

Complexidade Computacional

Classe P

- Algoritmo viável na prática
 - Executam um número de passos limitado por um **polinômio** sobre o comprimento da entrada
- Definição:
 - Uma máquina de Turing é polinomialmente limitada se há um polinômio $p(n)$, tal que a máquina sempre pare após, no máximo, $p(n)$ passos, onde n é o comprimento da entrada.

Classe P

- Linguagem polinomialmente decidível
 - Se houver uma máquina de Turing polinomialmente limitada que a decida
 - A classe de todas as linguagens polinomialmente decidíveis é chamada de **Classe P**
 - Classe P: representam problemas solúveis na prática

Classe P

- Limitados polinomialmente: $O(p(n))$
 - Ordenação
 - Merge Sort, Heap Sort: $p(n) = n \cdot \log n$
 - Busca
 - Binária: $p(n) = \log n$
 - Reconhecimento de padrões
 - multiplicação de matrizes
 - FFT, etc.

Problemas

- Problemas naturais, de interesse prático, não pertencem a Classe P
 - Circuito de Hamilton
 - Caixeiro Viajante
 - Satisfatibilidade
 - Coloração de Grafos
- Nenhum algoritmo de resposta polinomial foi desenvolvido até hoje

Problemas

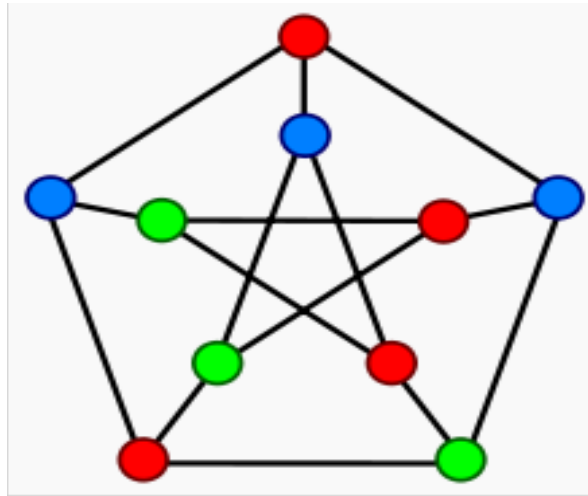
- Solução:
 - Provar que algoritmos de resposta polinomial para estes problemas não são possíveis?
- Infelizmente não!
 - Alguns desses problemas podem ser resolvidos por máquinas de Turing não-determinísticas polinomialmente limitadas

Classe NP

- Definição:
 - Uma máquina de Turing não-determinística é polinomialmente limitada se há um polinômio $p(n)$, tal que nenhuma computação nessa máquina dure mais que $p(n)$ passos, onde n é o comprimento da entrada.
 - Todas as linguagens decididas por máquinas de Turing não-determinísticas, limitadas polinomialmente, formam a Classe NP

Exemplo

- Coloração de Grafos:
 - uma forma de colorir os vértices de um grafo tal que não haja dois vértices adjacentes que compartilhem a mesma cor



Exemplo

- um grafo é dito ser **k-colorível** se ele tem uma coloração própria de vértices que usa k cores
 - Decidir se um grafo é 3-colorável por exemplo é um problema NP, pois nenhum algoritmo de tempo polinomial pode obter a coloração mínima
- No entanto...

Exemplo

- Dado um grafo: $G = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$ e k inteiro positivo
- Fase não determinística:
 - “chute” uma sequência aleatória de cores
 - Comprimento N (número de vértices), dentre k cores

Exemplo

- Fase determinística:

```
k-colorável  $\leftarrow$  true
FOR i = 1 TO n - 1 DO
  FOR j = i + 1 TO n DO
    IF (vi, vj)  $\in$  E AND Ci = Cj THEN
      k-colorável  $\leftarrow$  false;
      EXIT;
RETURN k-colorável
```

◀ ◻ ▶ ◀

- Resolve-se em $O(n^2)$ com o algoritmo não determinístico apresentado
- Similarmente, soluções para os outros problemas, podem ser “chutadas” em tempo linear e verificadas em tempo polinomial no tamanho da entrada

Teoremas

- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$
 - Pode-se conceber como um algoritmo não determinístico com fase inicial vazia, e fase determinística polinomialmente limitada
- $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P}$
 - É um dos sete problemas do milênio do Clay Mathematics Institute

