Inledning

I den här laborationen kommer du att möta några olika tillämpningar där linjär algebra spelar en väsentlig roll.

Målsättningen med laborationen är att du ska få förståelse för följande metoder och koncept

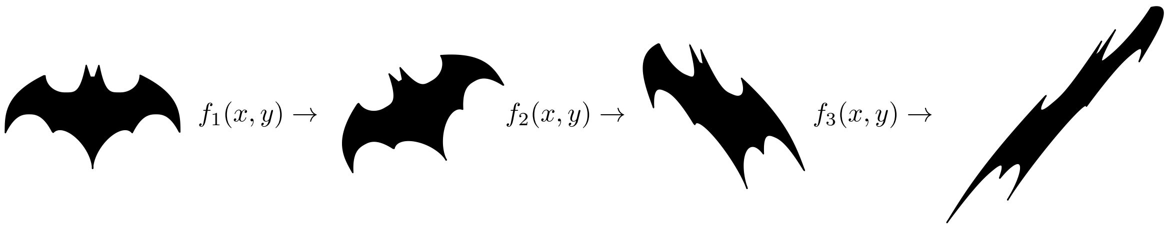
- Linjära avbildningar
- Minsta-kvadratmetoden

samt att du ska träna upp dina färdigheter i att skapa effektiva Matlab-program som löser ett givet problem.

De Matlab-program och filer du behöver för den här laborationen hittar du i Canvas, på samma ställe som denna lydelse.

1 Linjära transformationer och enkel datorgrafik i 2D

Läs i Anton & Busby 6.1-6.2, 6.4, 6.5 (exempel 3) om linjära transformationer.



I den här uppgiften ska du skapa ett program som med hjälp av linjära transformationer (avbildningar) bland annat roterar, förstorar och speglar en uppritad figur. Användaren av programmet ska kunna ladda in en figur och välja vilken typ av transformation som ska göras. Vi kommer enbart att arbeta med transformationer från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

Antag att konturen av en figur är definierad av n stycken x- och y-koordinater lagrade i en $2 \times n$-matris, X. Första raden innehåller alla x-koordinater och andra raden innehåller alla y-koordinater.

En linjär transformation, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan beskrivas med en 2×2 standardmatris, A, som i det här fallet kommer att operera på de par av koordinater (x, y) som definierar konturen av en figur enligt ovan. Om transformationens standardmatris ges av

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

och de x- och y-koordinater som definierar figuren samlas i matrisen

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

så får vi den transformerade figurens x- och y-koordinater i matrisen Y som ges av

$$Y = AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

Lös uppgifterna F1-F4 under *SF1694 - Lab 2 Förberedande uppgifter* i Matlab Grader innan du börjar med uppgifterna nedan.

Uppgift 1

a) Börja med att skapa en figur. För att skapa en figur kan du använda dig av funktionen `CreateFigure`. Funktionen ber dig *rita* en figur genom att markera figurens kontur med punkter i ett figurfönster. Punkternas koordinater sparas i en matris `X` av storlek $2 \times n$ där n är antalet punkter. Första raden, `X(1,:)`, innehåller alla punkters x-koordinater och den andra raden, `X(2,:)`, innehåller alla punkters y-koordinater.

Funktionen anropas genom `X = CreateFigure;`.

Spar koordinaterna för din figur (matrisen `X`) i en fil genom att skriva `save minfig X`. Här är `minfig` namnet på `.mat`-filen som variabeln `X` sparas i.

Vill du inte rita en figur själv kan du ladda ner filen `BatMan.mat` från Canvas. Filen innehåller en matris `X` med de x- och y-koordinater som definierar figurens kontur.

Om du vill plotta din figur kan du använda funktionen `PlotFigure(X)`.

b) Skriv ett Matlab-program `Transformationer.m` som läser in en figur som är lagrad i en `.mat`-fil (enligt ovan). Programmet ska sedan låta användaren välja vilken typ av transformation som ska göras. Användaren ska kunna välja mellan

1. Rotation (moturs) kring origo med en vinkel ϕ. Användaren ska även kunna välja vinkeln ϕ.
2. Spegling i en linje genom origo med lutning k. Användaren ska även kunna välja linjens lutning k.
3. Skjuvning med en faktor k i x-led. Användaren ska även kunna välja k.
4. En sammansatt transformation bestående av först en skjuvning och sedan en rotation. Du kan bestämma värdet på k i skjuvningen och vinkeln ϕ själv. Prova även att rotera först och sedan utföra skjuvningen. Får du samma resultat?

För varje val av transformation ska programmet rita upp den ursprungliga figuren och den transformerade figuren (använd `subplot` för att rita två figurer i samma figurfönster). Använd funktionen `PlotFigure` för att rita upp figurerna. Ändra gärna i filen `PlotFigure` om det behövs för att få en snygg figur.

d) Gör en animation av en figur. Exempelvis en figur som roterar kring origo. Animationen kan du göra genom att göra upprepade transformationer i en slinga och för varje transformation rita upp den transformerade figuren.

Funktionerna `CreateFigure` och `PlotFigure` finns i Canvas. Om du vill kan du använda funktionerna du skapade i Matlab Grader för att göra transformationerna.

Skicka in programmet `Transformationer.m` samt eventuell .mat-fil som definierar en egen skapad figur. Du behöver inte skicka in filerna som du har laddat ner från Canvas.

2 Temperaturen i Stockholm

Läs i Anton & Busby 7.8 och i Sauer 4.1-4.2.

Du har fått en fil, `STHLMARN2021.mat` (finns att ladda ner från Canvas), med uppmätta temperaturer (i grader) varje timma från 1 januari 2009 kl 00:00 till 31 december 2021 kl 23:59. Temperaturerna ligger lagrade i en vektor `Td`. Data kommer från SMHIs mätstation Stockholm-Arlanda.

Du har fått i uppdrag av Stockholms bönder att med hjälp av denna data ta reda om man kan se någon långsiktig ökning av temperaturen under åren 2009-2021.

För att kunna ta reda på detta ska du anpassa den givna temperaturdatan med hjälp av minstakvadratmetoden till modellen

$$T(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sin(\omega(t - t_s)) \tag{1}$$

där T är temperaturen i grader och t är tiden i timmar. I modellen är parametrarna c_1, c_2, c_3 och t_s okända. c_1 representerar en ungefärlig medeltemperatur över tiden och c_2 representerar en långsiktigt minskning eller ökning av temperaturen. Den sista termen i modellen representerar den periodiska variationen av temperaturen över ett år där c_3 är amplituden, $\omega = 2\pi/(365 \cdot 24)$ ger periodtiden ett år och t_s är fasförskjutningen (i timmar).

Lös uppgifterna F5-F6 under *SF1694 - Lab 2 Förberedande uppgifter* i MATLAB GRADER innan du börjar med uppgifterna nedan.

UPPGIFT 2

a) Visa att modellen kan skrivas om på formen

$$T(t) = c_1 + c_2 t + A_0 \sin(\omega t) + A_1 \cos(\omega t) \tag{2}$$

där $A_0 = c_3 \cos(\omega t_s)$ och $A_1 = -c_3 \sin(\omega t_s)$

Skriv ett MATLAB-program `MKV.m` som löser uppgifterna nedan.

b) Anpassa modellen (2) till den temperaturdata som finns i filen `STHLMARN2021.mat`. Plotta data och den anpassade modellen i samma plott. Programmet ska även skriva ut värdet på amplituden, c_3, och fasförskjutningen, t_s, som förekommer i modellen (3).

c) Beräkna normen av residualen, $\|T_d - T_{mod}\|_2$ och skriv ut värdet. T_d är givna temperaturdata som finns i filen `STHLMARN2021.dat` och T_{mod} är motsvarande temperaturvärden beräknat med modellen (2) (eller modellen (3)).

d) Kan man se någon långsiktig ökning eller minskning av temperaturen under perioden 2009-2021?

e) Anpassa även modellen (2) till dygnsmedeltemperaturen. Använd nu $\omega = 2\pi/365$.

Plotta data (dygnsmedeltemperaturerna) och den anpassade modellen i samma plott. Beräkna och skriv ut normen av residualen, $\|T_d - T_{mod}\|_2$. Är den mindre eller större än i c)?

Här måste du börja med att räkna ut dygnsmedeltemperaturen för alla dagar från den 1 januari 2009 till den 31 december 2021. Dygnsmedeltemperaturen för ett dygn ges av $\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24} T_i$ där T_i är de uppmätta temperaturerna från kl 00:00 till kl 23:59 för det aktuella dygnet. Du behöver inte ta hänsyn till sommar/vintertid.

Skicka in programmet `MKV.m`. Du behöver inte skicka in data-filen.