Ein Fallschirmspringer mit der Masse $m = 100\ kg$ verlässt in einer Höhe von $2000\ m$ das Flugzeug. Die Luftreibung wird zunächst nicht berücksichtigt. Die Erdbeschleunigung kann mit $g = 10\ m/s^2$ angenähert werden.

?   t=

a) Welche Strecke hat der Springer nach $3\ s$ Sprungdauer zurückgelegt?
(2 Punkte)

Fallbewegung → beschl. Bewegung $a = g = 10\ \frac{m}{s^2}$

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}\, a \cdot t^2} + \cancel{v_0 \cdot t} + \cancel{s_0}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10\ \frac{m}{s^2} \cdot (3s)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10\ \frac{m}{\cancel{s^2}} \cdot 9\cancel{s^2}$$

$$= \underline{\underline{45\ m}}$$

b) Welche Geschwindigkeit hat er bis dahin erreicht?
(2 Punkte)

$v(3s) = ?$

beschl. Bewegung: $\boxed{v(t) = a \cdot t}$

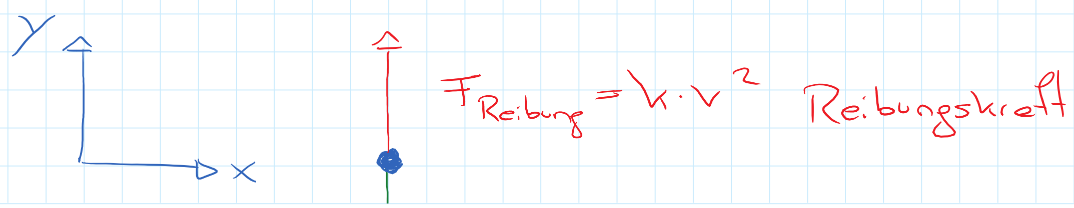
$$v(t = 3s) = 10\ \frac{m}{s^{\cancel{2}}} \cdot 3\cancel{s}$$

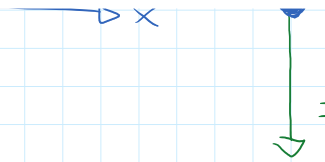
$$= \underline{\underline{30\ \frac{m}{s}}}$$

Nun wird die Luftreibung berücksichtigt. Sie erzeugt eine Widerstandskraft $F_{Reibung}$, die proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v ist:

$$\boxed{F_{Reibung} = k \cdot v^2}$$

c) Geben Sie durch eine Skizze an, welche Kräfte in welcher Richtung auf den Körper einwirken!
(2 Punkte)





$F_G = m \cdot g$ Gravitionskraft

d) Welche **maximale** Geschwindigkeit erreicht der Fallschirmspringer, wenn sein Luftwiderstandswert $k = 2{,}5\ kg/m$ beträgt?
(3 Punkte)

Wenn $F_{Reibung}$ (durch Zunahme von v) $= F_G$ ist, dann nimmt Geschw. nicht mehr zu

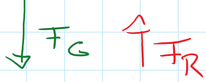
Ansatz: $F_{Reibung} = F_G$ (Kräftegleichgewicht)

$$k \cdot v^2 = m \cdot g$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} = \sqrt{\frac{100\,\cancel{kg} \cdot 10\,\frac{m}{s^2}}{2{,}5\,\frac{\cancel{kg}}{m}}} = \underline{\underline{20\,\frac{m}{s}}}$$

e) Durch Öffnen des Fallschirms erhöht sich der Luftwiderstandswert auf $k' = 40\ kg/m$. In welcher Höhe muss der Fallschirm geöffnet werden, damit die Flugzeit noch mindestens $10\ s$ beträgt?
(2 Punkte)

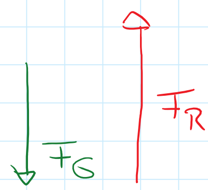
Anfang Sprung:



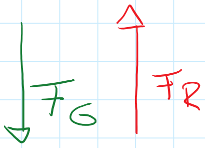
Springer beschleunigt
v nimmt zu
↳ F_R nimmt zu

$F_R = F_G$ → keine Netto-Kraft
↳ keine Beschl.
↳ gleichförmige Bewegung

Öffnen Schirm:



$F_R > F_G$
↳ Verzögerung / Bremsbesch! "$-a$"



↳ v nimmt ab → F_R nimmt ab

bis

$F_G = F_R$

↳ gleichf. Bewegung

am Ende des Sprungs: gleichf. Bewegung

$$\boxed{s = v \cdot t}$$

v' für k' = 40 $\frac{kg}{m}$ ausrechnen (siehe d)):

$$v' = \sqrt{\frac{100\,\cancel{kg}\cdot 10\,\frac{m}{s^2}}{40\,\frac{\cancel{kg}}{m}}} = \underline{\underline{5\,\frac{m}{s}}}$$

Höhe Öffnung Fallschirm für Restflugzeit t = 10 s:

$$s'(10s) = v' \cdot 10s$$

$$= 5\,\frac{m}{\cancel{s}} \cdot 10\,\cancel{s}$$

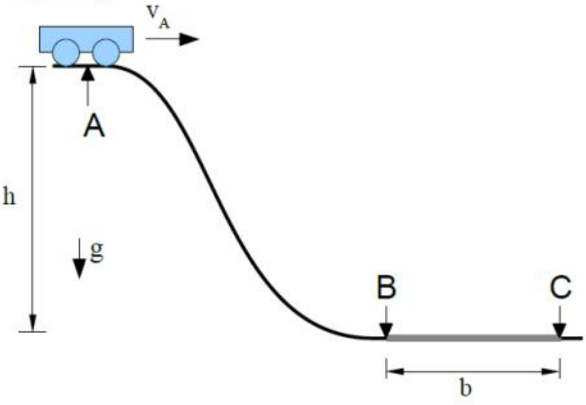
$$= \underline{\underline{50\,m}}$$

<u>Aufgabe 1 (12,5 Punkte)</u>

Ein Wagen mit der Gesamtmasse $\boldsymbol{m = 250\ kg}$ verlässt bei $\boldsymbol{A}$ den oberen Abschnitt einer Achterbahn mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_A = 2\ m/s}$. Die Höhe beträgt $\boldsymbol{h = 7\ m}$.
Bis zum Erreichen des Bahnpunktes $\boldsymbol{B}$ sei die Bewegung reibungsfrei.

Hinweis: Rechnen Sie mit g = 10 m/s²

Abbildung 1:



a) Welche potentielle Energie hat der Wagen im Bahnpunkt $\boldsymbol{A}$?
(2 Punkte)

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h = 250\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 7\,m = 17.500\,J$$
$$= \underline{\underline{17{,}5\,kJ}}$$

b) Wie groß ist die kinetische Energie des Wagens im Bahnpunkt $\boldsymbol{A}$?
(2 Punkte)

$$W_{kin,A} = \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 250\,kg \cdot \left(2\,\frac{m}{s}\right)^2$$
$$= \underline{\underline{500\,J}}$$

c) Mit welcher Geschwindigkeit erreicht der Wagen den Bahnpunkt $\boldsymbol{B}$?
(3 Punkte)

$$W_{kin,B} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{kin,B}}{m}}$$

$$W_{kin,B} = W_{pot,A} + W_{kin,A} \qquad = \sqrt{\frac{2 \cdot 18.000\,\cancel{kg}\,\frac{m^2}{s^2}}{250\,\cancel{kg}}} = \underline{\underline{12\,\frac{m}{s}}}$$
$$= \underline{\underline{18\,kJ}}$$

d) Der Wagen soll ab Bahnpunkt $\boldsymbol{B}$ mit konstanter Beschleunigung abgebremst werden, s.d. er am Bahnpunkt $\boldsymbol{C}$ stehen bleibt. Wie groß ist die dazu notwendige (Brems-)Beschleunigung, wenn die Strecke $\boldsymbol{b = 12\ m}$ lang ist?
(3,5 Punkte)

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \qquad \text{beide unbekannt!}$$

$$v = a \cdot t + v_0 \overset{!}{=} 0 \qquad \text{bis Stillstand}$$

$v = a \cdot t + v_0 \stackrel{!}{=} 0$ bis Stillstand

$\hookrightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-v_0}{a}$ — $12 \frac{m}{s}$

$s = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{-v_0}{a}\right)^2 + v_0 \cdot \left(\frac{-v_0}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_0^2}{a}\right) + \left(\frac{-v_0^2}{a}\right)$

$= -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{s} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(12 \frac{m}{s})^2}{12 m} = \underline{\underline{-6 \frac{m}{s^2}}}$

e) Welche Kraft wirkt auf einen 80 kg schweren Fahrgast während des Bremsvorganges?
(2 Punkte)

$F = m \cdot a$

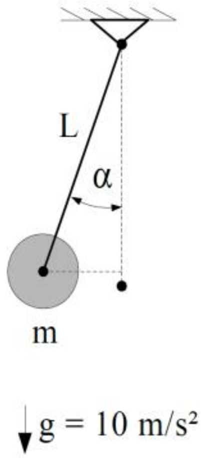
$= 80 kg \cdot (-6 \frac{m}{s^2})$

$= \underline{\underline{-480 N}}$

Fadenpendel

Ein Ball mit der Masse $m = 0{,}25\ kg$ wird an einem $L = 1\ m$ langen Seil (gemessen vom Ballmittelpunkt) aufgehängt (Abbildung 1a).

Abbildung 1a



a) Berechnen Sie die Frequenz f_0 der Schwingung, wenn der Ball um den Winkel $\alpha = 18°$ aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen wird.
(2 Punkte)

Frequenz Fadenpendel:

$$f_{Faden} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}}$$

→ Masse egal

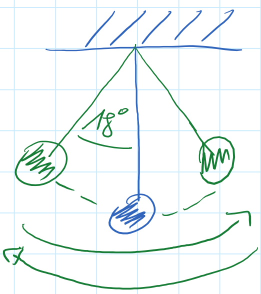
→ Winkel egal

$$\Rightarrow f_{0,Faden} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10\,\frac{\cancel{m}}{s^2}}{1\,\cancel{m}}}$$

$$= \underline{\underline{0{,}5\ Hz}}$$

→ $\frac{1}{2}$ Schwingung pro 1s

b) Nach welcher Zeit T_1 erreicht der Ball erstmalig wieder die Ruheposition ($\alpha = 0°$)?
(2 Punkte)



Schwingungsdauer T:

wie lange (in s) für komplette Schwingung

(links → rechts → links)

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{0{,}5\frac{1}{s}} = \underline{\underline{2s}}$$

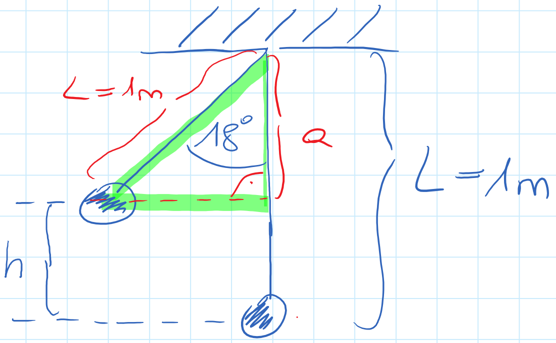
Zeit bis Ruhelage ($\alpha = 0°$) $\hat{=}$ $\frac{1}{4}$ Schwingung

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{4} \cdot T_0 = \frac{1}{4} \cdot 2s = \underline{\underline{0{,}5s}}$$

c) Wie groß ist die kinetische Energie des Balls bei Erreichen der Ruheposition ($\alpha = 0°$)? Verwenden Sie zur Berechnung den Energieerhaltungssatz!
(Hinweis: $1 - \cos(18°) \approx 0{,}05$)
(3 Punkte)

Energieerhaltung: $W_{kin}(\alpha = 0°) = W_{pot}(\alpha = 18°)$

Berechnung von $W_{pot}(\alpha = 18°)$: $W_{pot,18°} = m \cdot g \cdot h$?



- $L = h + a \rightarrow h = L - a$
- $\cos(18°) = \frac{a}{L}$

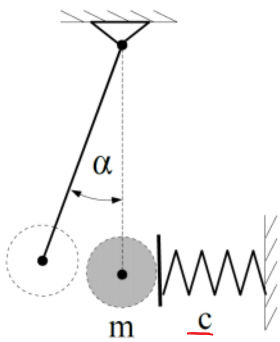
$\hookrightarrow a = L \cdot \cos(18°)$

$$h = L - a$$
$$= L - L \cdot \cos(18°)$$
$$= L \cdot (1 - \cos(18°))$$
$$= 1m \cdot 0{,}05$$
$$= \underline{\underline{0{,}05\,m}}$$

$$W_{pot,18°} = 0{,}25\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}05\,m = \underline{\underline{0{,}125\,J}}$$

Der Ball wird nun so aufgehängt, dass er in der Ruheposition gegen eine Wand prallt. Der Aufprall kann als ideal elastisch angenommen werden und wird durch eine Feder *c* modelliert (Abbildung 1b). Der Ball wird wiederum aus einem Anfangswinkel $\alpha = 18°$ losgelassen.

Abbildung 1b



d) Durch den Aufprall wird die Feder um $s = 1\,cm$ zusammengedrückt. Berechnen Sie anhand der kinetischen Energie unmittelbar vor dem Aufprall und dem Energieerhaltungsprinzip die Federkonstante *c*!
(3 Punkte)

aus c): $W_{pot,18°} = 0{,}125\,J = W_{kin,0°}$

$$W_{pot,18^\circ} = 0{,}125\,J = W_{kin,0^\circ}$$

Federenergie: $W_{Feder} = \frac{1}{2}\, c \cdot (\Delta l)^2$

Federkraft: $F_{Feder} = c \cdot \Delta l$

Energieerhaltung: $W_{kin,0^\circ} = W_{Feder,1cm}$

$$\Rightarrow \quad W_{kin,0^\circ} = W_{Feder,1cm} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\Delta l)^2 \quad \Big| \text{ nach } c \text{ auflösen}$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{2 \cdot W_{kin,0^\circ}}{(\Delta l)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}125\, N\cancel{m}}{(0{,}01\,m)^{\cancel{2}}} = 2500\, \frac{N}{m}$$

e) Der Ball und die Feder können als Federpendel (Feder-Masse-Schwinger) aufgefasst werden. Berechnen Sie die Frequenz f_2 und die Periodendauer T_2 dieses Pendels!
(2 Punkte)

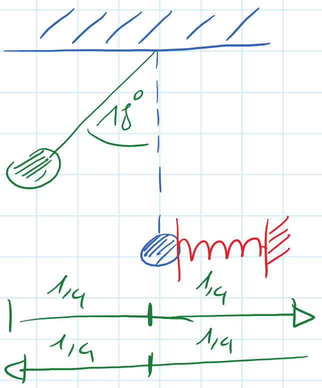
$$f_{2,Feder} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}} \qquad c = 2500\,\frac{N}{m},\; m = 0{,}25\,kg$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2500\, \cancel{kg}/s^2}{0{,}25\, \cancel{kg}}} = \underline{\underline{15{,}9\,Hz}}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{15{,}9\,\frac{1}{s}} = \underline{\underline{0{,}063\,s}}$$

f) Nach welcher Zeit T_{ges} hat der Ball wieder die Ausgangslage ($\alpha = 18°$) erreicht?
(2 Punkte)

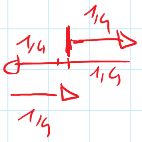
Kombination: Fadenpendel – Federpendel



$(f_0 = 0{,}5\,\text{Hz})$ $T_0 = 2\,s$ aus a), b)

$(f_2 = 15{,}9\,\text{Hz})$ $T_2 = 0{,}063\,s$ aus e)

$T_0 = 2\,s$



$T_2 = 0{,}063\,s$

$$T_{ges} = \underline{\frac{1}{4} T_0} + \underline{\frac{1}{4} T_2} + \underline{\frac{1}{4} T_2} + \underline{\frac{1}{4} T_0} \quad \text{(links-rechts-links)}$$

$$= \frac{1}{2} T_0 + \frac{1}{2} T_2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\,s + \frac{1}{2}\, 0{,}063\,s$$

$$= \underline{\underline{1{,}0315\,s}} \approx \underline{\underline{1{,}03\,s}}$$