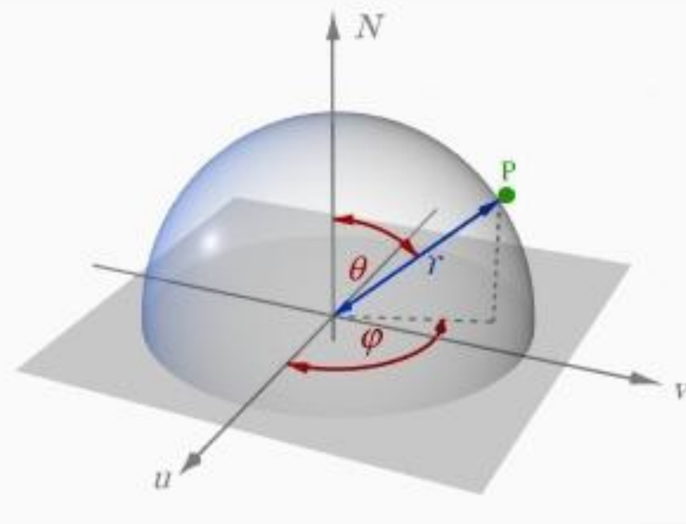
COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Fundamentação Matemática

Prof. Moisés Henrique Ramos Pereira

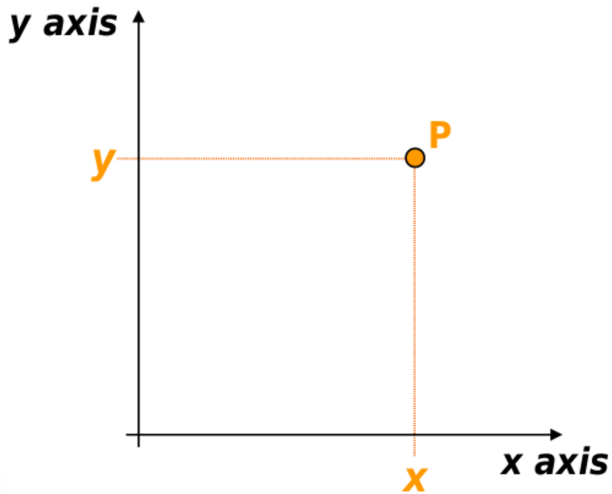


Introdução

- A computação gráfica é fundamentada na matemática.
- A matemática apresentada a seguir é simples, mas necessária para o entendimento de certas técnicas da disciplina.
- Serão relembrados:
  - Coordenadas do *frame* de referência
  - Pontos
  - Vetores
  - Matrizes

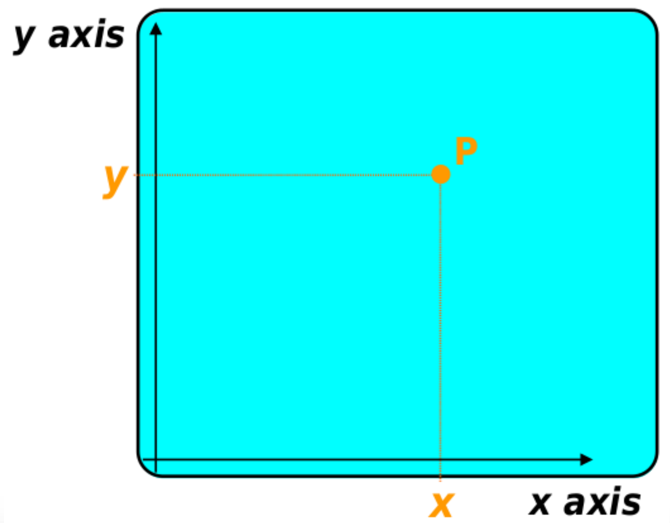
Coordenadas do Frame - 2D

- Ao modelarmos uma cena em computação gráfica, a definição da mesma é feita utilizando geometria simples.
- Em geral, coordenadas em uma aplicação gráfica são representadas em um sistema de referências cartesiano.
  - Mas qualquer sistema não cartesiano pode ser utilizado.
- Em um sistema cartesiano, todos os objetos são definido utilizando pares de coordenadas.



Coordenadas do Frame - 2D

- Uma representação de coordenadas de tela portável é representada pelo primeiro quadrante do sistema Cartesiano.
- O sistema de coordenadas tem sua origem no canto inferior esquerdo da tela.



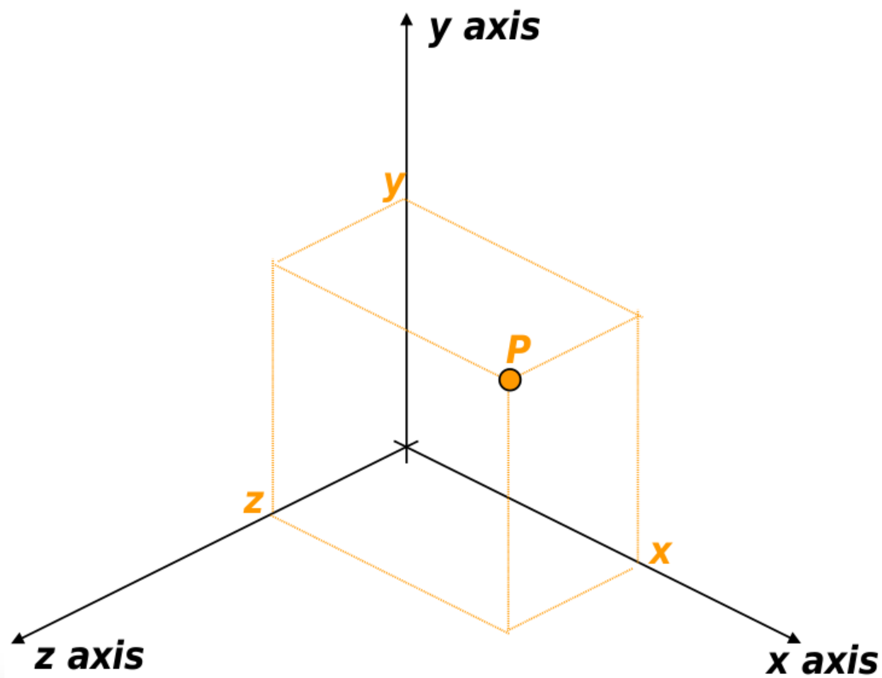
Coordenadas do Frame - 2D

- *Scan lines*, no entanto, são numeradas a partir de 0 no topo da tela do *frame* de referência.

- O sistema de coordenadas tem origem no canto superior esquerdo da tela.

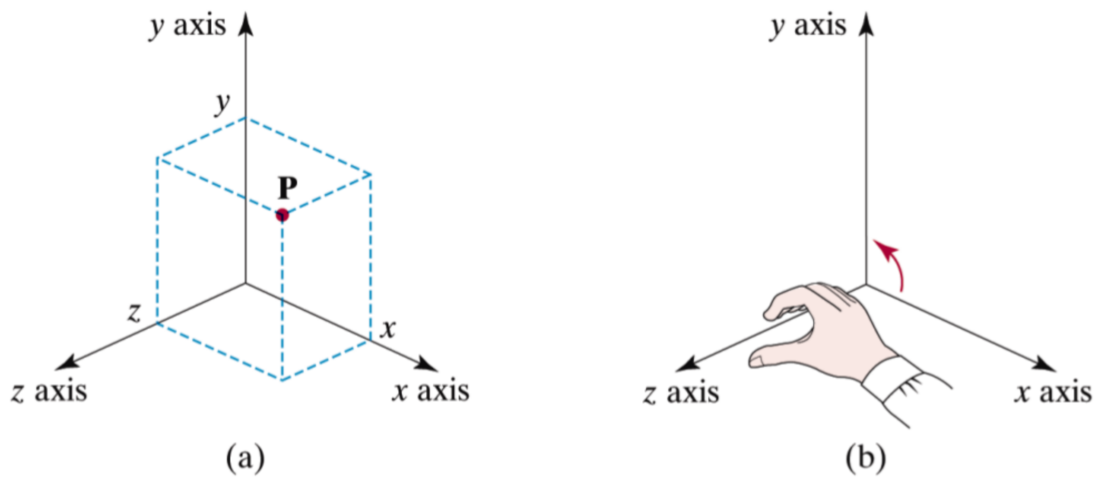
Coordenadas do Frame - 3D

- Ao modelarmos uma cena em três dimensões em computação gráfica, é adicionada uma coordenada extra (z).



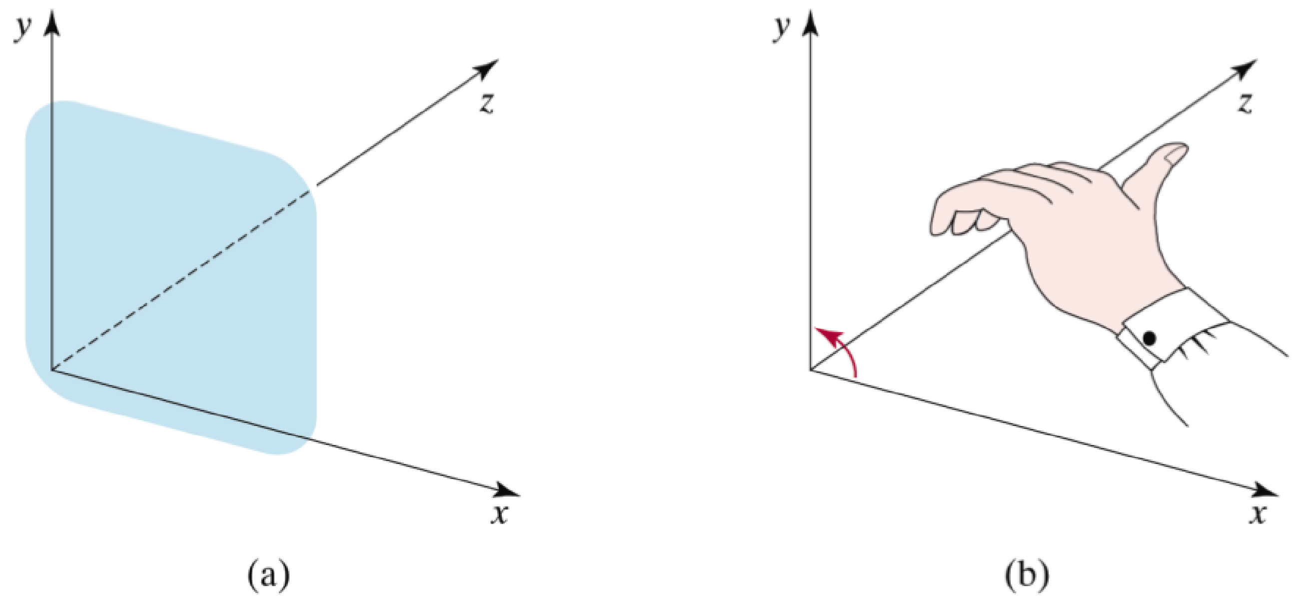
Coordenadas do Frame - 3D

- Existem duas convenções para a orientação para os eixos coordenados em um sistema de referência cartesiana tridimensional.
- Sistema de orientação da mão-direita (aponta para "fora").



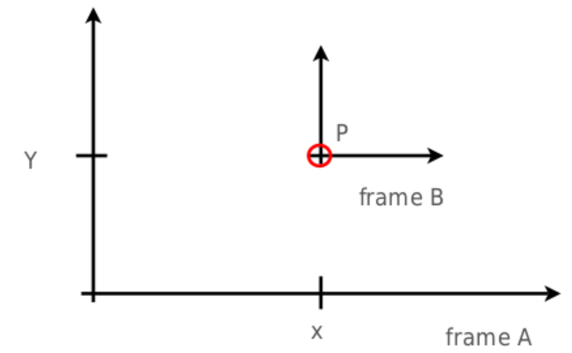
Coordenadas do Frame - 3D

- Sistema de orientação da mão-esquerda (z aponta para “dentro”).
- Valores positivos de z indicam objetos atrás da tela (profundidade).



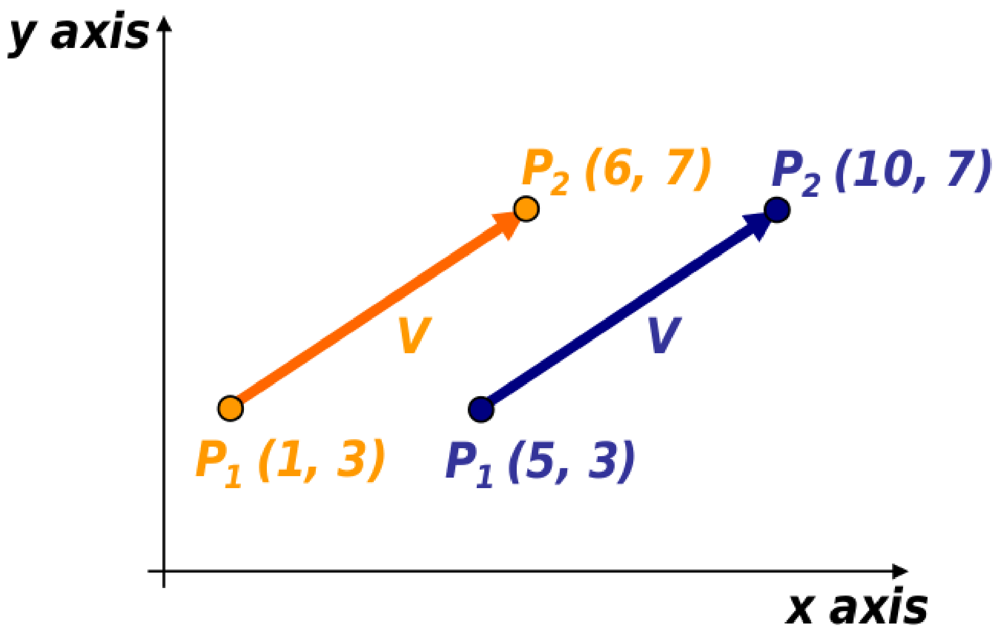
Pontos

- Um ponto é uma posição especificada por coordenadas em um frame de referência.
- Em um espaço bidimensional, um ponto é um par ordenado (x, y).
- No espaço tridimensional, um ponto é uma tripla ordenada (x, y, z).
- Coordenadas e outras propriedades de um ponto dependem da escolha do frame de referência.



Vetores

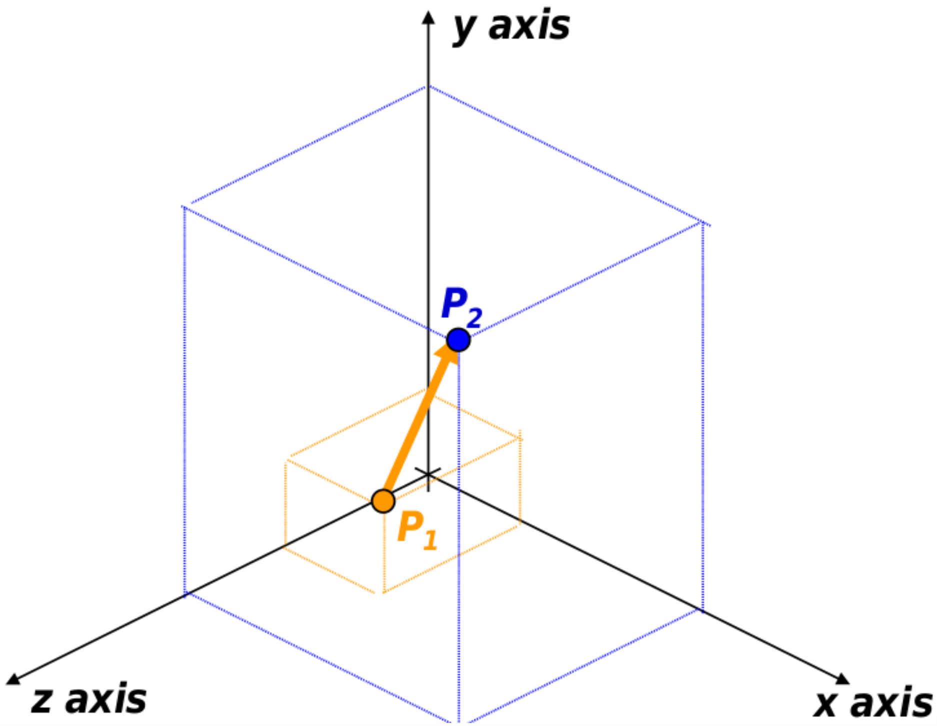
- Um vetor é definido como a diferença entre dois pontos.
- Em um sistema bidimensional:



$$
\begin{aligned}
V &= P_2 - P_1 \\
&= (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\
&= (6 - 1, 7 - 3) \\
&= (5, 4)
\end{aligned}
$$

Vetores

- Em um sistema tridimensional:



$$V = P_2 - P_1$$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1\ , z_2 - z_1)$$

$$= (V_x, V_y, V_z)$$

De (2, 1, 3) para (7, 10, 5):

$= (7, 10, 5) - (2, 1, 3)$

$= (7 - 2, 10 - 1, 5 - 3)$

$= (5, 9, 2)$

Vetores

- Geometricamente, um vetor é representando por um segmento de reta orientado no plano ou no espaço.
- A direção e o sentido do segmento de reta identificam a direção e o sentido do vetor.
- O comprimento do segmento orientado representa a norma do vetor.
- Dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Operações com Vetores

- Existem algumas operações com vetores cujo conhecimento é essencial para a computação gráfica:
  - Cálculo da magnitude de um vetor (norma do vetor).
  - Soma de vetores.
  - Multiplicação por um escalar.
  - Produto escalar.
  - Produto vetorial.

Magnitude de Vetor (Norma)

- A magnitude ou norma de um vetor bidimensional é facilmente calculada utilizando o teorema de Pitágoras:

$$||V|| = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2}$$

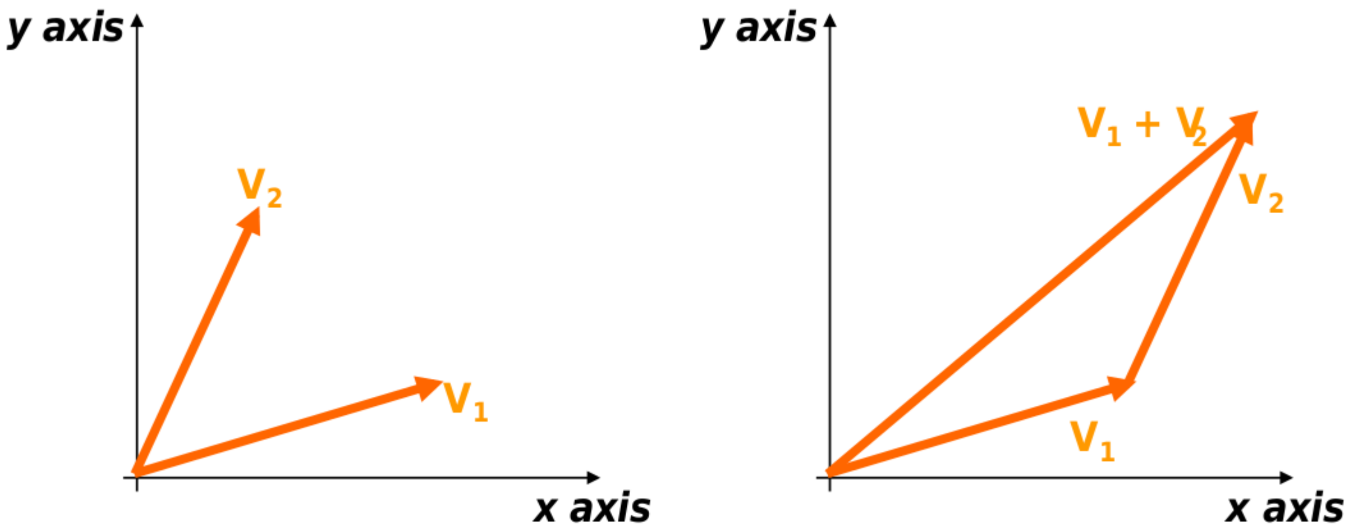
- Para um vetor no espaço cartesiano tridimensional, a magnitude do mesmo é dado por

$$||V|| = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2}$$

Soma de Vetores

- A soma de dois vetores é realizada pela adição dos componentes correspondentes.

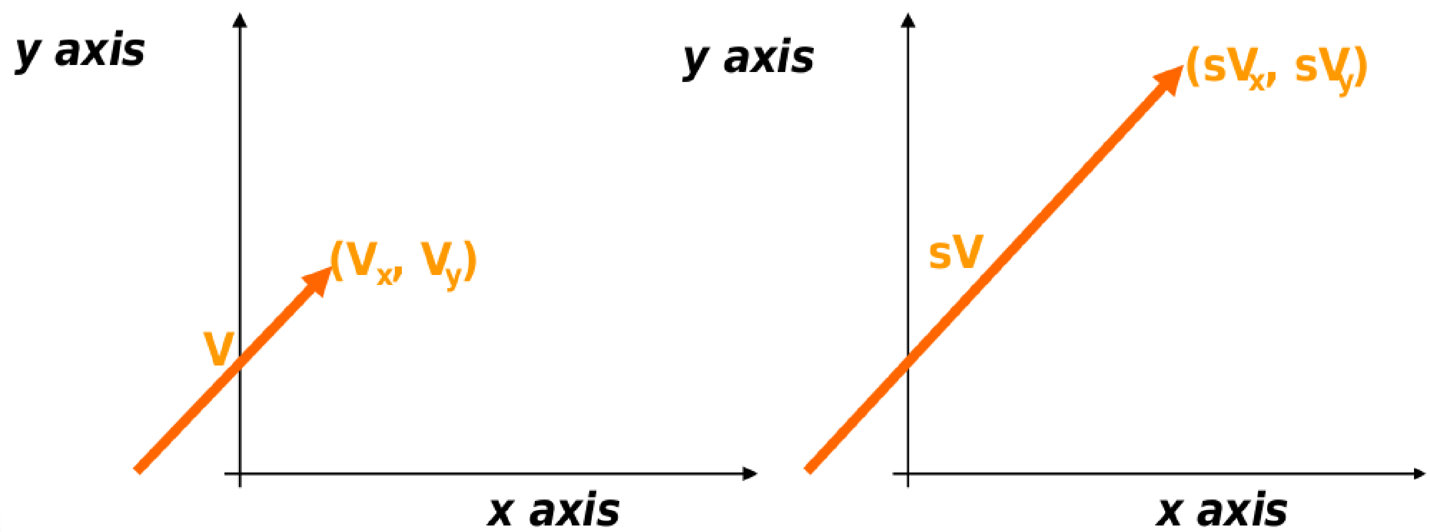
$$V_1 + V_2 = \left(V_{1x} + V_{2x}, V_{1y} + V_{2y}, V_{1z} + V_{2z}\right)$$



Multiplicação por Escalar

- A multiplicação de um vetor por um escalar é realizada pela multiplicação de cada componente do vetor por um escalar.

$$sV = (sV_x, sV_y)$$



Produto Escalar

- O produto escalar de dois vetores resulta em um valor escalar e é dado por

$$V_1 . V_2 = \left||V_1|\right|\left||V_2|\right|(\cos\theta)\text{, para } 0 \leq \theta \leq \pi$$

- O produto escalar é também conhecido como produto interno.
- O produto escalar de um vetor com ele mesmo resulta na magnitude do vetor ao quadrado.
- O produto escalar é comutativo e distributivo com relação à soma de vetores.

Produto Vetorial

- O produto vetorial combina dois vetores, tem como resultado um terceiro vetor e é dado por

$$\left|\left|V_1 \times V_2\right|\right| = \left|\left|V_1\right|\right|\left|\left|V_2\right|\right|(\sin\theta)\text{, para } 0 \leq \theta \leq \pi$$

- O produto vetorial de dois vetores é o vetor perpendicular ao plano formado por estes dois vetores (a direção deste vetor é determinada pela regra da mão direita).
- Sua magnitude é igual à área do paralelogramo formado pelos dois vetores.
- O produto escalar é distributivo com relação à soma de vetores.