Interpolação Polinomial

Disciplina: Cálculo Numérico

Profª: Dayanne

dayanne.coelho@prof.unibh.br

Centro Universitário de Belo Horizonte

Interpolação Polinomial

Muitas funções são conhecidas apenas em um conjunto finito e discreto de pontos em um dado intervalo, como a função $y = f(x)$.

i	x_i	y_i
0	1,0	0,8
1	1,5	1,2
2	2,0	1,4
3	3,5	1,6

Para trabalhar com a expressão analítica da função $y = f(x)$ acima, podemos aproximá-la por uma função analítica que passe pelos quatros pontos (x_i, y_i) de $y = f(x)$.

Quando a forma desta função for um polinômio, diz que tal aproximação é uma **INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL.**

Interpolação Polinomial

- Em outras palavras, temos que interpolar uma função $f(x)$ definida em $(n+1)$ pontos distintos dentro de um intervalo$[a,\ b]$ consiste em aproximar esta função por um polinômio $p(x)$ de grau **menor ou igual** a n, tal que este coincida com a função nestes pontos, isto é, $p(x_i) = f(x_i) = y_i$ para $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$.
- Um outro caso em que frequentemente se utiliza a interpolação polinomial é quando a forma analítica de uma função analisada é muito complexa podendo assim substituí-la de forma aproximada por um polinômio.
- Nestes casos a quantidade e quais pontos a serem interpolados será definido pelo analista, sendo a aproximação tão mais precisa quanto maior o número de interpolação.

Centro Universitário de Belo Horizonte

Teorema da existência e unicidade do polinômio interpolador

Seja $f(x)$ definida em $(n+1)$ pontos distintos: $x_0, x_1, \cdots, x_n$ de um intervalo $[a,\ b]$, então existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n tal que $p(x_i) = f(x_i)$ $i = 1, 2, \cdots, n$

Prova:

- Seja o polinômio de grau n dado por $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$ tal que $p(x_i) = f(x_i)$.
- Este polinômio tem $n+1$ coeficientes a_i, sendo necessários portanto $n+1$ pontos para encontrar as $n+1$ equações necessárias para se obter os $n+1$ coeficientes.
- Logo o polinômio interpolador de $n+1$ pontos distintos tem grau máximo igual a n.

Teorema da existencia e unicidade do polinômio interpolador

- Desta forma, substituindo cada um dos $n+1$ pontos $(x_i,\ y_i)$ em $p(x)$ temos:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + \cdots + a_3 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + \cdots + a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_0 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + \cdots + a_3 x_n^3 + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 = y_0 \end{cases}$$

- Que pode ser escrito como um sistema linear do tipo $Ax = b$, onde:

$$x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema da existencia e unicidade do polinômio interpolador

- Para verificar se o polinômio interpolador tem grau máximo n, e único, basta verificar se o sistema tem solução única, ou seja, se $det(A) \neq 0$.

Exemplo 1: Encontre o polinômio interpolador para os pontos dados:

i	x_i	y_i
0	2	1
1	3	4
2	4	9

Centro Universitário de Belo Horizonte

Polinômio interpolador

Exemplo 2: Encontre o polinômio interpolador para os pontos dados:

i	x_i	y_i
0	1	5
1	2	7
2	3	9

unibh
Centro Universitário de Belo Horizonte

Polinômio interpolador

Exemplo 3: Encontre o polinômio interpolador para os pontos dados:

i	x_i	y_i
0	0.1	5
1	0.2	13
2	0.3	-4
3	0.4	-8

Centro Universitário de Belo Horizonte

Formas de se obter o polinômio interpolador

- O polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \cdots, x_n$ é único.
- No entanto, existem várias formas de se obter este polinômio:
  - Resolução do sistema linear.
  - Interpolação de Lagrange.
  - Interpolação de Newton.
- Teoricamente ambas conduzem ao polinômio interpolador. A escolha entre os métodos depende da condição de estabilidade do sistema linear e tempo computacional.

Interpolação de Lagrange

- Os $n+1$ polinômios $p_i(x)$ de grau n dados abaixo são conhecidos com polinômios de Lagrange:
  $p_0(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$
  $p_1(x) = (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$
  $p_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$
  $\vdots$
  $p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$
- tais polinômios podem ser escritos na forma indicial como:

$$p_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)$$

e tem como particularidades $p_i(x_i) \neq 0, \ \forall \ i$ e $p_i(x_j) = 0$ para $j \neq i$, com i e j variando de 0 até n.

Interpolação de Lagrange

- O polinômio interpolador dos $n+1$, pontos distintos (x_i, y_i) tem grau máximo igual a n, portanto, pode ser escrito como combinação linear dos polinômios de Lagrange $p_i(x)$, ou seja,

$$p(x) = b_0p_0(x) + b_1p_1(x) + b_2p_2(x) + \cdots + b_np_n(x) \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{n} b_ip_i(x)$$

- Dados os $n+1$ pontos (x_i, y_i) os polinômios de Lagrange $(p_i(x))$ são conhecidos, restando como incógnitas para a determinação de $p(x)$ os valores de b_i, os quais podem ser obtidos da seguinte forma:

$$p(x_j) = b_0p_0(x_j) + b_1p_1(x_j) + b_2p_2(x_j) + \cdots + b_np_n(x_j)$$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Interpolação de Lagrange

- Como $p_i(x_j) = 0$ para $i \neq j$ tem-se:
  - $j = 0 \quad \Rightarrow p(x_0) = y_0 = b_0 p_0(x_0) \quad \Rightarrow b_0 = \frac{y_0}{p_0(x_0)}$
  - $j = 1 \quad \Rightarrow p(x_1) = y_1 = b_1 p_1(x_1) \quad \Rightarrow b_1 = \frac{y_1}{p_1(x_1)}$
  - $\vdots$
  - $j = n \quad \Rightarrow p(x_n) = y_n = b_n p_n(x_n) \quad \Rightarrow b_n = \frac{y_n}{p_n(x_n)}$
- Portanto $b_i = \frac{y_i}{p_i(x_i)}$.
- Substituindo em $p(x)$ temos:
  - $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)}$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Interpolação de Lagrange

- como:
  - $p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$
  - $p_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)$
- temos:

$$\underbrace{p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{(x_i - x_j)}}_{\text{polinomio interpolador de lagrange}}$$

Exemplo da Interpolação de Lagrange

Exemplo 1 - Encontre o polinômio interpolador para os quatro pontos dados:

i	x_i	y_i
0	0	0
1	0.2	2.008
2	0.4	4.064
3	0.5	5.125

Centro Universitário de Belo Horizonte

Exemplo da Interpolação de Lagrange

Exemplo 2 -Dada $f(x)$ conhecida apenas nos pontos da tabela abaixo, calcule o valor aproximado de $f(x)$ para $x = 0,2$.

i	x_i	y_i
0	0	1.0
1	0.1	2.001
2	0.3	4.081
3	0.6	9.296
4	1.0	21.00

Centro Universitário de Belo Horizonte