Computação Gráfica

Transformações Geométricas em 2D

Moisés Henrique Ramos Pereira

Introdução

- Cenas podem ser descritas a partir de primitivas gráficas
  - segmentos de reta, áreas preenchidas.
- Transformações geométricas são transformações aplicadas às descrições geométricas de um objeto com o objetivo de alterar sua
  - posição
  - orientação
  - ou tamanho

Introdução

- Uso
  - rotinas de visualização que convertem um descrição de cena das coordenadas do mundo em coordenadas da tela para o display da cena.
  - CAD e animação
    - layout arquitetônico de uma cena é criado pela alteração de tamanho e posicionamento de componentes do projeto.
    - sequências de animação são criadas através da movimentação de “câmeras” virtuais ao longo de um caminho específico.

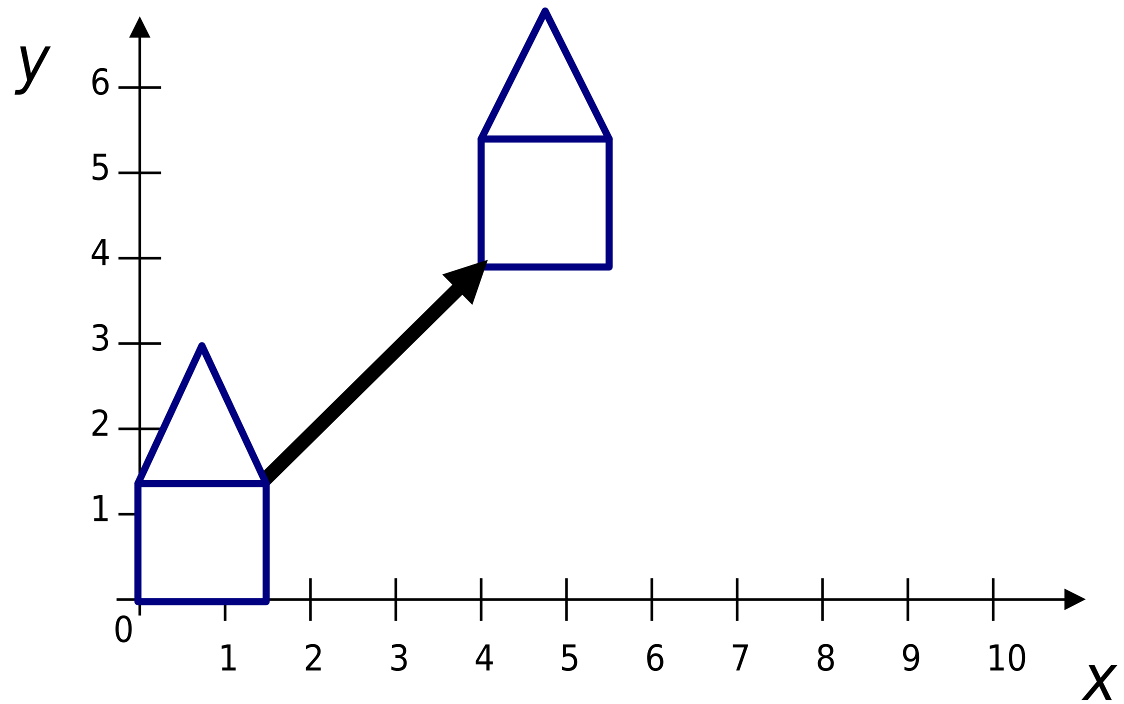
Transformações Geométricas 2D

- Com o objetivo de conceitos associados às transformações geométricas, inicialmente serão abordadas operações em duas dimensões.
  - translação
  - rotação
  - escala
  - espelhamento / reflexão
  - cisalhamento (shear)

Translação (1/3)

- A transformação de translação move um objeto de uma posição para outra.

$$x' = x + t_x, \qquad y' = y + t_y$$



Nota: A casa translada relativo à origem

Translação (2/3)

- É possível expressar a translação como uma única operação matricial utilizando os vetores colunas abaixo para representar o vetor posição e o vetor translação.

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \qquad T \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

  - resultando em

$$P' = T + P$$

Translação (3/3)

- Translação é uma transformação de corpo rígido:
  - uma operação que move um objeto sem deformá-lo.
  - cada ponto do objeto é transladado pela mesma quantidade.

Rotação (1/3)

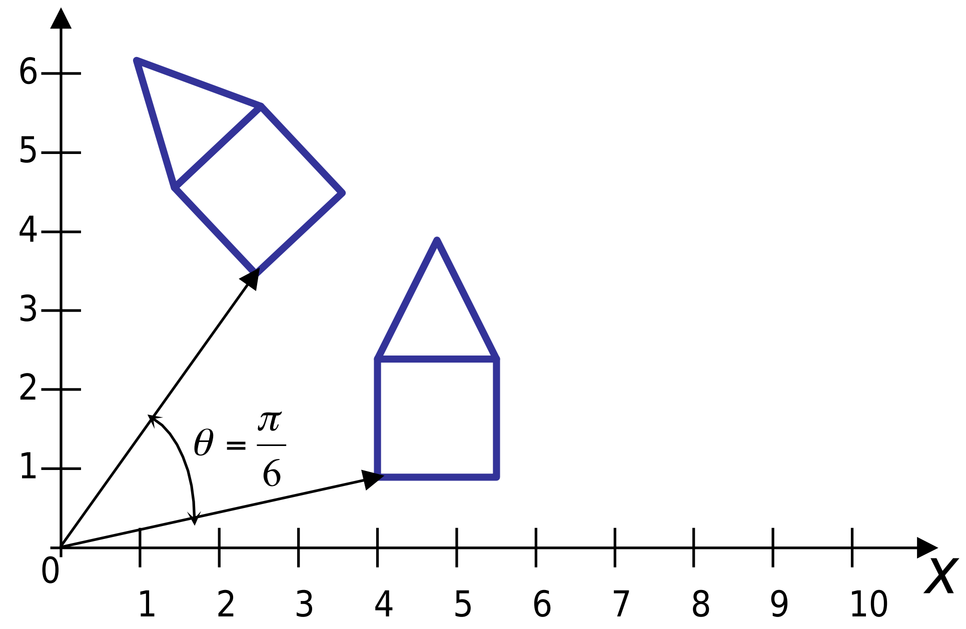
- A rotação de um objeto é especificada por um ângulo de rotação e um eixo de rotação.
  - todos os pontos do objeto são transformados para novas posições por meio da rotação dos pontos em um ângulo especificado ao redor do ângulo de rotação.
- Parâmetros em uma rotação 2D são o ângulo de rotação Θ e uma posição (x, y) denominada pivô (*pivot point*).
  - Θ positivo - rotação anti-horária
  - Θ negativo - rotação horária

Rotação (2/3)

- Equações para a rotação de um ponto (x, y) através de um ângulo Θ com relação à origem:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$



Rotação (3/3)

- Utilizando as mesmas representações matriciais para translação temos

$$P' = R \,.\, P$$

  - onde a matriz de rotação é dada por

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Escala (1/3)

- A transformação de escala altera o tamanho do objeto
  - uma transformação de escala simples é realizada pela multiplicação das posições (*x*, *y*) de um objeto por fatores escalares s_x, s_y

$$x' = x \cdot s_x, \qquad y' = y \cdot s_y$$

- Se $s_x = s_y$ temos um transformação de escala uniforme. Valores desiguais resultam em uma transformação de escala diferencial.

Escala (2/3)

- Em termos de representação matricial temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

  - ou

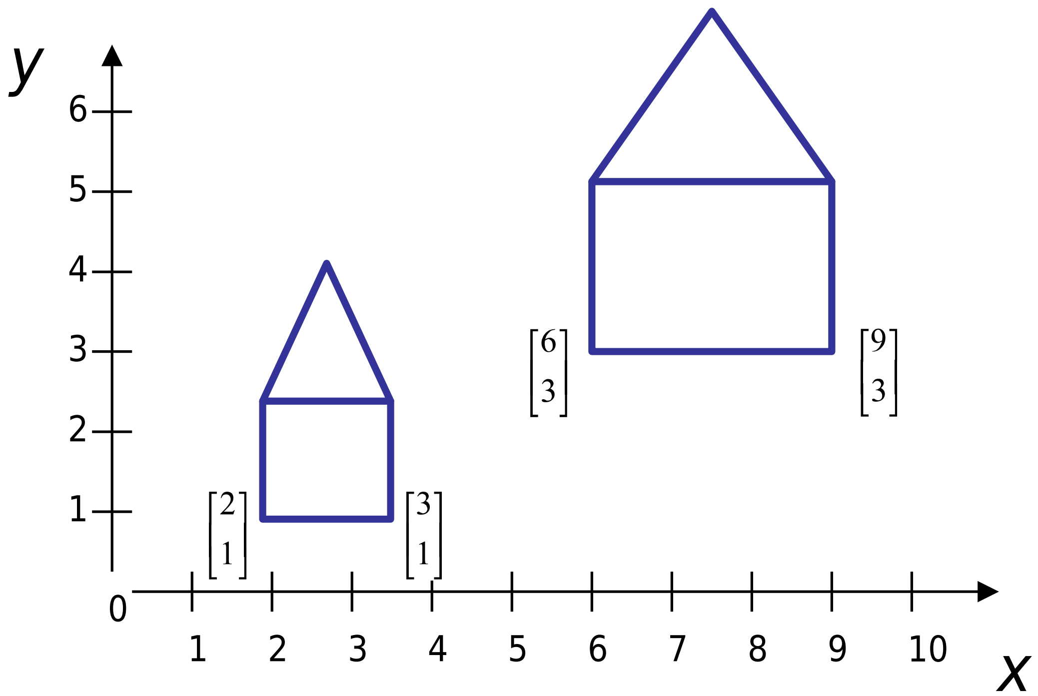
$$P' = S \cdot P$$

  - onde S é a matriz de escala 2x2

Escala (3/3)

- A transformação de escala, não apenas altera o tamanho de objetos, mas também os move.

  - fatores escalares menores que 1 movem os objetos mais próximos à origem; fatores maiores que 1 movem os objetos mais afastados da origem

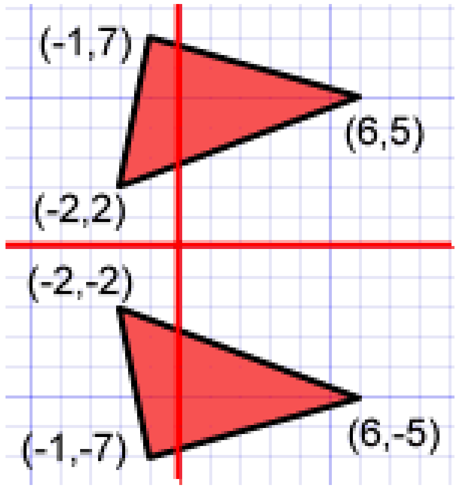


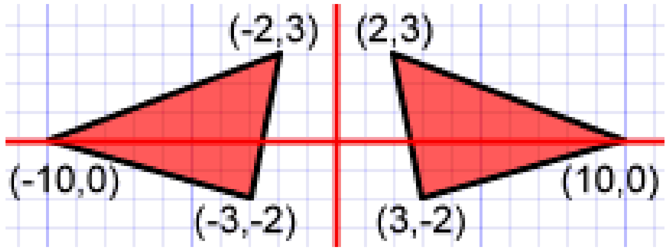
Nota: Casa altera sua posição relativo à origem

Espelhamento (1/4)

- A transformação de espelhamento tem como resultado resultado uma imagem espelhada do objeto, ou seja, o seu reflexo.

  - para uma reflexão bidimensional, a imagem é gerada relativa a um eixo de reflexão rotacionando o objeto em 180º sobre o eixo de rotação.





Espelhamento (2/4)

- Equações de espelhamento em torno do eixo *x*

$$x' = x$$

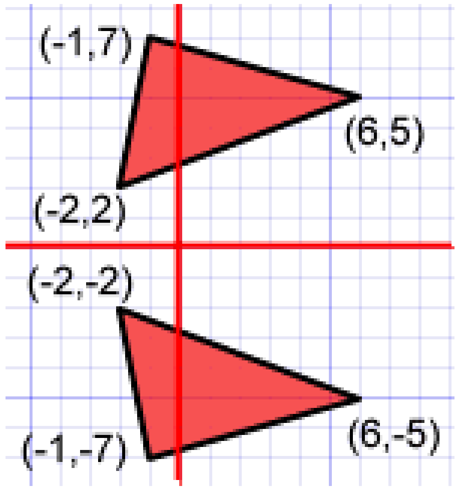
$$y' = -y$$

- Utilizando representação matricial para o espelhamento em x, temos

$$P' = \mathrm{Ref}_x \,.\, P$$

  - onde a matriz de reflexão ou espelhamento é dada por

$$\mathrm{Ref}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Espelhamento (3/4)

- Equações de espelhamento em torno do eixo *y*;

$$x' = -x$$

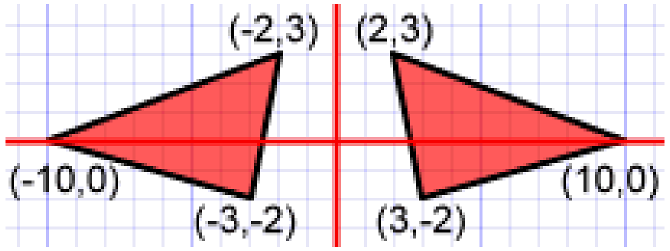
$$y' = y$$

- Utilizando representação matricial para o espelhamento em *y*, temos

$$P' = \mathrm{Ref}_y \,.\, P$$

  - onde a matriz de reflexão ou espelhamento é dada por

$$\mathrm{Ref}_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Espelhamento (4/4)

- Equações de espelhamento em torno do eixo *x* e *y*;

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

- Utilizando representação matricial para o espelhamento em *x* e *y*, temos

$$P' = \mathrm{Ref}_{xy} \,.\, P$$

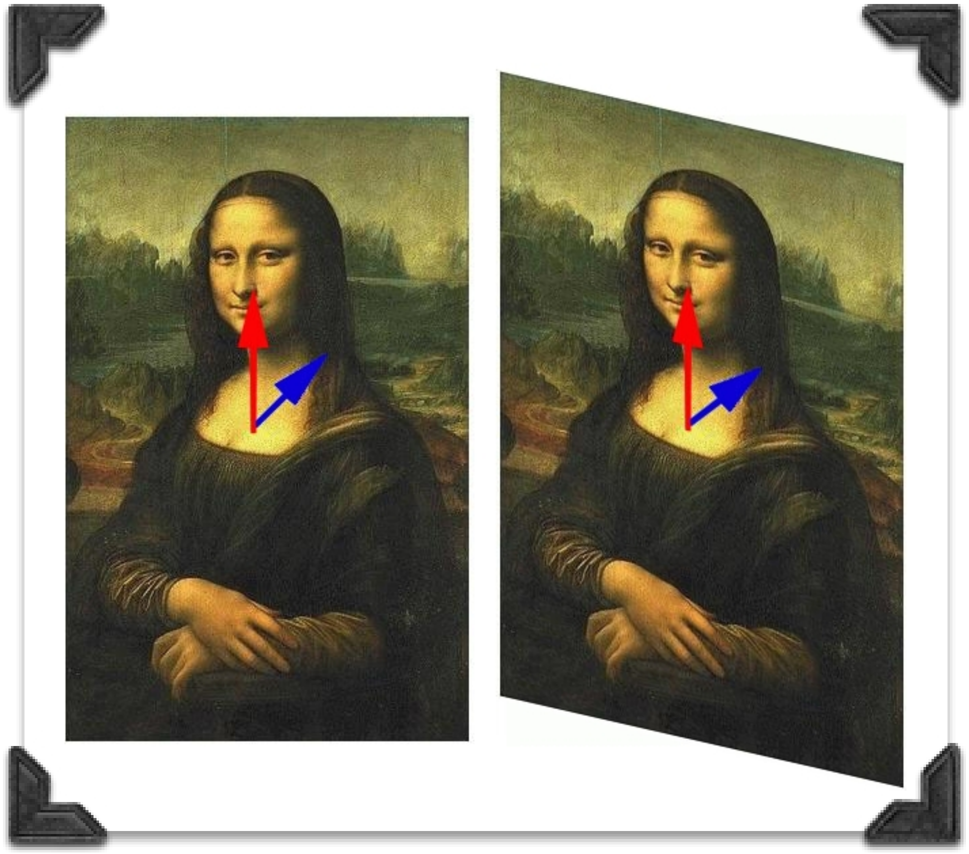
  - onde a matriz de reflexão ou espelhamento é dada por

$$\mathrm{Ref}_{xy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento (1/3)

- A transformação de cisalhamento distorce a forma do objeto de tal forma que o objeto transformado aparenta ser composto por camadas internas que teriam deslizado uma sobre as outras;

- Dois tipos de transformações de cisalhamento são mais comuns:
  - aquelas que deslocam coordenadas no eixo x
  - aquelas que deslocam coordenadas no eixo y



Cisalhamento (2/3)

- O cisalhamento relativo ao eixo x é dado pelas seguintes equações

$$x' = x \, . \, sh_x + y,$$
$$y' = y$$

- Utilizando representação matricial para o cisalhamento em x, temos

$$P = Sh_x \, . \, P$$

  - onde a matriz de cisalhamento é dada por

$$Sh_x = \begin{bmatrix} 1 & sh_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento (3/3)

- O cisalhamento relativo ao eixo y é dado pelas seguintes equações

$$x' = x,$$

$$y' = x \,.\, sh_y + y$$

- Utilizando representação matricial para o cisalhamento em y, temos

$$P' = Sh_y \,.\, P$$

  - onde a matriz de cisalhamento é dada por

$$Sh_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sh_y & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Muitas aplicações gráficas envolvem transformações geométricas em sequência.
  - animações necessitam que um objeto seja transladado e rotacionado a cada incremento de movimento.
  - em aplicações de *design* gráfico e construção de figuras, translações, rotação e escala são utilizadas para ajustar os elementos da figura em suas devidas posições.

Coordenadas Homogêneas

- Um ponto (x, y) pode ser rescrito em coordenadas homogêneas como (x_h, y_h, h) onde o parâmetro homogêneo h é um valor diferente de zero tal que

$$x = \frac{x_h}{h} \qquad y = \frac{y_h}{h}$$

  - um ponto pode ser escrito ainda, da seguinte forma, $(x \cdot h, y \cdot h, h)$

  - uma escolha conveniente é simplesmente ajustar h = 1. Cada posição *(x,y)* é então representada em coordenadas homogêneas *(x, y, 1).*

Porque usar coordenadas homogêneas?

- O uso de coordenadas homogêneas nos permite representar todas as equações de transformações geométricas como multiplicações de matrizes.

  - o método tradicional utilizado em sistemas gráficos.

  - maior eficiência!!!!

- Todas as transformações apresentadas até o momento podem ser representadas como matrizes 3x3.

Matriz de Translação 2D

- Utilizando coordenadas homogêneas, a transformação de translação é representada pela seguinte multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - sendo abreviada por

$$P' = T(t_x, t_y)\,.\,P$$

Matriz de Rotação 2D

- Utilizando coordenadas homogêneas, a transformação de rotação é representada pela seguinte multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - sendo abreviada por

$$P' = R(\theta) \,.\, P$$

Matriz de Escala 2D

- Utilizando coordenadas homogêneas, a transformação de escala é representada pela seguinte multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - sendo abreviada por

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

Matriz de Espelhamento 2D

- Utilizando coordenadas homogêneas, as transformação de espelhamento são representadas pela seguintes multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - sendo abreviadas, respectivamente, por

$$P' = \mathrm{Ref}_x \,.\, P \qquad P' = \mathrm{Ref}_y \,.\, P \qquad P' = \mathrm{Ref}_{xy} \,.\, P$$

€ € €

Matriz de Cisalhamento 2D

- Utilizando coordenadas homogêneas, as transformação de cisalhamento são representadas pela seguintes multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - sendo abreviadas, respectivamente, por

€ €

$$P' = Sh_x \, . \, P \qquad P' = Sh_y \, . \, P$$

€ €

Transformações Inversas

- Transformações representadas em coordenadas homogêneas são facilmente reversíveis utilizando transformações inversas

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

- Uma sequência de transformações podem ser combinadas em uma única matriz facilitando as operações.

  - ajuda pelo fato de utilizarmos coordenadas homogêneas.

- Exemplo, rotacionar um polígono ao redor de um pivô que não seja a origem:

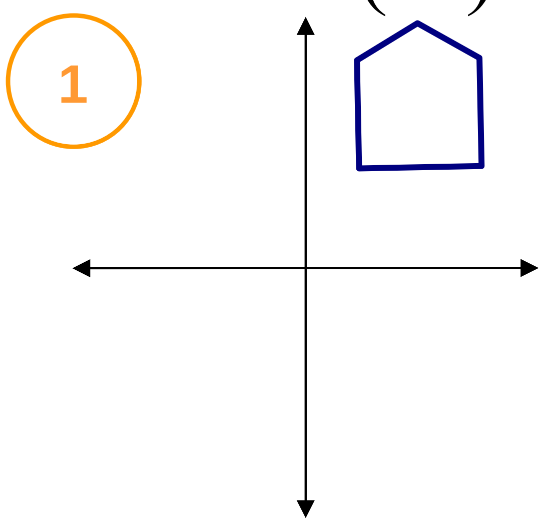
  1. transladar o pivô para para a origem

  2. aplicar a rotação ao redor da origem.

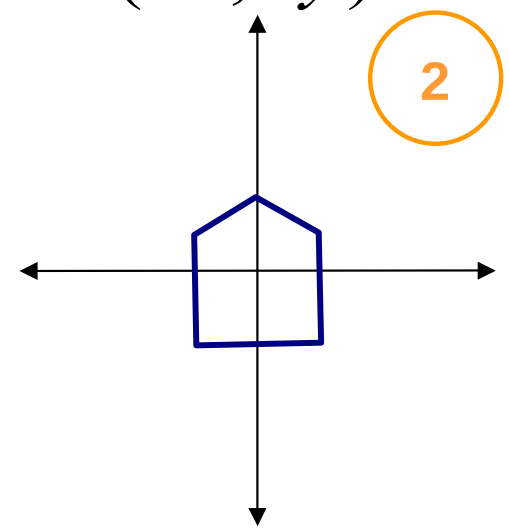
  3. transladar de volta ao ponto original.

Composição de Transformações

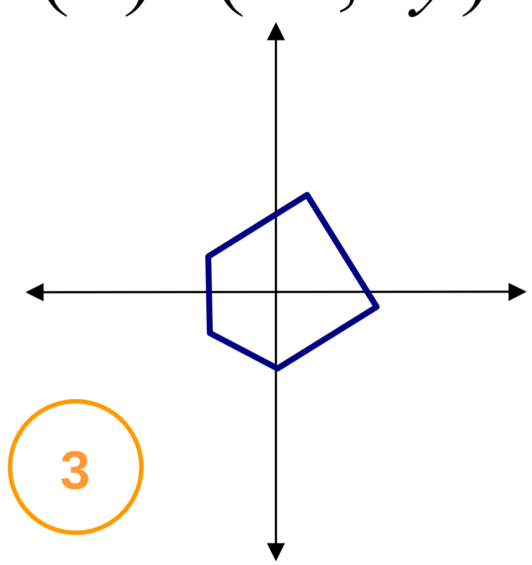
$House\,(H)$



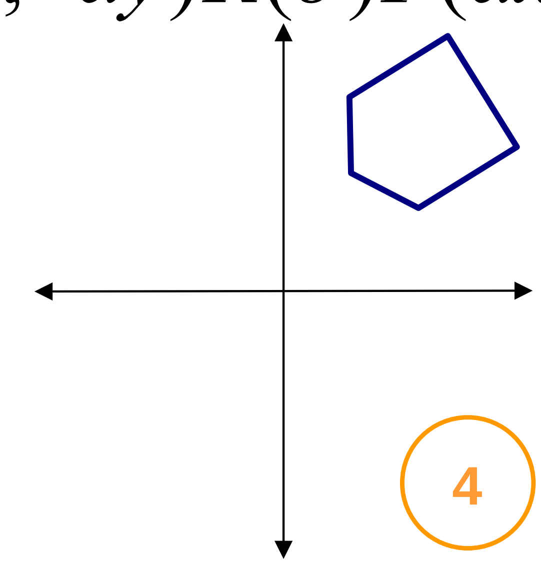
$T(dx, dy)H$



$R(\theta)T(dx, dy)H$



$T(-dx, -dy)R(\theta)T(dx, dy)H$



Composição de Transformações

- As três matrizes de transformação são combinadas como a seguir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v' = T(-dx,-dy)R(\theta)T(dx,dy)v$$

Lembre-se que a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, a ordem importa!