqrt{1-\hat{b}^2} \cos(\theta) + (\hat{b} + \sqrt{\varepsilon}) \sin(\theta)\right) \\ & + \frac{1}{1-2\sqrt{\varepsilon}\hat{b}} + O(\varepsilon).\end{aligned}\quad (3.25)$$

Para  $G$  esta estimación es más complicada. Primero, notemos que

$$y^C = \varepsilon^{3/2} \left( \phi((2\hat{b} + \varepsilon)\sqrt{1-\hat{b}^2} \cos(\theta) + (-2\hat{b}^2 + \sqrt{\varepsilon}\hat{b}) \sin(\theta)) - 2\hat{a}\hat{b} + O(\varepsilon) \right).$$

En segundo lugar, reescribimos  $G$  como sigue:

$$G = y^C + \frac{\varepsilon}{\lambda_S^L} F - \frac{\varepsilon}{\lambda_S^L} \left( \frac{\varepsilon}{1-\sqrt{\varepsilon}\hat{b}} + \varepsilon\hat{a} \right) + \varepsilon\hat{a} + \varepsilon.$$

Por las relaciones (3.8) es claro que  $\varepsilon/\lambda_S^L = 1 + O(\varepsilon)$ , por tanto,

$$-\frac{\varepsilon}{\lambda_S^L} \left( \frac{\varepsilon}{1-\sqrt{\varepsilon}\hat{b}} + \varepsilon\hat{a} \right) + \varepsilon\hat{a} + \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{1-2\sqrt{\varepsilon}\hat{b}} + \varepsilon + O(\varepsilon^2) = -2\varepsilon^{3/2} + O(\varepsilon^2).$$

Se sigue entonces que  $G = \varepsilon^{3/2}\hat{G} + (\varepsilon/\lambda_S^L)\hat{F}$ , donde  $\hat{F}$  está dado por (3.25) y

$$\begin{aligned}\hat{G}(\hat{\tau}, \hat{a}, \hat{b}, \varepsilon) = & \phi\left((2\hat{b} + \sqrt{\varepsilon})\sqrt{1-\hat{b}^2} \cos(\theta) + (1-2\hat{b}^2 + \varepsilon\hat{b}) \sin(\theta)\right) \\ & - 2\hat{a}\hat{b} - 2\hat{b} + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Por tanto, resolver  $F = G = 0$  para  $\varepsilon > 0$  es equivalente a resolver  $\hat{F} = \hat{G} = 0$ . Para  $\varepsilon = 0$ , tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{F} &= \frac{\exp(\hat{b}\hat{\tau})(\hat{a}-1)}{\sqrt{1-\hat{b}^2}} \left( -\sqrt{1-\hat{b}^2} \cos(\theta) + \hat{b} \sin(\theta) \right) + \hat{a} + 1, \\ \hat{G} &= \frac{\exp(\hat{b}\hat{\tau})(\hat{a}-1)}{\sqrt{1-\hat{b}^2}} \left( (2\hat{b})\sqrt{1-\hat{b}^2} \cos(\theta) + (1-2\hat{b}^2) \sin(\theta) \right) - 2\hat{a}\hat{b} - 2\hat{b}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Para  $\hat{a} = \hat{b} = 0$ , la ecuación  $\hat{F} = 0$  nos da la condición  $\cos(\hat{\tau}) = -1$ , de donde  $\hat{\tau} = \pi$ . Además la ecuación  $\hat{G} = 0$  se satisface con  $\hat{a} = \hat{b} = 0$  y  $\hat{\tau} = \pi$ . Para aplicar el Teorema de la Función Implícita es necesario probar que  $\det(J(\pi, 0, 0, 0)) \neq 0$ , donde

$$J(\hat{\tau}, \hat{a}, \hat{b}, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\tau}}(\hat{\tau}, \hat{a}, \hat{b}, \varepsilon) & \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{a}}(\hat{\tau}, \hat{a}, \hat{b}, \varepsilon) \\ \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\tau}}(\hat{\tau}, \hat{a}, \hat{b}, \varepsilon) & \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{a}}(\hat{\tau}, \hat{a}, \hat{b}, \varepsilon) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\tau}}(\pi, 0, 0, 0) &= 0, & \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{a}}(\pi, 0, 0, 0) &= 2, \\ \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\tau}}(\pi, 0, 0, 0) &= 1, & \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{a}}(\pi, 0, 0, 0) &= 0,\end{aligned}$$

y entonces  $\det(J(\pi, 0, 0, 0)) = -2 \neq 0$ .

Por tanto, del Teorema de la Función Implícita concluimos que existe un conjunto  $U \in \mathbb{R}^2$  abierto que contiene a  $(\hat{b}, \varepsilon) = (0, 0)$  y dos funciones analíticas  $\bar{\tau}(\hat{b}, \varepsilon)$  y  $\bar{a}(\hat{b}, \varepsilon)$  definidas en  $U$ , tales que  $\bar{\tau}(0, 0) = \pi$ ,  $\bar{a}(0, 0) = 0$  y cuando  $\varepsilon > 0$ :

$$(\tilde{\tau}(b, \varepsilon), \tilde{a}(b, \varepsilon), b, \varepsilon)$$

es una solución del sistema (3.19), donde

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= \bar{\tau}(b/(2\sqrt{\varepsilon}), \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}, \\ \tilde{a} &= \bar{a}(b/(2\sqrt{\varepsilon}), \varepsilon)/\varepsilon.\end{aligned}$$

Para asegurar la existencia de la conexión, además, debemos probar que las soluciones de las ecuaciones de cierre (3.15) y (3.16) satisfacen la desigualdad (3.17), o equivalentemente, la condición (3.20).

Necesitamos probar

$$F(s, \tilde{a}, b, \varepsilon) \in \left(0, \frac{\varepsilon}{1-b} + \frac{\varepsilon}{1+b}\right) \quad \forall s \in (0, \tilde{\tau}),$$

Lo haremos por contradicción. Asumimos que existe  $\tau_1 < \tilde{\tau}$  tal que  $F(\tau_1, \tilde{a}, b, \varepsilon) > \varepsilon/(1-b) + \varepsilon/(1+b)$ , o equivalentemente,  $x^C(\tau_1, \tilde{\eta}, p_S^R(\tilde{\eta})) > -\varepsilon/(1-b)$ , donde  $\tilde{\eta} = (\tilde{a}, b, \varepsilon)$ . Entonces, para permitir al flujo volver a la recta  $x = -\varepsilon/(1-b)$ , es necesario que  $\tilde{\tau} \geq 2\pi/\sqrt{\varepsilon} \geq 2\tau^*$ , donde

$$\tau^* = \frac{\pi - \operatorname{sen}^{-1}(2\sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}},$$

y corresponde a la solución para  $a = b = 0$ . Pero  $\tilde{\tau}(0, \varepsilon) = \tau^*$ , lo que contradice  $\tilde{\tau} \geq 2\tau^*$ .

Un razonamiento análogo nos permite probar que  $F(s, \tilde{a}, b, \varepsilon) > 0 \quad \forall s \in (0, \tilde{\tau})$ .

Por consiguiente, la prueba de la existencia de una subfamilia de sistemas PWL (3.7) que tienen una solución canard maximal está completa. Pasemos a demostrar la expresión en serie de Taylor para  $\tilde{a}$ :

Procederemos por diferenciación implícita. Sabemos que  $(\tilde{\tau}(b, \varepsilon), \tilde{a}(b, \varepsilon), b, \varepsilon)$  es una solución del sistema (3.19), esto es,

$$\begin{cases} F(\tilde{\tau}(b, \varepsilon), \tilde{a}(b, \varepsilon), b, \varepsilon) = 0, \\ G(\tilde{\tau}(b, \varepsilon), \tilde{a}(b, \varepsilon), b, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

y además, se satisface que  $\tilde{\tau}(0, \varepsilon) = \tau^*$  y  $\tilde{a}(0, \varepsilon) = 0$ . Denotamos

$$p^* = p_S^R(0, 0, \varepsilon) = (\varepsilon, \lambda_S^R \varepsilon).$$

Derivando en el sistema (3.28) con respecto a  $b$  en  $b = 0$ , es fácil ver que  $\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial b}(0, \varepsilon)$  y  $\frac{\partial \tilde{a}}{\partial b}(0, \varepsilon)$  deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) & \frac{\partial F}{\partial a}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) \\ \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) & \frac{\partial G}{\partial a}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial b}(0, \varepsilon) \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial b}(0, \varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial b}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) \\ \frac{\partial G}{\partial b}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Empecemos calculando  $\frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau, a, b, \varepsilon)$ . Por la definición de la función  $G$  (ver 3.18),

$$\frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau, a, b, \varepsilon) = \frac{\partial y^C}{\partial \tau}(\tau; \eta, p_S^R) + \frac{\varepsilon}{\lambda_S^L} \left( \frac{\partial x^C}{\partial \tau}(\tau; \eta, p_S^R) \right). \quad (3.30)$$

Del sistema (3.7), en la zona central  $\dot{x} = y + by$ ,  $\dot{y} = \varepsilon(a - x)$ , y entonces,

$$\frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau, a, b, \varepsilon) = \varepsilon(a - x^C(\tau; \eta, p_S^R)) + \frac{\varepsilon}{\lambda_S^L} (y^C(\tau; \eta, p_S^R) + bx^C(\tau; \eta, p_S^R)). \quad (3.31)$$

Ahora, se sigue de  $x^C(\tau^*; 0, p^*) = -\varepsilon$ ,  $y^C(\tau^*; 0, p^*) = \lambda_S^R \varepsilon$ , y de la expresión (3.31) que

$$\frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) = 0.$$

El cálculo de  $\frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, a, b, \varepsilon)$  es similar al de  $\frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau, a, b, \varepsilon)$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, a, b, \varepsilon) = \frac{\partial x^C}{\partial \tau}(\tau; \eta, p_S^R) = y^C(\tau; \eta, p_S^R) + bx^C(\tau; \eta, p_S^R), \quad (3.32)$$

y entonces

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) = y^C(\tau^*; 0, p^*) = \lambda_S^R \varepsilon. \quad (3.33)$$

Ahora, obtenemos  $\frac{\partial G}{\partial a}(\tau, a, b, \varepsilon)$ . De la definición (3.18),

$$\frac{\partial G}{\partial a}(\tau, a, b, \varepsilon) = \frac{\partial y^C}{\partial a}(\tau; \eta, p_S^R) + \frac{\varepsilon}{\lambda_S^L} \left( \frac{\partial x^C}{\partial a}(\tau; \eta, p_S^R) - 1 \right) + 1. \quad (3.34)$$

De la expresión explícita de la solución de en la zona central dada en (3.21), no es difícil llegar a

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^C}{\partial a}(\tau^*; 0, p^*) &= 2, \\ \frac{\partial y^C}{\partial a}(\tau^*; 0, p^*) &= 2\lambda_2^R,\end{aligned}\tag{3.35}$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial a}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) = 2.$$

Ahora, para finalizar el cálculo de la matriz de coeficientes del sistema (3.29), sólo tenemos que encontrar  $\frac{\partial F}{\partial a}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon)$ . Tomando la derivada de la función  $F$  respecto a  $a$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial a}(\tau, a, b, \varepsilon) = \frac{\partial x^C}{\partial a}(\tau; \eta, p_S^R).\tag{3.36}$$

A la luz de la primera expresión de (3.35), la evaluación en  $(\tau^*, 0, 0, \varepsilon)$ , nos lleva a

$$\frac{\partial F}{\partial a}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) = 2.\tag{3.37}$$

Calculamos el segundo miembro del sistema (3.29). De la definición de la función  $F$ , (ver 3.18)

$$\frac{\partial F}{\partial b}(\tau, a, b, \varepsilon) = \frac{\partial x^C}{\partial b}(\tau; \eta, p_S^R) + \frac{\varepsilon}{(1-b)^2},\tag{3.38}$$

y entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial b}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) = \frac{\partial x^C}{\partial b}(\tau; 0, p^*) + \varepsilon.\tag{3.39}$$

De la expresión explícita de la solución en la zona central dada en (3.21), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^C}{\partial b}(\tau^*; 0, p^*) &= -(\varepsilon\tau^*)2, \\ \frac{\partial y^C}{\partial b}(\tau^*; 0, p^*) &= \varepsilon(1 - \tau^*/2),\end{aligned}\tag{3.40}$$

y de la primera expresión, conseguimos

$$\frac{\partial F}{\partial b}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) = \varepsilon(1 - \tau^*/2).\tag{3.41}$$

Buscando  $\frac{\partial G}{\partial b}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon)$ , de la definición de la función  $G$  (ver 3.18), tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial b}(\tau, a, b, \varepsilon) = \frac{\partial y^C}{\partial b}(\tau; \eta, p_S^R) + \frac{\varepsilon}{\lambda_S^L} \frac{\partial x^C}{\partial b}(\tau; \eta, p_S^R).\tag{3.42}$$

De la expresión (3.40), obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial b}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon) = \varepsilon(1 - \tau^*/2). \quad (3.43)$$

que es lo mismo que para  $\frac{\partial F}{\partial b}(\tau^*, 0, 0, \varepsilon)$ .

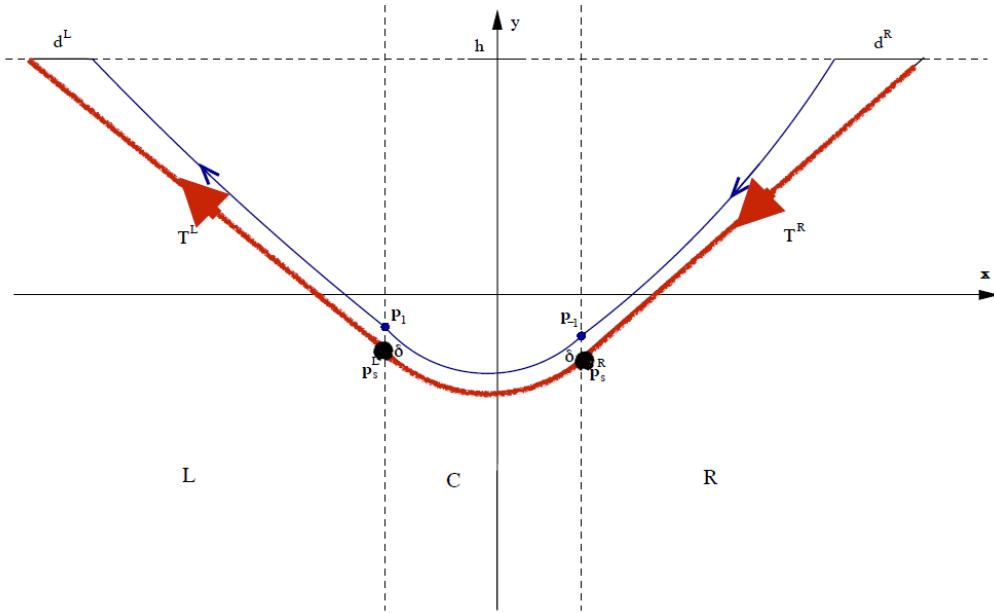
Por tanto, hemos obtenido que el sistema (3.29) es equivalente al sistema:

$$\begin{bmatrix} \lambda_S^R \varepsilon & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial b}(0, \varepsilon) \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial b}(0, \varepsilon) \end{bmatrix} = \varepsilon(\tau^*/2 - 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Cuando  $\varepsilon \neq 0$ , el sistema tiene una única solución, que está dada por

$$\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial b}(0, \varepsilon) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{a}}{\partial b}(0, \varepsilon) = -\varepsilon(\tau^*/2 - 1)/2.$$

Análogamente, la diferenciación implícita de las funciones  $F$  y  $G$  hasta orden dos nos permite obtener las derivadas de segundo orden. Esto finaliza la prueba. ■



**Figura 3.7:** Esquema de un ciclo canard (en rojo) y una órbita cercana (en azul) para el caso estable  $b > 0$ . Figura modificada de [10].

De la existencia de la solución canard maximal, se sigue la existencia de una familia de ciclos límite canard aislados en el sistema (3.7), que se enuncia en el siguiente teorema:

**Teorema 17** Para cada punto  $(0, y_0)$  con  $y_0 > 0$ ,  $\exists \hat{U} \subset \mathbb{R}$  conteniendo al origen tal que para  $(b, \sqrt{\varepsilon}) \in \hat{U} \cap \{\varepsilon > 0\}$   $\exists \hat{a}(b, \varepsilon)$ , con los mismos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor que  $\tilde{a}(b, \varepsilon)$  dado en el Teorema 16 tal que el sistema (3.7) posee un ciclo límite canard que pasa por  $(0, y_0)$ . ■

*Demostración:* Consideramos un punto  $(0, y_0)$  con  $y_0 > 0$ . Integrando hacia atrás, la órbita cruzará desde la zona central a la izquierda y alcanzará un entorno de  $\mu_s^L$  en un tiempo  $O(\varepsilon)$ . Después de esto, como la variedad  $\mu_s^L$  es repulsiva y estamos integrando hacia atrás, la órbita se dirige a la zona central, mientras que la distancia a  $\mu_s^L$  se contrae con un ratio  $O(\exp(-c/\varepsilon))$ , donde  $c$  es una constante positiva que depende de  $y_0$ , para un tiempo de orden 1. Entonces, la órbita alcanza la zona central en un punto  $p_1$  que está exponencialmente cerca de la intersección entre la variedad invariante  $\mu_s^L$  y la recta de separación  $x = -\varepsilon/(1-b)$ , denotado por  $p_s^L$ .

Integrando hacia delante, la órbita cruzará de la zona central a la derecha y alcanzará un entorno de  $\mu_s^R$  en un tiempo  $O(\varepsilon)$ . Después de esto, como la variedad  $\mu_s^R$  es atractiva, la órbita se dirige a la zona central mientras la distancia a  $\mu_s^R$  se contrae con un ratio  $O(\exp(-c/\varepsilon))$ , donde  $c$  es una constante positiva que depende de  $y_0$ , para un tiempo de orden 1. Entonces, la órbita alcanza la zona central en un punto  $p_{-1}$  que está exponencialmente cerca de la intersección entre la variedad invariante  $\mu_s^R$  y la recta de separación  $x = \varepsilon/(1+b)$ , denotado por  $p_s^R$ , dado por la expresión (3.14).

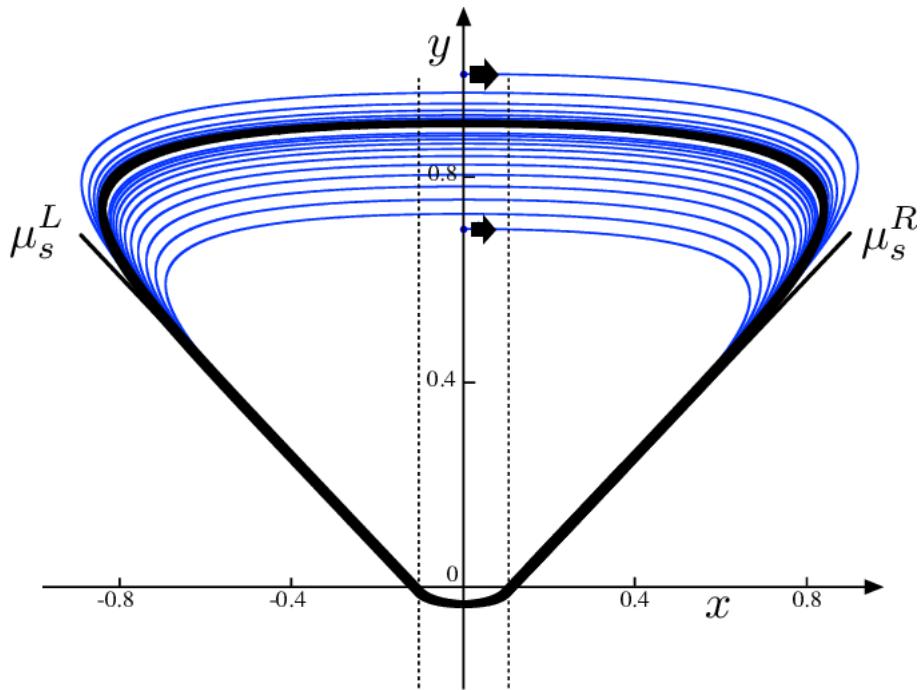
Observando la conexión entre  $p_{-1}$  y  $p_1$ , notemos que  $p_{-1}$  y  $p_1$  y sus derivadas están exponencialmente cerca de  $p_s^R$  y  $p_s^L$  y sus derivadas, respectivamente. Se sigue que las ecuaciones que establecen la conexión entre  $p_{-1}$  y  $p_1$  tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} F(\tau, a, b, \varepsilon) \\ G(\tau, a, b, \varepsilon) \end{bmatrix} + \xi(y_0, a, b, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $F$  y  $G$  son las funciones que establecen la conexión entre  $p_s^R$  y  $p_s^L$  (3.19) dadas en (3.18), y  $\xi(y_0, a, b, \varepsilon) = (\xi_1(y_0, a, b, \varepsilon), \xi_2(y_0, a, b, \varepsilon))$  con  $\xi_1(y_0, a, b, \varepsilon), \xi_2(y_0, a, b, \varepsilon)$  y sus derivadas son  $O(\exp(-c/\varepsilon))$  pequeñas, donde  $c$  es una constante positiva que depende de  $y_0$ . Entonces, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita al conjunto de ecuaciones que establecen la conexión entre  $p_{-1}$  y  $p_1$ , como hicimos para las ecuaciones (3.19).

Por lo tanto, obtenemos la existencia de  $\hat{U} \subset \mathbb{R}^2$  conteniendo a  $(b, \varepsilon) = (0, 0)$ , tales que, para  $(b, \varepsilon) \in \hat{U} \cap \varepsilon > 0$ , entonces existe  $\hat{a}(b, \varepsilon)$  con los mismos primeros términos en su desarrollo de Taylor que  $\tilde{a}(b, \varepsilon)$  dada por el Teorema 16, tal que el sistema (3.7) posee un ciclo límite canard. Esto concuye la prueba. ■

En la Figura 3.8 se representa un ciclo canard estable del sistema (3.7) y dos órbitas en su zona de atracción, una con un valor inicial en el eje  $y$  menor que el corte



**Figura 3.8:** Plano de fase del sistema (3.7) con un ciclo canard estable (órbita negra gruesa), para  $b = 0,009944$ ,  $\varepsilon = 0,1$  y  $a = \tilde{a}(b, \varepsilon)$ . También hemos representado las variedades lentas invariantes  $\mu_s^L$  y  $\mu_s^R$  (líneas negras continuas) y las líneas de separación (líneas discontinuas). Dos trayectorias convergiendo hacia el ciclo canard estable se muestran en azul, la condición inicial se indica por un punto y la dirección del movimiento con una flecha. Figura modificada de [10].

superior del ciclo canard con el eje de ordenadas y otra con un valor inicial en el eje  $y$  mayor. Hemos utilizado la fórmula (3.12) para incorporar los valores apropiados de los parámetros tales que el canard existe.

A continuación, enunciamos sin demostración que puede ser consultada en [10], un resultado sobre la estabilidad de los ciclos canard.

**Teorema 18** *La familia de ciclos límite canard cuya existencia se anunció en el Teorema 17 es asintóticamente estable si  $b > 0$  e inestable si  $b < 0$ .* ■

**Corolario 19** *El Teorema 18 implica la unicidad de los ciclos canard.* ■

*Demostración:* En efecto, si existiesen dos ciclos canard para los mismos valores del parámetro uno estaría dentro del otro y la región intermedia contendría un ciclo canard con la estabilidad opuesta. ■

Con esto hemos concluido la existencia de ciclos canard maximales en nuestro modelo PWL (Teorema 16) y por otra parte, hemos demostrado que estos ciclos canard son únicos (Corolario 19), a su vez hemos encontrado una expresión para la conexión del canard maximal (Teorema 16). Por tanto, este modelo lineal a trozos ya representa de manera fiel la dinámica del sistema diferenciable. En la siguiente sección realizaremos un análisis más detallado de las similitudes y diferencias entre los modelos lineales a trozos estudiados y el modelo original.

### 3.4. Similitudes y Diferencias con el Caso Diferenciable

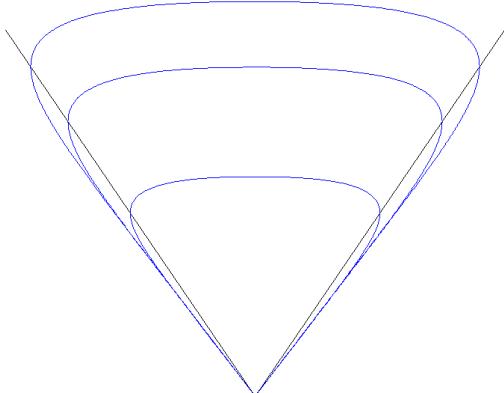
En esta sección final del capítulo, vamos a realizar una recopilación de los modelos estudiados hasta ahora y los compararemos con el modelo diferenciable original.

Recordemos que el sistema que estamos modelando exhibe un cambio brusco de la amplitud con una variación pequeña del parámetro, además de la existencia de ciclos límite canard y de un canard maximal.

Para la elaboración de esta sección se han seguido las referencias [2] y [10].

#### 3.4.1. Primeros Modelos

##### PWL con una Esquina



En este caso, obteníamos un continuo de órbitas canard homoclínas (Figura 3.9), pero no era posible obtener ciclos límite variando la posición de la  $y$ -nulclina. Es decir, no hay explosión canard (cambio de amplitud brusco) cuando variamos el parámetro, ni hay una órbita maximal; por lo que no reproduce la dinámica del sistema original.

**Figura 3.9:** Continuo de órbitas del sistema (3.1) junto a la  $x$ -nulclina.

## PWL con dos Esquinas

El modelo (3.5) presenta algunas mejoras respecto al modelo anterior, como la aparición de una nueva solución que no teníamos en el caso bizonal. Veamos las similitudes con el caso diferenciable:

- *Bifurcación de Hopf.* Los cuasi-canards que encontramos en este modelo aparecen tras una transición explosiva cerca de una bifurcación tipo Hopf de sistemas lineales a trozos (en los modelos lento-rápido aparecen tras una bifurcación de Hopf clásica) que crea un ciclo límite estable en el sistema.
- *Canards y cuasi-canards.* Las soluciones del sistema siguen durante un intervalo de tiempo  $O(1)$ , la parte repulsiva de la nulclina rápida, sin embargo, la ausencia de una variedad lenta repulsiva constituye una diferencia importante con el caso diferenciable, por eso llamamos a estos ciclos cuasi-canards.
- *Bifurcación en el infinito.* Cuando decrece  $\varepsilon$  (manteniendo los demás parámetros fijos), los ciclos canard en el caso nodo y los ciclos cuasi-canard en el caso foco desaparecen con el equilibrio en una bifurcación heteroclinia en el infinito.

Sin embargo, el modelo también presenta diferencias con el caso diferenciable:

- *Comportamiento de la rama de bifurcación.* Es una función lineal del parámetro  $a$ , aunque con una pendiente muy pronunciada durante la explosión. En el caso diferenciable es una función no lineal.
- *Cuasi-canards con cabeza.* El sistema sólo presenta canards sin cabeza, esto se debe a la ausencia de una variedad lenta repulsiva en el modelo.
- *El fenómeno de la Superexplosión.* La superexplosión hace referencia a la transición instantánea a la relajación que ocurre en nuestro modelo cuando el equilibrio se encuentra en la esquina y no estamos en el caso foco. Es una característica nueva propia de la versión lineal a trozos.

### 3.4.2. Sistemas Lineales a Trozos con Tres Zonas

Una vez estudiados y descartados los modelos anteriores por no reproducir completamente el fenómeno de la explosión canard de los sistemas clásicos, sabemos qué ingredientes necesitamos para conseguir que nuestro modelo reproduzca de forma fiel la dinámica del sistema original.

Consideramos la familia de sistemas (3.7). Los Teoremas 16 y 17 nos aseguran la existencia de los ciclos canard maximal y de los ciclos límite canard aislados. Además, en el Teorema 18 se establece la estabilidad de estos ciclos.

Estos resultados nos permiten señalar similitudes y diferencias entre el fenómeno canard en los Sistemas Lineales a Trozos y en el contexto clásico diferenciable.

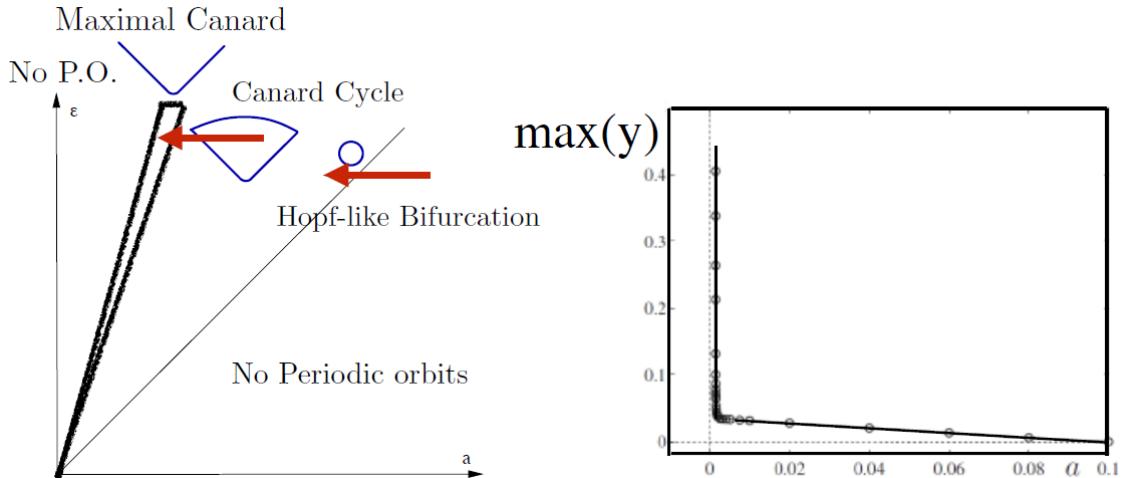
Encontramos muchas similitudes entre ambos fenómenos. En particular, si en el caso diferenciable los ciclos límite que se convierten en canard nacen en una bifurcación de Hopf, en el caso Lineal a Trozos podemos decir que su nacimiento tiene lugar en una bifurcación tipo Hopf que ocurre cuando el punto de equilibrio real cruza de una zona exterior a la central modificando el parámetro  $a$ .

En el Corolario 20 y la Figura 3.10 se explicará la estructura de esta bifurcación con más detalle.

**Corolario 20** Consideramos  $b = 0(\varepsilon)$  y  $\hat{b}$  definida por  $b = 2\sqrt{\varepsilon}\hat{b}$ .

1. Sea  $b > 0$ . Una bifurcación tipo Hopf supercrítica tiene lugar cuando el equilibrio cruza de la zona derecha a la central, esto es, en  $a_H^R(b, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{b+1} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}\hat{b}+1} = \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}) > 0$ . De esta forma, a medida que el parámetro  $a$  disminuye tras  $a_H^R$ , aparece un ciclo límite estable bizonal contenido en ambas zonas, central y la derecha. La amplitud de ciclo límite crece linealmente en las dos zonas hasta que cruza el límite izquierdo,  $x = -\varepsilon/(1-b)$  y se convierte en un ciclo límite trizonal. Luego, el sistema lineal izquierdo afecta a la dinámica y el ciclo límite se convierte en un canard. Mientras  $a$  decrece, la amplitud crece hasta el valor donde ocurre el canard maximal  $\tilde{a}(b, \varepsilon) = (\frac{\pi}{4}\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon))b + O(b^3) = \frac{\pi}{2}\hat{b}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}) > 0$  y después el ciclo límite desaparece.
2. Sea  $b < 0$ . Una bifurcación tipo Hopf subcrítica toma lugar cuando el equilibrio cruza de la zona izquierda a la central, esto es, en  $a_H^L(b, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{1-b} = -\frac{\varepsilon}{1-2\sqrt{\varepsilon}\hat{b}} = -\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}) < 0$ . De esta forma, a medida que se incrementa el parámetro tras pasar  $a_H^L$  aparece un ciclo límite bizonal inestable contenido en ambas zonas la izquierda y la central. La amplitud del ciclo límite crece linealmente en las dos zonas hasta que cruza la frontera derecha en  $x = \varepsilon/(1+b)$  y se transforma en un ciclo límite trizonal. Entonces, el sistema lineal derecho afecta a las dinámicas y el ciclo límite se transforma en un canard. Mientras  $a$  crece, la amplitud del ciclo canard aumenta hasta el valor donde ocurre este canard maximal  $\tilde{a}(b, \varepsilon) = (\frac{\pi}{4}\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon))b + O(b^3) = \frac{\pi}{2}\hat{b}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}) < 0$  y después el ciclo límite desaparece.

■



**Figura 3.10:** A la izquierda, diagrama de bifurcación para  $\hat{b} > 0$ . Consideramos  $\varepsilon > 0$  fijado y  $a > 0$  en el sector situado más a la derecha. Decreciendo  $a$ , toma lugar una bifurcación de Hopf, dando lugar a un pequeño ciclo límite estable. El ciclo límite crece a medida que  $a$  decrece. Cuando  $a$  alcanza la región sombreada en gris oscuro, el ciclo límite se convierte en un ciclo canard. A lo largo de la línea situada más a la izquierda la familia de ciclos canard terminan en una conexión de canard maximal. A la derecha, rama explosiva de ciclos límite obtenida mediante simulación directa cuando variamos el parámetro  $a$  con  $\varepsilon = 0,1$  y  $b = 0,009944$  fijos. Figura modificada de [10].

La desaparición del ciclo está probablemente relacionada con una bifurcación global en el infinito que podría analizarse compactificando el plano de fases.

En el corolario anterior se aclara que podemos reproducir con la clase de Sistemas Lineales a Trozos (3.7) diagramas de bifurcación similares a los obtenidos en el caso diferenciable.

### 3.5. Conclusiones

Como hemos visto, los sistemas PWL son capaces de reproducir dinámica de tipo canard, con la ventaja de que podemos elegir representantes canónicos de las variedades de Fenichel,  $S_a^\varepsilon$  y  $S_r^\varepsilon$ , debido a la posibilidad de calcular analíticamente las variedades lentas asociadas a los equilibrios en nuestro modelo PWL.

A su vez, nuestros sistemas PWL también pueden reproducir otras dinámicas asociadas a fenómenos canard más complejos que se presentan en el caso diferenciable. Como son:

1. Si incluimos un parámetro,  $\kappa$ , que se encargue de romper la simetría de las zonas exteriores, podemos obtener la aparición de más de un ciclo límite ca-

nard, como además puede producirse en el caso [17] que estudiaremos en la siguiente sección.

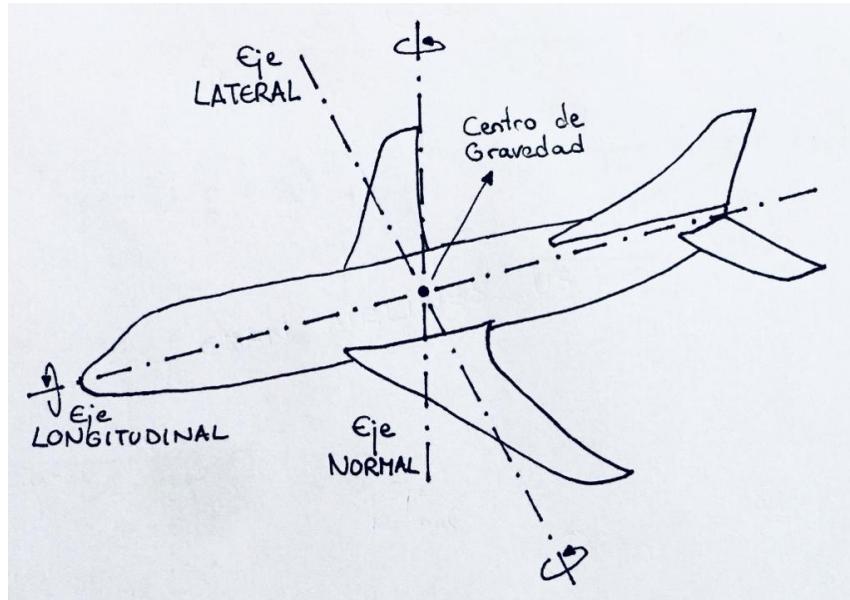
2. Si ampliamos el número de dimensiones en el que estamos trabajando podemos crear un modelo PWL que reproduzca las llamadas Oscilaciones de Tipo Mixto (o MMO por sus siglas en inglés), que son un tipo de oscilaciones que presenta (al menos) oscilaciones de dos períodos y amplitudes distintas, cuya combinación produce la aparición de dinámicas complejas [3]. Destacamos que los sistemas con varias escalas de tiempo son los utilizados para estudiar este tipo de comportamientos y que las neuronas muestran este tipo de comportamiento mixto cuando se comunican entre ellas [6], [7].



# Capítulo 4

## Estudio de un ejemplo concreto: Ciclos Canard en la Dinámica de Aeronaves en Tierra

En este capítulo estudiaremos una versión PWL de un modelo de pérdida de estabilidad general de aeronaves posadas en el suelo presentado en [17]. En primer lugar, realizaremos una presentación del modelo original para establecer las propiedades fundamentales que debe reproducir nuestro modelo PWL.



**Figura 4.1:** Representación esquemática de los ejes de referencia de una aeronave, junto a su centro de gravedad.

## 4.1. Presentación del Caso

### 4.1.1. Introducción

La pérdida de estabilidad lateral de un avión de pasajeros cuando realiza un giro mientras está posado en el suelo bajo un empuje constante de sus motores está asociada con la saturación de las fuerzas de frenado. Esta propiedad física del sistema se puede relacionar directamente con una explosión canard.

El modelo industrial de la aeronave no contiene explícitamente una separación de escalas de tiempo, aunque localmente, y cerca de la transición, la velocidad de la aeronave actúa como una variable lenta. Debido a la complejidad de las ecuaciones que se consideran en el modelo, no es práctico un estudio analítico directo. Sin embargo, una simulación numérica consigue identificar propiedades del sistema características de la separación de escalas de tiempo y oscilaciones de tipo canard.

Este caso difiere de los ejemplos de explosión canard anteriores en que la variedad crítica (nulclina rápida) tiene un único pliegue y una asíntota en la dirección rápida, en lugar de ser una cúbica con dos pliegues.

Para resaltar las principales diferencias cualitativas entre las explosiones canard clásicas de la literatura y la de la aeronave, en [18] se presenta un modelo bidimensional tratable analíticamente, mientras que en este capítulo, desarrollaremos una versión PWL de dicho modelo.

### 4.1.2. Modelo de la Aeronave

El modelo matemático aquí presentado fue específicamente desarrollado en [18]. Un esquema de la disposición de los elementos y las fuerzas se puede consultar en esa referencia.

Consideramos un modelo matemático completamente parametrizado de una aeronave para pasajeros de tamaño medio. La aeronave tiene una configuración de triciclo con dos trenes de aterrizaje principales situados en las alas y un tren de aterrizaje situado en la proa que se utiliza para realizar los cambios de dirección.

La aeronave se representa con seis grados de libertad y los efectos no lineales importantes se capturan en las componentes del modelo para los neumáticos y la aerodinámica. Los tres primeros grados de libertad ya proporcionan una descripción razonable de la dinámica, estos son, la velocidad longitudinal  $v_x$ , la velocidad lateral  $v_y$ , y la velocidad de rotación a lo largo del eje vertical  $\omega_z$ . Como queremos modelar de forma precisa la asimetría de carga entre los trenes de aterrizaje, es necesario incluir otros tres grados de libertad, la velocidad vertical  $v_z$ , la velocidad de alabeo (a lo largo del eje longitudinal)  $\omega_x$ , y la velocidad de cabeceo  $\omega_y$  (a lo largo del eje lateral). Los ejes pueden consultarse en la Figura 4.1.

Las ecuaciones de movimiento de este sistema se derivan del equilibrio de fuerzas y momentos en cada grado de libertad, y son las siguientes:

$$\begin{aligned}
m(\dot{v}_x + v_z \omega_y - v_y \omega_z) &= F_{xT} - F_{xR} - F_{xL} - F_{xN} \cos(\delta) - F_{yN} \sin(\delta) - F_{xA}, \\
m(\dot{v}_y + v_x \omega_z - v_z \omega_x) &= F_{yR} + F_{yL} + F_{yN} \cos(\delta) - F_{xN} \sin(\delta) + F_{yA}, \\
m(\dot{v}_z + v_y \omega_x - v_x \omega_y) &= F_{zW} - F_{zR} - F_{zL} - F_{zN} - F_{zA}, \\
I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y \omega_z &= l_{yL}F_{zL} - l_{yR}F_{zR} - l_{zL}F_{yL} - l_{zR}F_{zR} \\
&\quad - l_{zN}F_{yN} \cos(\delta) + l_{zN}F_{xN} \sin(\delta) + l_{zA}F_{yA} + M_{xA}, \\
I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z \omega_x &= l_{xN}F_{zN} - l_{zN}F_{xN} \cos(\delta) - l_{zN}F_{yN} \sin(\delta) \\
&\quad - l_{xR}F_{zR} - l_{zR}F_{xR} - l_{xL}F_{zL} - l_{zL}F_{xL} \\
&\quad + l_{zT}F_{xT} + l_{xA}F_{zA} + l_{zA}F_{xA} + M_{yA}, \\
I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x \omega_y &= l_{yR}F_{xR} - l_{yL}F_{xL} - l_{xR}F_{yR} - l_{xL}F_{yL} \\
&\quad + l_{xN}F_{yN} \cos(\delta) - l_{xN}F_{xN} \sin(\delta) + l_{xA}F_{yA} + M_{zA}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

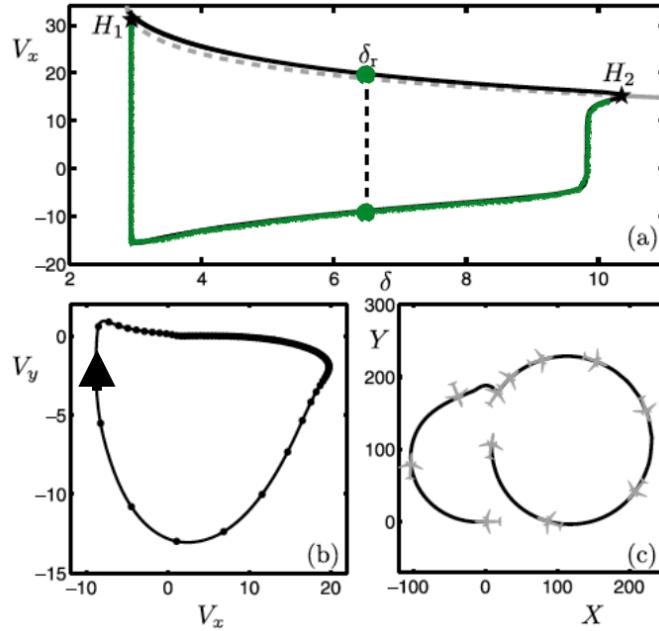
En este capítulo identificaremos un caso específico, estableciendo los valores de algunos de los parámetros. Se fija la masa de la aeronave en  $m = 45420 \text{ Kg}$  (caso ligero) y consideramos los momentos de inercia principales ( $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ ). El ángulo de dirección se aplica al tren de proa y se denota por  $\delta$ . El peso de la aeronave es  $F_{zW} = mg$  que actúa en el centro de masa que se sitúa a una distancia del 14% del eje aerodinámico principal medido desde la proa y sobre ese mismo eje. Los elementos de fuerza ortogonales en cada uno de los neumáticos se denotan por  $F_{*i}$  con  $i = L, R, N$ , la fuerza aerodinámica y los elementos del momento actúan en el centro aerodinámico de la aeronave y se denotan por  $F_{*A}$  y  $M_{*A}$ , respectivamente. La fuerza de empuje se asume que actúa paralelamente al eje de la aeronave y se denota por  $F_{xT}$ . Las distancias relativas al centro de gravedad de la aeronave se denotan por  $l_*$ . El modelo matemático anterior (4.1) ha sido validado en la industria aeronáutica (más detalles en [18]).

Como se puede apreciar en las ecuaciones (4.1), las fuerzas laterales  $F_{xL}, F_{yL}, F_{xR}$  y  $F_{yR}$ , dependen de forma no lineal de la carga vertical en el neumático de proa,  $F_{xN}, F_{yN}$  y su ángulo de dirección del desplazamiento,  $\delta$ . Para ángulos pequeños la relación entre el ángulo de desplazamiento y la fuerza lateral es lineal, pero si aumentamos el ángulo, la fuerza satura antes de decrecer. Esta característica no lineal juega un papel muy importante en los resultados que expondremos a continuación.

## 4.2. Resultados del Caso Diferenciable

### 4.2.1. Investigación Uniparamétrica

Las soluciones circulares de radio constante son estados estacionarios del modelo que podemos seguir bajo variaciones paramétricas. Como el ángulo de desplazamiento o la potencia del empuje, el resto de los parámetros se fijan en valores realistas.



**Figura 4.2:** La Figura (a) muestra una rama (gris) de estados estacionarios (continua si es estable y discontinua si es inestable) representados por la velocidad longitudinal  $v_x$  como función del ángulo de desplazamiento  $\delta$ . Los cambios de estabilidad ocurren en los puntos de Hopf  $H_1$  y  $H_2$ , la velocidades máxima de  $v_x$  a lo largo de una rama de soluciones periódicas se dibujan en negro y la mínima en verde. La Figura (b) muestra la proyección en el plano de fase  $(v_x, v_y)$  de la órbita periódica con  $\delta_r = 6.5^\circ$ . La Figura (c) muestra la trayectoria del centro de gravedad en el plano  $(X, Y)$ , con marcas a tiempos equiespaciados. Figura modificada de [17].

Desde el punto de vista de las aplicaciones, el objetivo es encontrar los límites de operación segura para una aeronave girando sobre el suelo, que corresponde a encontrar la región paramétrica donde la solución es estable. Fuera de los límites de esta región, el comportamiento inestable se traduce en que la aeronave no puede seguir la solución de radio constante. Los límites de estabilidad corresponden a bifurcaciones de Hopf que producen nuevas órbitas periódicas estables, que son soluciones de radio no constante.

En la Figura 4.2(a) se muestra un análisis de una bifurcación uniparamétrica del

ángulo de desplazamiento con la velocidad longitudinal utilizada como medida de la solución. El empuje de los motores se ha fijado en un 14 % del máximo valor posible, para el que existe dinámica inestable [18]. Los cambios de estabilidad ocurren en las bifurcaciones de Hopf  $H_1$  para  $\delta_{H_1} \approx 2.94^\circ$  y  $H_2$  para  $\delta_{H_2} \approx 10.35^\circ$ . Una rama de soluciones periódicas que conectan las dos bifurcaciones de Hopf se representa por dos curvas, una negra y otra verde, que muestran los valores máximos y mínimos de  $v_x$ , respectivamente, la curva maximal sigue de cerca las soluciones estacionarias inestables. Cerca de ambos notamos una caída brusca del valor mínimo de  $v_x$  junto a la órbita periódica que alcanza un valor más bajo que cambia de forma gradual con  $\delta$ .

La Figura 4.2(b) muestra una proyección de una órbita periódica en el plano  $(v_x, v_y)$  con  $\delta_r = 6, 5^\circ$  y un periodo de 81s. Se pasa mucho más tiempo cerca de  $v_y = 0$ , lo que indica que  $v_x$  es una variable lenta en esta parte del espacio de fase. Esta parte lenta está seguida por una transición rápida de vuelta a pequeños valores de  $v_x$ , esto es, una oscilación de relajación con un segmento lento y otro rápido que corresponde con un giro inestable.

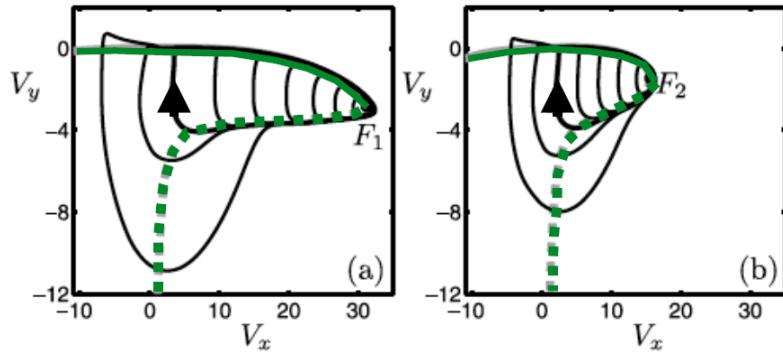
En la Figura 4.2(c) se ilustra esto último. En ella se muestra la trayectoria del centro de gravedad de la aeronave sobre el plano de tierra  $(X, Y)$  (los marcadores están equiespaciados temporalmente). La condición inicial de la órbita periódica se escoge donde la velocidad longitudinal es máxima. La aeronave intenta seguir un círculo de giro de radio constante pero empieza a cerrarse, resultando en una pérdida de la estabilidad lateral y un giro, que además, va acompañado con un descenso brusco de  $v_x$ . La aeronave entonces se para, después de lo cual se acelera bajo el empuje constante de los motores para de nuevo intentar seguir un círculo de radio constante y el proceso se repite.

#### 4.2.2. Identificación de Ciclos Canard

Nos concentraremos en la naturaleza exacta de las caídas abruptas de  $v_x$  cerca de los dos puntos de Hopf. Cerca de  $H_2$  la rama de soluciones periódicas inicialmente crece con una progresión similar a una raíz cuadrada. Sin embargo, a medida que decrece  $\delta$  hay una caída brusca y repentina del valor mínimo de  $v_x$  para  $\delta_{c2} \approx 9.83^\circ$ . Cerca de  $H_1$  encontramos una caída incluso más brusca de  $v_x$  para  $\delta_{c1} \approx 2.92^\circ$ . Este cambio brusco de la diferencia de amplitud para un rango pequeño del parámetro cerca de ambas bifurcaciones de Hopf es característico de una explosión canard. Los puntos  $\delta_{c1}$  y  $\delta_{c2}$  se determinan por ser los puntos de las ramas de órbitas periódicas con el mayor incremento de amplitud.

Veamos que, efectivamente, son explosiones canard. Debido a la complejidad de las ecuaciones de movimiento no es posible identificar la separación de escalas temporales en términos de los parámetros del sistema. Sin embargo, la encontramos en la Figura 4.2(b) de dinámica lento-rápida en las soluciones periódicas de tipo relaja-

ción para  $\delta_r$ , en la que  $v_x$  actúa como la variable lenta y  $v_y$  como la variable rápida del sistema. Como la órbita periódica es altamente atractiva, las variables  $v_z, \omega_x, \omega_y$  se mantienen prácticamente constantes, la velocidad rotacional  $\omega_z$  sí varía significativamente durante el movimiento, pero sigue de forma pasiva la dinámica de  $v_y$ . Por tanto, podemos tomar esta última como representativa de las variables rápidas del sistema. Presentamos entonces la dinámica en el plano  $(v_x, v_y)$  y progresamos computando las variedades críticas cerca de  $H_1$  y  $H_2$ .



**Figura 4.3:** Familia de órbitas canard en el plano  $(v_x, v_y)$  de la explosión canard para  $\delta_{c1}$  cerca de  $H_1$  en (a) y para  $\delta_{c2}$  cerca de  $H_2$  en (b). La curva gruesa con la flecha es el canard maximal. También se representa la variedad crítica con su rama estable de forma continua y la inestable discontinua. Figura modificada de [17].

Añadimos la ligadura  $\dot{v}_x = 0$ , así conseguimos congelar la dinámica de la variable lenta  $v_x$  y trantándola como parámetro y computando los estados estacionarios del sistema reducido, podemos obtener las variedades críticas asociadas con las explosiones canard cerca de  $H_1$  y  $H_2$ . Cabe destacar que cerca del punto de Hopf y durante la explosión canard respectiva no se observa dependencia de la variedad crítica con el ángulo de desplazamiento.

La Figura 4.3 nos muestra las variedades críticas para  $\delta_{c1}$  y  $\delta_{c2}$ . También se muestran las respectivas familias de órbitas periódicas cercanas a los puntos de Hopf. Ambas variedades críticas tienen una rama superior atractiva y una inferior repulsiva.

La Figura 4.3 exhibe las principales características asociadas a los ciclos canard y la explosión canard. La primera de estas características es que muy cerca del equilibrio del sistema completo que pasa por una bifurcación de Hopf en  $H_1$  y  $H_2$ , hay puntos fold de una variedad crítica en  $F_1$  y  $F_2$ , respectivamente. La distancia entre estos puntos en el espacio de fase es del orden de la separación de escalas de tiempo,  $\varepsilon$ . La segunda de las características es que las órbitas periódicas crecen rápidamente en tamaño si variamos  $\delta$  alejándola de los puntos de Hopf, y siguen no sólo la parte estable de la variedad crítica sino también un segmento de su rama inestable, lo que claramente las identifica como órbitas periódicas canard.

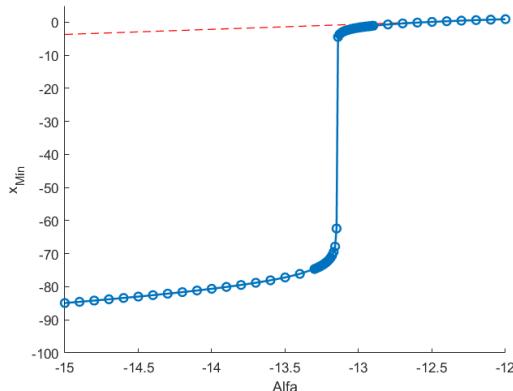
En la Figura 4.3 identificamos un canard maximal que sigue la parte inestable durante el mayor tiempo. Las órbitas periódicas más pequeñas que el canard maximal suben desde la rama inestable hasta la estable, las llamadas *canards sin cabeza*, en contraste con las órbitas periódicas más grandes que el canard maximal, que inicialmente se mueven hacia abajo desde la rama inestable y vuelven a la rama estable después de pasar por valores negativos de  $v_y$ , las llamadas *canards con cabeza*. Las órbitas canard existen para rangos exponencialmente pequeños del parámetro  $\delta$ . Cabe destacar que la órbita más grande en la Figura 4.3(b) es realmente una oscilación de relajación, ya que no sigue la parte inestable de la variedad crítica (comparando con la Figura 4.2(b) vemos que tienen la misma forma).

#### 4.2.3. Modelo Plano de la Explosión Canard

Para capturar las características cualitativas clave de la explosión canard descrita anteriormente, en el trabajo [17], se presenta el modelo del campo vectorial plano ( $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$ ):

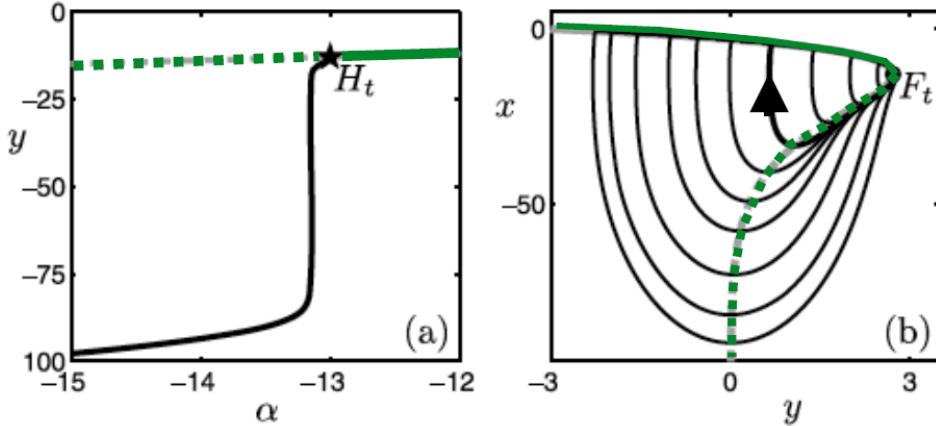
$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -y - (x - a)e^{\frac{x}{b}}, \\ \dot{y} = x - \alpha, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde  $0 < \varepsilon \ll 1$  es el parámetro de separación de las escalas temporales, y  $\alpha$  es el parámetro de la bifurcación que determina el punto de equilibrio. Los parámetros  $a$  y  $b$  determinan la forma de la variedad crítica que no depende de  $\alpha$ . Esta variedad tiene un fold en  $x = a - b$  y la recta  $y = 0$  es una asymptota horizontal donde  $x$  tiende a  $-\infty$ . Hay un punto de Hopf para  $\alpha = \alpha_H = a - b$ , exactamente en el fold de la variedad crítica.



**Figura 4.4:** Diagrama de bifurcación uniparamétrica de  $x$  en función de  $\alpha$ , en él se ven el equilibrio (en rojo, discontinuo) y el mínimo en  $x$  de la órbita periódica de la bifurcación (en azul, continuo).

La Figura 4.4 ilustra la explosión canard modelada en (4.2) para  $a = -3$ ,  $b = 10$  y  $\varepsilon = 0.1$ . Se han escogido estos valores para que la variedad crítica se aproxime lo máximo a la del modelo (4.1). La Figura 4.4 muestra el característico salto del valor absoluto de  $y$  después de la bifurcación de Hopf supercrítica para  $\alpha_H = -13$ .



**Figura 4.5:** Explosión canard de (4.2) para  $a = -3$ ,  $b = 10$ ,  $\varepsilon = 0.001$ . En (a) muestra el diagrama de bifurcación uniparamétrica de  $y$  en función de  $\alpha$ , en él se ven el equilibrio (en verde) y el mínimo de la amplitud de la órbita periódica de la bifurcación (en negro). En (b) se muestra la variedad crítica (en verde) junto con las órbitas canard asociadas en el plano  $(x, y)$ , el canard maximal es la curva gruesa con la flecha. Figura modificada de [17].

Las órbitas canard correspondientes se muestran en la Figura 4.5 junto a la variedad crítica con una rama estable (continua) y otra inestable (discontinua).

Una comparación directa entre la Figura 4.2 y Figura 4.4 y entre la Figura 4.3 con la Figura 4.5(b) muestra que las características principales de la explosión canard del modelo (4.1) se han capturado en (4.2) como son la fold y la asíntota en la variedad crítica.

A priori, el campo vectorial (4.2) es lo más simple posible por lo que puede verse como una forma normal para este tipo de explosión canard. Sin embargo, nosotros planteamos dos versiones más simplificadas del modelo (4.2), ambas lineales a trozos, que nos permitirán reproducir la dinámica canard de una manera más sencilla.

### 4.3. Construcción del Modelo Lineal a Trozos

Una vez presentado el estudio del caso diferenciable, pasamos a construir nuestra versión lineal a trozos. Para ello, debemos realizar un estudio pormenorizado de la variedad crítica y las variedades lentas del sistema (4.2).

### 4.3.1. Estudio de la Variedad Crítica del Sistema Diferenciable

Para facilitarnos los cálculos de las secciones siguientes vamos a realizar un cambio de variable para que tanto el punto fold como la bifurcación de Hopf ocurran para  $x = 0$ . Denotando  $\hat{x} = x + b - a$ ,  $\hat{y} = y$  y sustituyendo en (4.2), se tiene que:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\hat{x}} = -\hat{y} - (\hat{x} - b)e^{\frac{\hat{x}-b+a}{b}} \\ \dot{\hat{y}} = \hat{x} - b + a - \alpha. \end{cases} \quad (4.3)$$

Para simplificar aún más la notación, llamaremos  $x$  a  $\hat{x}$  e  $y$  a  $\hat{y}$ . Además, como  $\varepsilon > 0$  consideramos el cambio de variables  $t = \tau/\varepsilon$ , que nos lleva al sistema equivalente:

$$\begin{cases} x' = -y - (x - b)e^{\frac{x-b+a}{b}} \\ y' = \varepsilon(x - b + a - \alpha), \end{cases} \quad (4.4)$$

donde  $\left( x' = \frac{dx}{dt} \text{ y } y' = \frac{dy}{dt} \right)$ .

A partir de este nuevo modelo vamos a calcular las nulclinas:

$$\begin{aligned} x\text{-nulclina: } \dot{x} = 0 &\Rightarrow y = -(x - b)e^{\frac{x-b+a}{b}}, \\ y\text{-nulclina: } \dot{y} = 0 &\Rightarrow x = \alpha + b - a. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La variedad crítica que vamos a reproducir con nuestro modelo lineal a trozos es la nulclina de la variable rápida, en nuestro caso  $x$ :

$$y = f_0(x) = -(x - b)e^{\frac{x-b+a}{b}}. \quad (4.6)$$

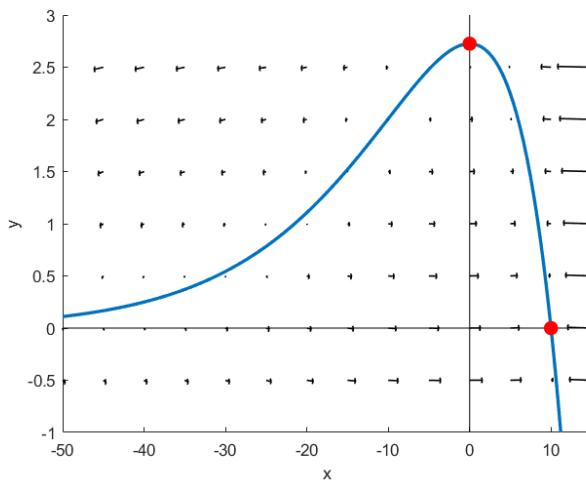
Vamos a realizar un estudio de esta variedad para poder construir nuestro modelo lineal a trozos, ya que la otra variedad ya es lineal per se.

En la Figura 4.6, representamos la variedad crítica (4.6) del sistema (4.4) junto con algunos puntos de interés para nuestro modelo lineal a trozos. Además, se aprecia claramente que hay una asíntota en  $y = 0$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  y que la variedad crítica presenta un punto fold en su máximo (marcado en rojo). El máximo se da para  $x_0 = 0$  y la variedad crítica toma un valor  $\beta = f_0(0) = be^{-\frac{b-a}{b}}$  y el punto de corte con el eje de abcisas se da en  $f_0(x_c) = 0 \iff x_c = b$ .

Los valores numéricos para las variables con los que trabajaremos en esta sección son los mismo que los utilizados en la referencia [17], ( $a = -3, b = 10, \varepsilon = 0.001$ ). Por lo que los valores de interés calculados anteriormente en nuestro caso son:

$$\beta = f_0(0) = be^{-\frac{b-a}{b}} \approx 2.72531793..., \quad x_c = 10. \quad (4.7)$$

Con estos puntos notables de la variedad crítica vamos a construir nuestro modelo lineal a trozos. Vamos a proponer dos modelos diferentes, uno con tres zonas en el que el punto fold se sitúa en una esquina (intersección de dos rectas) como en el modelo (3.5) y otro con cuatro zonas en el que añadiremos una nueva zona de unión de la misma forma que en el modelo (3.7).



**Figura 4.6:** Se presenta la variedad crítica del sistema (4.4) en azul y el flujo como un campo vectorial. Los puntos marcados en rojo son los cruces de la variedad crítica con los ejes, en  $(0, \beta)$  para el eje de ordenadas y  $(b, 0)$  para el eje de abcisas.

#### 4.3.2. Modelo Lineal a Trozos con Tres Zonas

En esta sección proponemos un sistema de la forma:

$$\begin{cases} x' = -y + f(x), \\ y' = \varepsilon(x - b + a - \alpha), \end{cases} \quad (4.8)$$

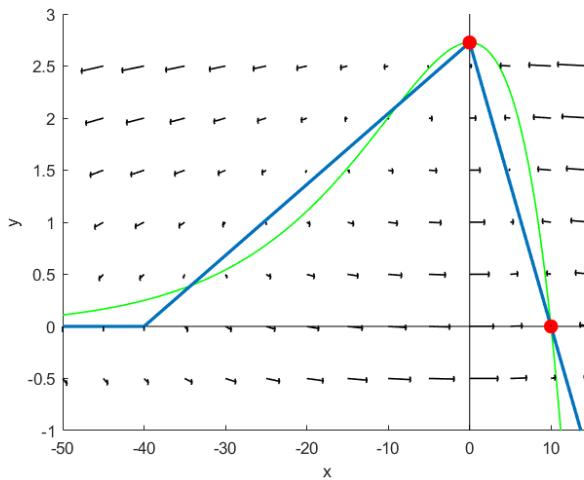
donde  $f(x)$  es una función lineal a trozos continua con tres zonas.

En particular, en una primera aproximación, tomamos la asíntota  $y = 0$  como la aproximación lineal de la curva  $y = f_0(x)$  desde  $(-\infty, 0)$  hasta un punto  $(-s, 0)$  con  $s > 0$  que será un parámetro variable. A partir de ese punto, tomaremos otra recta que lo conecte con el máximo en  $(0, \beta)$  y posteriormente otra recta que pase por el máximo y por el punto de corte de la variedad con el eje de abcisas  $(b, 0)$ . Todo esto

queda recogido en la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -s, \\ \frac{\beta}{s}(x + s) & \text{si } -s < x < 0, \\ \frac{\beta}{b}(b - x) & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

donde se impone que los parámetros  $\beta$ ,  $s$  y  $b$  son parámetros tales que  $\beta^2 - 4\epsilon s^2 > 0$  y  $\beta^2 - 4\epsilon b^2 > 0$ . En la Figura 4.7 podemos apreciar una representación de esta nueva variedad crítica junto al flujo del sistema (4.8).



**Figura 4.7:** Variedad crítica del sistema (4.8) con  $f$  dada por (4.9) para  $s = 40$  en azul junto a su flujo y la variedad crítica original en verde. También se marcan con un punto rojo los puntos de corte con los ejes.

### Puntos de Equilibrio

Pasamos a calcular los puntos de equilibrio de nuestro modelo. Sabemos que el lugar geométrico en el que  $\dot{y} = 0$  es la recta  $x = \alpha + b - a$ , por lo que nuestro modelo lineal a trozos sólo tendrá un punto de equilibrio en  $(\alpha + b - a, f(\alpha + b - a))$ , que, dependiendo del valor de  $\alpha + b - a$ , se situará en una de las zonas de linealidad. Los valores posibles que puede tener este punto de equilibrio son los siguientes:

$$\begin{aligned} p^{LL} &\equiv (\alpha + b - a, 0), \\ p^L &\equiv \left(\alpha + b - a, \frac{\beta}{s}(\alpha + b - a + s)\right), \\ p^R &\equiv \left(\alpha + b - a, \frac{\beta(a - \alpha)}{b}\right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

De estos equilibrios, uno será el equilibrio real del sistema y los otros dos serán equilibrios virtuales, que, como hemos indicado en el Capítulo 3, influyen en la dinámica de la misma forma en la que lo haría un equilibrio. Los equilibrios virtuales se sitúan en la zona del equilibrio real. El equilibrio real será:

- $p^{LL}$  si  $\alpha + b - a < -s$ ,
- $p^L$  si  $-s < \alpha + b - a < 0$ ,
- $p^R$  si  $\alpha + b - a > 0$ .

Pasamos a obtener el tipo topológico de los equilibrios, calculando la matriz de coeficientes correspondiente a cada zona:

$$A^{LL} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad A^L = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{s} & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad A^R = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{b} & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

de las que obtenemos que  $\delta^{LL} = \delta^L = \delta^R = \varepsilon > 0$ ,  $\tau^{LL} = 0$ ,  $\tau^L = \frac{\beta}{s}$  y  $\tau^R = -\frac{\beta}{b}$ . Como estamos suponiendo que  $\beta^2 - 4\varepsilon s^2 > 0$  y  $\beta^2 - 4\varepsilon b^2 > 0$ , se tiene que  $\tau^2 - 4\delta > 0$  en todas las zonas, por lo que el tipo topológico de los equilibrios es:

- $p^{LL}$  es un centro.
- $p^L$  es un nodo inestable.
- $p^R$  es un nodo estable.

Estudiemos los autovalores y el signo de los mismos en las zonas izquierda  $L$  y derecha  $R$ , así como la forma que adoptan los espacios invariantes asociados a cada autovalor. Los autovalores de la matriz de coeficientes de la zona izquierda están dados por:

$$\lambda_f^L = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\varepsilon s^2}}{2s}; \quad \lambda_s^L = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\varepsilon s^2}}{2s}. \quad (4.11)$$

Es fácil ver que  $\lambda_f^L > \lambda_s^L > 0$ , y que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_s^L = 0^+; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_s^L = \left(\frac{\beta}{s}\right)^-.$$

Las líneas rectas

$$\begin{aligned} \mu_f^L &\equiv y = \frac{\varepsilon(x - \alpha - b + a)}{\lambda_f^L} + \frac{\beta}{s}(\alpha + b - a + s), \\ \mu_s^L &\equiv y = \frac{\varepsilon(x - \alpha - b + a)}{\lambda_s^L} + \frac{\beta}{s}(\alpha + b - a + s), \end{aligned} \quad (4.12)$$

son las variedades invariantes correspondientes al autovalor rápido y lento, respectivamente, para el punto de equilibrio  $p^L$ . Notemos que son variedades invariantes sólo para el flujo de la zona izquierda. La pendiente de  $\mu_f^L$  tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y la pendiente de  $\mu_s^L$  tiende a  $\beta/s$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Consideramos ahora los autovalores de la matriz de coeficientes de la zona derecha:

$$\lambda_f^R = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\varepsilon b^2}}{2b}; \quad \lambda_s^R = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\varepsilon b^2}}{2b}. \quad (4.13)$$

Es fácil ver que  $\lambda_f^R < \lambda_s^R < 0$ , y que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_s^R = 0^-; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_s^R = \left(-\frac{\beta}{b}\right)^+.$$

Las líneas rectas

$$\begin{aligned} \mu_f^R \equiv y &= \frac{\varepsilon(x - \alpha - b + a)}{\lambda_f^R} + \frac{\beta}{b}(a - \alpha), \\ \mu_s^R \equiv y &= \frac{\varepsilon(x - \alpha - b + a)}{\lambda_s^R} + \frac{\beta}{b}(a - \alpha), \end{aligned} \quad (4.14)$$

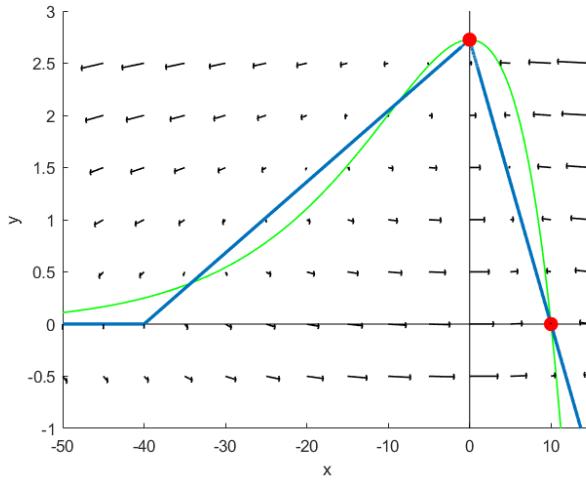
son las variedades invariantes correspondientes al autovalor rápido y lento, respectivamente, para el punto de equilibrio  $p^R$ . Notemos que son variedades invariantes sólo para el flujo de la zona derecha. La pendiente de  $\mu_f^R$  tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y la pendiente de  $\mu_s^R$  tiende a  $-\beta/b$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### 4.3.3. Modelo Lineal a Trozos con Cuatro Zonas

En una segunda aproximación, vamos a seguir la idea del modelo (3.7) añadiendo una pequeña zona central, por lo que la variedad crítica sigue ahora la siguiente expresión, donde  $0 < \varepsilon \ll 1$  es el parámetro de separación de escalas temporales:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -s, \\ \frac{\beta}{s}(x + s) & \text{si } -s < x < \frac{\varepsilon}{\gamma - \frac{\beta}{s}}, \\ \gamma x + \beta - \varepsilon & \text{si } \frac{\varepsilon}{\gamma - \frac{\beta}{s}} < x < \frac{\varepsilon}{\gamma + \frac{\beta}{b}}, \\ \frac{\beta}{b}(b - x) & \text{si } x > \frac{\varepsilon}{\gamma + \frac{\beta}{b}}. \end{cases} \quad (4.15)$$

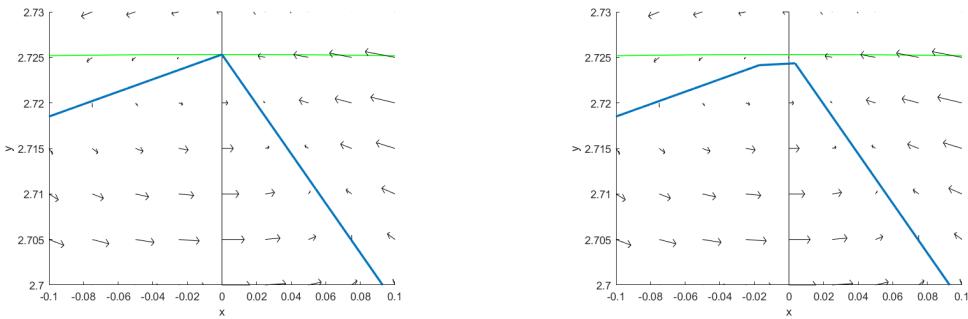
donde los parámetros  $\beta$ ,  $b$ ,  $s$  y  $\gamma$  son tales que  $\beta^2 - 4\varepsilon s^2 > 0$ ,  $\beta^2 - 4\varepsilon b^2 > 0$  y  $\gamma^2 - 4\varepsilon < 0$ .



**Figura 4.8:** Variedad crítica del modelo (4.15) para  $s = 40$  en azul junto a su flujo y a la variedad crítica original en verde. También se marcan con un punto rojo los puntos de corte con los ejes.

En la Figura 4.8 podemos apreciar una representación de esta nueva variedad crítica junto a su flujo.

Aunque en las Figuras 4.7 y 4.8 parece que el flujo es el mismo, al hacer una ampliación de un entorno de la nueva zona se aprecia claramente que el flujo no es el mismo (ver Figura 4.9).



**Figura 4.9:** Ampliación de la zona del máximo de las Figuras 4.7 y 4.8

## Puntos de Equilibrio

Añadir una nueva zona en el sistema lineal (4.15) tiene un efecto inmediato en los puntos de equilibrio con respecto a los de (4.9), ya que pasan de ser uno real y dos virtuales (en (4.9)) a ser uno real y tres virtuales (en (4.15)), lo que a su vez

conlleva a un cambio en la dinámica global del sistema. Los nuevos valores posibles para los puntos de equilibrio son:

$$\begin{aligned} p^{LL} &\equiv (\alpha + b - a, 0), \\ p^L &\equiv (\alpha + b - a, \frac{\beta}{s}(\alpha + b - a + s)), \\ p^C &\equiv (\alpha + b - a, \gamma(\alpha + b - a) + \beta - \varepsilon), \\ p^R &\equiv (\alpha + b - a, \frac{\beta(a - \alpha)}{b}). \end{aligned} \tag{4.16}$$

De estos equilibrios, uno será el equilibrio real del sistema y los otros tres serán equilibrios virtuales, que, como hemos indicado en el Capítulo 3, influyen en la dinámica de la misma forma en la que lo haría un equilibrio. Los equilibrios virtuales se sitúan en la zona del equilibrio real. El equilibrio real será:

- $p^{LL}$  si  $\alpha + b - a < -s$ ,
- $p^L$  si  $-s < \alpha + b - a < \frac{\varepsilon}{\gamma - \frac{\beta}{s}}$ ,
- $p^C$  si  $\frac{\varepsilon}{\gamma - \frac{\beta}{s}} < \alpha + b - a < \frac{\varepsilon}{\gamma + \frac{\beta}{b}}$ ,
- $p^R$  si  $\alpha + b - a > \frac{\varepsilon}{\gamma + \frac{\beta}{b}}$ .

Pasamos a obtener el tipo topológico de los equilibrios, calculando la matriz de coeficientes correspondiente a cada zona:

$$A^{LL} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad A^L = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{s} & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad A^C = \begin{bmatrix} \gamma & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad A^R = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{b} & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

de las que obtenemos que  $\delta^{LL} = \delta^L = \delta^C = \delta^R = \varepsilon > 0$ ,  $\tau^{LL} = 0$ ,  $\tau^C = \gamma$ ,  $\tau^L = \beta/s$  y  $\tau^R = -\beta/b$ . Como estamos suponiendo que  $\beta^2 - 4\varepsilon s^2 > 0$ ,  $\beta^2 - 4\varepsilon b^2 > 0$  y  $\gamma^2 - 4\varepsilon < 0$ , se tiene que  $\tau^2 - 4\delta > 0$  en todas las zonas, menos en la central, por lo que el tipo topológico de los equilibrios es:

- $p^{LL}$  es un centro,
- $p^L$  es un nodo inestable,
- $p^R$  es un nodo estable,

mientras que el tipo topológico de  $p^C$  depende del valor del parámetro  $\gamma$ , como sabemos que  $\gamma^2 - 4\varepsilon < 0$ , se tiene la siguiente clasificación:

- Si  $\gamma < 0$ ,  $p^C$  es un foco estable.
- Si  $\gamma > 0$ ,  $p^C$  es un foco inestable.
- Si  $\gamma = 0$ ,  $p^C$  es un centro.

La orientación es la contraria a las agujas del reloj en los tres casos.

En cuanto a los autovalores de la matriz de coeficientes y sus variedades invariantes correspondientes son:

- **Para la zona izquierda:** los autovalores (4.11) y las variedades invariantes (4.12).
- **Para la zona derecha:** los autovalores (4.13) y las variedades invariantes (4.14).

Es decir, las mismas que para el modelo (4.9). De esta forma, podemos utilizar para el modelo (4.15) los resultados de las zonas izquierda y derecha obtenidos en el modelo (4.9).

Una vez obtenidos los puntos notables para la dinámica del sistema y conocidos sus tipos topológicos, así como las variedades invariantes de las zonas izquierda y derecha, vamos a realizar simulaciones numéricas con el fin de comprobar que nuestros modelos reproducen la dinámica de la explosión canard del modelo de partida (4.2) y recoger las similitudes y diferencias que se presentan.

## 4.4. Simulación y Validación

En esta sección vamos a realizar algunos tests numéricos que nos permitan validar nuestros modelos lineales a trozos (4.9) y (4.15). Para la resolución de los sistemas utilizaremos un método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso  $h = 0.01$ , ya que las características asociadas a los modelos (definición a trozos, sistema lento-rápido) necesitan de una precisión elevada.

1. En primer lugar, simularemos un caso de tipo académico, correspondiente a un sistema reversible localmente (en un entorno de  $x = 0$ ) con pendiente uno en valor absoluto. Estudiaremos el modelo para tres (4.9) y cuatro zonas (4.15) con el objetivo de reproducir la dinámica predicha por la teoría, similar a los casos de los modelos lineales a trozos (3.4) y (3.7) de la ecuación de Van der Pol, esto es, la superexplosión y la explosión canard, respectivamente.
2. En segundo lugar, con el propósito de recrear situaciones más realistas vamos a no considerar la restricción sobre la pendiente. De esta forma tenemos dos posibilidades, el caso nodo-nodo (cuantitativamente análogo al caso anterior) y

el caso foco-foco (no representativo del fenómeno canard). De nuevo, estudiaremos ambos modelos con el objetivo de reproducir la dinámica predicha por la teoría para cada caso.

#### 4.4.1. Caso Reversible con Pendiente uno

En esta sección, vamos a realizar tests numéricos con el objetivo de reproducir los resultados de la teoría para el caso académico para ambos modelos, (4.9) y (4.15). Vamos a imponer que el sistema sea reversible localmente en un entorno de  $x = 0$  y que la pendiente sea igual a uno en valor absoluto.

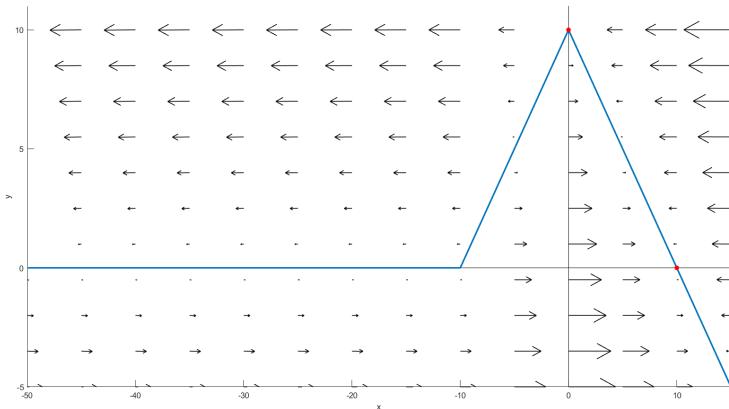
Para que el sistema sea reversible localmente establecemos los siguientes valores para los parámetros:

$$s = b = 10. \quad (4.17)$$

Ahora, para ajustar el valor absoluto de la pendiente igual a uno, fijamos:

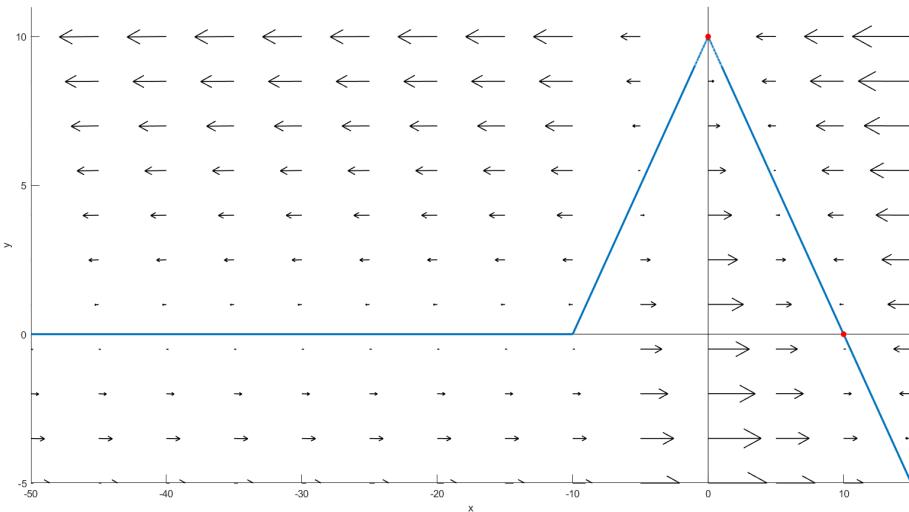
$$\beta = 10. \quad (4.18)$$

Elegimos el valor de  $\varepsilon$  en 0.1 para facilitar la visualización de los resultados posteriores y asegurarnos que nos situamos en el caso nodo-nodo ( $\beta^2 - 4\varepsilon s^2 > 0$  y  $\beta^2 - 4\varepsilon b^2 > 0$ ) y para el modelo de las cuatro zonas (4.15), además se impone que  $\gamma = 0.01$  ( $\gamma^2 - 4\varepsilon < 0$ ), para que la órbita que nazca tras la bifurcación de tipo Hopf de este modelo sea estable. De esta forma, la variedad crítica del modelo (4.9) y su flujo correspondiente tienen la forma que se aprecia en la Figura 4.10 y la variedad crítica del modelo (4.15) y su flujo correspondiente tienen la forma que se aprecia en la Figura 4.11.



**Figura 4.10:** Variedad crítica (en línea continua) del modelo (4.9) con las condiciones (4.17) y (4.18) junto a su flujo (flechas).

Tras una primera inspección, las variedades críticas parecen cualitativa y cuantitativamente iguales. Sin embargo, al realizar una ampliación de la zona del máximo veremos que realmente difieren, como se ha comentado en la sección anterior.



**Figura 4.11:** Variedad crítica (en línea continua) del modelo (4.15) con las condiciones (4.17) y (4.18) junto a su flujo (flechas).

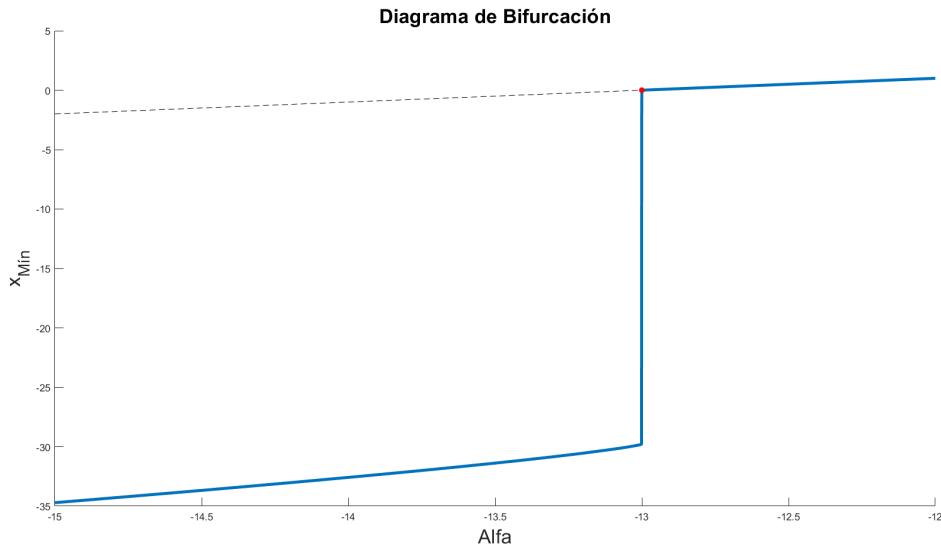
Ahora, situaremos el punto inicial en  $(b, 0.1)$ , así el punto inicial está a la derecha del punto de equilibrio y se puede realizar un diagrama de bifurcación. Con este objetivo, vamos a realizar tests numéricos, realizando un barrido del parámetro  $\alpha$  desde  $-12$  hasta  $-15$ . De esta forma, vamos a evaluar las distintas etapas de nuestro sistema ya que analizamos los valores de  $\alpha$  para los que el punto de equilibrio cambia de zona, i.e.  $\alpha_H = -13$  para el modelo de las tres zonas (4.9) y  $\alpha_L = -13 + \varepsilon / (\gamma - \frac{\beta}{s})$  y  $\alpha_R = -13 + \varepsilon / (\gamma + \frac{\beta}{b})$  para el modelo de las cuatro zonas (4.15).

### Modelo de Tres Zonas

Empezamos a trabajar con el modelo (4.9). Según la teoría, nuestro modelo debe exhibir una superexplosión canard cuando el equilibrio cambia de zona (para  $\alpha = -13$ ). Utilizamos los valores de los parámetros establecidos en el apartado anterior:  $s = b = \beta = 10$  para la reversibilidad local y la restricción sobre la pendiente, y  $\varepsilon = 0.1$  para mejorar la visualización de los resultados y asegurar que nos encontramos en el caso nodo-nodo.

Realizando el barrido mencionado anteriormente, obtenemos el diagrama de bifurcación que se representa en la Figura 4.12. En ella se observa claramente que

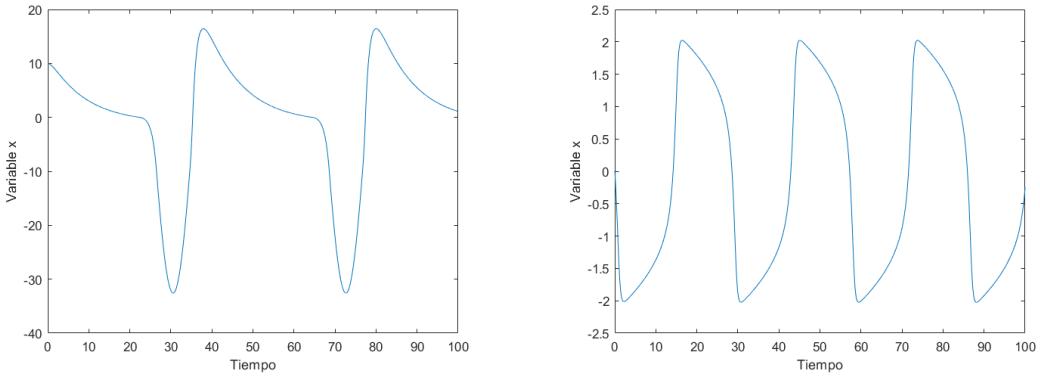
la transición a una oscilación de relajación es instantánea, lo que se conoce como super-explosión canard. Además, se trata del mismo comportamiento que se observaba para el caso nodo del modelo (3.5) y es una propiedad claramente diferente del caso diferenciable, donde la transición es abrupta, pero no instantánea.



**Figura 4.12:** Diagrama de bifurcación uniparamétrica de  $x$  en función de  $\alpha$ , en él se ven el equilibrio (en negro, discontinuo) y el mínimo en  $x$  de la órbita periódica de la bifurcación (en azul, continuo).

Cabe destacar que la oscilación de relajación del sistema (4.9) no corresponde con una oscilación de relajación clásica. Para el sistema de Van der Pol, la oscilación de relajación tiene cuatro partes bien diferenciadas, dos lentas y dos rápidas, mientras que en nuestro caso tenemos una zona lenta y otra rápida. Con el objetivo de ilustrar esta comparativa realizamos un test numérico en las mismas condiciones que en las simulaciones anteriores para  $\alpha_1 = -14$ , para estar en la etapa de oscilación de relajación, y representamos la variable  $x$  frente al tiempo.

Comparamos con la obtenida de forma teórica para la ecuación de Van der Pol en la Figura 4.13, y apreciamos claramente que ambas órbitas de relajación son cualitativamente diferentes, como hemos mencionado anteriormente. La forma de la "nueva" oscilación de relajación (concretamente su parte rápida) es la causante de la pérdida de estabilidad del avión y veremos que es similar para todos los casos que vamos a estudiar a continuación.



**Figura 4.13:** Comparativa de la oscilación de relajación del modelo PWL aerodinámico (izquierda) con la oscilación de relajación teórica para el sistema de Van der Pol (derecha).

Concluimos que nuestro modelo PWL de tres zonas (4.9) reproduce una dinámica similar a la del sistema de Van der Pol (3.5), en particular, el fenómeno de la superexplosión, como estábamos esperando.

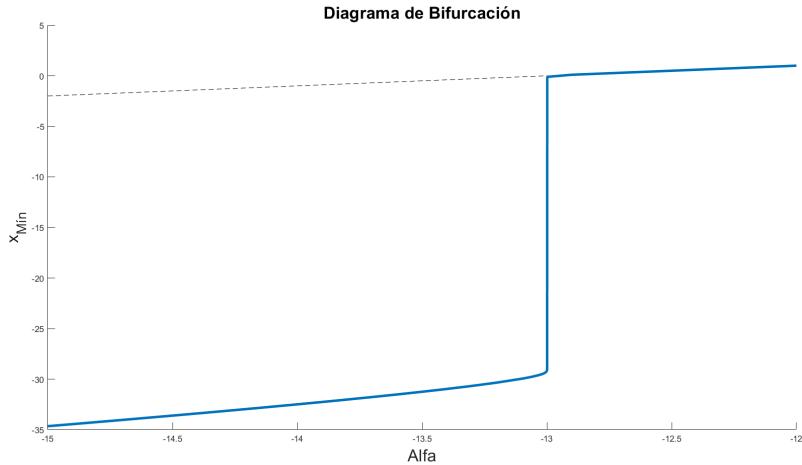
Pasamos a trabajar con el modelo PWL de cuatro zonas (4.15).

### Modelo de Cuatro Zonas

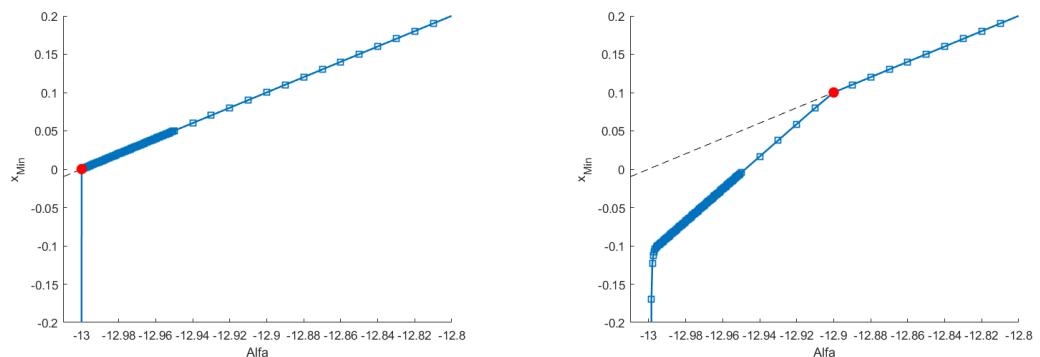
En esta sección vamos a trabajar con el modelo (4.15), según la teoría, este modelo ya no exhibe una superexplosión canard, pasando a reproducir el fenómeno de la explosión canard que estamos buscando. Elegimos los valores de los parámetros  $s = b = \beta = 10$  para la restricción sobre la pendiente,  $\varepsilon = 0.1$  para mejorar la visualización de los resultados y asegurar que estamos en el caso nodo-nodo y  $\gamma = 0.01$  para que la órbita que nazca tras la bifurcación de tipo Hopf sea estable.

Realizamos el mismo barrido que en el apartado anterior para obtener el diagrama de bifurcación en este caso (ver Figura 4.14). A primera vista, los diagramas de bifurcación de las Figuras 4.12 y 4.14 parecen cualitativa y cuantitativamente idénticos. Sin embargo, al realizar un zoom a una distancia  $\varepsilon$  del valor del parámetro  $\alpha$  para el que se da la superexplosión o la explosión canard, respectivamente, se aprecian claramente las diferencias entre ambos diagramas (ver Figura 4.15). En el caso de las cuatro zonas, la caída es abrupta pero no instantánea como lo es en el caso de las tres zonas. Antes de la caída brusca hay un periodo en el que la curva del mínimo se aleja de la curva del equilibrio pero se mantiene cerca, esto se debe que la órbita periódica nace en una bifurcación tipo Hopf supercrítica. El comportamiento que tenemos es similar al de la Figura 3.10: tras la bifurcación, el ciclo crece de forma lineal, hasta que, a orden  $\varepsilon$  de la bifurcación, se da la explosión canard. Esta es una propiedad del sistema diferenciable (ver Figura 4.4) y se trata justo de lo que estábamos buscando, conseguir reproducir diagramas de bifurcación similares a los

obtenidos en el caso diferenciable con nuestro modelo PWL. Podemos decir que la simulación numérica reproduce los resultados teóricos esperados.



**Figura 4.14:** Diagrama de bifurcación uniparamétrica de  $x$  en función de  $\alpha$ , en él se ven el equilibrio inestable (en negro, discontinuo) y el mínimo en  $x$  de la órbita periódica de la bifurcación (en azul, continuo; antes de la bifurcación, a la derecha respresenta el equilibrio estable).



**Figura 4.15:** Ampliación de la zona de la explosión de los diagramas de las Figuras 4.12 y 4.14.

En la siguiente sección vamos a aumentar la dificultad eliminando la restricción sobre la pendiente, lo que nos permite acercarnos un poco más a la situación real.

#### 4.4.2. Caso Reversible con Pendiente distinta de uno

En esta sección vamos a realizar tests numéricos con el objetivo de reproducir los resultados predichos por la teoría cuando nos encontramos en los casos foco-foco y nodo-nodo. Además para este último vamos a intentar visualizar numéricamente ("cazar") una órbita canard.

Para la realización de estos tests numéricos vamos a seguir eligiendo los valores de los parámetros  $s = b = 10$ ,  $\varepsilon = 0.1$  y  $\gamma = 0.01$  por los motivos descritos en la sección anterior. Para variar el valor de la pendiente vamos a modificar el valor del máximo de la nulclina rápida,  $\beta$ , como sigue:

1. En primer lugar, fijamos  $\beta = 12 > 10$ . De esta forma, tendremos un valor absoluto de las pendientes mayor que 1 y seguiremos en el caso nodo-nodo ( $\beta^2 - 4\varepsilon s^2 > 0$  y  $\beta^2 - 4\varepsilon b > 0$ ). Esperamos unos resultados cualitativamente similares a los del caso con pendiente uno, en el que también estábamos en el caso nodo-nodo.
2. En segundo lugar, fijamos  $\beta = 2.73$ . De esta forma, tendremos un valor absoluto de las pendientes menor que 1 y saldremos del caso nodo-nodo para entrar en el caso foco-foco ( $\beta^2 - 4\varepsilon s^2 < 0$  y  $\beta^2 - 4\varepsilon b < 0$ ).

A diferencia del apartado anterior, en lugar de situar el punto incial en un punto fijo y realizar un barrido para el parámetro  $\alpha$ , realizaremos una representación del plano de fases para valores del parámetro  $\alpha$  representativos con órbitas que pasen por unos puntos determinados  $((0, \beta/2), (0, 0)$  y  $(0, -\beta))$ . De esta forma, tendremos una imagen más completa de la dinámica de los modelos (4.9) y (4.15), lo que complementa a los resultados obtenidos para el caso con pendiente igual a uno.

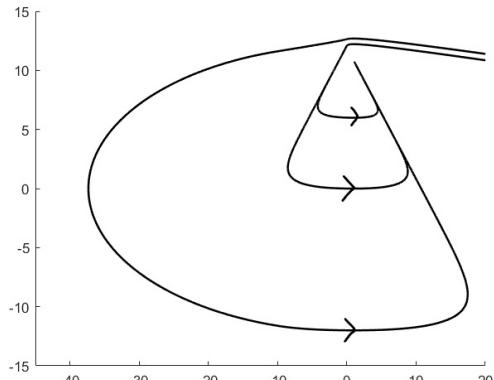
Empezaremos estudiando el modelo de tres zonas (4.9), del que discutiremos ambos casos (nodo-nodo y foco-foco), para luego estudiar únicamente el caso nodo-nodo del modelo de cuatro zonas (4.15). El caso foco-foco del modelo de cuatro zonas (4.15) no se estudia ya que no es representativo para la explosión canard que queremos estudiar y las cualidades principales de la dinámica son semejantes al caso foco-foco para el modelo de tres zonas (4.9).

Vamos a realizar los tests numéricos para valores representativos de cada etapa de la explosión (superexplosión en el caso de las tres zonas): para la etapa previa a la (super)explosión tomaremos  $\alpha = -12$ , y para la etapa posterior, en la que existen las oscilaciones de relajación, tomaremos  $\alpha = -14$ . Además, analizaremos el valor del parámetro  $\alpha = -13$  en el modelo de las tres zonas y algunos valores situados a menos de una distancia  $\varepsilon$  del valor del parámetro  $\alpha = -13$  para realizar una comparativa de la dinámica de ambos modelos.

## Modelo de Tres Zonas

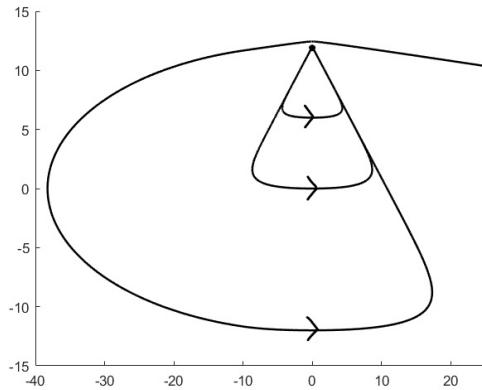
Empezamos estudiando el modelo de las tres zonas (4.9) en el caso nodo-nodo con  $\beta = 12$ . Esperamos volver a obtener la superexplosión canard.

Para el caso previo a la superexplosión (con un valor representativo  $\alpha = -12$ ), el equilibrio real se sitúa en la zona lineal derecha. Este equilibrio es estable y es un atractor de todo el flujo. Esperamos que las trayectorias tengan al principio una etapa de acercamiento rápido a la variedad lineal lenta para posteriormente seguir la relativamente cerca hasta llegar a un entorno del punto de equilibrio. Todo esto se aprecia efectivamente en la Figura 4.16.



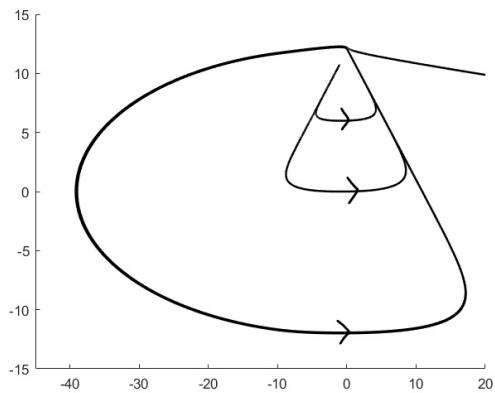
**Figura 4.16:** Plano de fases del sistema (4.9) para  $\alpha = -12$  en el caso nodo-nodo.

Para el valor del parámetro para el que se da la superexplosión ( $\alpha = -13$ ), esperamos tener un continuo de órbitas homoclinas como efectivamente se aprecia en la Figura 4.17. Debido a la existencia de una zona lineal extra (respecto al sistema (3.4)) en la parte izquierda del sistema, el continuo está acotado por una homoclina que atrae el resto del flujo del sistema, i.e. es un atractor del sistema. Esta órbita será la candidata para convertirse en la oscilación de relajación en la siguiente etapa.



**Figura 4.17:** Plano de fases del sistema (4.9) para  $\alpha = -13$  en el caso nodo-nodo.

Para el caso posterior a la super-explosión (con un valor representativo  $\alpha = -14$ ), el equilibrio pasa a estar en la zona izquierda y en la Figura 4.18 vemos como efectivamente, el atractor del caso anterior se ha convertido en una oscilación de relajación a la que se aproximan rápidamente todas las órbitas del sistema.

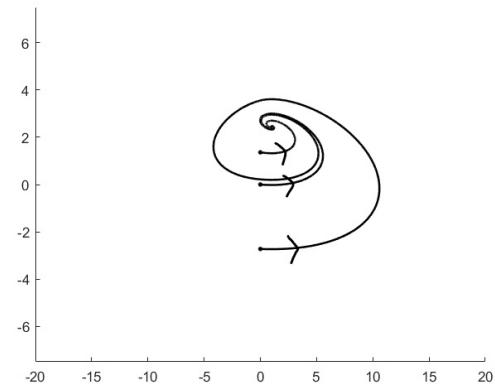


**Figura 4.18:** Plano de fases del sistema (4.9) para  $\alpha = -14$  en el caso nodo-nodo.

Gracias a estas tres etapas de la explosión canard en el modelo de las tres zonas (4.9) para el caso nodo-nodo, junto a sus respectivas representaciones en el plano de fases, se puede explicar fácilmente el diagrama de bifurcación (ver Figura 4.12) que obtuvimos en el caso con pendiente uno (también nodo-nodo). Cualitativamente, los resultados de los dos apartados son análogos, como esperábamos ya que no hemos modificado el tipo topológico de los equilibrios que influyen en las dinámicas del sistema al variar el parámetro  $\beta$ .

Pasamos a analizar ahora, aunque este sea poco representativo de la explosión canard que estamos estudiando, el modelo de las tres zonas (4.9) para el caso foco-foco con  $\beta = 2.73$ . De esta forma, variamos el tipo topológico de los equilibrios por lo que esperamos una variación cualitativa respecto a los casos anteriores.

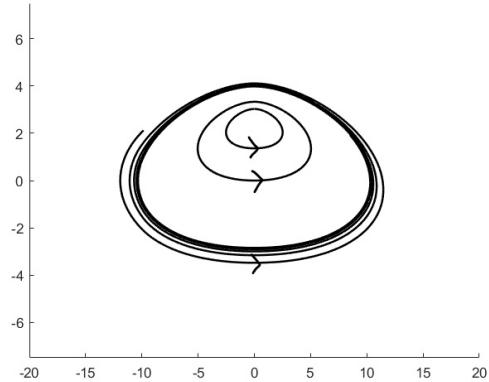
Para el caso previo a la bifurcación de Hopf ( $\alpha = -12$ ), el equilibrio se encuentra en la zona lineal derecha y atrae todo el flujo. Sin embargo, al contrario que en el caso anterior, ahora las órbitas no se acercan a la variedad lenta (al ser el equilibrio tipo foco, no existe tal objeto dinámico) para luego seguirla relativamente cerca hasta el punto de equilibrio, sino que las órbitas se acercan en espiral al punto de equilibrio. Todo esto se aprecia con claridad en la Figura 4.19.



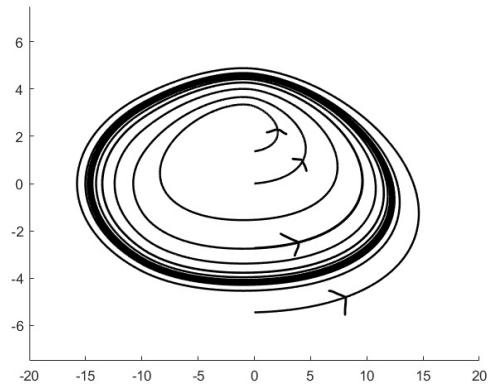
**Figura 4.19:** Plano de fases del sistema (4.9) para  $\alpha = -12$  en el caso foco-foco.

A diferencia del caso nodo-nodo, donde teníamos un continuo de homoclinas, para el valor del parámetro en el que se da la bifurcación ( $\alpha = -13$ ), tenemos un continuo de órbitas periódicas. El atractor del flujo del sistema ya no es una órbita homoclina, sino una órbita periódica que circunscribe a todo el continuo de órbitas periódicas y que además es atractora de todas las órbitas fuera del continuo de órbitas periódicas. Como podemos observar en la Figura 4.20.

Para el caso posterior a la bifurcación de Hopf ( $\alpha = -14$ ), el equilibrio pasa a estar en la zona lineal izquierda y ahora es inestable. La órbita atractora de la etapa anterior se convierte en un atractor global del flujo del sistema, desaparece el continuo de órbitas periódicas circundado por esta órbita atractora ya que las órbitas, interiores se aproximan en espiral al atractor (ver Figura 4.21). Se ha añadido una órbita que con punto inicial  $(0, -2\beta)$  para visualizar que el atractor también atrae las órbitas exteriores.



**Figura 4.20:** Plano de fases del sistema (4.9) para  $\alpha = -13$  en el caso foco-foco.



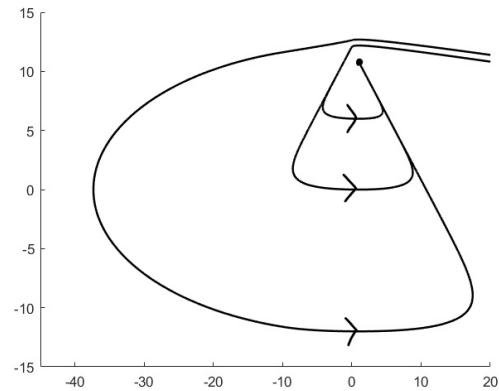
**Figura 4.21:** Plano de fases del sistema (4.9) para  $\alpha = -14$  en el caso foco-foco.

En estas figuras se aprecia claramente la diferencia, no sólo cuantitativa si no también cualitativa, entre los planos de fases del modelo de las tres zonas (4.9) para el caso nodo-nodo y para el caso foco-foco, como esperábamos obtener. Esto se traduce a su vez en diferencias cualitativas en la dinámica del sistema en su conjunto. En el caso nodo-nodo se produce la explosión canard que buscamos reproducir, aunque se trate realmente de una superexplosión como hemos visto anteriormente, mientras que en el caso foco-foco esta superexplosión no se produce por lo que este caso carece de importancia dentro de nuestro estudio, tal y como habíamos predicho que debería suceder. Teniendo en cuenta esto último pasamos a estudiar el modelo de las cuatro zonas únicamente para el caso nodo-nodo, que es el que verdaderamente reproduce la dinámica canard que estamos buscando reproducir.

## Modelo de Cuatro Zonas

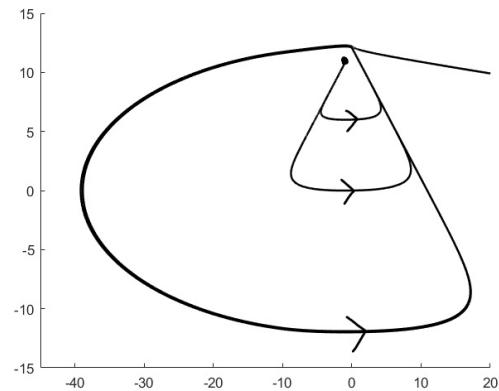
En este apartado estudiamos el caso nodo-nodo del modelo de las cuatro zonas (4.15) para los valores de los parámetros  $s = b = 10$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\gamma = 0.01$  y  $\beta = 12$ . Esperamos obtener unos resultados análogos a los obtenidos para el modelo de las tres zonas (4.9) para los valores del parámetro representativos de las etapas previa y posterior a la explosión canard,  $\alpha = -12$  y  $\alpha = -14$ , respectivamente.

Para el caso previo a la explosión ( $\alpha = -12$ ), esperamos obtener resultados similares a los del modelo de las tres zonas (4.9). Efectivamente, el equilibrio real se sitúa en la zona lineal derecha, este equilibrio es estable y es un atractor de todo el flujo. En la Figura 4.22 se observa claramente como al principio hay una etapa de acercamiento rápido a la variedad lineal lenta para posteriormente seguirla relativamente cerca hasta llegar al punto de equilibrio tras un tiempo infinito.



**Figura 4.22:** Plano de fases del sistema (4.15) para  $\alpha = -12$  en el caso nodo-nodo.

Para el caso posterior a la explosión ( $\alpha = -14$ ), el equilibrio pasa a ser inestable y estar en la zona izquierda y en la Figura 4.23 vemos como efectivamente, e igualmente a lo que ocurría para el modelo de las tres zonas (4.9), el atractor del caso anterior se ha convertido en una oscilación de relajación a la que se aproximan rápidamente todas las órbitas del sistema.

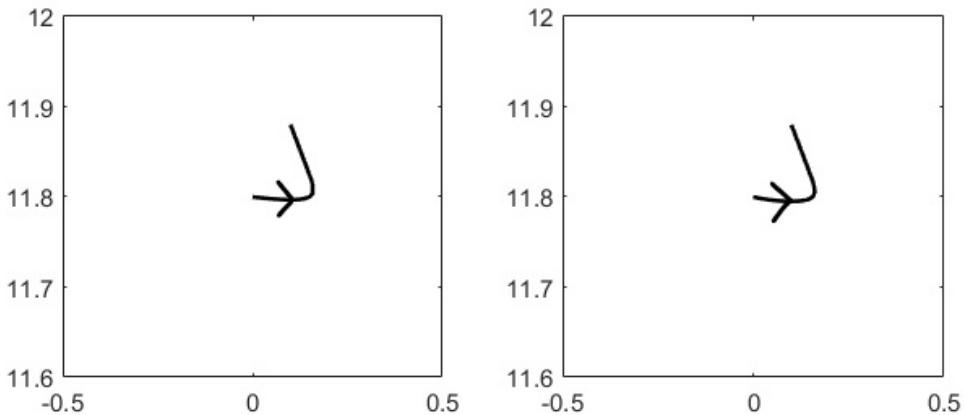


**Figura 4.23:** Plano de fases del sistema (4.15) para  $\alpha = -14$  en el caso nodo-nodo.

## Similitudes y Diferencias

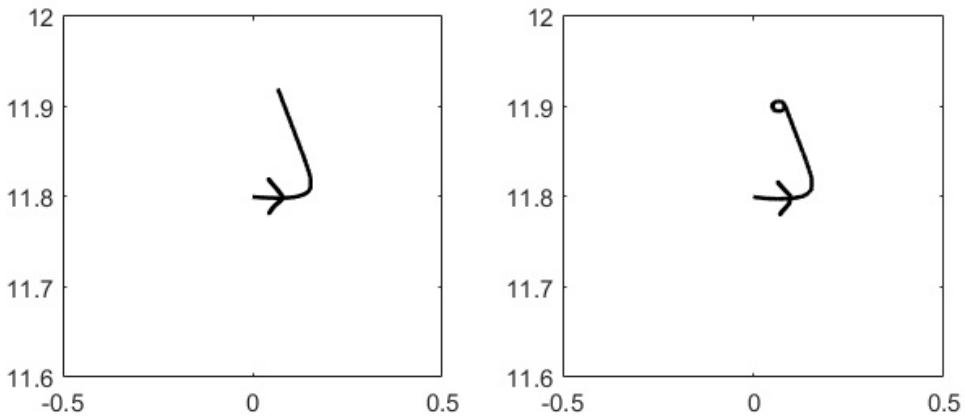
Comparando las Figuras 4.16 con 4.22 y 4.18 con 4.23, no apreciamos diferencias significativas entre los modelos de tres (4.9) y cuatro zonas (4.15) para el caso nodo-nodo dentro de las etapas previa y posterior a la explosión canard. Pero como hemos mencionado para el caso de pendiente igual a uno, las diferencias entre ambos modelos se visualizan claramente a una distancia  $\varepsilon$  del valor del parámetro para el que se da la superexplosión en el modelo de las tres zonas dentro del caso nodo-nodo.

Para poner de manifiesto esta diferencia, vamos a realizar una comparativa entre el modelo de las tres zonas (4.9) y el de las cuatro zonas (4.15) cuando el parámetro  $\alpha$  se encuentra en la zona previa a la explosión y a una distancia menor que  $\varepsilon$  del valor para el que se da la superexplosión canard en el modelo de las tres zonas (4.9). Más concretamente, vamos a realizar tests numéricos de ambos modelos para los siguientes valores del parámetro  $\alpha = -13 + \varepsilon = -12.9$ ,  $\alpha = -13 + 2\varepsilon/3 \approx -12.93$  y  $\alpha = -13 + \varepsilon/3 \approx -12.96$ . Además, situaremos el punto inicial en  $(0, \beta - 2\varepsilon)$  para facilitar la visualización de los resultados.



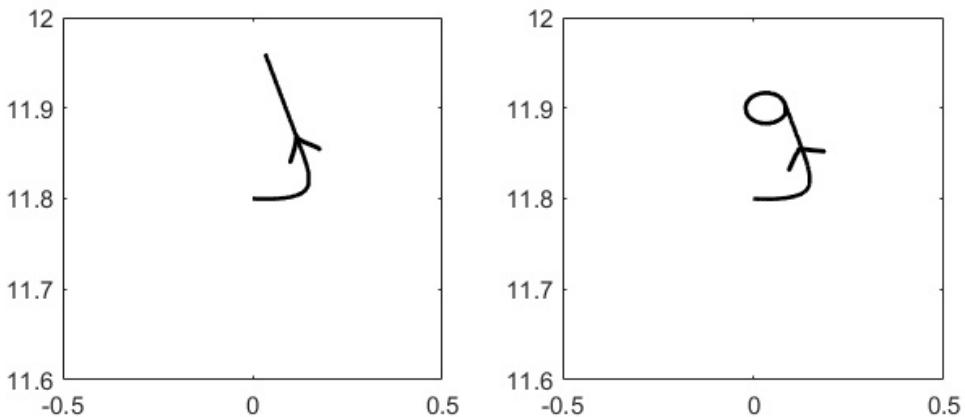
**Figura 4.24:** Plano de fases de los sistemas (4.9) y (4.15) para  $\alpha = -12.9$  en el caso nodo-nodo en el entorno de la zona central.

Como se aprecia en la Figura 4.24, para el primer caso ( $\alpha = -12.90$ ), al situarse el equilibrio en la zona derecha ( $\varepsilon/(\gamma + \beta/b) \approx 0.08 < \varepsilon$ ) para ambos modelos, los resultados en el plano de fases no son significativamente diferentes. La órbita tiene una etapa inicial en la que se acerca rápidamente a la variedad lenta de la zona derecha para después seguir la relativamente cerca acercándose al equilibrio. Sin embargo, la influencia de la zona central en el modelo de las cuatro zonas (4.15) afecta levemente a la trayectoria de la órbita.



**Figura 4.25:** Plano de fases de los sistemas (4.9) y (4.15) para  $\alpha \approx -12.93$  en el caso nodo-nodo en el entorno de la zona central.

Para el siguiente caso ( $\alpha \approx -12.93$ ), se empiezan a notar las diferencias entre ambos modelos. Ahora para el modelo de las tres zonas el equilibrio real sigue situándose en la zona derecha, por lo que la dinámica del flujo es la misma que la explicada anteriormente, mientras que para el modelo de las cuatro zonas el equilibrio real se sitúa en la zona central ( $\varepsilon/(\gamma + \beta/b) \approx 0.08 > 2\varepsilon/3 \approx 0.067$ ) y se vuelve inestable, por lo que la dinámica del sistema cambia drásticamente con la aparición de una órbita periódica estable envolviendo al equilibrio tras una bifurcación de tipo Hopf. Todo esto se aprecia en la Figura 4.25.



**Figura 4.26:** Plano de fases de los sistemas (4.9) y (4.15) para  $\alpha \approx -12.96$  en el caso nodo-nodo en el entorno de la zona central.

En la Figura 4.26 para el caso ( $\alpha \approx 12.96$ ) las diferencias se aprecian claramente, el modelo de las tres zonas (4.9) no ha cambiado cualitativamente respecto al primer caso ( $\alpha = -12.90$ ), mientras que en el modelo de las cuatro zonas (4.15) hay una órbita periódica estable que envuelve al equilibrio inestable de la zona central que ha crecido en amplitud.

El nacimiento de la órbita periódica cuando el equilibrio pasa a la zona central en el modelo de las cuatro zonas (4.15) es el responsable de que haya una diferencia en los diagramas de bifurcación (ver Figura 4.15) a partir de una distancia de orden  $\varepsilon$  de la bifurcación. De esta forma, el modelo de las cuatro zonas (4.15) representa de forma mucho más fiel la dinámica del modelo diferenciable (4.2).

Con estos tests numéricos hemos conseguido corroborar para nuestro modelo lineal a trozos todos los resultados teóricos predichos en los capítulos anteriores. Ahora que sabemos que nuestro modelo de cuatro zonas (4.15) reproduce de manera fiel el fenómeno canard esperado, vamos a intentar "cazar" una de las órbitas canard que se dan en nuestro modelo.

## Órbita Canard

Nos situamos en el caso nodo-nodo y pendiente distinta de uno estudiado en la sección anterior fijando los mismos parámetros,  $b = s = 10$ ,  $\beta = 12$ ,  $\varepsilon = 0.1$  y  $\gamma = 0.01$ .

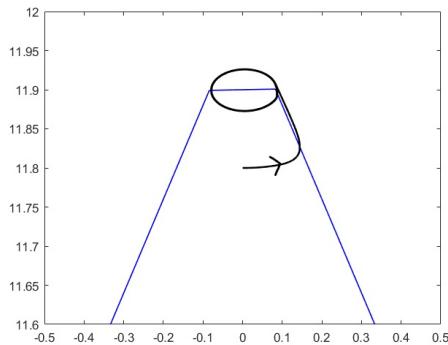
Como ya mencionamos al principio de esta sección, localizar la órbita de tipo canard requiere de métodos numéricos muy precisos. Para estas simulaciones seguimos utilizando un método de Runge-Kutta de cuarto orden con un paso de integración más pequeño que los anteriores, en este caso  $h = 0.001$ . Como en el apartado anterior, vamos a situar el punto inicial en  $(0, \beta - 2\varepsilon)$  para facilitar la visualización de los resultados.

El procedimiento a seguir para encontrar la órbita canard va a ser un método de tipo dicotomía. Para ello:

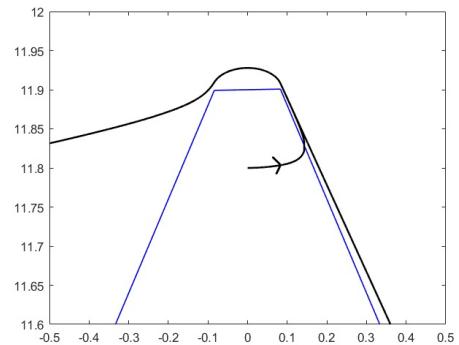
1. Inicialización: Elegimos un valor del parámetro,  $\alpha_a$ , que nos sitúe en el caso previo (Caso Pre) a la órbita canard en el que la órbita sea estable y todavía no se ha convertido en una oscilación de relajación, y otro valor,  $\alpha_b$ , para el caso posterior (Caso Post) a la órbita canard en la que la órbita se ha convertido en una oscilación de relajación. En nuestro caso elegimos como valores iniciales  $\alpha_a = -12.995$  para el Caso Pre y  $\alpha_b = -13.000$  para el Caso Post.
2. Calculamos el valor  $\alpha_m$  como la media de los parámetros  $\alpha_a$  y  $\alpha_b$ . Resolvemos el sistema y determinamos si para  $\alpha_m$  nos encontramos en el Caso Pre o Post y actualizamos el valor  $\alpha_a$  o  $\alpha_b$  según  $\alpha_m$ .

3. Repetimos el proceso hasta que la órbita siga la variedad repulsiva de forma que sea visible en nuestra representación.

De esta forma estamos reduciendo, con cada iteración, el intervalo del parámetro para el que se da una órbita canard. En las Figuras 4.27 y 4.28 vemos la inicialización del proceso, correspondientes al Caso Pre y Caso Post.

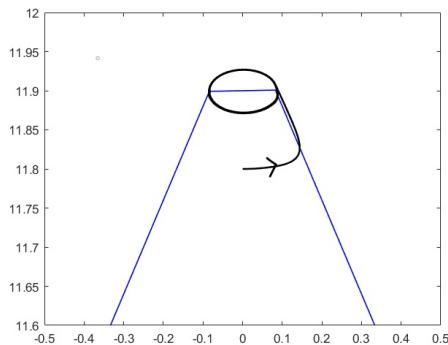


**Figura 4.27:** Órbita de la solución del sistema (4.15) (en negro, más grueso). Valor inicial  $(0, \beta - 2\varepsilon)$  y  $\alpha_a = -12.995$ . Se muestra la variedad crítica en azul (menos grueso).

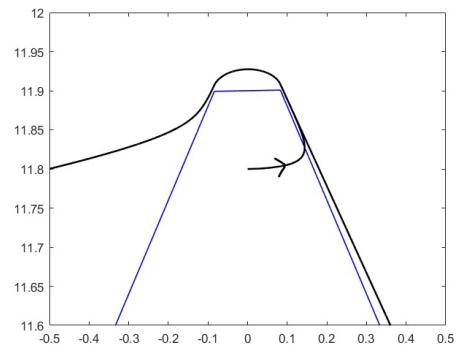


**Figura 4.28:** Órbita de la solución del sistema (4.15) (en negro, más grueso). Valor inicial  $(0, \beta - 2\varepsilon)$  y  $\alpha_b = -13.000$ . Se muestra la variedad crítica en azul (menos grueso).

Calculamos el parámetro  $\alpha_m$ , punto medio de  $\alpha_a$  y  $\alpha_b$ , resolvemos el sistema y pintamos la órbita obtenida.



**Figura 4.29:** Órbita de la solución del sistema (4.15). Valor inicial  $(0, \beta - 2\varepsilon)$  y  $\alpha_m = -12.9975$ .

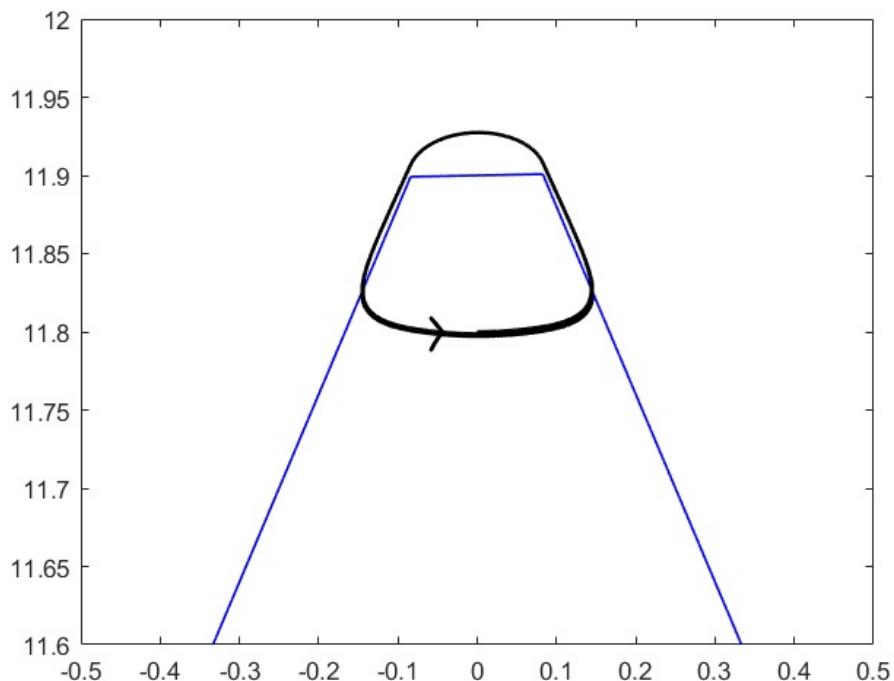


**Figura 4.30:** Órbita de la solución del sistema (4.15). Valor inicial  $(0, \beta - 2\varepsilon)$  y  $\alpha_m = -12.99875$ .

En la Figura 4.29 podemos observar que todavía nos encontramos en el Caso Pre, por tanto, actualizamos  $\alpha_a$  con  $\alpha_m$  y repetimos el proceso. En este caso, vemos

en la Figura 4.30 que nos encontramos en el Caso Post, entonces ahora actualizamos  $\alpha_b$  con  $\alpha_m$ .

Repetiendo este proceso de forma sucesiva, llegamos después de 8 iteraciones a  $\alpha_m = -12.998642578125$ . Para este valor, en la Figura 4.31 podemos apreciar claramente como la órbita representada sigue la variedad de la izquierda, que es repulsiva, durante un tiempo, que es la característica principal de las órbitas canard. Es decir, hemos conseguido visualizar una órbita canard como predecía la teoría desarrollada.



**Figura 4.31:** Órbita de la solución del sistema (4.15). Valor inicial  $(0, \beta - 2\varepsilon)$  y  $\alpha_m = -12.998642578125$ .

### Caso con Pendiente de los lados Izquierdo y Derecho distintas

Terminamos este capítulo con un comentario sobre el caso en el que la pendiente de la variedad lineal izquierda,  $k_L$ , y la pendiente de la variedad lineal derecha,  $k_R$ , son distintas en valor absoluto (no reversible). En este caso tendríamos un diagrama de bifurcación más complejo con la posible aparición de más de una órbita canard, [15]. Ese escenario requiere de un estudio que queda fuera de los objetivos del presente trabajo, centrado en la explosión canard de una única órbita periódica.



# Bibliografía

- [1] A. Andronov, A. Vitt, S. Khaikin, *Theory of Oscillators*, 1966, Pergamon Press.
- [2] M. Desroches, E. Freire, S.J. Hogan, E. Ponce y P. Thota, *Canards in PWL Systems: Explosions and Super-explosions*, 2013, Proceedings of the Royal S.
- [3] M. Desroches, A. Guillamon, E. Ponce, R. Prohens, S. Rodrigues, A. E. Teruel *Canards, Folded Nodes, and Mixed-Mode Oscillations in Piecewise-Linear Slow-Fast Systems*, 2016, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [4] M. Desroches et al., *Mixed-Mode Oscillations with Multiple Time Scales*, 2012, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [5] M. di Bernardo, CJ. Budd, AR. Champneys, et al. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems*, 2008, Springer-Verlag London.
- [6] E. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, 1967, The MIT Press.
- [7] E. Izhikevich, *Neural Excitability, Spiking, and Bursting*, 1999, International Journal of Bifurcation and Chaos, 10(6):1171-1266.
- [8] N. Fenichel, *Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations*, 1979, J. Differential Equations 31:53-98.
- [9] S. Fernández-García, *Bifurcations of Periodic Orbits and Invariant Sets in Piecewise Linear Dynamical Systems*, 2012, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.
- [10] S. Fernández-García, M. Desroches, M. Krupa y A.E. Teruel, *Canard Solutions in Planar Piecewise Linear Systems with Three Zones*, 2016, Dynamical Systems 31(2):173-197.
- [11] FitzHugh R. *Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane*, 1961, Biophysical J. 1:445–466.

- [12] J. Hale y H. Kolçak, *Dynamics and Bifurcations*, 1991, Springer-Verlag New York.
- [13] M. Komuro y T. Saito, “*Lost solution*” in a PWL system, 1991, IEICE TRANS.
- [14] M. Krupa, P. Szmolyan, *Extending Geometric Singular Perturbation Theory to Nonhyperbolic Points–Folds and Canard Points in Two Dimensions*, 2001, SIAM J. Math Anal. 33(2):286-314.
- [15] M. Krupa, P. Szmolyan, *Relaxation Oscillation and Canard Explosion*, 2001, J. Differential Equations 174(2):312-368.
- [16] J. Llibre, E. Núñez y A.E. Teruel, *Limit Cycles for Planar PWL Differential Systems*, 2002, Qual. Theory Dyn. Syst.
- [17] J. Rankin, M. Desroches, B. Krauskopf y M. Lowenberg, *Canard Cycles in Aircraft Ground Dynamics*, 2011, Nonlinear Dynamics 66:681-688.
- [18] J. Rankin, B. Krauskopf, M. Lowenberg, E. Coetzee, *Operational Parameter Study of Aircraft Dynamics on the Ground*, 2010, J. Computational Nonlinear Dynamics 5, 021007.
- [19] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 1994, Perseus Books.
- [20] Departamento de Análisis Matemático, Apuntes de la Asignatura DFVV, 2015/16, Universidad de Sevilla.
- [21] Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Apuntes de la Asignatura AED, 2014/2015, Universidad de Sevilla.
- [22] Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Apuntes de la Asignatura EDO, 2013/14, Universidad de Sevilla.
- [23] Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Notas del Curso "Análisis de Sistemas No Lineales", 2007, Universidad de Sevilla.