Teoria dos Grafos

Aula 3

Cadeia, caminho, ciclo, subgrafo, subdigrafo, Representação de grafos e digrafos.

Material dos professores Jaqueline Oliveira e Marcos Muniz

Cadeia

- Uma cadeia é uma sequência qualquer de arestas adjacentes que ligam dois vértices.
- Uma cadeia é dita ser **elementar** se não passa duas vezes pelo mesmo vértice.
- É dita ser **simples** se não passa duas vezes pela mesma aresta (arco).
- O **comprimento** de uma cadeia é o número de arestas (arcos) que a compõe.

Caminho

- Um caminho é qualquer grafo da forma:

  $$(\{v_1, v_2, \ldots, n\}\,, \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n\}).$$

- Semelhante a uma cadeia, porém aplicado para grafos direcionados.
- Um caminho trivial de v para v consiste apenas do vértice v.
- Se existir um caminho c de v para w então w é **alcançável** a partir de v via c.

Caminho

- Um **caminho fechado** é aquele que começa e termina no mesmo vértice.
- Um caminho fechado com pelo menos uma aresta é chamado de **ciclo**.

Trajeto

- Um **trajeto** é um caminho de v para w sem arestas repetidas.
- Um **trajeto simples:**Caminho de v para w sem arestas e vértices repetidos.

Circuito

- Um circuito é um grafo da forma:

$(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \ \leq n\} \cup \{v_n v_1\})$, com $n \ \geq 3$.

- Um circuito é um trajeto fechado. Ou seja, um caminho onde não há aresta repetida e os vértices inicial e final são idênticos.
- Um circuito é **simples** quando o único vértice repetido é o inicial.

Revisão

- Quais caminhamentos podem:
  - ter aresta repetida?
  - ter vétice repetido?
  - começar e terminar no vértice inicial?

Comparativo

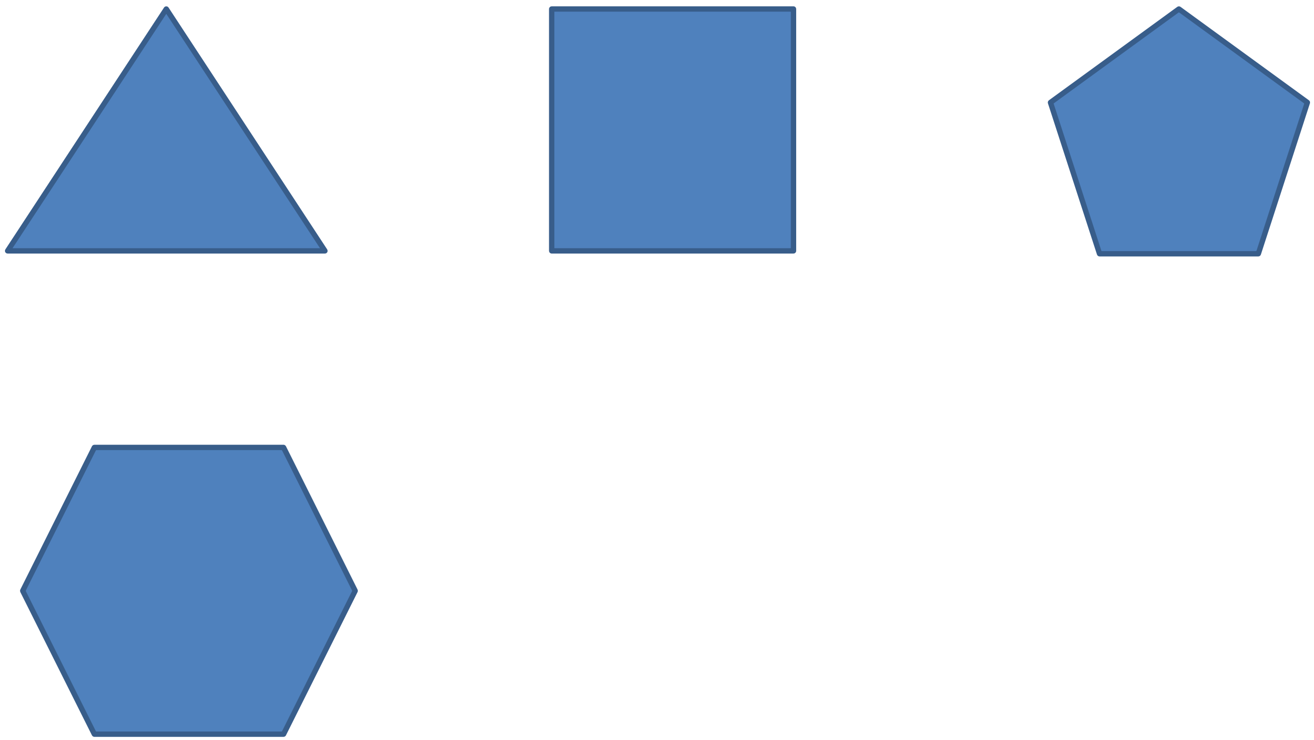
Tipo	Aresta repetida?	Vértice repetido?	Começa e termina no mesmo vértice?
Cadeia elementar	Sim	**Não**	Não necessariamente.
Cadeia simples	**Não**	Sim	Não necessariamente.
Caminho	Sim	Sim	Não necessariamente.
Caminho fechado	Sim	Sim	**Sim**
Trajeto	Não	Sim	Não necessariamente.
Trajeto simples	Não	**Não**	Não
Circuito	Não	Sim	**Sim**
Circuito simples	Não	**Somente a origem.**	**Sim**

Comprimento de um caminho/circuito

- O **comprimento** de um caminho ou circuito é o número de arestas do grafo.
- Um caminho de comprimento k tem k+1 vértices.
- Um circuito de comprimento k tem k vértices.

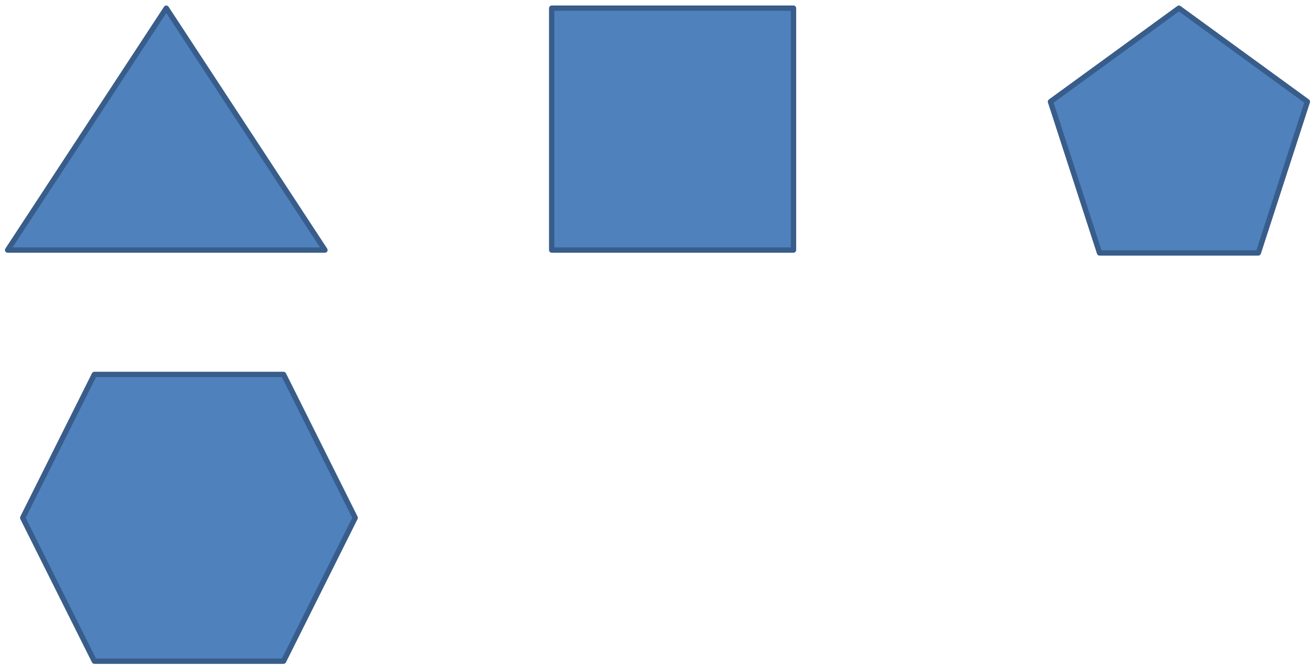
Comprimento de um caminho/circuito

- O que as figuras abaixo têm em comum?



Comprimento de um camimho/circuito

- Todas são circuitos de comprimento 3,4,5 e 6, respectivamente.



Exercícios

- Faça uma figura de um caminho de comprimento 0, de um caminho de comprimento 1 e de um caminho de comprimento 2.
- Faça uma figura de um circuito de comprimento 3 e de um circuito de comprimento 4. Por que a definição de circuito tem a restrição “$n \geq 3$”?

uni-bh A MARCA DA EDUCAÇÃO

Exercícios

- Seja V o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ e E o conjunto $\{de, bc, ca, be\}$. Verifique que o grafo (V,E) é um caminho.

- Agora suponha que F é o conjunto $\{bc, bd, ea, ed, ac\}$ e verifique que o grafo (V F) é um circuito.

Exercícios

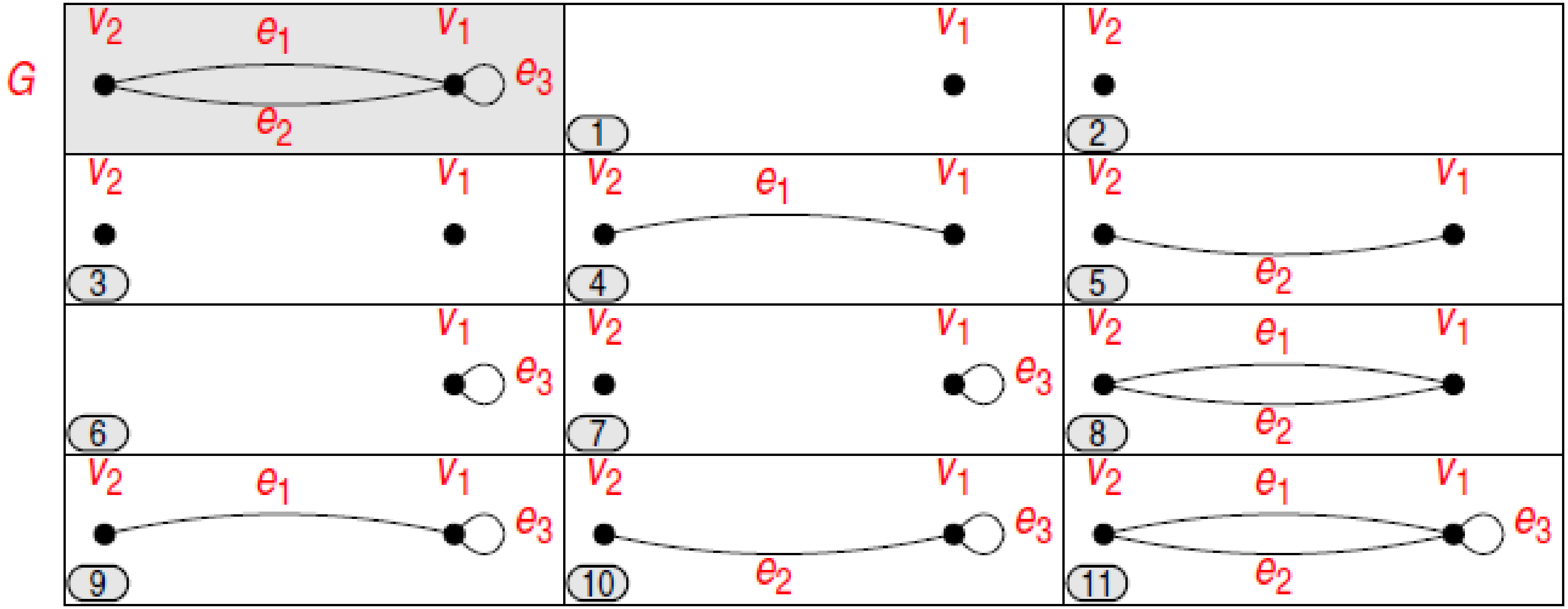
- Verifique que a cadeia u v w x y z também pode ser denotado por z y xw v u. Verifique que essas duas expressões representam a mesma cadeia.

Subgrafo

- Um grafo $H = (V', E')$ é dito ser um subgrafo de $G = (V, E)$ se e somente se:
  – Cada vértice de H é também um vértice de G, ou seja, $V' \subseteq V$;
  – Cada aresta de H é também uma aresta de G, ou seja, $E' \subseteq E$;
  – Cada aresta de H tem os mesmos nós terminais de G, ou seja, se $(u, v) \in E'$ então $(u, v) \in E$.

Subgrafo

- Exemplo: Todos os subgrafos do grafo G:

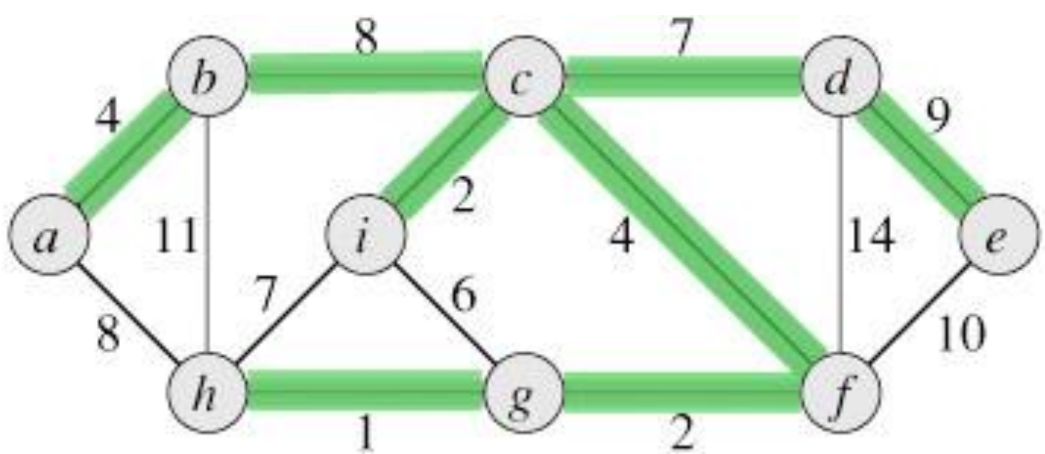


Subdigrafo

- Um digrafo $H = (V', E')$ é dito ser um subdigrafo de $D = (V, E)$ se e somente se:
  - Cada vértice de H é também um vértice de D, ou seja, $V' \subseteq V$;
  - Cada aresta de H é também uma aresta de D, ou seja, $E' \subseteq E$;
  - Cada aresta de H tem os mesmos nós terminais de D, ou seja, se $(u, v) \in E'$ então $(u, v) \in E$.

Subdigrafo

- Se um subdigrafo de um digrafo D contém todos os vértices, ele é chamado de gerador.
- O menor subdigrafo é a árvore geradora mínima ;)



Representação de um grafo

- Dado um grafo $(G = V, E)$:
  - V = conjunto de vértices.
  - E = conjunto de arestas.
- O tamanho da entrada de dados é medido em termos do:
  - Número de vértices |V|.
  - Número de arestas |E|.
- Se G é conexo então |E| ≥ |V| - 1.

Representação de um grafo

- Matriz de adjacência:
  - Forma preferida de representar grafos densos ($E \approx V^2$).
  - Indica rapidamente (O(1)) se existe uma aresta conectando dois vértices.
- Lista de adjacência:
  - Representação normalmente preferida.
  - Provê uma forma compacta de representar grafos esparsos ($E \ll V^2$).

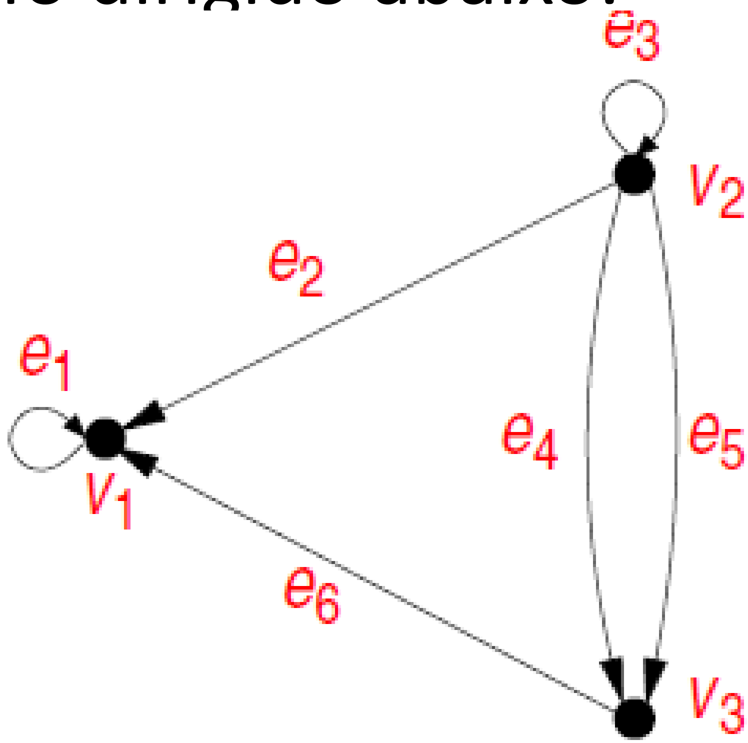
Representação de um grafo

- Matriz de incidência:
  - Representação que inclui vértice e aresta.

- As duas primeiras formas de representar um grafo são as mais comuns.

Representação de um grafo

- Seja o grafo dirigido abaixo:



Representação de um grafo

- A matriz de adjacência do grafo é a seguinte:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- A matriz de adjacência armazena em cada posição a_{ij} o número de arestas que vão de v_i para v_j.

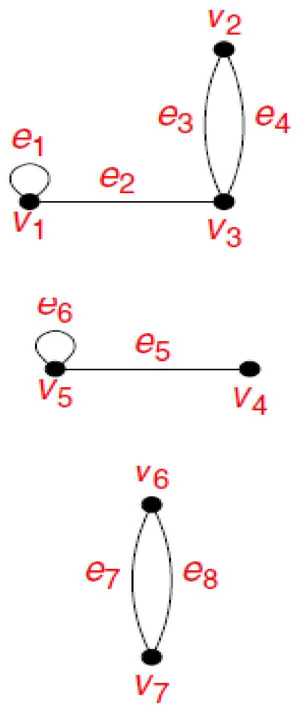
Representação de um grafo

- Caso a matriz de adjacência tenha:
  - Valor diferente de zero na diagonal principal: temos um laço.
  - Valor igual a 1 na entrada (a_{ij}): temos uma única aresta de v_i para v_j.
  - Valores maiores que 1 na entrada (a_{ij}): arestas paralelas de v_i para v_j.
  - Espaço:
    - O(V^2).

uni-bh
A MARCA DA EDUCAÇÃO

Representação de um grafo

- A matriz de adjacência pode ser utilizada para representar componentes de um grafo.



$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Representação de um grafo

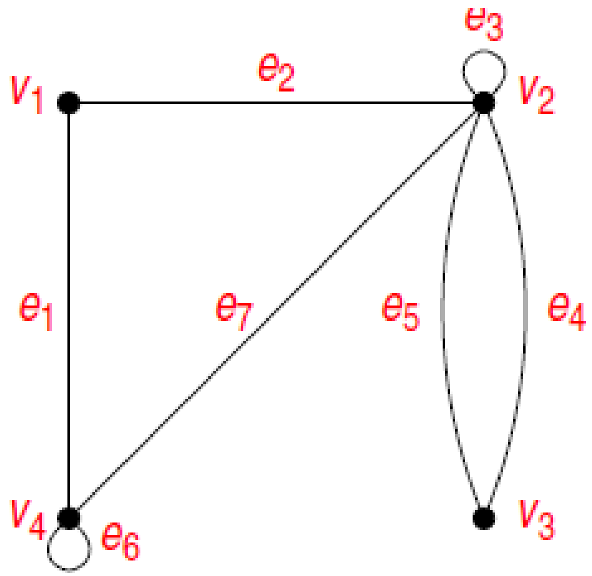
- Análise:
  - Deve ser utilizada para grafos densos, onde |E| é próximo de $|V|^2$ $(E \approx V^2)$.
  - O tempo necessário para acessar um elemento é independente de |V | ou |E|.
  - É muito útil para algoritmos em que necessitamos saber com rapidez se existe uma aresta ligando dois vértices.
  - A maior desvantagem é que a matriz necessita O(V^2) de espaço.
  - Ler ou examinar a matriz tem complexidade de tempo O(V^2).

Representação de um grafo

- A matriz de incidência de um grafo G é a matriz M = (m_{ij}) de tamanho n x m de maneira que:
- $m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ quando a aresta } e_j \text{ é incidente a } v_i \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$

Representação de um grafo

Dado o grafo:



A matriz de incidência é:

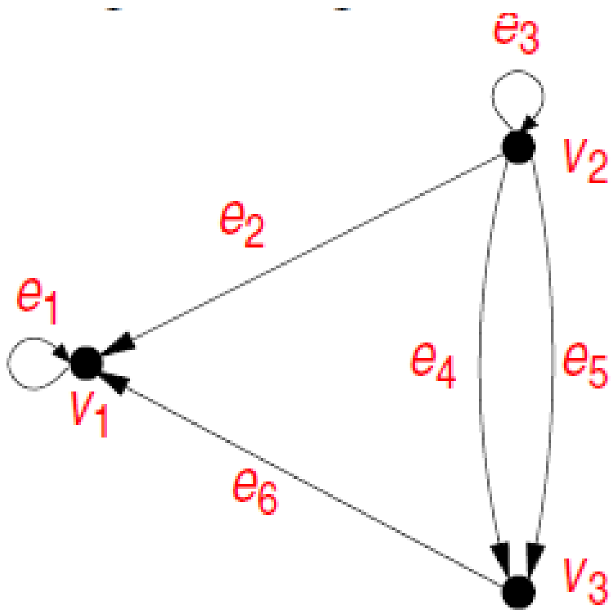
$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Representação de um grafo

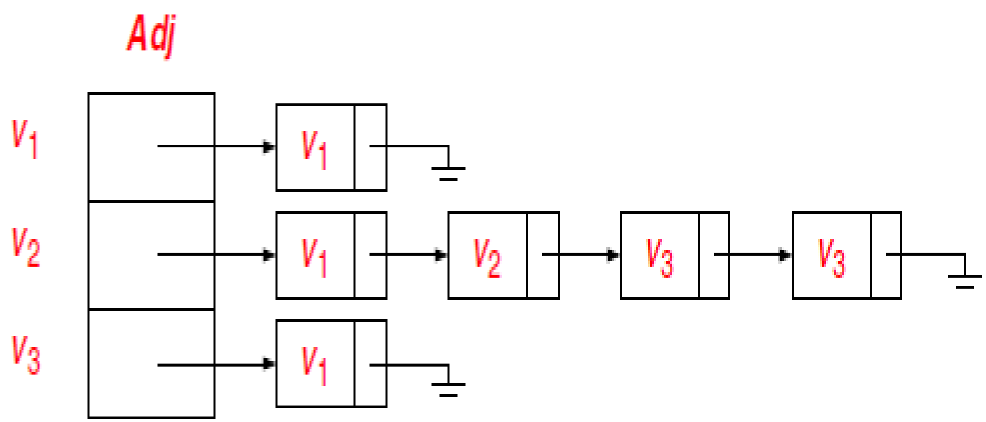
- A lista de adjacências utiliza um vetor com |V| posições.
- Para cada vértice $v \in V$ a lista de adjacência contém uma lista encadeada apontando para cada vértice adjacente.
- Espaço:
  - O(V + E).

Representação de um grafo

Grafo



Lista de adjacência



Exercícios

- Exiba as matrizes de adjacências e incidências de um caminho de comprimento 4.

- Exiba as matrizes de adjacências e incidências de um circuito de comprimento 5.