UFMG/ICEx/DCC DCC111 – Matemática Discreta

Lista de Exercícios 9: Soluções

Grafos

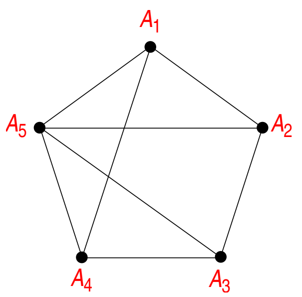
Ciências Exatas & Engenharias 1º Semestre de 2012

1. O grafo de interseção de uma coleção de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o grafo que tem um vértice para cada um dos conjuntos da coleção e tem uma aresta conectando os vértices se esses conjuntos têm uma interseção não vazia. Construa o grafo de interseção para as seguintes coleções de conjuntos.

   (a)

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0,2,4,6,8\} \\ A_2 &= \{0,1,2,3,4\} \\ A_3 &= \{1,3,5,7,9\} \\ A_4 &= \{5,6,7,8,9\} \\ A_5 &= \{0,1,8,9\} \end{aligned}$$

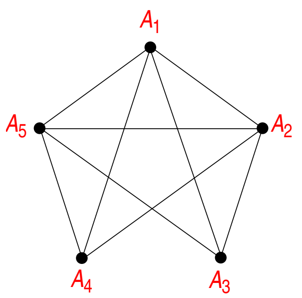
Resposta:



   (b)

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0\} \\ A_2 &= \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \\ A_3 &= \{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\} \\ A_4 &= \{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\} \\ A_5 &= \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\} \end{aligned}$$

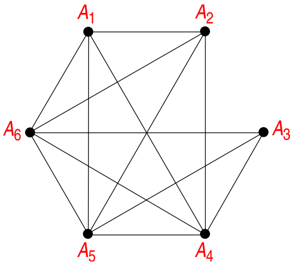
Resposta:



   (c)

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x | x < 0\} \\ A_2 &= \{x | -1 < x < 0\} \\ A_3 &= \{x | 0 < x < 1\} \\ A_4 &= \{x | -1 < x < 1\} \\ A_5 &= \{x | x > -1\} \\ A_6 &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

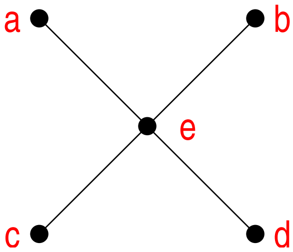
Resposta:

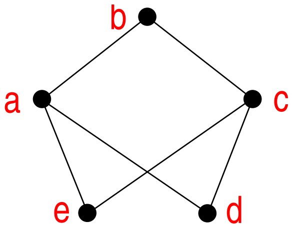


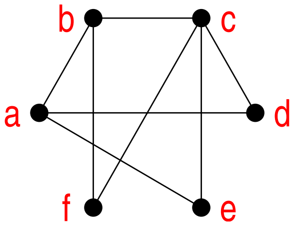
2. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5?

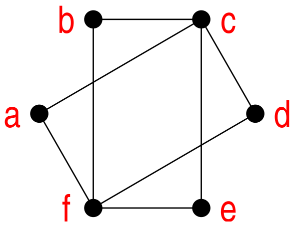
   Resposta:
   Não. O grau desse suposto grafo seria $15 \times 5 = 75$, que é um número ímpar. Sabe-se que o grau de qualquer grafo deve ser um número par.

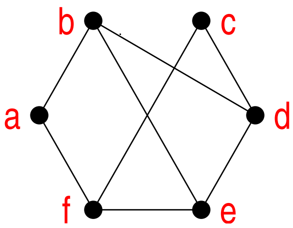
3. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido.

   (a) 

   (b) 

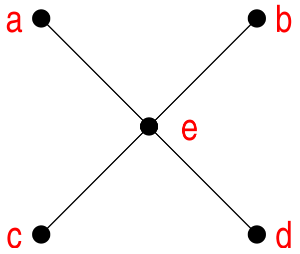
   (c) 

   (d) 

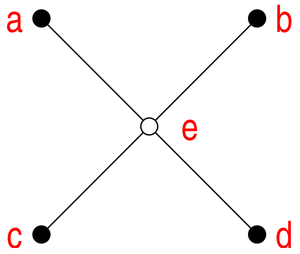
   (e) 

   Resposta:

(a) Sim. Seja $V = \{a, b, c, d\}$ e $W = \{e\}$. Não existe nenhuma aresta entre vértices de V e entre vértices de W. Toda aresta conecta algum vértice de V a algum vértice de W.

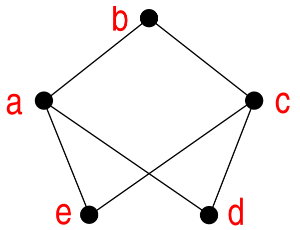


Grafo original

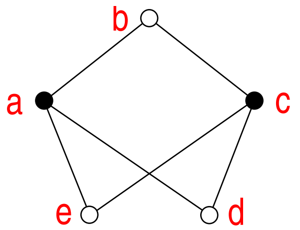


Grafo bipartido

(b) Sim. Seja $V = \{a, c\}$ e $W = \{b, d, e\}$. Não existe nenhuma aresta entre vértices de V e entre vértices de W. Toda aresta conecta algum vértice de V a algum vértice de W.

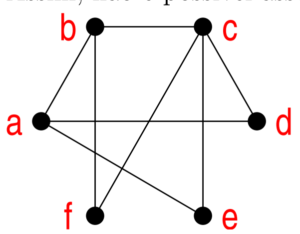


Grafo original

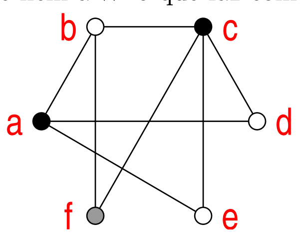


Grafo bipartido

(c) Não. Se $a \in V$ então $\{b, d, e\} \subseteq W$ e $c \in V$. O vértice f está conectado ao vértice $b \in W$ e ao $c \in V$. Assim, não é possível associar f nem a V e nem a W o que faz com que o grafo não seja bipartido.

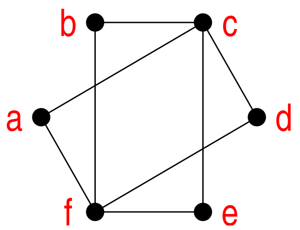


Grafo original

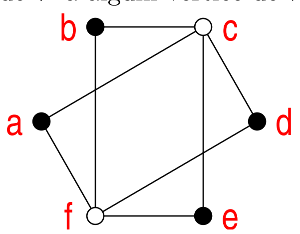


Grafo não é bipartido

(d) Sim. Seja $V = \{a, b, d, e\}$ e $W = \{c, f\}$. Não existe nenhuma aresta entre vértices de V e entre vértices de W. Toda aresta conecta algum vértice de V a algum vértice de W.

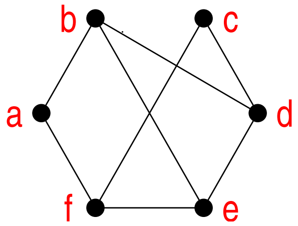


Grafo original

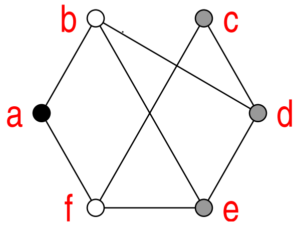


Grafo bipartido

(e) Não. Se $a \in V$ então $\{b, f\} \subseteq W$. O vértice b está conectado, além do vértice a, aos vértices d e e, que por sua vez estão conectados entre si. Ou seja, os vértices d e e devem pertencer a diferentes conjuntos e, ao mesmo tempo, não podem pertencer ao conjunto de b. Assim, o grafo não é bipartido.



Grafo original



Grafo não é bipartido

4. Quantos vértices e quantas arestas têm os grafos abaixo?

   (a) K_n (grafo completo)

   Resposta:

   $|V| = n$

   $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$. Existem n vértices, cada um com grau $n-1$. Assim, a quantidade de arestas é dada pela metade desse produto.

   (b) $K_{m,n}$ (grafo bipartido completo)

   Resposta:

   $|V| = m + n$

   $|E| = m \times n$

   (c) C_n (grafo ciclo)

   Resposta:

   $|V| = n$

   $|E| = n$

   (d) Q_n (grafo cubo)

   Resposta:

   $|V| = 2^n$

   $|E| = \frac{2^n \times n}{2}$. Existem 2^n vértices, cada um com grau n. Assim, a quantidade de arestas é dada pela metade desse produto.

   (e) W_n (grafo roda)

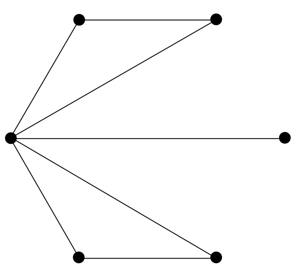
   Resposta:

   $|V| = n + 1$

   $|E| = 2n$

5. Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus $5, 2, 2, 2, 2, 1$? Desenhe um possível grafo.

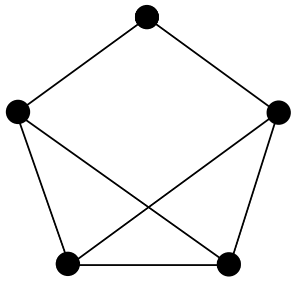
   Resposta:
   O grafo possui seis vértices e tem um grau total de $5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$. Isso significa que existem sete arestas.



6. Existe um grafo simples com cinco vértices dos seguintes graus? Se existir, desenhe um possível grafo.

   (a) 3, 3, 3, 3, 2

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $3+3+3+3+2 = 14$. Isso significa que existem sete arestas.

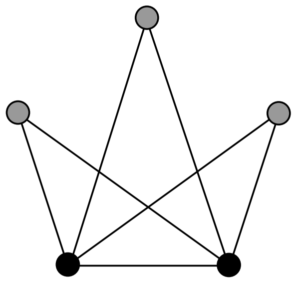
   

   (b) 1, 2, 3, 4, 5

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $1+2+3+4+5 = 15$. Isso não é possível.

   (c) 1, 2, 3, 4, 4

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $1+2+3+4+4 = 14$. No entanto, como existem dois vértices com grau 4, todos os vértices devem ter pelo menos grau 2, como mostrado na figura abaixo. Como supostamente existe um vértice com grau 1, não é possível existir tal grafo.

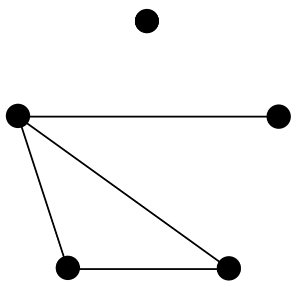
   

   (d) 3, 4, 3, 4, 3

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $3+4+3+4+3 = 17$. Isso não é possível.

   (e) 0, 1, 2, 2, 3

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $0+1+2+2+3 = 8$. Isso significa que existem quatro arestas.

   (f) 1, 1, 1, 1, 1

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $1+1+1+1+1 = 5$. Isso não é possível.

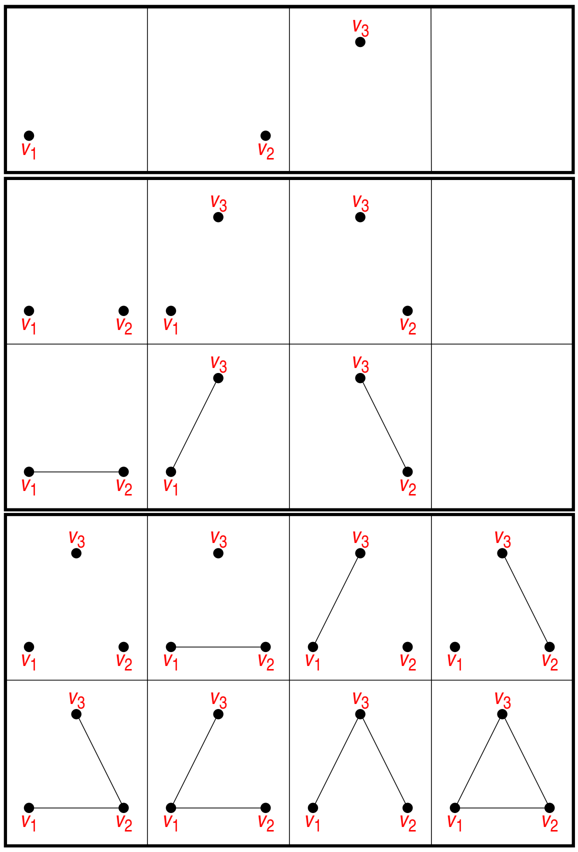
7. Quantos subgrafos com pelo menos um vértice tem K_3?

   Resposta:
   São os subgrafos com um, dois e três vértices:

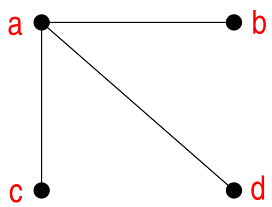
- Existem três subgrafos com um vértice e nenhuma aresta;
- Existem $C(3,2) = 3$ possibilidades de escolher subgrafos com dois vértices. Para cada possibilidade, podemos incluir ou não a aresta, i.e., $3 \times 2 = 6$ subgrafos com dois vértices;
- Com três vértices, temos $2^3 = 8$ possibilidade de incluir ou não cada aresta.

Assim, a quantidade total de subgrafos com pelo menos um vértice é a soma de $3 + 6 + 8 = 17$.

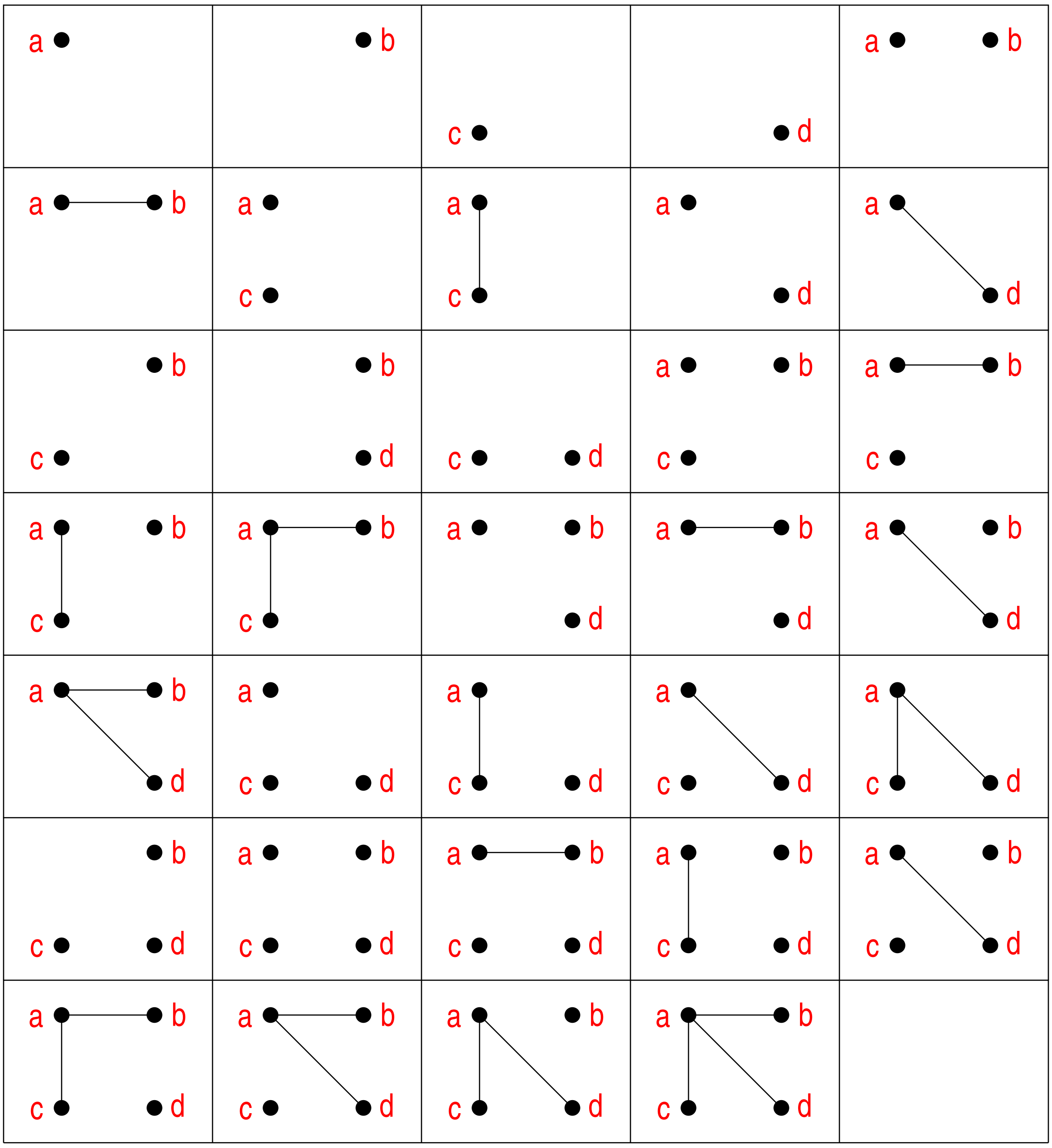
A figura abaixo mostra todos esses subgrafos.



8. Desenhe todos os subgrafos do grafo abaixo.



Resposta:



9. Para que valores de n os grafos abaixo são regulares?

   (a) K_n

   Resposta:
   O grafo completo K_n é regular para todos os valores de $n \geq 1$, já que o grau de cada vértice é $n-1$.

   (b) C_n

   Resposta:
   O grafo ciclo C_n é regular para todos os valores de $n \geq 3$, já que o grau de cada vértice é sempre 2.

   (c) W_n

   Resposta:
   No grafo roda, o grau do vértice do centro é sempre n e o grau dos vértices no ciclo é sempre 3. Assim, o grafo roda W_n é regular apenas para $n = 3$. Observe que W_3 é o mesmo que K_4.

   (d) Q_n

   Resposta:
   O grafo ciclo Q_n é regular para todos os valores de $n \geq 0$, já que o grau de cada vértice é sempre n. Observe que Q_0 é o grafo com um vértice.

10. Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 10 arestas?

Resposta:
Um grafo regular de grau 4 com n vértices possui, pelo Teorema do Aperto de Mãos, $4n/2 = 2n$ arestas. Como existem 10 arestas, temos que $2n = 10$, i.e., $n = 5$ e existem cinco vértices. O grafo completo K_5 possui cinco vértices, todos com grau 4 e 10 arestas.

11. O grafo complementar $\overline{G}$ de um grafo simples G tem os mesmos vértices de G. Dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se, e somente se, eles não são adjacentes em G. Determine os seguintes grafos.

    (a) $\overline{K_n}$

    Resposta:
    O complemento do grafo completo é o grafo com nenhuma aresta.

    (b) $\overline{K_{m,n}}$

    Resposta:
    No grafo bipartido completo $K_{m,n}$, existe uma aresta conectando vértices das "duas partes" e nenhuma aresta entre cada parte. No grafo complemento, existe uma aresta entre cada vértice de cada parte levando aos dois subgrafos K_m e K_n.

    (c) $\overline{C_n}$

    Resposta:
    O grafo complemento de C_n é "quase" o grafo K_n, i.e., é o grafo K_n sem as arestas presentes em C_n.

    (d) $\overline{Q_n}$

    Resposta:
    É o grafo onde existe uma aresta entre vértices cujos strings diferem em mais de um bit.

12. Se o grafo simples G tem v vértices e e arestas, quantas arestas tem $\overline{G}$?

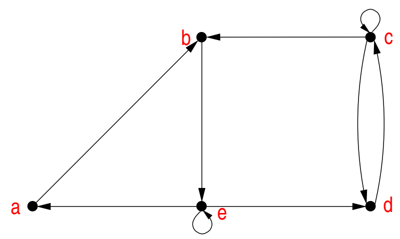
    Resposta:
    O grafo completo K_v possui $C(v, 2) = v(v-1)/2$ arestas. O grafo $\overline{G}$ tem todas as arestas de K_v exceto as presentes em G. Assim $\overline{G}$ possui $\left(\frac{v(v-1)}{2} - e\right)$ arestas.

13. Mostre que se G é um grafo simples com n vértices, então $G \cup \overline{G} = K_n$.

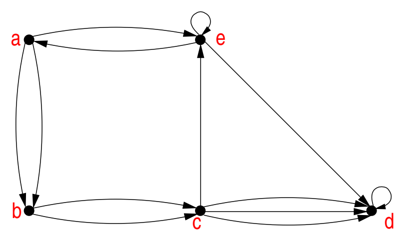
    Resposta:
    Considere o grafo $G \cup \overline{G}$. Claramente esse grafo possui o conjunto de vértices de G, i.e., possui n vértices. Sejam dois vértices distintos u e v do grafo $G \cup \overline{G}$. Ou existe uma aresta conectando u a v em G ou em $\overline{G}$. Assim, pela definição de união, vamos ter uma aresta entre cada par de vértices u e v para um grafo com n vértices, o que leva ao grafo K_n.

14. O grafo reverso de um grafo dirigido $G = (V, E)$, representado por G^r, é o grafo dirigido (V, F) onde $(u, v) \in F$, se, e somente se, $(v, u) \in E$. Desenhe os grafos G^r correspondentes aos seguintes grafos:

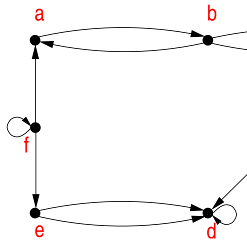
    (a)



    (b)

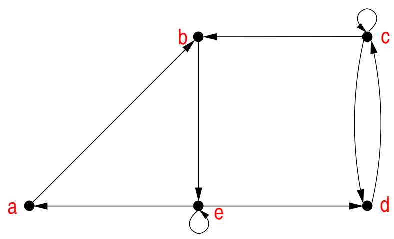


(c)

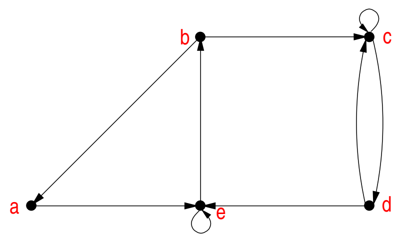


Resposta:

(a)

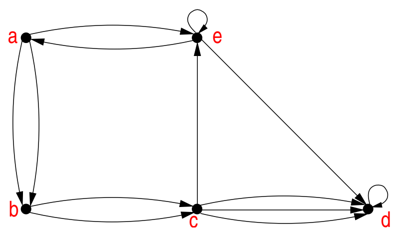


Grafo original

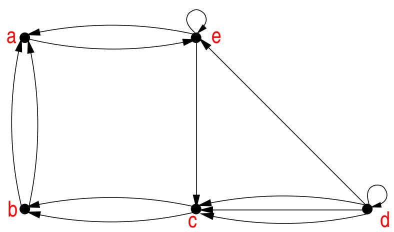


Grafo reverso

(b)

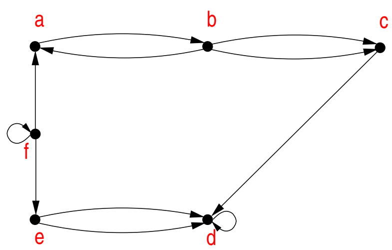


Grafo original

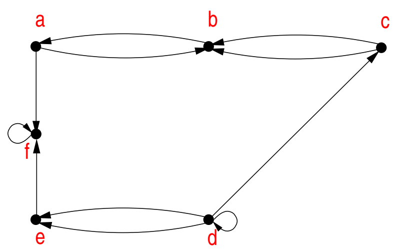


Grafo reverso

(c)



Grafo original



Grafo reverso

15. Seja G um grafo dirigido. Mostre que $G = G^r$ se, e somente se, a relação associada com G é simétrica.

    Resposta:
    Pela definição de grafo reverso, existe uma aresta de v para u em G^r se, e somente se, existe uma aresta de u para v em G. Mas essa é exatamente a definição da propriedade de simetria. Assim, os grafos G e G^r serão idênticos se, e somente se, eles tiverem a propriedade da simetria.

16. Represente a matriz de adjacência do grafo Q_3.

Resposta:
O grafo Q_3 possui $2^3 = 8$ vértices que podem ser rotulados pelos números binários de 0 a 7. A matriz de adjacência correspondente é:

	000	001	010	011	100	101	110	110
000	0	1	1	0	1	0	0	0
001	1	0	0	1	0	1	0	0
010	1	0	0	1	0	0	1	0
011	0	1	1	0	0	0	0	1
100	1	0	0	0	0	1	1	0
101	0	1	0	0	1	0	0	1
110	0	0	1	0	1	0	0	1
110	0	0	0	1	0	1	1	0

17. Seja uma matriz simétrica quadrada formada apenas por 0's e 1's que tem apenas 0's na diagonal principal. Essa matriz pode representar a matriz de adjacência de um grafo simples?

    Resposta:
    Um grafo simples é um grafo que não possui laços nem arestas paralelas. Se um grafo possuir um laço, haverá uma entrada diferente de zero na diagonal principal. Se um grafo possuir arestas paralelas entre os vértices u e v, haverá um valor maior que 1 nas entradas $[u, v]$ e $[v, u]$ da matriz de adjacência. Como nenhuma dessas duas condições ocorre, essa matriz de adjacência representa um grafo simples.

18. O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de adjacência de um grafo não dirigido? E de um grafo dirigido?

    Resposta:
    Em um grafo não dirigido, cada aresta incidente ao vértice v contribui com um na v-ésima coluna. Assim, a soma das entradas nessa coluna representa o número de arestas incidentes a v. Como uma aresta incidente a um vértice v contribui com um para o grau do vértice (dois se for uma aresta laço), a soma dessa coluna representa o grau do vértice v, se não houver laços e mais um para cada laço existente.

    Em um grafo dirigido, cada aresta incidente ao vértice v contribui com um na v-ésima coluna, i.e., v é o nó terminal da aresta dirigida. Assim, a soma das entradas nessa coluna representa o número de arestas incidentes a v. Como uma aresta incidente a um vértice v contribui com um para o grau de entrada do vértice (*in-degree*), a soma dessa coluna representa o grau de entrada do vértice v.

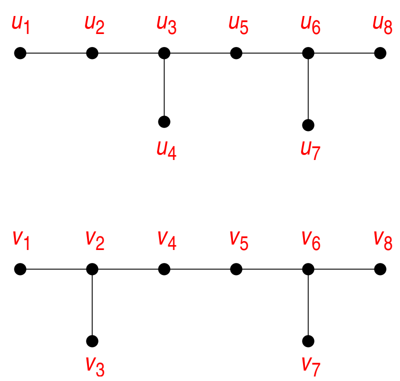
19. O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de incidência de um grafo não dirigido?

    Resposta:
    A matriz de incidência de um grafo é a matriz $M = (m_{ij})$ de tamanho $n \times m$ (n vértices e m arestas) sobre o conjunto dos inteiros não negativos tal que a entrada $m_{ij} = 1$ quando a aresta e_j é incidente a v_i e 0 caso contrário.

    Como cada coluna representa uma aresta, a soma da coluna vale 2, quando a aresta incide a dois vértices, ou 1, quando a aresta é um laço.

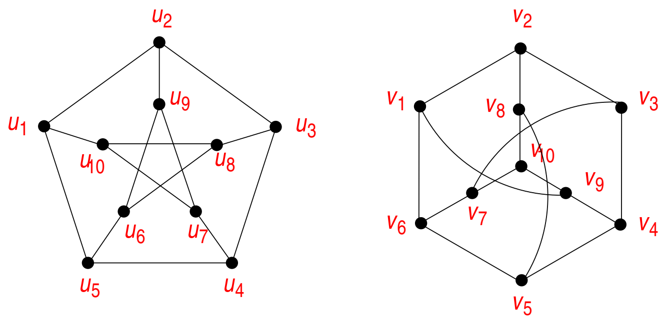
20. Os pares de grafos abaixo são isomorfos?

    (a)



Resposta:
Não. No primeiro grafo, os vértices u_3 e u_6, que têm grau 3, são adjacentes a um vértice em comum (u_5). No segundo grafo, os vértices v_2 e v_6, que têm grau 3, não são adjacentes a um vértice em comum.

(b)



Resposta:
Os grafos são isomorfos. Um possível isomorfismo é $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_9$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_3$, $f(u_5) = v_2$, $f(u_6) = v_8$, $f(u_7) = v_7$, $f(u_8) = v_5$, $f(u_9) = v_{10}$ e $f(u_{10}) = v_6$.

21. Mostre que o isomorfismo de grafos simples é uma relação de equivalência.

Resposta:
Devemos mostrar que o isomorfismo gera uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva. A relação é reflexiva já que a função identidade de um grafo para ele próprio provê o isomorfismo (correspondência um-para-um). A relação é simétrica já que se f é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_1 seja isomorfo a G_2, então f^{-1} é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_2 seja isomorfo a G_1. A relação é transitiva já que se f é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_1 seja isomorfo a G_2 e g é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_2 seja isomorfo a G_3, então $g \circ f$ é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_1 seja isomorfo a G_3.

22. Mostre que os vértices de um grafo bipartido com dois ou mais vértices podem ser ordenados de tal forma que a sua matriz de adjacência tem a forma

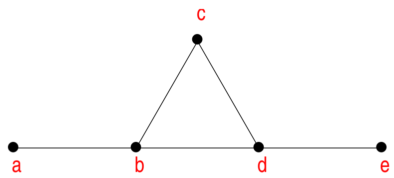
$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

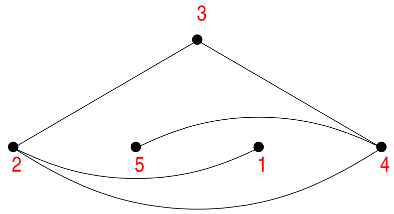
onde as quatro entradas acima são blocos retangulares.

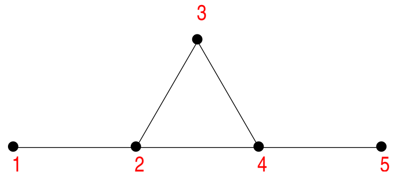
Resposta:
Sejam V_1 e V_2 duas partes de tamanhos m e n, respectivamente. Podemos numerar todos os vértices de V_1 antes dos vértices de V_2. A matriz de adjacência é quadrada de tamanho $(m+n)^2$. Como não existem arestas entre vértices de V_1, as primeiras m linhas e as primeiras m colunas devem ter 0. O mesmo raciocínio vale para V_2 e as últimas n linhas e n colunas devem ter 0.

23. Um grafo simples G é dito ser auto-complementar se G e $\overline{G}$ são isomorfos. Apresente um grafo simples auto-complementar com cinco vértices.

Resposta:
Um grafo simples com cinco vértices pode ter no máximo 10 arestas (K_5). Consequentemente para G e $\overline{G}$ serem isomorfos os dois devem ter o mesmo número de arestas, ou seja, cada um deve ter cinco arestas. Seja G o primeiro grafo abaixo. O segundo é o grafo $\overline{G}$ correspondente. O terceiro é novamente o grafo $\overline{G}$ desenhado da “forma” de G.

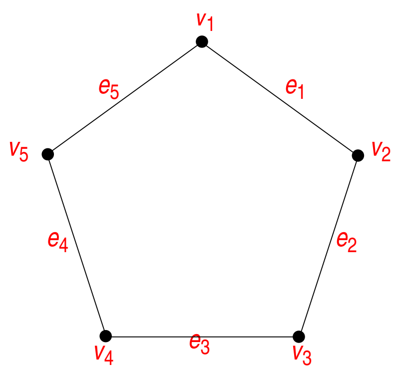


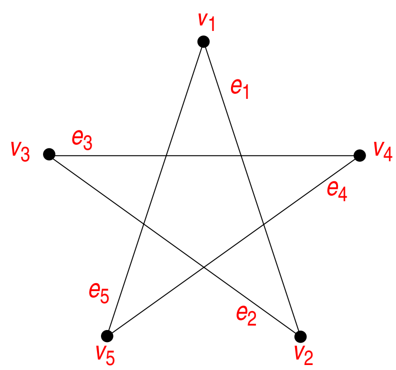




24. Para que inteiros n o grafo C_n é auto-complementar?

    Resposta:
    Se C_n for auto-complementar, então C_n deve ter o mesmo número de arestas que seu complemento. Sabemos que C_n possui n arestas e que o complemento deve ter uma quantidade de arestas idêntica, que pode ser expressa pela quantidade de arestas de $K_n - n$ (quantidade de arestas do grafo completo menos a quantidade de arestas de C_n), i.e., $n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) - n$. Se resolvermos essa equação, temos que $n = 5$. Isso significa que C_5 é o único grafo C_n que **pode** ser auto-complementar já que o número de arestas de C_5 e de seu complemento é o mesmo. Se desenharmos C_5 e seu complemento vemos que os dois grafos são isomorfos.



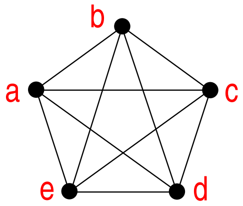


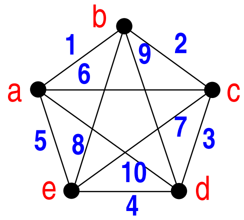
25. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Seja R uma relação em V formada por pares de vértices (u, v) tal que existe um trajeto (*path*) de u para v ou tal que $u = v$. Mostre que R é uma relação de equivalência.

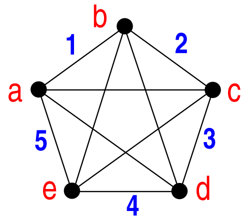
    Resposta:
    Os vértices u e v estão relacionados se, e somente se, ambos estão no mesmo componente conexo. A relação R é obviamente reflexiva. A relação é simétrica já que se u está no mesmo componente conexo de v então v está no mesmo componente conexo de u. A relação R é transitiva já que se u está no mesmo componente conexo de v e v está no mesmo componente conexo de w então u está no mesmo componente conexo de w.

26. Apresente um grafo que tenha um circuito Euleriano e um circuito Hamiltoniano mas que não sejam idênticos.

    Resposta:
    Seja o grafo K_5. Um circuito euleriano está mostrado no grafo do meio abaixo e um circuito hamiltoniano no grafo à direita. Os números associados às arestas indicam uma possível ordem de fazer o caminhamento.







27. Um grafo possui oito vértices e seis arestas? Esse grafo é conexo? Justifique a resposta.

    Resposta:
    Não. O número mínimo de arestas para o grafo ser conexo é a quantidade de vértices menos um. Neste caso, seriam necessárias pelo menos sete arestas para o grafo ser conexo.

28. Nos grafos abaixo, assuma que cada vértice possui um identificador único $v_i, i \geq 1$. Cada variável usada é um número inteiro positivo maior ou igual a 1 ou um outro valor específico, conforme o caso. Para cada letra, diga quantas soluções distintas podem ser obtidas.

    (a) Árvores geradoras de um grafo $C_n, n \geq 3$.

    Resposta:
    Grafo C_n é o grafo ciclo com n vértices. Se qualquer uma das n arestas for removida, então teremos uma árvore geradora. Assim, existem exatamente n árvores geradoras distintas, cada uma correspondente a remoção de uma das n arestas.

    (b) Circuitos Hamiltonianos de um grafo $K_n, n \geq 3$, começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq n$.

    Resposta:
    Grafo K_n é o grafo completo com n vértices. Começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq n$ temos $n-1$ vértices como segunda opção. Como terceira opção temos $n-2$ vértices e assim sucessivamente até chegarmos ao último vértice que tem uma aresta para o vértice v_i, formando o circuito Hamiltoniano. A quantidade de circuitos distintos começando num vértice v_i é dada por:

    $$(n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = (n-1)!$$

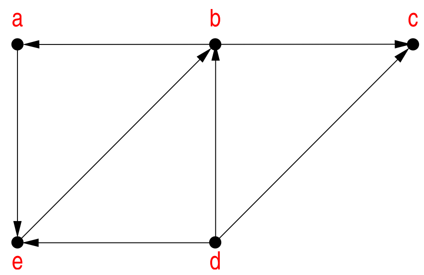
    (c) Circuitos Eulerianos de um grafo $K_{m,m}, m \geq 2$, $m = 2a$ e começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq 2m$.
    Grafo $K_{m,m}, m \geq 2$, $m = 2a$ é o grafo bipartido completo sendo que m é um número par. Os grafos bipartidos completos que podemos ter são da forma $K_{2,2}, K_{4,4}, K_{6,6}, \ldots$. Ou seja, cada vértice está conectado a exatamente m outros vértices. Como m é par, o grau de cada vértice é par e, assim, é possível haver circuitos Eulerianos.

    Resposta:
    Começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq 2m$ temos m opções de arestas para percorrer e chegar a um vértice. Para esse segundo vértice temos $m-1$ opções de arestas para percorrer e chegar a um vértice. Para esse terceiro vértice temos novamente $m-1$ opções de arestas para percorrer e chegar a um vértice, considerando que desejamos maximizar a quantidade de circuitos. Esse processo é repetido exatamente $2m-1$ vezes, quando retornaremos ao vértice v_i, ou seja, completamos a primeira parte do percurso. Nesse momento, para o vértice v_i temos exatamente $m-2$ opções de arestas e chegar a um vértice. Para esse próximo vértice temos $m-3$ opções de arestas e, novamente, esse processo é repetido $2m-1$ vezes, quando a segunda parte do percurso é completada. Esse processo é repetido até que não haja mais arestas a serem percorridas, terminando no vértice v_i. Assim, a quantidade de circuitos Eulerianos distintos começando num vértice v_i é dada por:

    $$m \cdot (m-1)^{2m-1} \cdot (m-2) \cdot (m-3)^{2m-1} \cdot \ldots 2 \cdot 1^{2m-1} = \prod_{i=1}^{\frac{m}{2}} 2i \cdot (2i-1)^{2m-1}$$

29. Determine os componentes fortemente conexos de cada grafo dirigido abaixo.

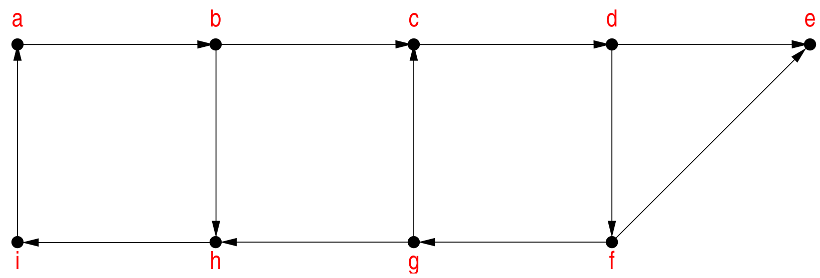
    (a)



Resposta:

(a) $H_1 : V_1 = \{a, b, e\}$
(b) $H_2 : V_2 = \{c\}$
(c) $H_3 : V_3 = \{d\}$

(b)



Resposta:

(a) $H_1 : V_1 = \{a, b, c, d, f, g, h, i\}$
(b) $H_2 : V_2 = \{e\}$

30. Seja uma árvore com n vértices.

(a) Quantas arestas têm essa árvore?

Resposta:
Tem $n - 1$ arestas.

(b) Prove esse resultado por indução matemática.

Resposta:
$P(n)$: Toda árvore com n vértices tem $n - 1$ arestas, $n \geq 1$.

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: $P(n_0) = P(1)$: Toda árvore com um vértice tem zero arestas. Este passo é verdadeiro já que a única aresta que poderia existir seria uma aresta laço e, assim, haveria um ciclo. Como árvores não possuem ciclos, logo não pode haver nenhuma aresta.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

– Suponha que a fórmula seja verdadeira para $n = k$, i.e., $P(k)$: Toda árvore com k vértices tem $k - 1$ arestas, $k \geq 1$. [hipótese indutiva]

– Deve-se mostrar $P(k + 1)$: Toda árvore com $k + 1$ vértices tem k arestas, $k \geq 1$.

Seja uma árvore com k vértices e $k - 1$ arestas. Vamos acrescentar um vértice $v^\star$ ao grafo que representa essa árvore. Se esse vértice $v^\star$ não for conectado a nenhum vértice da árvore existente, então teremos uma floresta e não uma árvore. Logo, temos que acrescentar uma aresta para não termos uma floresta. Essa aresta deve ser incidente a $v^\star$ e a algum vértice da árvore v_a. O acréscimo dessa aresta mantém a propriedade da árvore (grafo acíclico), já que existe apenas um único caminho entre $v^\star$ e v_a e, conseqüentemente, com qualquer outro vértice da árvore. Note que se acrescentarmos uma segunda aresta incidente a $v^\star$ e a um outro vértice da árvore passaremos a

ter um ciclo, o que deixa de caracterizar uma árvore. Ou seja, não podemos acrescentar mais de uma aresta incidente a $v^{\star}$.
Assim, ao acrescentarmos um vértice à árvore com k vértices e $k-1$ arestas, passaremos a ter uma árvore com $k+1$ vértices e k arestas.