Indecidibilidade

Teorema de Rice

- **Idéia:** Ao invés de problemas ligados a decidibilidade envolvendo MTs e uma entrada particular
  - Máquina Mi pára com entrada w?
  - Máquina Mi pára com entrada em branco?
- Podemos estar interessados em problemas mais gerais, tais como:
  - A cadeia vazia pertence à L(Mi)?
  - L(Mi) é ∅?
  - L(Mi) é regular?
  - L(Mi) = Σ* ?

Teorema de Rice

- Qualquer MT pode ser codificada como uma cadeia sobre {0,1}.
- Um conjunto de TMs portanto define uma linguagem sobre $\Sigma = \{0,1\}$.
- As questões anteriores podem ser reformuladas como:
  – Mi pertence a linguagem $L\varepsilon = \{ M \mid \varepsilon\ L(M)\}$?
  – Mi pertence a linguagem $L\emptyset = \{M \mid L(M) = \emptyset\}$?
  – Mi pertence a linguagem $Lreg = \{M \mid L(M) \text{ e regular}\}$?
  – Mi pertence a linguagem $L\Sigma = \{M \mid L(M) = \Sigma^*\}$?

Teorema de Rice

- Uma propriedade de uma l.r.e. é uma condição que a l.r.e. pode satisfazer. Exemplos: “conter cadeia nula”, “ser regular”, etc.
- Uma linguagem de uma propriedade $\wp$ de uma l.r.e. é o conjunto $L_\wp = \{M \mid M \text{ satisfaz } \wp\}$. Exemplo: $L_\emptyset$ é a linguagem formada por todas as cadeias que representam as MTs que não aceitam nenhuma cadeia.
- Uma propriedade $\wp$ de uma l.r.e. e dita trivial se a) não existirem linguagens que a satisfaçam ou b) todas as l.r.e.’s a satisfazem.
- **Teorema (Rice, 1953):** Se $\wp$ é uma propriedade não trivial de linguagens recursivamente enumeráveis, então $L_\wp$ não é recursiva.

PCP

- Problema de Correspondência de Post
  - problema indecidível que foi introduzido por Emil Post em 1946
- A entrada do problema consiste em:
  - duas listas finitas $\alpha 1, \alpha 2 \ldots \alpha n$ e $\beta 1, \beta 2 \ldots \beta n$ de palavras sobre algum alfabeto Σ tendo pelo menos 2 símbolos.

Exemplo: $\alpha 1 = a$, $\alpha 2 = ab$, $\alpha 3 = bba$

$\beta 1 = baa$, $\beta 2 = aa$, $\beta 3 = bb$

PCP

- Uma solução para esse problema é uma sequência de índices tal que:

$$\alpha i1\ \alpha i2\ ...\ \alpha ik = \beta i1\ \beta i2\ \beta ik$$

Exemplo: $\alpha 1 = a$, $\alpha 2 = ab$, $\alpha 3 = bba$

$\beta 1 = baa$, $\beta 2 = aa$, $\beta 3 = bb$

  - Uma solução para esse problema seria a sequência (3, 2, 3, 1):

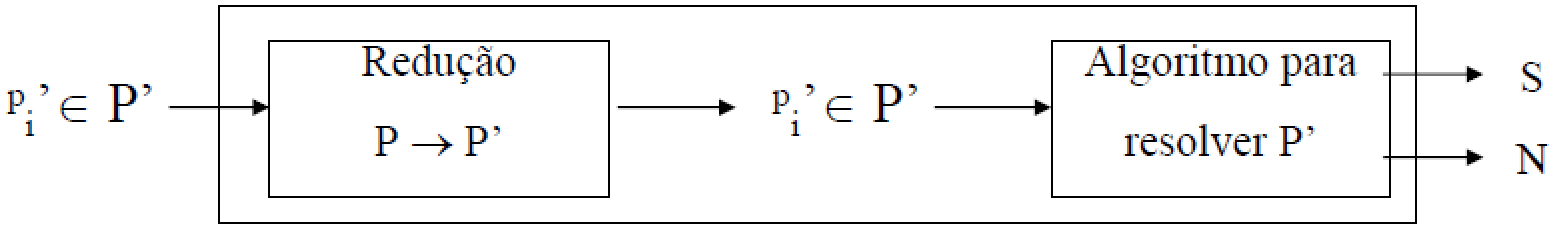
$$\alpha 3\ \alpha 2\ \alpha 3\ \alpha 1 = bbaabbbaa = \beta 3\ \beta 2\ \beta 3\ \beta 1$$

Redução de Problemas

- Problemas “difíceis” frequentemente podem ser transformados (reduzidos) em outros, para os quais uma solução já foi encontrada
  - Um problema de decisão P e redutível a P’ se existir uma MT que, a partir de uma entrada que representa uma questão pi de P, produz um problema pi’ de P’ que tem a mesma resposta de pi.

Redução de Problemas

- Se um problema P’ é decidível e P é redutível a P’, então P é também decidível. Uma solução para P pode ser portanto obtida a partir de:



  – **Obs:** Se P é não-decidível e P é redutível a P’, então P’ também é não-decidível.

PCP

- **Teorema (Post, 1946):** Não existe algoritmo para se determinar se um dado P.C.P. tem uma solução, ou seja: **o P.C.P. é um problema não-decidível**
- **Prova:** através de redução de problemas

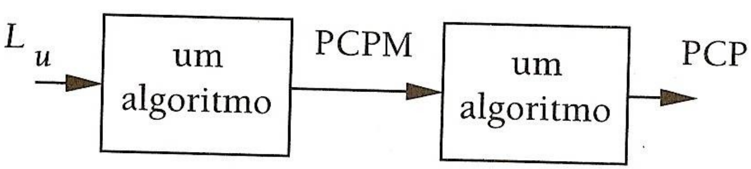


Figura 9.11: Reduções que provam a indecidibilidade do Problema da Correspondência de Post

PCP

- A prova de indecidibilidade do PCP se dá:
  - Reduzindo a Linguagem Lu a PCP
  - Para facilitar:
    - Reduz-se Lu a um PCP modificado
    - Reduz-se o PCP modificado ao PCP original
  - Como Lu é indecidível, PCP também é

    - Obs: Prova na seção 9.4 do livro texto