Elementos de Matemática Discreta

Elementos de Matemática Discreta

- Conjuntos
- Relações
- Funções

Conjunto

- Um conjunto é uma coleção de elementos em que não são consideradas ocorrências múltiplas dos mesmos nem há relação de ordem entre eles.
  - A inclusão do elemento ♦ no conjunto {♣, ♦, ♥, ♠} resulta no próprio conjunto {♣, ♦, ♥, ♠}, pois o mesmo já faz parte do conjunto e, portanto, não deve ser considerado novamente. Por outro lado, o conjunto {♣, ♦, ♥, ♠} é igual ao conjunto {♦, ♣, ♠, ♥}

Conjunto

- **Símbolo**
  - Um símbolo corresponde a uma representação gráfica única e indivisível. Se formado por caracteres, um símbolo pode ser composto por um número arbitrário deles.
    - São exemplos de símbolos: “a”, “abc”, “♠”, “1” etc.

Conjunto

- **Nomes**
  - Conjuntos podem ser referenciados através de nomes, arbitrariamente escolhidos.
    - X = {0, 1, 2, 3}, Y = {a, b, c, d, e, f }. Assim, os nomes X e Y passam a denotar os conjuntos correspondentes.

Conjunto

- **Número de Elementos**
  - O número de elementos contido em um conjunto A é denotado por |A|.
    - No exemplo anterior, |X| = 4, |Y| = 6.

Conjunto

- **Pertencimento**
  - Os símbolos $\in$ e $\notin$ servem para denotar se um determinado elemento pertence ou não pertence a um conjunto, respectivamente.
  - No exemplo anterior:
    - $0 \in X$
    - $5 \notin X$
    - $2 \notin Y$
    - $b \notin X$
    - $c \in Y$
    - $h \notin Y$

Conjunto

- **Conjuntos infinitos** podem ser denotados através da especificação (formal ou informal) de regras ou propriedades que devem ser satisfeitas por todos os seus elementos, possibilitando assim a sua identificação precisa e completa a partir de uma especificação finita.
  - $P = \{x \mid x \text{ é um número primo}\}$
  - $Q = \{y \mid \exists n \text{ inteiro tal que } y = n^2\}$

Conjunto

- **Conjunto Vazio**
- O conjunto que não contém nenhum elemento recebe o nome de conjunto vazio. Por definição, $|\varnothing| = 0$. O conjunto vazio é denotado por $\varnothing$ ou ainda pelo símbolo $\{\ \}$. Assim, $\{\ \} = \varnothing$.

Conjunto

- **Subconjunto**
  - Um conjunto A é dito “contido em um conjunto B”, denotada através do símbolo “$\subseteq$”, se todo elemento de A for também elemento de B.

  - Para os conjuntos A = {b, c, d}, B = {a, b, c, d, e} e C = {e, a, d, b, c} tem-se que:

    $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ e por consequência $A \subseteq C$

Conjunto

- **União**: A união de dois conjuntos A e B corresponde ao conjunto formado por todos os elementos contidos em cada um dos dois conjuntos A e B. Elementos repetidos em ambos os conjuntos são considerados uma única vez no conjunto união:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$

$\{a, b, c\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$

$\{a, b, c, d\} \cup \varnothing = \{a, b, c, d\}$

Conjunto

- **Intersecção**: Define-se a intersecção de dois conjuntos A e B como sendo a coleção de todos os elementos comuns aos dois conjuntos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

- $\{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\}$
- $\{a, b, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\}$
- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$
- $\{a, b, c, d\} \cap \varnothing = \varnothing$

Conjunto

- **Diferença**: Define-se a diferença entre dois conjuntos A e B (nesta ordem) como sendo o conjunto formado por todos os elementos de A não-pertencentes ao conjunto B. Denota-se este conjunto como:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

- $\{a, b, c\} - \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} - \{a, b, c\} = \varnothing$
- $\{a, b, c\} - \{d, e\} = \{a, b, c\}$
- $\{c, d\} - \{a, b, c\} = \{d\}$

Conjunto

- **Produto cartesiano**: O produto cartesiano de dois conjuntos é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b), em que a é um elemento de A, e b um elemento de B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Conjunto

- Um **par ordenado** é uma representação de dois elementos separados por vírgula e delimitados por parênteses, como em (a, b). Tal representação implica uma relação de ordem em que o elemento a é anterior ao elemento b. Conseqüentemente, se a = b, então:

$$(a, b) = (b, a).$$

Conjunto

- **Conjuntos mais comuns**
  - $\mathbb{N}$, representando os números naturais {0, 1, 2, 3, ...};
  - $\mathbb{Z}$, representando os números inteiros {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...};
  - $\mathbb{Z}+$, representando os números inteiros positivos {1, 2, 3, ...};
  - $\mathbb{Z}-$, representando os números inteiros negativos {..., −3, −2, −1};
  - $\mathbb{R}$, representando os números reais.

Relação

- Uma relação R sobre dois conjuntos A e B é definida como um subconjunto de A×B.
- Exemplos:
  - A relação R 1 = {(a, b) | a, b ∈ N e a > b}, sobre N × N, contém, entre infinitos outros, os elementos (2, 1), (7, 4) e (9, 3).
  - A relação R 2 = {(x, y, z) | x, y, z ∈ Z e x 2 = y 2 + z 2 }, sobre Z × Z × Z, contém os elementos (0, 0, 0), (2, 2, 0), (2, 0, −2), (5, 4, 3), (−10, 8, −6) etc.

Relação

- Uma relação R aplicada sobre um elemento a de um conjunto A e outro elemento b de um conjunto B pode ser denotada, em notação infixa, por aRb. Se $(a, b) \in R$, diz-se, de forma abreviada, que aRb.
- Os conjuntos A e B recebem, respectivamente, os nomes domínio e co-domínio (ou contradomínio) da relação R.

Função

- Uma função é um mapeamento que associa elementos de um conjunto denominado domínio a elementos de um outro conjunto, chamado co-domínio ou contradomínio. Essa associação deve ser tal que cada elemento do domínio esteja associado a no máximo um elemento do conjunto co-domínio.

Função

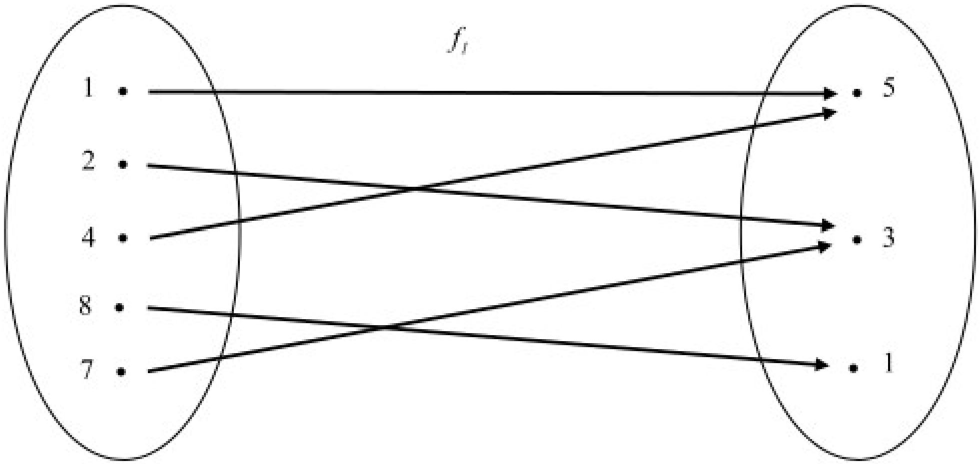
- Formalmente, uma função entre um conjunto A (domínio) e um conjunto B (co-domínio) é definida como uma relação R entre esses conjuntos, de modo que:

$$\forall (a, b), (a, c) \in R, b = c$$

- Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função. Denota-se uma função f entre dois conjuntos X e Y por:

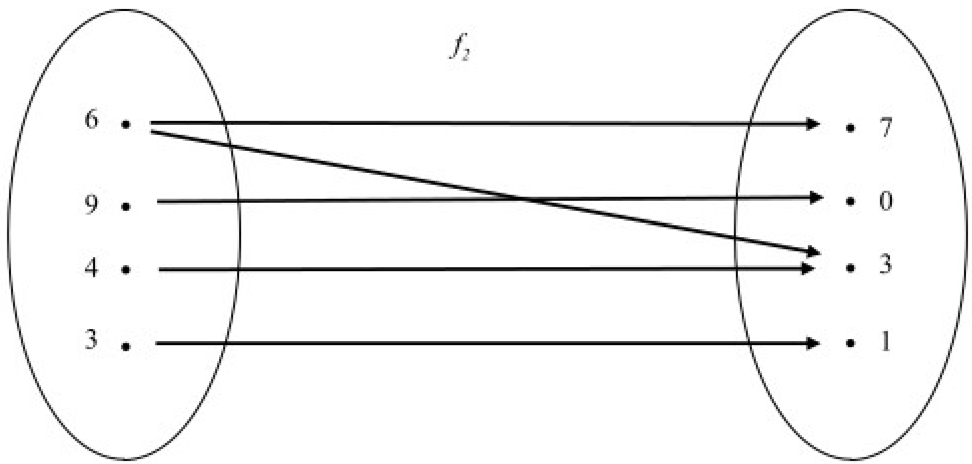
$$f : X \to Y$$

Função



Relação que é também função

Relação que não é função



Função

- O conjunto imagem de f , denotado por I_f , é o conjunto formado por todos os elementos do co-domínio Y que estejam em correspondência com elementos de X, ou seja, $I_f \subseteq Y$.

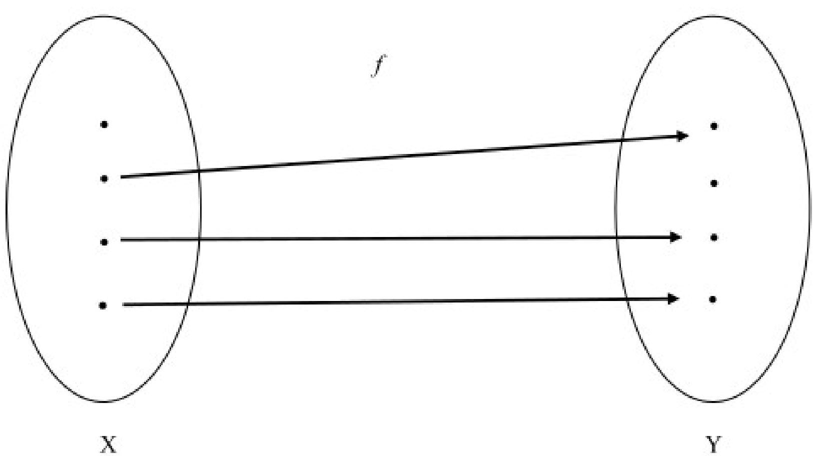
  Formalmente,

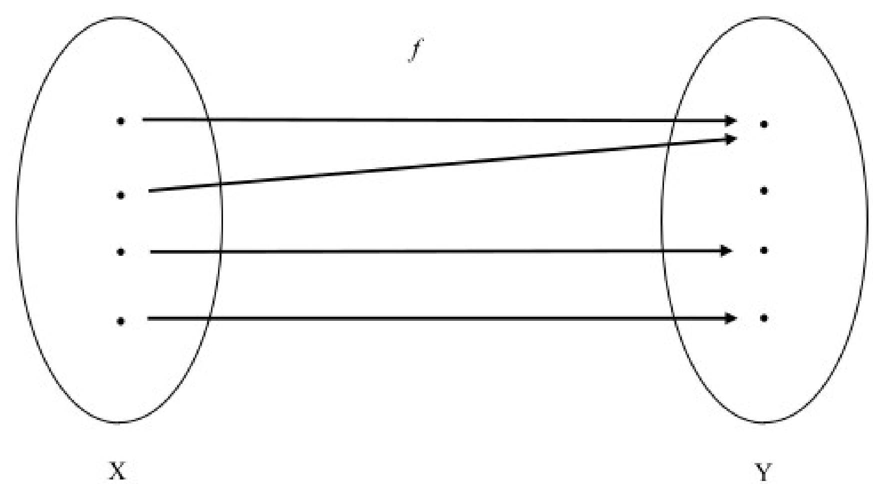
$$I_f = \{y \in Y \mid y = f(x)\}$$

Função

- **Injetora:** quando elementos distintos do domínio X estiverem associados a elementos distintos do co-domínio Y

$$\forall x_1 , x_2 \in X, x_1 = x_2 \Rightarrow f (x_1) = f (x_2)$$

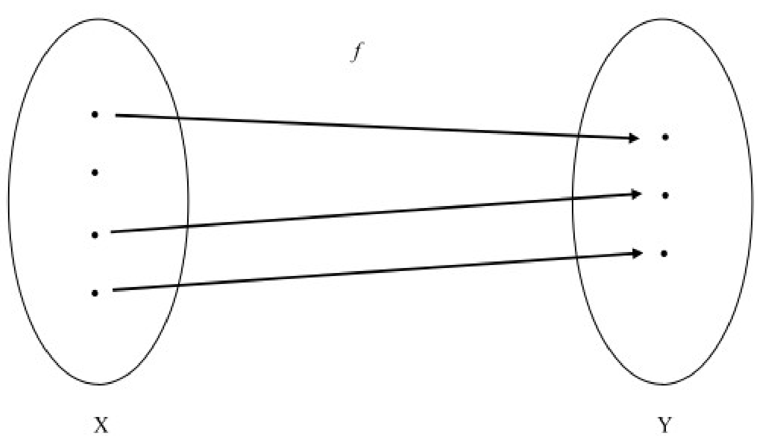


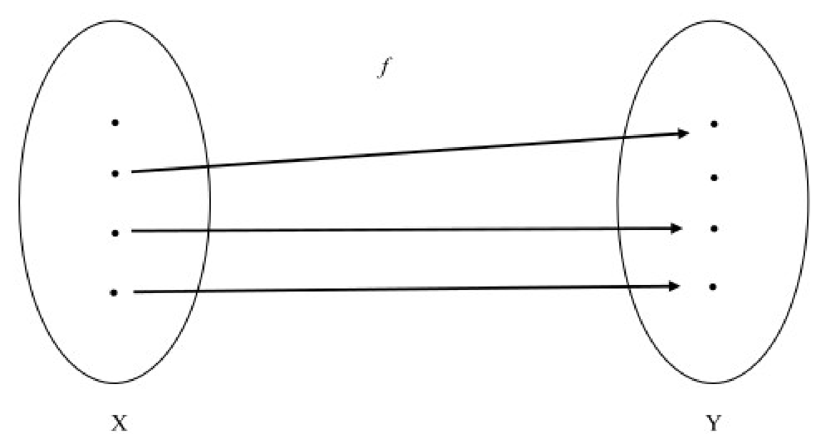


Função

- **Sobrejetora:** se todos os elementos do conjunto co-domínio estiverem associados a elementos do conjunto domínio, ou seja, se I f , o conjunto imagem de f , for igual ao conjunto co-domínio de f

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \mid y = f(x)$$





Função

- **Bijetora:** Uma função que seja simultaneamente total, injetora e sobrejetora recebe a denominação de função bijetora.