

3ª Lista de Cálculo de Várias Variáveis (gradiente – plano tangente – reta normal)

1 – Determine o gradiente de f em cada ponto P_o indicado:

a) $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y$ em $P_o(1, 2)$ b) $f(x, y) = y \ln x$ em $P_o(1, -3)$ c) $f(x, y, z) = xe^{2xyz}$ com $P_o(3, 0, 2)$

d) $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$ com $P_o(1, 3, 1)$

2 – Determinar as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto indicado:

a) $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10$ em $P_o(3, 3, 5)$ b) $y = x^2 - z^2$ em $P_o(4, 7, 3)$

c) $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$ em $P_o(2, 1, -1)$ d) $x - y = 4 \arctg(yz)$ em $P_o(1 + \pi, 1, 1)$

e) $z + 1 = xe^y \cos z$ em $P_o(1, 0, 0)$ f) $yz = \ln(x + z)$ em $P_o(0, 0, 1)$

3 – Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ em $P_o(x_o, y_o, z_o)$ pode ser escrita na forma $\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} + \frac{zz_o}{c^2} = 1$.

4 – Determine a equação do plano tangente ao hiperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ em $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e expresse-a na forma do exercício anterior.

5 – Mostre que a equação do plano tangente ao paraboloides elíptico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ no ponto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ pode ser escrita na forma $\frac{2xx_o}{a^2} + \frac{2yy_o}{b^2} = \frac{z - z_o}{c}$.

6 – Em qual ponto do paraboloides $y = x^2 + z^2$ o plano tangente é paralelo ao plano $x + 2y + 3z = 1$.

7 – Existem pontos no hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $z = x + y$?

8 – Mostre que o elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $P(1, 1, 2)$. (Isso significa que eles têm um plano tangente comum nesse ponto.)

9 – Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

10 – Mostre que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.