Sistemas de Equações Lineares

Disciplina: Cálculo Numérico

Prof^{a}: Dayanne

dayanne.coelho@prof.unibh.br

Centro Universitário de Belo Horizonte

Introdução

Um sistemas de equações algébricas lineares consiste em um conjunto de m equações polinomiais com n variáveis x_i de grau 1.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1}$$

Que pode ser representado em forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

ou simplesmente

$$Ax = b$$

onde:

- A é chamada de matriz dos coeficientes;
- x é o vetor solução;
- b é o vetor dos termos independentes.

uni-bh Centro Universitário de Belo Horizonte

O sistema linear também pode ser representado utilizando a forma indicial

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Centro Universitário de Belo Horizonte

O sistema linear também pode ser representado utilizando a forma indicial

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Matriz Aumentada ou matriz completa do sistema $C = [A|b]$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Solução do Sistema

A solução do sistema linear é dada por:

$$\overline{x} = [\overline{x_1} \quad \overline{x_2} \quad \cdots \quad \overline{x_n}]^t$$

Se A for uma matriz quadrada (nxn) não singular, então a solução do sistema é dada por:

$$Ax = b$$

$$A^{-1}A = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Classificação de um Sistema Linear

Um sistema linear pode ser classificado sob vários critérios, como, por exemplo, o número de soluções.

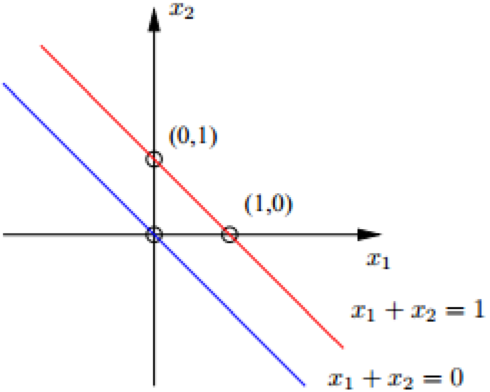
- Compatível
  - determinado
  - indeterminado
- Incompatível

OBS:

Um sistema linear homogêneo é sempre compatível. Será determinado se tiver apenas a solução trivial e será indeterminado se tiver infinitas soluções.

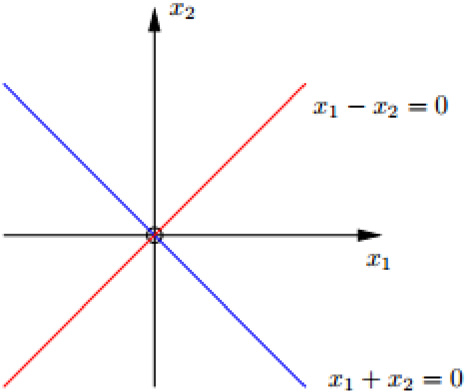
Exemplo de um sistema incompatível:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$



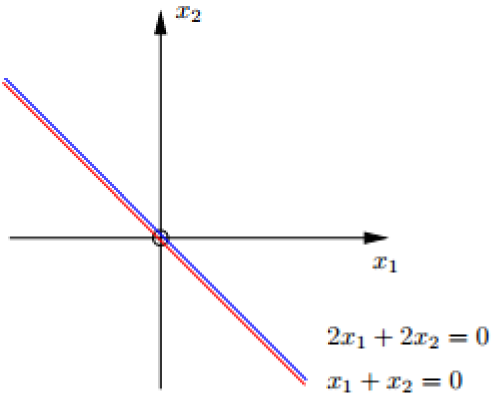
Exemplo de um sistema compatível determinado:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$



Exemplo de um sistema compatível indeterminado:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$



Centro Universitário de Belo Horizonte

Métodos de Resolução do Sistema Linear

Métodos Diretos

Os métodos diretos são métodos que determinam a solução de um sistema linear com um número finito de operações.

- Sistema triangular;
- Eliminação de Gauss;
- Decomposição LU.

Métodos Iterativos

Os métodos iterativos consistem em encontrar uma sequência $x_i^{(1)}$; $x_i^{(2)}$; ...; $x_i^{(k)}$, de aproximações de $\overline{x}$, sendo dada uma aproximação inicial $x_i^{(0)}$.

- Método de Jacobi;
- Método de Gauss-Seidel.

Sistemas Triangulares

Os sistemas triangulares podem ser:

- **superior:** quando os coeficientes nulos estão abaixo da diagonal principal.
- **inferior:** quando os coeficientes nulos estão acima da diagonal principal.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Sistema Triangular Superior

$$\begin{cases} a_{11} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad\qquad\quad = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Sistema Triangular Inferior

Os sistemas triangulares são resolvidos utilizando substituição retroativa ou progressiva.

Substituição Progressiva

Um sistema triangular inferior de ordem *n* apresenta a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

as substituições sucessivas podem ser representadas por:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right)$$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Substituição Progressiva

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 & = & 6 \\ 3x_1 + 4x_2 & = & -3 \\ x_1 - 2_{x2} + 5x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Algoritmo Substituição Progressiva

Algoritmo: Substituição Progressiva

Entrada: n, A (matriz triangular inferior) , b;
Saída: x;
Início
    $x_1 = b_1 / a_{11}$
    para **i=2** até **n** faça
        soma = b_i
        para **j=1** até **i-1** faça
            soma = soma - $a_{ij} x_j$
        fim-para
        x_i = soma / a_{ii}
    fim- para
fim

Substituição Retroativa

Um sistema triangular superior de ordem n apresenta a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

as substituições sucessivas podem ser representadas por:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

Substituição Retroativa

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ & & x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Algoritmo Substituição Retroativa

```
Algoritmo: Substituição Retroativa

Entrada: n, A (matriz triangular superior), b;
Saída: x;
Início
      x_n = b_n /a_nn
      para i=(n-1)  até 1    faça
              soma = b_i
          para j=i+1 até n  faça
                 soma = soma -  a_ij x_j
              fim-para
          x_i = soma /a_ii
      fim- para
fim
```

Operações Elementares

Denomina-se operações elementares as seguintes operações sobre as equações de um sistema linear:

1. trocar a ordem de duas equações do sistema.
2. multiplicar uma equação do sistema por uma constante não-nula.
3. Adicionar a uma equação do sistema um múltiplo de outra equação.

OBS: O sistema obtido através de operações elementares é equivalente ao sistema inicial, ou seja, tem as mesmas soluções ou são incompatíveis.

Método de Eliminação de Gauss

Este método consiste em aplicar ao sistema linear $Ax = b$ operações elementares, transformando-o em um sistema triangular superior equivalente $Ux = c$, o qual é resolvido facilmente por substituição retroativa.
Considere um sistema linear $Ax = b$ genérico, cuja a forma de matriz aumentada é dada por:

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] & \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \\ l_m \end{array} \end{array}$$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Método de Eliminação de Gauss

1ª etapa: eliminação da primeira coluna

- Suponha que $a_{11} \neq 0$.
- Escolhe-se o elemento a_{11} como pivô e calcula os multiplicadores das demais linhas: $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$
- Para eliminar a incógnita x_1 nas $n - 1$ equações, é necessário fazer a seguinte operação elementar: subtrai de cada linha a primeira linha multiplicada por m_{i1}

2ª etapa: eliminação da segunda coluna

- Escolhe o elemento $a_{22} \neq 0$ como pivô.
- Calcula os multiplicadores das demais linhas ($i > 2$) $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$
- Realiza operações elementares para eliminar a incógnita x_2 nas linhas onde $i > 2$

Método de Eliminação de Gauss

Este raciocínio é repetido, até que $i = n$ e a matriz resultante seja:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{mn} & b_n \end{array}\right] \quad (5)$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases} \quad (6)$$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Método de Eliminação de Gauss

Observações:

- Se no processo de eliminação um dos pivôs se anular, devemos fazer uma troca de linhas. (Escolher linhas abaixo da diagonal para não perder a eliminação anterior).
- Caso a troca de linhas não seja possível (de forma a obter $a_{ii} \neq 0$) conclui-se que o sistema é incompatível ou compatível indeterminado.

Método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento

Estratégia de Pivoteamento Parcial

Esta estratégia consiste na troca sistemática das linhas, de modo que o pivô seja o maior elemento, em valor absoluto, da coluna que estamos eliminando. Assim:

1. No início da etapa k da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes a_{rk}, ou seja: $|a_{rk}| = max_{i \leq k \leq n}|a_{ik}|$
2. Trocar as linhas k e r se for necessário.

OBS: Este procedimento minimiza a amplificação de erros durante as eliminações.

Método de Decomposição LU

- Este método consiste em transformar a matriz dos coeficientes A em um produto entre duas matrizes triangulares, uma inferior (L) e outra superior (U), ou seja $A = LU$.
- em seguida é feita duas substituições (uma progressiva e outra retroativa) para encontrar o vetor solução do sistema.
- Seja o sistema $Ax = b$, fazendo $A = LU$, temos que $LUX = b$
- Tomando $Ux = y$, temos que $Ly = b$.
- O sistema $Ly = b$ pode ser resolvido por substituição progressiva.
- O sistema $Ux = y$ pode ser resolvido por susbtituição retroativa.

Centro Universitário de Belo Horizonte

Método de Decomposição LU

- As matrizes L e U podem ser encontradas usando o método de eliminação de Gauss.
- U é a matriz triangular superior e L é uma matriz triangular inferior.
- A matriz L é formada pelos multiplicadores m_{ij}, ou seja,
$$L_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, & \text{para } j = 1, \cdots, n-1 \text{ e } i = j+1, \cdots, n \\ 1, & \text{para } i = j \end{cases}$$

Método de Decomposição LU

Exemplos:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z & = 2 \\ 4x + 9y - 3z & = -8 \\ -2x - 3y + 7z & 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z & = 1 \\ x + y + 2z & = 2 \\ 4x + 3y + 2z & 3 \end{cases}$$

Centro Universitário de Belo Horizonte

Mecanismo para usar o método de Gauss

Exemplo: $\begin{cases} 2x + 3y - z & = 5 \\ 4x + 4y - 3z & = 3 \\ 2x - 3y + z & -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicador	Coeficiente das incógnitas	Termos independentes	Transformações
(1) (2) (3)				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Centro Universitário de Belo Horizonte