

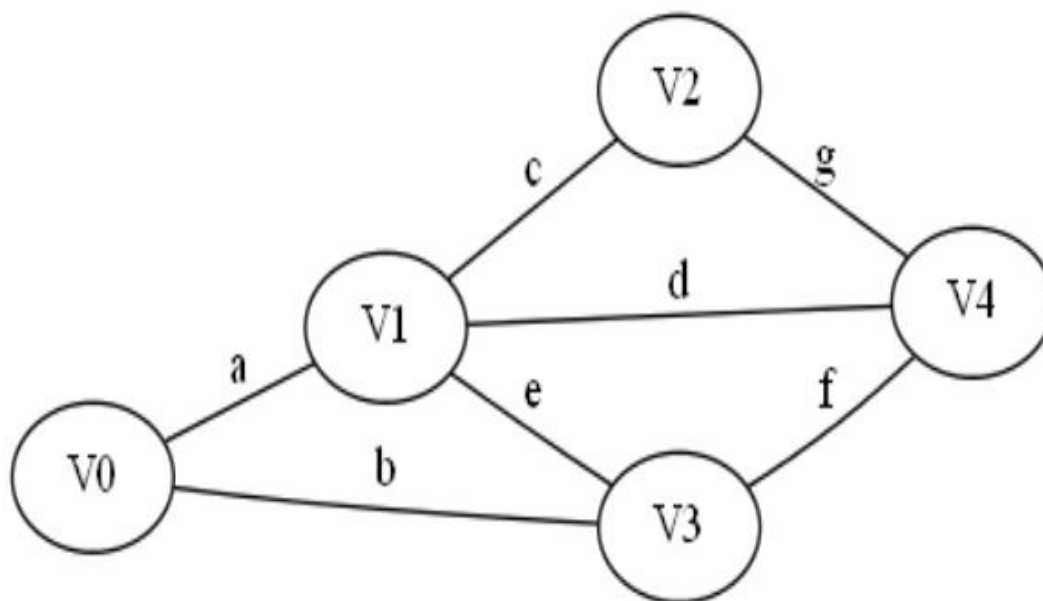
Teoria dos Grafos

Aula 2

Conceitos fundamentais de grafos e dígrafos

Conceitos Básicos

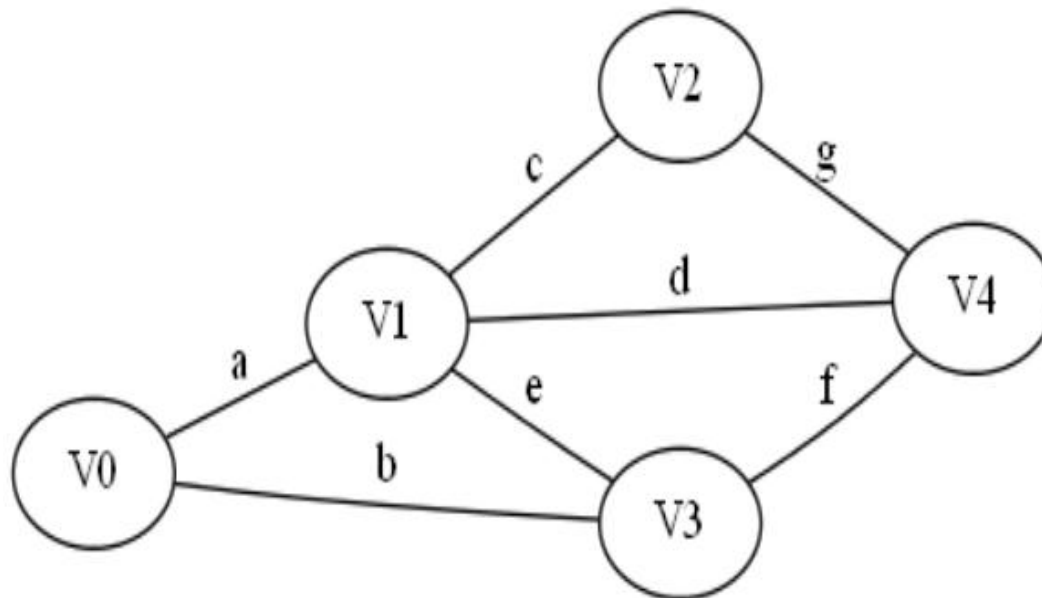
- Grafo é uma coleção de vértices e arestas
- Vértice é um objeto simples que pode ter nomes e outros atributos
- Aresta é uma conexão entre dois vértices



Por definição, um grafo deve ter pelo menos 1 vértice.

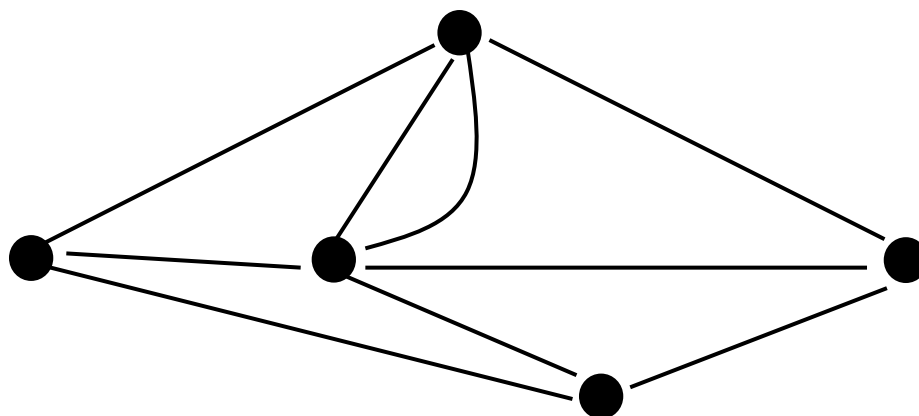
Conceitos Básicos

- Grafo
 - $V = \{V0, V1, V2, V3, V4\}$
 - $E = \{(V0, V1), (V0, V3), (V1, V2), (V1, V4), (V1, V3), (V3, V4), (V2, V4)\}$



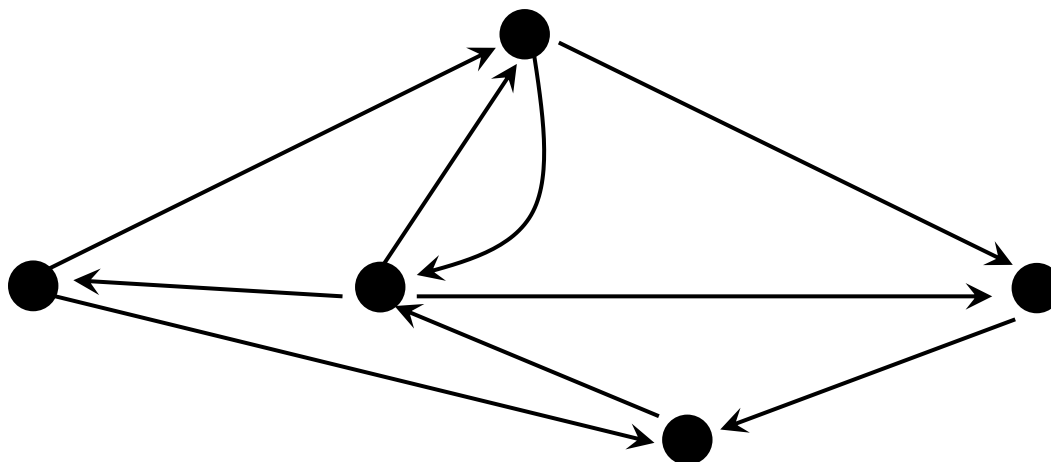
Conceitos Básicos

- Grafo não Direcionado $G = (V, E)$ é um par onde o conjunto de arestas E consiste em pares de vértices não orientados. A aresta (v_i, v_j) e (v_j, v_i) são consideradas a mesma aresta.



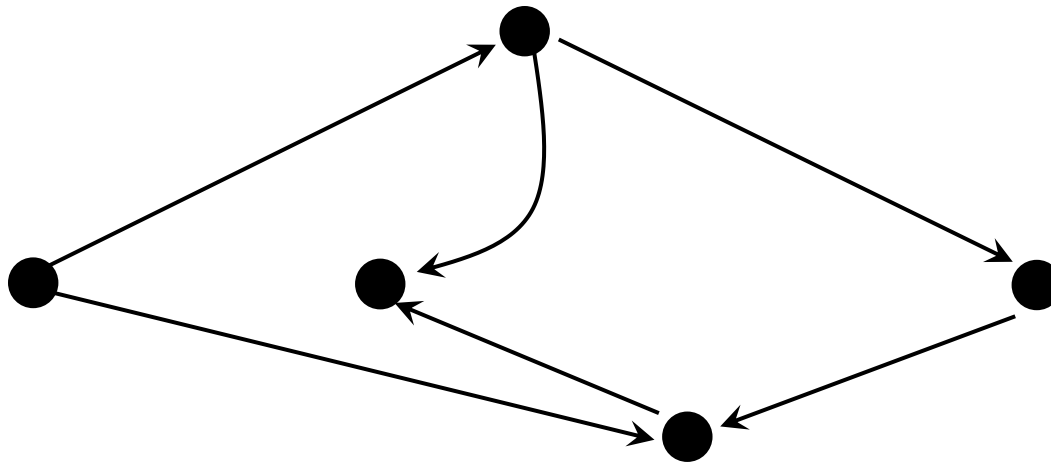
Conceitos Básicos

- Grafo Direcionado G é um par (V, E) , onde V é um conjunto finito e E é uma relação binária em V .
- Grafo direcionado também é conhecido como Dígrafo.



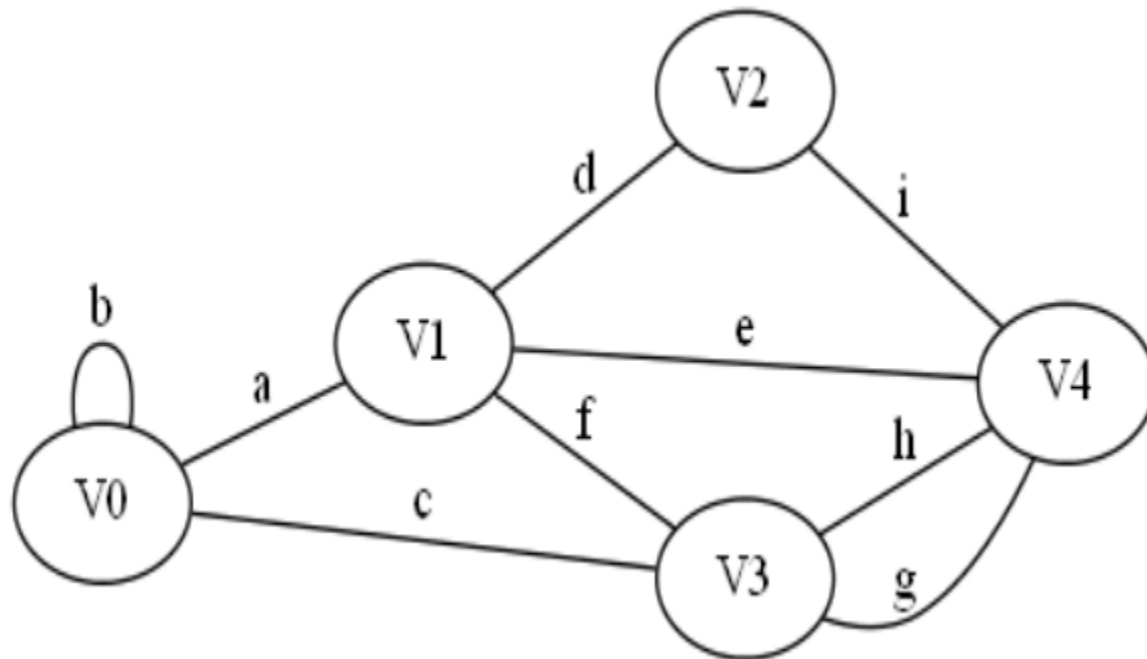
Terminologia

- Fonte: é um vértice com grau de entrada zero
- Sumidouro: Também conhecido como poço, é um vértice com grau de saída nulo



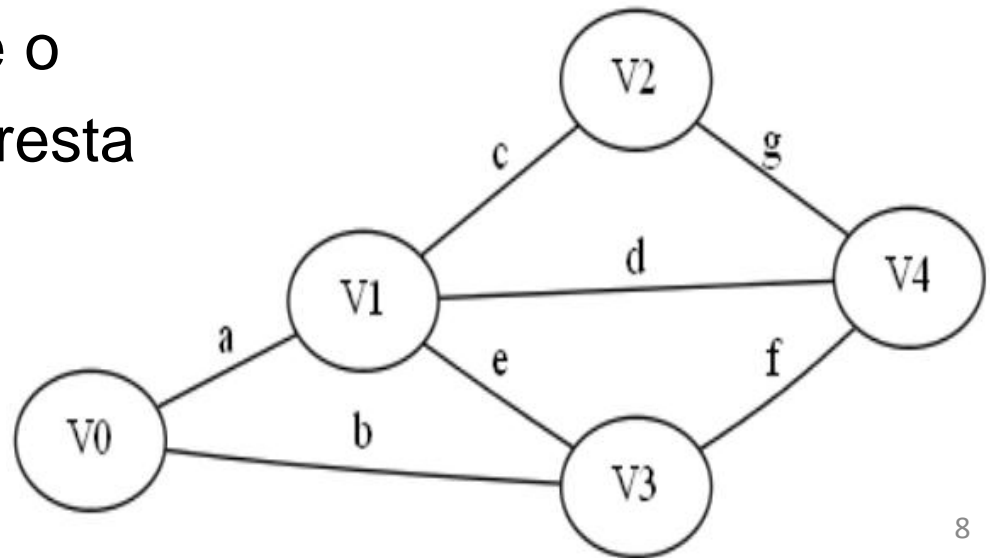
Terminologia

- Loop: uma aresta associada ao par de vértices (v_i, v_i)
- Arestas paralelas: quando mais de uma aresta está associada ao mesmo par de vértices



Terminologia

- Grafo simples: um grafo que não possui *loops* e nem arestas paralelas
- Vértices adjacentes: Dois vértices são ditos adjacentes se eles são pontos finais de uma mesma aresta
- Arestas adjacentes: Duas arestas não paralelas são adjacentes se elas são incidentes a um vértice comum
- Quando um vértice v_i é o vértice final de alguma aresta e_j , v_i e e_j são incidentes



Terminologia

- O número de arestas incidentes a um vértice v_i é chamado de grau, $d(v_i)$, do vértice i .
- A soma dos graus de todos os vértices de um grafo G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2e$$

TEOREMA: O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{d(v_j) \text{ par}} d(v_j) + \sum_{d(v_k) \text{ ímpar}} d(v_k)$$

Terminologia

- Qual o grau do grafo abaixo?

$$d(V0) = 2$$

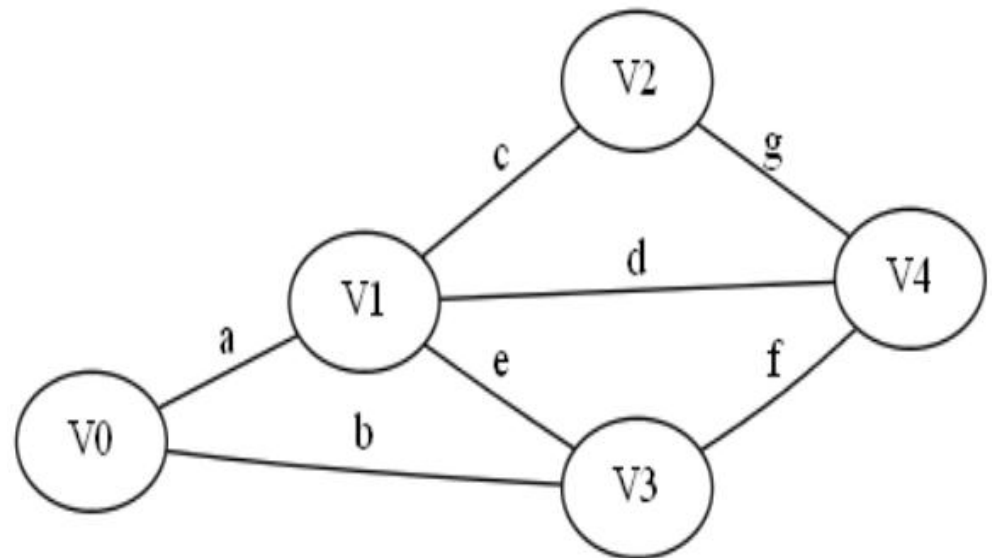
$$d(V1) = 4$$

$$d(V2) = 2$$

$$d(V3) = 3$$

$$d(V4) = 3$$

$$e: 7$$

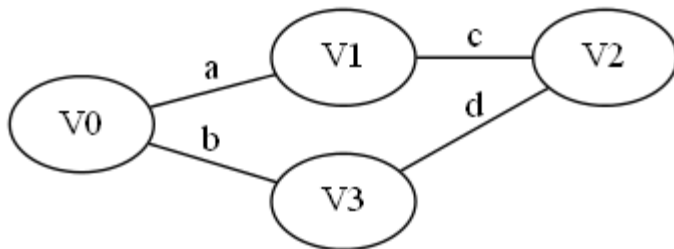


$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2e = 14$$

Terminologia

- Grafo regular: É um grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau
- Vértice isolado: É um vértice com nenhuma aresta incidente
- Vértice pendente: É um vértice com grau 1
- Grafo nulo: É um grafo sem nenhuma aresta. Todos os vértices em um grafo nulo são vértices isolados.

Terminologia



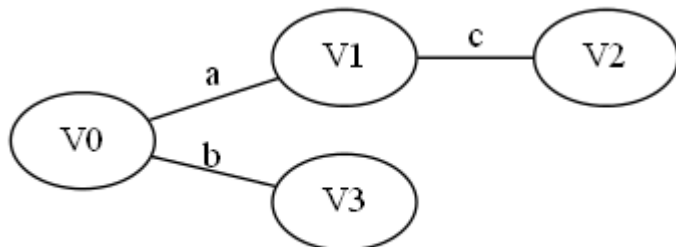
Grafo Regular



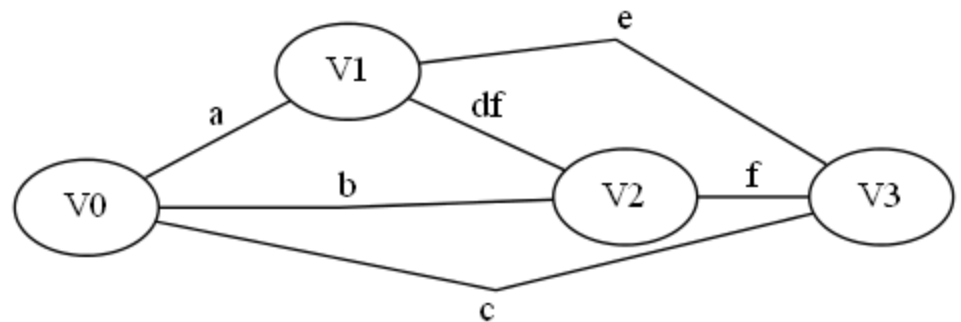
Vértice Isolado



Grafo Nulo



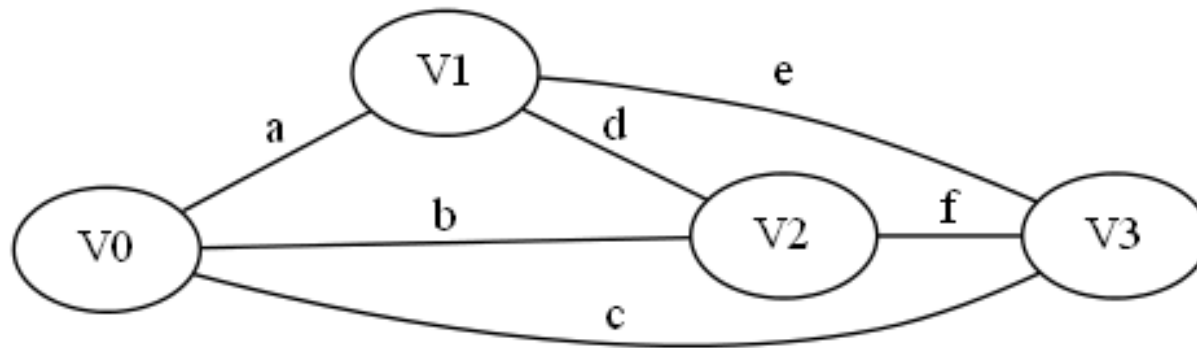
Vértice Pendente



Grafo Completo

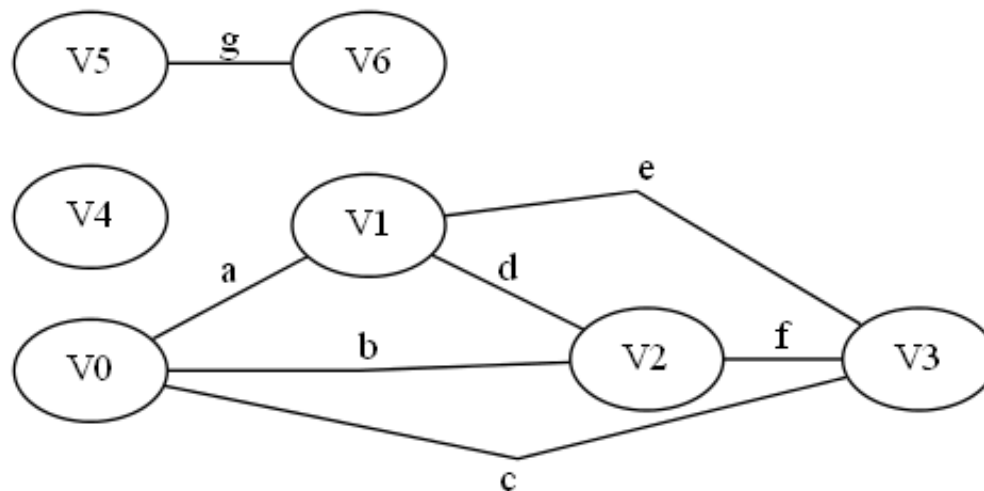
Terminologia

- Grafo completo:
 - Um grafo $G=(V,E)$ é completo se, para cada par de vértices v_i e v_j existe uma aresta entre v_i e v_j . Em um grafo completo quaisquer dois vértices distintos são adjacentes (K_n)



Terminologia

- Grafo conexo: existe pelo menos um caminho entre todos os pares de vértices de G
- Um grafo desconexo consiste de 2 ou mais grafos conexos. Cada um dos subgrafos conexos é chamado de componente.



Grafo Desconexo com tres componentes

Exercícios

1 - Construir uma representação geométrica do grafo

$G = (V, E)$, onde:

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$

Exercícios

2 - Os amigos João, Pedro, Antônio, Marcelo e Francisco sempre se encontram para botar conversa fora e às vezes jogar dama, xadrez e dominó.

As preferências de cada um são as seguintes: João só joga xadrez; Pedro não joga dominó; Antônio joga tudo; Marcelo não joga xadrez e dominó e Francisco não joga nada.

Exercícios

- a) Represente através de um grafo $G=(V,E)$ todas as possibilidades de um amigo jogar com os demais. Defina V e E .*
- b) Defina um subgrafo em que todos, menos Francisco, joguem ao mesmo tempo.*

Exercícios

3 - Construa representações geométricas de grafos regulares de grau r ($r = 1, 2, 3$ e 4).

Mapa grande Belo Horizonte



Grafo de Grande Belo Horizonte

- Quantos vértices tem o grafo?
- Quantas arestas?
- Qual o grau de cada vértice?
- Qual o grau do grafo?

Atividades

1. O grafo dos estados do Brasil é definido assim: cada vértice é um dos estados da República Federativa do Brasil; dois estados são adjacentes se têm uma fronteira comum.
 - a. Crie o grafo dos estados do Brasil.

