Métodos Iterativos para Resolver Sistemas de Equações Lineares

Disciplina: Cálculo Numérico

Prof[a]: Dayanne

dayanne.coelho@prof.unibh.br

Centro Universitário de Belo Horizonte

Métodos Iterativos

- A solução $\overline{x}$ de um sistema linear $Ax = b$ pode ser obtida utilizando-se um método iterativo, que consiste em calcular uma sequência $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ de aproximações de $\overline{x}$, sendo dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$.
- esses métodos consistem em encontrar uma sequência de estimativas x_i^k (dada uma estimativa inicial x_i^0) que após um número suficiente grande de iterações convirja para a solução do sistema de equações.

$$
\begin{array}{c}
x_1^0 \rightarrow x_1^1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_1 \\
x_2^0 \rightarrow x_2^1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_2 \\
\vdots \\
x_n^0 \rightarrow x_n^1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n
\end{array} \tag{1}
$$

Vantagens dos Métodos Iterativos

- Não são tão suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento, como o método de Eliminação de Gauss;
- Apresenta um resultado aproximado do real conforme o número de iterações realizadas.
- Apresenta um método de convergência.

Centro Universitário de Belo Horizonte

Métodos Iterativos

- Os métodos iterativos transforma o sistema linear $Ax = b$ em um sistema equivalente $x = Fx + d$, onde:

  A: é a matriz dos coeficientes
  x: é o vetor das variáveis
  b: é o vetor das constantes
  F: é a matriz nxn
  d: é um vetor $nx1$

Métodos Iterativos

- Partindo de uma solução inicial: $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$
- Obtém-se os seguintes vetores:
  - $x^{(1)} = Fx^{(0)} + d$
  - $x^{(2)} = Fx^{(1)} + d$
  - $\vdots$
  - $x^{(k)} = Fx^{(k-1)} + d$
- De um modo geral, temos que a aproximação $x^{(k+1)}$ é calculada pela fórmula:

$$x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + d; \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Métodos Iterativos

Teste de Parada:

- O processo iterativo $x^{(k+1)}$ gera aproximações até que:
  - $max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \epsilon$, sendo ϵ a tolerância, ou
  - $k > M$, sendo M o número máximo de iterações.

Centro Universitário de Belo Horizonte

Método de Jacobi

Seja o sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{2}$$

Método de Jacobi

Da 1ª equação temos:

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)}{a_{11}}$$

Analogamente temos:

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}x_n)/a_{33}$$

$$\vdots$$

$$x_n = (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn}$$

OBS: Os elementos $a_{ij} \neq 0, \forall i$. Caso isto não ocorra, deve-se reagrupar as equações até que se consiga essa condição.

Método de Jacobi

Consiste em:

- Escolhe-se uma aproximação inicial $x^{(0)}$;
- Geram-se aproximações sucessivas de $x^{(k)}$ a partir da iteração $x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2...$
- Continua-se a gerar aproximações até que um dos critérios de parada sejam satisfeitos.

Exemplos:

1 - Resolva o sistema abaixo para $\epsilon \leq 10^{-2}$ ou $k > 5$ e solução inicial $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^t$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 & = & 3 \end{cases}$$

2 - Resolva o sistema abaixo para $\epsilon \leq 10^{-2}$ ou $k > 8$ e solução inicial $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^t$

$$\begin{cases} 10x + 2y + 3z & = & 7 \\ x + 5y + z & = & -8 \\ 2x + 3y + 10z & = & 6 \end{cases}$$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Método de Gauss-Seidel

- Este método é muito semelhante ao método de Jacobi.
- A diferença é que a medida que se obtém a nova aproximação x_i^{k+1}, as outras incógnitas x_j^{k+1} para $j > i$, já consideram este valor x_i^{k+1} corrigido em suas expressões, como mostra as equações abaixo:

$$x_1^{k+1} = \frac{(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k)}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k)/a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = (b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1})/a_{nn}$$

Método de Gauss-Seidel

- O algoritmo para a implementação deste método é igual ao algoritmo para o método de Jacobi, mudando a expressão $x_i^{k+1} = F_{ij}x_j^k + d_i$ pela expressão abaixo:

$$x_i^{k+1} = \underbrace{f_{ij}x_j^{k+1}}_{j<i} + \underbrace{f_{ij}x_j^{k}}_{j\geq i} + d_i$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 & = & 3 \end{cases}$$

Para $\epsilon \leq 10^{-2}$ ou $k > 5$ e solução inicial $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^t$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Comparação entre os métodos

a) **Convergência:** Os métodos diretos são processos finitos e, portanto teoricamente, obtém a solução de qualquer sistema não singular de equações. Já os métodos iterativos tem convergência assegurada apenas sob determinadas condições.

b) **Erros de arredondamento:** Métodos diretos apresentam sérios problemas com erros de arredondamento. Uma forma de amenizar é usar as técnicas de pivoteamento. Os métodos iterativos têm menos erro de arredondamento, visto que a convergência, uma vez assegurada, impede a aproximação inicial. Desta forma, somente os erros cometidos na última iteração afetam a solução.

Exercício

Seja o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 1 \end{cases}$$

verifique por Eliminação de Gauss que este sistema não admite solução. Qual será o comportamento do método de Gauss-Seidel?

Centro Universitário de Belo Horizonte