بسم الله الرحمن الرحیم

درس نرم افزارهای ریاضی، آشنایی با نرم‌افزار متلب و لاتک

مدرس: نجمه حسینی منجزی

دانشگاه اصفهان، دانشکده ریاضی و آمار، گروه ریاضیات کاربردی و علوم کامپیوتر

بخش ۶

بهمن ۱۴۰۰

فهرست مطالب

۱ چندجمله‌ای ها

یک چندجمله‌ای از درجه n به صورت

$$f(x) = a_n x^n + x_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰,$$

می باشد. برای وارد کردن این چندجمله ای آن را توسط یک ماتریس از چپ به راست تعریف می کنیم. ضرایب را به ترتیب از بالاترین درجه به کم ترین درجه می نویسیم

$$>> \quad f = [a_n, a_{n-۱}, \ldots, a_۱, a_۰].$$

مثال) چندجمله ای های زیر را در MATLAB وارد کنید.

$$a = x^۵ + ۲x^۴ + ۳x^۲ - ۵x + ۱$$

$$b = ۴x^۵ + ۲x^۴ - ۳x^۳ - ۲x^۲ + x + ۱۰$$

که در MATLAB می نویسیم

$$>> \quad a = [۱,\ ۲,\ ۰,\ ۳,\ \ -۵,\ ۱]$$

$$>> \quad b = [۴,\ ۲,\ \ -۳,\ \ -۲,\ ۱,\ ۱۰]$$

برای محاسبه ریشه چند جمله ای p را با دستور roots به صورت زیر حساب می کنیم

$$>> \quad p = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$$

$$>> \quad r = roots(p)$$

برای مثال داریم

Command Window

```
>> p = [3 -2 -4];    %%p(x)=3x^2-2x-4
>> r=roots(p)

r =

    1.5352
   -0.8685

>> %p1=x^4-1
>> p1=[1 0 0 0 -1];
>> r1=roots(p1)

r1 =

  -1.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 1.0000i
   0.0000 - 1.0000i
   1.0000 + 0.0000i

fx >>
```

اگر ریشه های یک چندجمله ای را داشته باشیم و خود چندجمله ای را بخواهیم از دستور poly استفاده می کنیم که به صورت زیر بکار

برده می شود

$$>> \quad r = [r_۱, r_۲, \ldots, r_n]$$

$$>> \quad p = poly(r)$$

برای مثال

Command Window

```
>> r=[-1 0 3 2 1]

r =

    -1     0     3     2     1

>> p=poly(r)

p =

     1    -5     5     5    -6     0

>> r1=roots(p)

r1 =

         0
    3.0000
   -1.0000
    2.0000
    1.0000
```

برای ضرب دو چندجمله ای از دستور conv استفاده می کنیم. فرض کنیم p۱ و p۲ دو چندجمله ای با درجه دلخواه باشند.

$$>> \quad p = conv(p۱, p۲)$$

برای مثال

```
Command Window
>> p1=[1 0 0 1];    %p1=x^3+1
>> p2=[3 2];        %p2=3x+2
>> p=conv(p1,p2)

p =

     3     2     0     3     2

>> %p=3x^4+2x^3+3x+2
fx >>
```

دقت کنید p حاصل از این عبارت دارای طول به صورت زیر است

$$length(p) = length(p۱) + length(p۲) - ۱$$

چندجمله‌ای ها
عبارات سیمبلیک

اگر p۱ یک چندجمله ای از درجه بیشتر از چندجمله ای p۲ باشد و بخواهیم p۱ را بر P۲ تقسیم کنیم از دستور deconv به صورت زیر استفاده می کنیم

$$>> \quad [q,r] = deconv(p۱,p۲)$$

که در واقع مقادیری که برگردانده می شوند در معادله زیر صدق می کنند

$$>> \quad p۱ = conv(p۲,q) + r$$

برای مثال

چندجمله‌ای ها
عبارات سیمبلیک

Command Window

```
>> p1=[1 2 3 4];
>> p2=[10 20 30];
>> p=conv(p1,p2)

p =

    10    40   100   160   170   120

>> [q,r]=deconv(p,p1)

q =

    10    20    30


r =

     0     0     0     0     0     0

>> [q1,r1]=deconv(p,p2)

q1 =

     1     2     3     4
```

برای تجزیه یک کسر که در صورت و مخرج آن چندجمله ای داریم از دستور residue استفاده می کنیم.

فرض کنیم یک کسر به صورت زیر داریم

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{r_n}{s-p_n} + \ldots + \frac{r_2}{s-p_2} + \frac{r_1}{s-p_1} + k(s).$$

و دستور زیر را به کار می بریم

$$>> \quad [r,p,k] = residu(b,a)$$

برای مثال

$$f(x) = \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{-۴x + ۸}{x^۲ + ۶x + ۸}$$

در MATLAB داریم

Command Window

```
>> b=[-4 8];
>> a=[1 6 8];
>> [r,p,k]=residue(b,a)

r =

   -12
     8


p =

    -4
    -2


k =

     []
```

در واقع به صورت زیر تجزیه شده است

$$\frac{b(x)}{a(x)}=\frac{-۴x+۸}{x^۲+۶x+۸}=\frac{-۱۲}{x+۴}+\frac{۸}{x+۲}$$

برای مثال

$$f(x)=\frac{b(x)}{a(x)}=\frac{۲x^۳+x^۲}{x^۳+x+۱}$$

را می خواهیم تجزیه کنیم داریم

Command Window

```
>> b=[2 1 0 0];
>> a=[1 0 1 1];
>> [r,p,k]=residue(b,a)

r =

   0.5354 + 1.0390i
   0.5354 - 1.0390i
  -0.0708 + 0.0000i


p =

   0.3412 + 1.1615i
   0.3412 - 1.1615i
  -0.6823 + 0.0000i


k =

     2

>>
```

در واقع به صورت زیر تجزیه شده است

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{2s^3 + s^2}{s^3 + s^2 + 1} = \frac{0.5354 + 1.0390i}{s - (0.3412 + 1.1615i)} + \frac{0.5354 - 1.0390i}{s - (0.3412 - 1.1615i)} + \frac{-0.0708}{s + 0.6823} + 2.$$

اگر بخواهیم مقدار چندجمله ای را در نقطه ای خاص مثلا a محاسبه کنیم از دستور polyval استفاده می کنیم

$$>> \quad b = polyval(p, a)$$

در این صورت $b = p(a)$ محاسبه می شود. اگر بطور همزمان مقدار چندجمله ای را در چندین نقطه بخواهیم به صورت زیر عمل می کنیم

$$>> \quad a = [a_۱, a_۲, a_۳, a_۴]$$

$$>> \quad b = polyval(p, a)$$

بنابراین داریم

```
Command Window
>> p=[3 2 1];     %p(x)=3x^2+2x+1
>> b1=polyval(p,1)

b1 =

     6

>> b1=polyval(p,2)

b1 =

    17

>> b1=polyval(p,[0 1 -1 3])

b1 =

     1     6     2    34

>> a=[0 1 -1 3]

a =

     0     1    -1     3

>> b1=polyval(p,a)
fx
```

با استفاده از دستور polyfit می توان یک چندجمله ای بدست آورد که با x و y کمترین فاصله را داشته باشد. فرض کنید x درایه های

افقی نقاط و y درایه های عمودی نقاط باشند از دستور زیر استفاده می کنیم

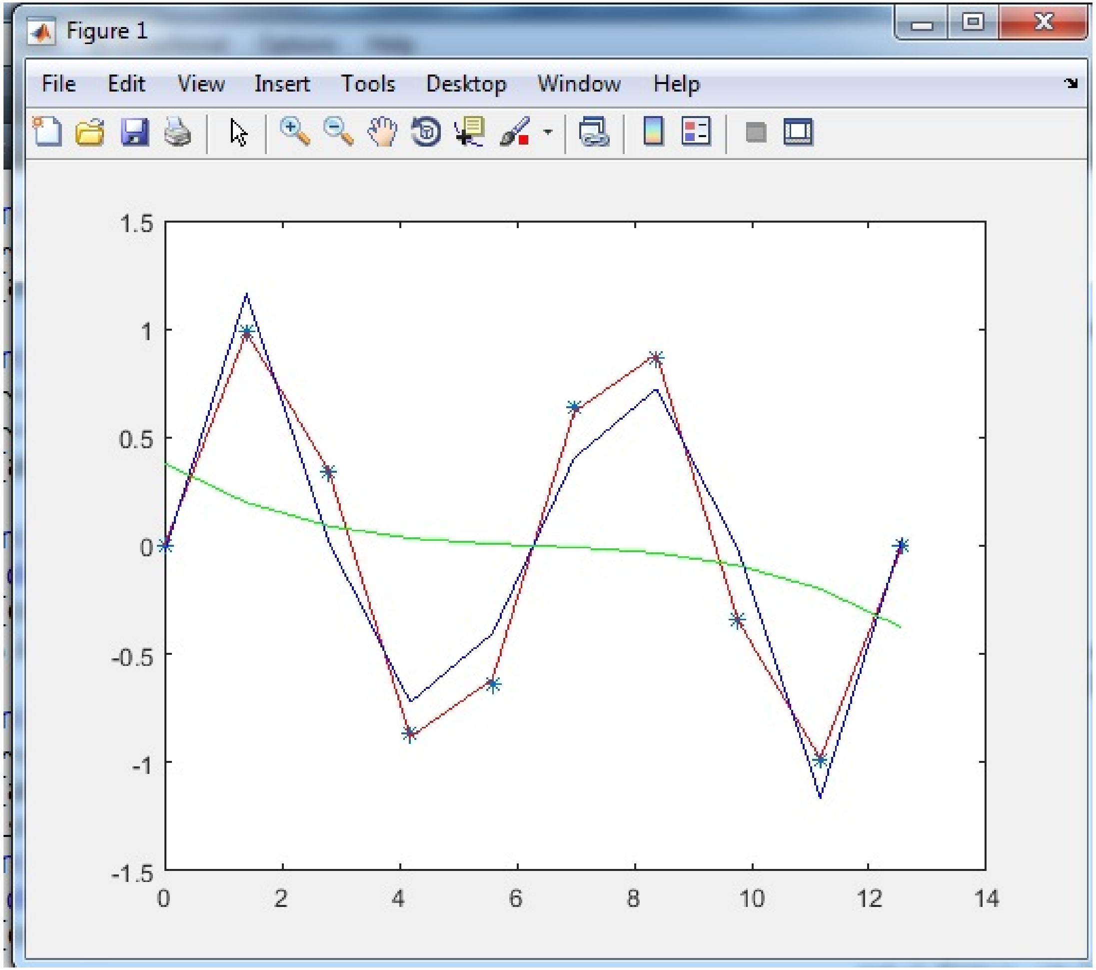
$$>> \quad p = polyfit(x, y, n)$$

برای مثال

Command Window

```
>> x = linspace(0,4*pi,10);
>> y = sin(x);
>> p1=polyfit(x,y,7)

p1 =

   -0.0001    0.0028   -0.0464    0.3702   -1.3808    1.9084   -0.1141    0.0002

>> p2=polyfit(x,y,5)

p2 =

    0.0013   -0.0407    0.4452   -1.9611    2.8327   -0.0340

>> p3=polyfit(x,y,4)

p3 =

   -0.0000   -0.0013    0.0237   -0.1595    0.3787

>> y1=polyval(p1,x);
>> y2=polyval(p2,x);
>> y3=polyval(p3,x);
>> plot(x,y,'*',x,y1,'r',x,y2,'b',x,y3,'g')
Warning: MATLAB has disabled some advanced graphics rendering features by switching to
click here.
```

حال شکل های متناظر را رسم می کنیم تا میزان تقریب را بهتر متوجه شویم



چندجمله ای حاصل از دستور polyfit طبق دستور واندرموند بدست می آید.

با استفاده از دستور polyder می توانیم مشتق یک چندجمله ای را محاسبه کنیم. که دستور را به صورت زیر به کار می بریم

$$>> \quad k = polyder(a) \quad \Longleftrightarrow \quad k(x) = \frac{da(x)}{dx}$$

$$>> \quad k = polyder(a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad k(x) = \frac{d}{dx}(a(x)b(x))$$

$$>> \quad [p,q] = polyder(a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{d}{dx}(\frac{a(x)}{b(x)})$$

برای مثال

Command Window

```
>> a = [1 -2 0 0 11];   %a=x^4-x^3+11
>> b = [1 -10 15];      %b=x^2-10x+15
>> k=polyder(a,b)

k =

     6   -60   140   -90    22  -110

>> %k=6x^5-60x^4+140x^3-90x^2+22x+110
>> 
```

```
Command Window
>> [p,q]=polyder([1 2],[ 3 0 1])

p =

    -3   -12     1


q =

     9     0     6     0     1

>>
```

با استفاده از دستور polyint می توانیم امتگرال یک چندجمله ای را محاسبه کنیم. که دستور را به صورت زیر بکار می بریم

$$>> \quad k = polyint(a) \quad \Longleftrightarrow \quad k(x) = \int a(x)dx$$

برای مثال

```
Command Window
>> p = [3 0 -4 10 -25];     %p=3x^4-4x^2+10x-25
>> k=polyint(p)

k =

    0.6000         0    -1.3333    5.0000   -25.0000         0

>> value=polyval(k,3)-polyval(k,-1)

value =

   49.0667

>> 
```

بنابراین برای محاسبه انتگرال در بازه خاصی مانند $[\alpha, \beta]$ به طریق زیر عمل می کنیم

$$>> \quad k = polyint(a) \quad \Longleftrightarrow \quad k(x) = \int a(x)dx$$

$$>> \quad b = polyval(k, \beta) - polyval(k, \alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad b = \int_{\alpha}^{\beta} a(x)dx$$

$$>> \quad b = polyval(polyint(a), \beta) - polyval(polyint(a), \alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad b = \int_{\alpha}^{\beta} a(x)dx$$

$$>> \quad b = diff(polyval(polyint(a), [\alpha,\ \beta])) \quad \Longleftrightarrow \quad b = \int_{\alpha}^{\beta} a(x)dx$$

و بنابراین

Command Window

```
>> p = [3 0 -4 10 -25];     %p=3x^4-4x^2+10x-25
>> value=diff(polyval(polyint(p),[-1 3]))

value =

   49.0667

>> value=polyval(polyint(p),3)-polyval(polyint(p),-1)

value =

   49.0667

>> 
```

زمانی که انتگرال چندجمله ای را محاسبه می کنیم جمله ثابت می تواند هر مقداری باشد که به طور پیش فرض MATLAB صفر قرار می دهد که می توانیم جمله ثابت را به طریق زیر تعیین کنیم

$$>> \quad k = polyint(a, \beta)$$

برای مثال

Command Window

```
>> p = [3 0 -4 10 -25];     %p=3x^4-4x^2+10x-25
>> k=polyint(p)

k =

    0.6000         0   -1.3333    5.0000  -25.0000         0

>> k=polyint(p,2)

k =

    0.6000         0   -1.3333    5.0000  -25.0000    2.0000

>> k=polyint(p,3)

k =

    0.6000         0   -1.3333    5.0000  -25.0000    3.0000

>>
```

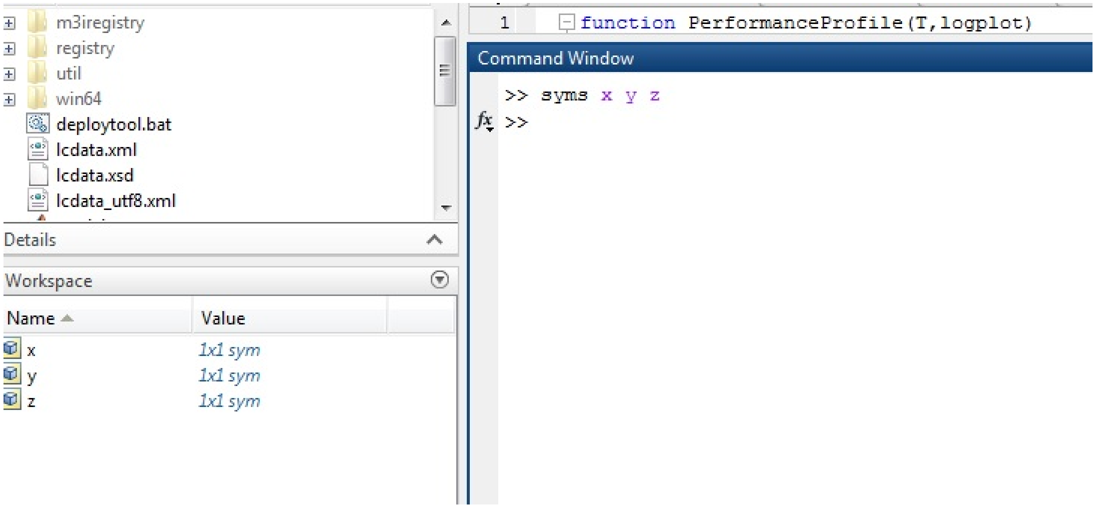
۲ عبارات سیمبلیک

عبارات سیمبلیک عباراتی هستند که به صورت پارامتری تعریف می شوند و در صورت نیاز می توان به جای پارامترهای آنها مقدار قرار داد. همچنین نسبت به پارامتر آن می توان مشتق یا انتگرال گرفت.

لازم است پارامترهای سمبلیک را به نرم افزار معرفی کنیم. که با استفاده از دستور syms انجام می دهیم و برای این کار متغیرها را با space از هم جدا کنیم.

$$>> \quad syms\ x\ y\ z$$

برای مثال داریم



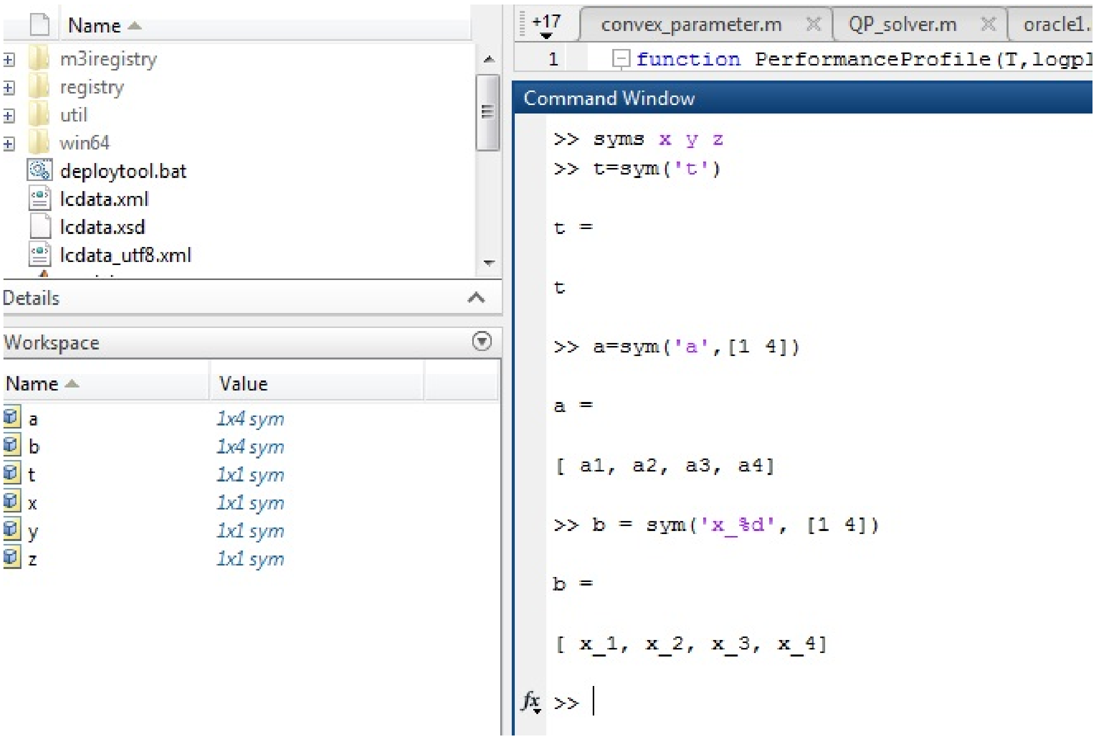
بعلاوه از دستورsym نیز می توانیم استفاده کنیم و برداری از متغیرها بسازیم.

$$>> \quad x = sym('x')$$

$$>> \quad a = sym('a', [۱\ ۴])$$

$$>> \quad x = sym('x \setminus \%d', [۱\ ۴])$$

برای مثال



بعد از معرفی متغیرها یا پارامترها حالا می توانیم توابعی از این متغیرها داشته باشیم. که به صورت معمول تعریف می شوند. در ادامه می توانیم این متغیرها را مقداردهی کنیم.

$$>> \quad syms\ x$$

$$>> \quad f(x) = x.^{۳} - ۲ * x + ۲$$

$$>> \quad g(x) = cos(۲ * x) + ۳$$

برای مثال

Command Window

```
>> syms x
>> f(x)=x.^2+3

f(x) =

x^2 + 3

>> g(x)=sin(x)+exp(2*x)+4*x-2

g(x) =

4*x + exp(2*x) + sin(x) - 2

>> f(1)

ans =

4

>> g(0)

ans =

-1

fx
```

Command Window

```
>> a=sym('x_%d',[1 4])

a =

[ x_1, x_2, x_3, x_4]

>> f(x_1,x_2)=sin(x_1)+2*x_2
Undefined function or variable 'x_1'.

>> f(a)=cos(a)

f(x_1, x_2, x_3, x_4) =

[ cos(x_1), cos(x_2), cos(x_3), cos(x_4)]

>> f([0 pi/4 pi 2*pi])
Error using symfun/subsref (line 169)
Symbolic function expected 4 inputs and received 1.

>> f(0,pi/4,pi,2*pi)

ans =

[ 1, 2^(1/2)/2, -1, 1]
```

و

```
Command Window
>> f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+2*x_2+cos(x_2)+4*x_4
Undefined function or variable 'x_1'.

>> f(a)=2*a+exp(a)-2

f(x_1, x_2, x_3, x_4) =

[ 2*x_1 + exp(x_1) - 2, 2*x_2 + exp(x_2) - 2, 2*x_3 + exp(x_3) - 2, 2*x_4 + exp(x_4) - 2]

>> f(1,0,-1,2)

ans =

[ exp(1), -1, exp(-1) - 4, exp(2) + 2]

fx >>
```

توسط تابع factor می توانیم یک تابع را به عوامل ساده تر تبدیل کنیم

$$>> \quad syms\ x$$

$$>> \quad f(x) = x^{۲} - ۴$$

$$>> \quad factor(f)$$

$$>> \quad f۱ = factor(f)$$

برای مثال

Command Window

```
>> clear
>> syms x
>> f(x)=x^2-4

f(x) =

x^2 - 4

>> factor(f)

ans(x) =

[ x - 2, x + 2]

>> g=x^4-1

g =

x^4 - 1

>> factor(g)

ans =

[ x - 1, x + 1, x^2 + 1]
```

و

Command Window

```
>> f1=factor(f)

f1(x) =

[ x - 2, x + 2]

>> f1(2)

ans =

[ 0, 4]

>> f(2)

ans =

0

>> f

f(x) =

x^2 - 4

fx >> 
```

دقت کنید از تابع factor برای تجزیه عبارات سمبلیک استفاده کردیم. حال اگر ورودی عدد به این تابع بدهیم عدد را به صورت عوامل اول تجزیه می کند برای مثال

Command Window

```
>> factor(100)

ans =

     2     2     5     5

>> prod(ans)

ans =

   100

>> factor(33)

ans =

     3    11

>> factor(17)

ans =

    17

>>
```

گاهی می خواهیم یک عبارت سملیک را در صفحه دسکتاپ به عنوان خروجی چاپ کنیم و مایل هستیم شکل بهتری داشته باشد برای این

منظور از دستور pretty استفاده می کنیم

$$>> \quad syms\ x$$

$$>> \quad f(x) = x^{۲} - ۴$$

$$>> \quad pretty(f)$$

برای مثال

Command Window

```
>> g

g =

x^4 - 1

>> pretty(g)
 4
x  - 1

>> h(x)=sin(2*x)+exp(-2*x)+x^2+5

h(x) =

exp(-2*x) + sin(2*x) + x^2 + 5

>> pretty(h)
                         2
exp(-2 x) + sin(2 x) + x  + 5
```

از دستور int می توانیم برای محاسبه انتگرال یک تابع استفاده کنیم. از این دستور برای محاسبه انتگرال معین و نامعین می توانیم استفاده کنیم

برای مثال

$$>> \quad syms\ x$$

$$>> \quad f(x) = x^{۲} - ۴$$

$$>> \quad int(f)$$

$$>> \quad int(f, a, b)$$

Command Window

```
>> syms x
>> f(x)=3*x^4-2*x^2+1/x

f(x) =

1/x - 2*x^2 + 3*x^4

>> int(f)

ans(x) =

log(x) - (2*x^3)/3 + (3*x^5)/5

>> int(f,1,2)

ans =

log(2) + 209/15

>> 
```

برای دو بار انتگرال گیری داریم

Command Window

```
>> syms x
>> f(x)=3*x^4-2*x^2+1/x

f(x) =

1/x - 2*x^2 + 3*x^4

>> g=int(int(f))

g(x) =

(x*(30*log(x) - 5*x^3 + 3*x^5 - 30))/30

>>
```

بطور همزمان می توانیم از چند تابع نیز انتگرال بگیریم

Command Window

```
>> syms x
>> h=[2*x,x^3-2*x,log(x),exp(x),1/x,cos(x)]

h =

[ 2*x, x^3 - 2*x, log(x), exp(x), 1/x, cos(x)]

>> int(h)

ans =

[ x^2, (x^2*(x^2 - 4))/4, x*(log(x) - 1), exp(x), log(x), sin(x)]

fx >>
```

اگر تابع چندمتغیره داشته باشیم برای محاسبه انتگرال باید نشان دهیم انتگرال نسبت به کدام متغیر می باشد

Command Window

```
>> syms x y
>> int(x/(1+y^2),x)

ans =

x^2/(2*(y^2 + 1))

>> int(x/(1+y^2),y)

ans =

x*atan(y)

>> int(int(x/(1+y^2),x),x)

ans =

x^3/(6*(y^2 + 1))

>> int(int(x/(1+y^2),x),x,-1,3)

ans =

14/(3*(y^2 + 1))
```

می توانیم ماتریسی از توابع تعریف کنیم و اعمال مختلف را روی آن اعمال کنیم

Command Window

```
>> f(x)=[exp(x) sin(x); x^2+3*x x^4-1]

f(x) =

[     exp(x),   sin(x)]
[ x^2 + 3*x, x^4 - 1]

>> f(0)

ans =

[ 1,   0]
[ 0, -1]

>> f(1)

ans =

[ exp(1), sin(1)]
[      4,      0]

>> double(ans)

ans =

    2.7183    0.8415
    4.0000         0
```

و همچنین داریم

```
Command Window
>> int(f)

ans(x) =

[              exp(x),           -cos(x)]
[ (x^2*(2*x + 9))/6, (x*(x^4 - 5))/5]

>> int(f,1,3)

ans =

[ exp(3) - exp(1), cos(1) - cos(3)]
[              62/3,            232/5]

>> double(ans)

ans =

   17.3673    1.5303
   20.6667   46.4000

fx >>
```

برای توابع چندمتغیره داریم

Command Window

```
>> syms x y t z
>> f(x,y,z)=sin(2*x*y)+x^2-3*y^3-x*y-exp(x+y+z)+5

f(x, y, z) =

sin(2*x*y) - exp(x + y + z) - x*y + x^2 - 3*y^3 + 5

>> val1=f(0,0,0)

val1 =

4

>> val2=f(1,0,0)

val2 =

6 - exp(1)

>> val2=f(1,1,0)

val2 =

sin(2) - exp(2) + 2

>>
```

و

```
Command Window
>> f

f(x, y, z) =

sin(2*x*y) - exp(x + y + z) - x*y + x^2 - 3*y^3 + 5

>> g1=int(f,x)

g1(x, y, z) =

x^3/3 - x*(3*y^3 - 5) - (x^2*y)/2 - exp(x + y + z) - cos(2*x*y)/(2*y)

>> val3=int(f,x,0,1)

val3(y, z) =

sin(y)^2/y - y/2 - 3*y^3 - exp(y + z)*(exp(1) - 1) + 16/3

>> int(val3,-1,1)

ans(z) =

exp(z - 1)*(exp(2) - 1) - exp(z - 1)*exp(1)*(exp(2) - 1) + 32/3

fx >>
```

و

```
>> val3=int(ans,0,1)

val3 =

exp(-1) + 2*exp(2) - exp(3) + 26/3

>> double(val3)

ans =

    3.7271

>>
```

و

چندجمله‌ای ها

عبارات سیمبلیک

Command Window

```
>> syms x t
>> f=sin(x*t^2)+3*x^2-2*t

f =

sin(t^2*x) - 2*t + 3*x^2

>> f(0,1)
Subscript indices must either be real positive integers or logicals.

Error in sym/subsref (line 805)
            R_tilde = builtin('subsref',L_tilde,Idx);

>> f(x,t)=sin(x*t^2)+3*x^2-2*t

f(x, t) =

sin(t^2*x) - 2*t + 3*x^2

>> f(0,1)

ans =

-2

>>
```

چندجمله‌ای ها
عبارات سیمبلیک

با استفاده از دستور diff می توانیم از توابع تعریف شده براساس سیمبلیک ها مشتق بگیریم

$$>> \quad syms\ x$$

$$>> \quad f(x) = x^{۲} - ۴$$

$$>> \quad g = diff(f)$$

$$>> \quad g۱ = diff(f, x)$$

$$>> \quad g۲ = diff(f, x, ۲)$$

برای مثال

Command Window

```
>> syms x
>> f(x) = sin(x^2)

f(x) =

sin(x^2)

>> df = diff(f,x)

df(x) =

2*x*cos(x^2)

>> df2 = diff(f,x,2)

df2(x) =

2*cos(x^2) - 4*x^2*sin(x^2)

>> diff(diff(f,x))

ans(x) =

2*cos(x^2) - 4*x^2*sin(x^2)

>>
```

و

Command Window

```
>> diff(f)

ans(x, t) =

6*x + t^2*cos(t^2*x)

>> diff(f,x)

ans(x, t) =

6*x + t^2*cos(t^2*x)

>> diff(f,t)

ans(x, t) =

2*t*x*cos(t^2*x) - 2

>> diff(diff(f),x,t)

ans(x, t) =

- 4*t^3*sin(t^2*x) - 2*t^5*x*cos(t^2*x)
```

بعلاوه برای مشتق گیری پی در پی می توان نوشت

```
Command Window
>> syms x y
>> f1=diff(x*sin(x*y), x, y)

f1 =

2*x*cos(x*y) - x^2*y*sin(x*y)

>> f1=diff(x*sin(x*y), x, x, y)

f1 =

2*cos(x*y) - 4*x*y*sin(x*y) - x^2*y^2*cos(x*y)

fx >> 
```

مثال) فرض کنید مجموعه G به صورت زیر تعریف شده باشد

$$G = \{(x, y,\ \ x(۳ - x) \leq y \leq sin(x),\ \ \ ۰ \leq x \leq ۲/۴\}$$

مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید وقتی $f(x, y) = xy$

$$\int\int_G f dx\, dy$$

داریم

Command Window

```
>> syms x y
>> f(x,y)=x*y

f(x, y) =

x*y

>> F=int(f,y,x*(3-x),sin(x))

F(x) =

(x*sin(x)^2)/2 - (x^3*(x - 3)^2)/2

>> int(F,0,2.4)

ans =

- cos(24/5)/16 - (3*sin(24/5))/10 - 1172951/250000

>> double(ans)

ans =

   -4.3984
```

مثال) مقدار A زیر را محاسبه کنید

$$A = \int_{۰}^{\pi} \int_{۰}^{۱} (zsin(x) + x^{۳} * z) dz\, dx$$

جواب

Command Window

```
>> syms x z
>> y=z*sin(x)+(x^3)*z

y =

x^3*z + z*sin(x)

>> A=int(int(y,z,0,1),x,0,pi)

A =

pi^4/8 + 1

>> double(A)

ans =

   13.1761
```

برای محاسبه گرادیان از دستور gradient استفاده می کنیم

$$>> \quad syms\ x\ y\ z$$

$$>> \quad f(x,y,z) = sin(x) + ۲ * x * y - exp(z) - ۳y * z$$

$$>> \quad g = gradient(f, [x\ y\ z])$$

برای مثال

Command Window

```
>> syms x y z
>> f(x,y,z)= sin(x)+2*x*y-exp(z)+-3*y*z

f(x, y, z) =

sin(x) - exp(z) + 2*x*y - 3*y*z

>> g=gradient(f,[ x y z])

g(x, y, z) =

   2*y + cos(x)
      2*x - 3*z
 - 3*y - exp(z)

>>
```

حل دستگاه n معادله و n مجهول برای حل دستگاه عادلات خطی از دستور

$$x = A \setminus b$$

استفاده می کنیم چون دستگاه های خطی را می توان به صورت ماتریسی نوشت. اگر دستگاه شامل معادلات غیرخطی باشد از دستور solve

استفاده می کنیم. برای مثال

Command Window

```
>> syms x y w
>> eq1=2*x+3*y-w^2-4;
>> eq2=x+y-w-3;
>> eq3=2*x-2*y+w^3-6;
>> ss=solve(eq1,eq2,eq3)

ss =

    w: [3x1 sym]
    x: [3x1 sym]
    y: [3x1 sym]

>> x1=ss.x

x1 =

 11/5 - (3*root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 1))/2 - root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 1)^2/20
 11/5 - (3*root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 2))/2 - root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 2)^2/20
 11/5 - (3*root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 3))/2 - root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 3)^2/20
```

Command Window

```
>> y1=ss.y

y1 =

 root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 1)
 root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 2)
 root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 3)

>> w1=ss.w

w1 =

 - root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 1)^2/20 - root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 1)/2 - 4/5
 - root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 2)^2/20 - root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 2)/2 - 4/5
 - root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 3)^2/20 - root(z^3 + 18*z^2 + 136*z + 48, z, 3)/2 - 4/5

>> x1=double(x1)

x1 =

   2.7493 + 0.0000i
  14.1254 + 4.4503i
  14.1254 - 4.4503i
```

Command Window

```
>> x1=double(x1)

x1 =

   2.7493 + 0.0000i
  14.1254 + 4.4503i
  14.1254 - 4.4503i

>> y1=double(y1)

y1 =

  -0.3708 + 0.0000i
  -8.8146 - 7.1949i
  -8.8146 + 7.1949i

>> w1=double(w1)

w1 =

  -0.6215 + 0.0000i
   2.3107 - 2.7446i
   2.3107 + 2.7446i
```

توسط این دستور می توانیم معادلات خطی نیز حل کنیم برای مثال

Command Window

```
>> syms x y w
>> eq1=2*x+3*y-w-4;
>> eq2=x+y-w-3;
>> eq3=2*x-2*y+w-6;
>> ss=solve(eq1,eq2,eq3)

ss =

    w: [1x1 sym]
    x: [1x1 sym]
    y: [1x1 sym]

>> x1=double(ss.x)

x1 =

    2.7143

>> y1=double(ss.y)

y1 =

   -0.8571

>> w1=double(ss.w)

w1 =
```

چندجمله‌ای ها
عبارات سیمبلیک

با استفاده از دستور limit می توانیم حد تابع در یک را محاسبه کنیم

$$>> \quad syms\ x\ y\ z$$

$$>> \quad f(x,y,z)=sin(x)+2*x*y-exp(z)-3y*z$$

$$>> \quad limit(f,x,0)$$

برای مثال

Command Window

```
>> syms x y z
>> f(x)=sin(x)/x

f(x) =

sin(x)/x

>> limit(f,x,0)

ans(x) =

1

>> g(x)=cos(x)+1/x-exp(x)

g(x) =

cos(x) - exp(x) + 1/x

>> limit(g,x,0)

ans(x) =

NaN
```

به عنوان مثال دیگر

Command Window

```
>> syms x
>> limit(1/x, x, 0, 'right')

ans =

Inf

>> limit(1/x, x, 0, 'left')

ans =

-Inf

>> limit(1/x,x,0)

ans =

NaN
```

و

Command Window

```
>> syms x a
v = [(1 + a/x)^x, exp(-x)];
limit(v, x, inf)

ans =

[ exp(a), 0]

>> 
```

Command Window

```
>> syms x
>> limit(x/abs(x),x,0)

ans =

NaN

>> limit(x/abs(x),x,0,'right')

ans =

1

>> limit(x/abs(x),x,0,'left')

ans =

-1

fx >>
```

برای محاسبه ژاکوبین از دستور jacobian استفاده می کنیم. برای مثال

چندجمله‌ای ها
عبارات سیمبلیک

Command Window

```
>> syms x y z
>> a=3^x+4*y-z;
>> b=x-7*(y-x)+z;
>> e=x+y+z;
>> J=jacobian([a;b;e],[x y z])

J =

[ 3^x*log(3),  4, -1]
[          8, -7,  1]
[          1,  1,  1]

>>
jacobian([x*y*z, y^2, x + z], [x, y, z])

ans =

[ y*z, x*z, x*y]
[   0, 2*y,   0]
[   1,   0,   1]
```

در واقع ژاکوبین به صورت زیر تعریف می شود

Jacobian Matrix

The Jacobian matrix of the vector function $f = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_n(x_1,...,x_n))$ is the matrix of the derivatives of f.

$$J(x_1, \dots x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

اگر بخواهیم زمان اجرای یک برنامه را به صورت دقیق بدانیم از دستور tic-toc استفاده می کنیم

$$>> \quad tic$$

$$>> \quad \dots$$

$$>> \quad toc$$

برای محاسبه هسین یک تابع چندمتغیره از دستور hessian استفاده می کنیم

چندجمله‌ای ها
عبارات سیمبلیک

Command Window

```
>> syms x y z
>> f(x,y,z)=sin(x+y)-2*x*z-3*x-y^2-sqrt(z)

f(x, y, z) =

sin(x + y) - 3*x - 2*x*z - y^2 - z^(1/2)

>> g=gradient(f)

g(x, y, z) =

   cos(x + y) - 2*z - 3
       cos(x + y) - 2*y
 - 2*x - 1/(2*z^(1/2))

>> h=hessian(f)

h(x, y, z) =

[ -sin(x + y),      -sin(x + y),            -2]
[ -sin(x + y), - sin(x + y) - 2,             0]
[          -2,                0, 1/(4*z^(3/2))]

>>
```

اگر بخواهیم معادله زیر را حل کنیم از دستور solve استفاده می کنیم

$$x^۴ - ۵x^۲ + ۶x = ۲$$

داریم

Command Window

```
>> syms x
>> xx=solve(x^4-5*x^2+6*x-2,x)

xx =

             1
             1
 - 3^(1/2) - 1
   3^(1/2) - 1

>> xx=double(xx)

xx =

    1.0000
    1.0000
   -2.7321
    0.7321

>>
```

با استفاده از دسور taylor می توانیم سری تیلور یک تابع دلخواه را محاسبه کنیم

Command Window

```
>> syms x
>> f=taylor(exp(x))

f =

x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1

>> g=taylor(sin(x))

g =

x^5/120 - x^3/6 + x

>> h=taylor(cos(x))

h =

x^4/24 - x^2/2 + 1

>>
```

با بکار بردن دستور taylor می توانیم سری تیلور یک تابع را محاسبه کنیم. سری تیلور به صورت زیر تعریف می شود

چندجمله‌ای ها
عبارات سیمبلیک

Taylor Series Expansion

Taylor series expansion represents an analytic function $f(x)$ as an infinite sum of terms around the expansion point $x = a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \cdot (x-a)^m$$

اگر این دستور را در MATLAB به کار ببریم در اینصورت سری تیلور را حول نقطه صفر و تا ۵ جمله حساب می کند. اگر حول نقطه ای دیگر و یا با مرتبه ای دیگر بخواهیم کافی است به این دستور ورودی های بیشتری بدهیم.

Command Window

```
>> syms x
>> f=taylor(exp(x),x,1)

f =

exp(1) + exp(1)*(x - 1) + (exp(1)*(x - 1)^2)/2 + (exp(1)*(x - 1)^3)/6 + (exp(1)*(x - 1)^4)/24 + (exp(1)*(x - 1)^5)/120

>> f=taylor(exp(x),x,1,'order',3)

f =

exp(1) + exp(1)*(x - 1) + (exp(1)*(x - 1)^2)/2

>> f=taylor(exp(x),x,1,'order',2)

f =

exp(1) + exp(1)*(x - 1)

fx >>
```

و همچنین داریم

Command Window

```
>> syms x y z
>> f=sin(x)+cos(y)+exp(z)

f =

cos(y) + exp(z) + sin(x)

>> f1=taylor(f)

f1 =

x^5/120 - x^3/6 + x + cos(y) + exp(z)

>> f2=taylor(f,[x y])

f2 =

x^5/120 - x^3/6 + x + y^4/24 - y^2/2 + exp(z) + 1

>> f3=taylor(f,[x y z])

f3 =

x^5/120 - x^3/6 + x + y^4/24 - y^2/2 + z^5/120 + z^4/24 + z^3/6 + z^2/2 + z + 2

>>
```

و داریم

```
Command Window
>> syms x y z
>> f=sin(x)+cos(y)+exp(z)

f =

cos(y) + exp(z) + sin(x)

>> f=taylor(f,[x y],[1 0])

f =

sin(1) + exp(z) - (sin(1)*(x - 1)^2)/2 + (sin(1)*(x - 1)^4)/24 + cos(1)*(x - 1) - y^2/2 + y^4/24

>> f=taylor(f,[x y],[1 1])

f =

sin(1) - (5*y)/6 + exp(z) - (sin(1)*(x - 1)^2)/2 + (sin(1)*(x - 1)^4)/24 - (y - 1)^2/4 + (y - 1)^

>>
```

و سری های تیلور مرتبه سه به صورت زیر می باشد

```
Command Window
>> syms x y z
>> f=sin(x)+cos(y)+exp(z)

f =

cos(y) + exp(z) + sin(x)

>> f=taylor(f,[x y],[1 0],'order',3)

f =

- y^2/2 + sin(1) + exp(z) - (sin(1)*(x - 1)^2)/2 + cos(1)*(x - 1) + 1

>> f=taylor(f,[x y],[1 1],'order',3)

f =

sin(1) - y + exp(z) - (sin(1)*(x - 1)^2)/2 - (y - 1)^2/2 + cos(1)*(x - 1) + 3/2

>>
```

قبلا برای محاسبه مجموع در سری ها از دستور symsum استفاده کردیم. دقت کنید این دستور را می توانیم برای سری بی نهایت نیز بکار ببریم

Command Window

```
>> syms x t
>> symsum(x,x,0,10)

ans =

55

>> s2=symsum(x^2,x,0,10)

s2 =

385

>> s2=symsum(x^2*t,x,0,10)

s2 =

385*t

>> s2=symsum(x^2*t,t,0,10)

s2 =

55*x^2

>>
```

برای سری بی نهایت داریم

Command Window

```
>> s2=symsum(x^t/factorial(t),t,0,Inf)

s2 =

exp(x)

>> s2=symsum(x^t/factorial(t),t,[0,Inf])

s2 =

exp(x)

>> s2=symsum(x^t/factorial(t),t,[0,5])

s2 =

x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1

>>
```

با استفاده از دستور compose می توانیم دو تابع را ترکیب کنیم

Command Window

```
>> syms x
>> y=sin(x)

y =

sin(x)

>> z=x^2+5

z =

x^2 + 5

>> w=compose(z,y)

w =

sin(x)^2 + 5

>> w=compose(y,z)

w =

sin(x^2 + 5)

fx >>
```

چندجمله‌ای ها
عبارات سیمبلیک

و

Command Window

```
>> syms x y z t u
>> f = 1/(1 + x^2);
>> g = sin(y);
>> h = x^t;
>> p = exp(-y/u);
>> a = compose(f,g)

a =

1/(sin(y)^2 + 1)

>> b = compose(f,g,t)

b =

1/(sin(t)^2 + 1)

>> c = compose(h,g,x,z)

c =

sin(z)^t
```

Command Window

```
>> e = compose(h,p,x,y,z)

e =

exp(-z/u)^t

>> f = compose(h,p,t,u,z)

f =

x^exp(-y/z)

>>
```

برای محاسبه وارون تابع از دستور finverse استفاده می کنیم

Command Window

```
>> f(x)=1/x

f(x) =

1/x

>> g=finverse(f)

g(x) =

1/x

>> compose(f,g)

ans(x) =

x

>> compose(g,f)

ans(x) =

x

fx >>
```

و

Command Window

```
>> h=finverse(exp(x))

h =

log(x)

>> w=finverse(sin(x))

w =

asin(x)

>>
```

یک نکته:

برای چک کردن عبارات شرطی دستورهای if و if-else را معرفی کردیم. همچنین برای انجام یک عمل به صورت تکراری حلقه های while و for را معرفی کردیم و برای مقایسه یک ورودی با مقادیر از قبل تعیین شده دستور switch را معرفی کردیم.

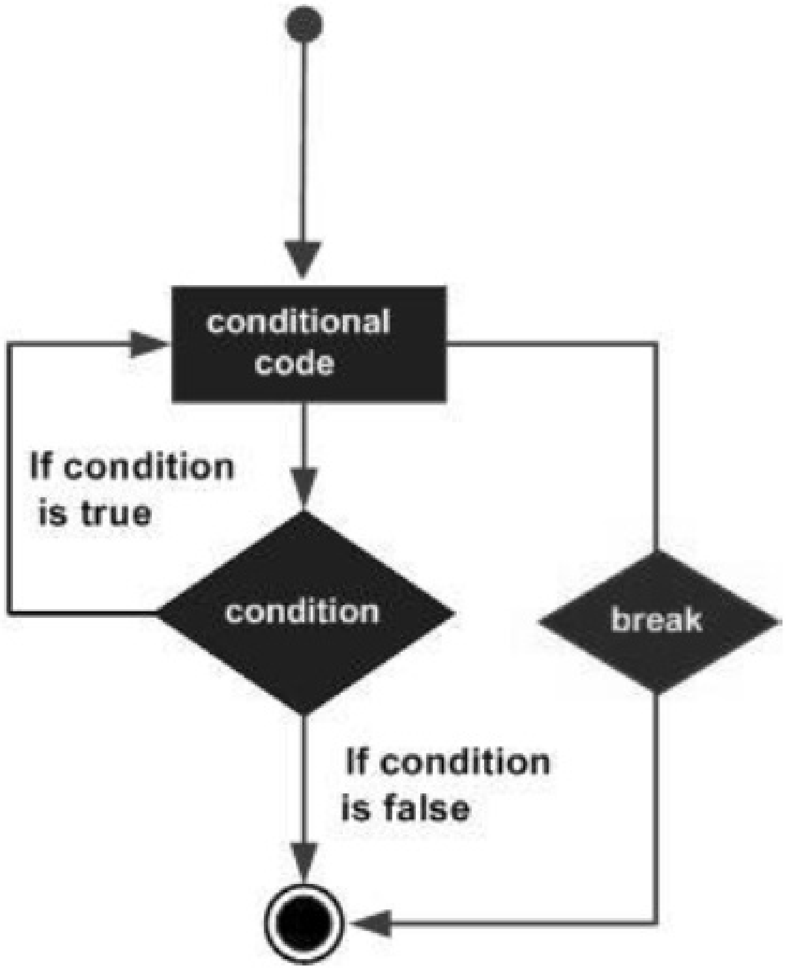
دستور break برای پایان دادن به حلقه for یا while استفاده می‌شود. اگر تابع break در چند حلقه ی تو در تو استفاده شود آنگاه ا

داخلی ترین حلقه خارج می شویم.

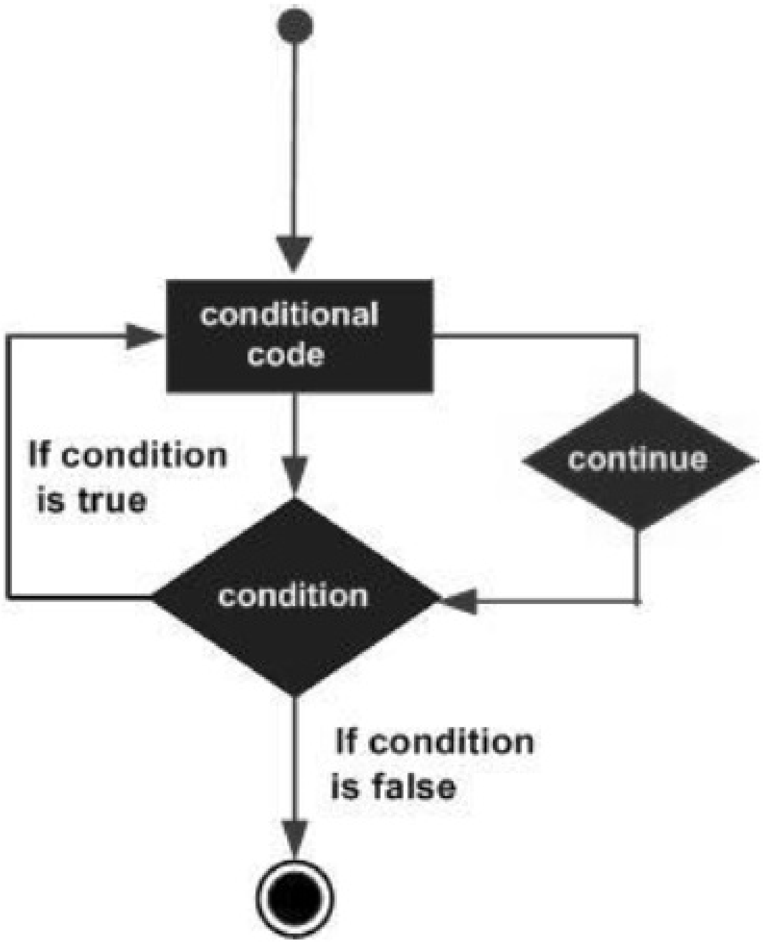
تفاوت break و continue به صورت زیر می باشد

Control Statement	Description
break statement	Terminates the loop statement and transfers execution to the statement immediately following the loop.
continue statement	Causes the loop to skip the remainder of its body and immediately retest its condition prior to reiterating.

که در دیاگرام های زیر نیز مشخص می باشد


conditional code
If condition is true
condition
break
If condition is false

و


conditional code
If condition is true
continue
condition
If condition is false

برای مثال

```
Editor - C:\Users\h\Desktop\continue_break.m
+18 | QP_solver.m | oracle1.m | oracle.m | startx.m | PerformanceProfile.m | inexac

function continue_break
clc
a=10;
while a<20
    if a==15
        a=a+1;
        %break;
        continue;
    end
    fprintf('value of a : %d\n',a)
    a=a+1;
end
end
```

```
Command Window
value of a : 10
value of a : 11
value of a : 12
value of a : 13
value of a : 14
value of a : 16
value of a : 17
value of a : 18
value of a : 19
>>
```

و

چندجمله‌ای ها
عبارات سیمبلیک

Editor - C:\Users\h\Desktop\continue_break.m

+18 | QP_solver.m | oracle1.m | oracle.m | startx.m | PerformanceProfile.m

```
function continue_break
clc
a=10;
while a<20
    if a==15
        a=a+1;
        break;
        %continue;
    end
    fprintf('value of a : %d\n',a)
    a=a+1;
end
end
```

Command Window

```
value of a : 10
value of a : 11
value of a : 12
value of a : 13
value of a : 14
>>
```

مثال) تابعی بنویسید که اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰ را چاپ کند.

Editor - C:\Users\h\Desktop\prime_nhm.m

+17 | convex_parameter.m | QP_solver.m | oracle1.m | oracle.m | startx.m | Performa

```
function prime_nhm
clc
for i=2:100
    for j=2:100
        if(~mod(i,j))
            break
        end
    end
    if(j>(i/j))
        fprintf('%d is prime\n', i);
    end
end
end
```

آنگاه خروجی به صورت زیر است

Command Window

```
2 is prime
3 is prime
5 is prime
7 is prime
11 is prime
13 is prime
17 is prime
19 is prime
23 is prime
29 is prime
31 is prime
37 is prime
41 is prime
43 is prime
47 is prime
53 is prime
59 is prime
61 is prime
67 is prime
71 is prime
73 is prime
79 is prime
83 is prime
89 is prime
97 is prime
```