**Primeira Lista de Exercícios** — **Entrega: 10/10/2012**

1. Faça definições recursivas das seguintes linguagens, considerando a *concatenação* como a operação básica no passo recursivo:[1]

   **a)** $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+$.
   **b)** $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$.
   **c)** $\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\{\mathtt{0}\}$.
   **d)** $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^{3n} \mid n \in \mathbf{N}\}$.
   **e)** $\{ww^R \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\}$.
   **f)** $\{x_1 + \cdots + x_n \mid n \geq 1 \text{ e } x_i \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+ \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$. *Dica*: Faça duas definições recursivas separadas, a primeira definindo o que pode ser cada $x_i$.

2. Responda:

   (a) Em que situações $L^*$ e $L^+$ são finitas?
   (b) Seja $\Sigma$ um alfabeto. Explique que palavras pertencem a cada uma das linguagens:
      - $\Sigma^n$ para cada $n \geq 0$; que valor tem $|\Sigma^n|$?
      - $(\Sigma \cup \{\lambda\})^n$ para cada $n \geq 0$; que valor tem $|(\Sigma \cup \{\lambda\})^n|$?

   (c) Sejam $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $A = \{\mathtt{a}\}\Sigma^+$ e $B = \Sigma^*\{\mathtt{b}\}$. Apresente uma condição necessária e suficiente para que uma palavra de $\Sigma^*$ pertença a $AA$, $AB$, $BB$, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$.

3. Descreva as linguagens a seguir, todas sobre o alfabeto $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, usando apenas *expressões regulares* ou *conjuntos finitos*, além de operações de *união*, *interseção*, *complementação*, *concatenação* e *fecho de Kleene*. Procure obter uma descrição bem concisa.

   (a) O conjunto das palavras de prefixo `01`.
   (b) O conjunto das palavras que não contêm `01` como sufixo.
   (c) O subconjunto das palavras de $\{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{1}\}^*$ com número par de `0`s.
   (d) O conjunto das palavras com no máximo vinte símbolos.
   (e) O conjunto das palavras que contêm pelo menos um `0` e um `1`.
   (f) O conjunto das palavras em que todo `0` é seguido de pelo menos dois símbolos.
   (g) O conjunto das palavras que contêm pelo menos um `00`, mas nenhum `11`.

4. Identifique as linguagens que são geradas pelas gramáticas a seguir:

   (a) $G_1 = (\{P, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R_1, P)$.
   $R_1$: $P \rightarrow \mathtt{a}P \mid X\mathtt{b} \mid \lambda$
   $X \rightarrow \mathtt{a}P$

   (b) $G_2 = (\{P, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R_2, P)$.
   $R_2$: $P \rightarrow \mathtt{aa}P \mid X\mathtt{b} \mid \lambda$
   $X \rightarrow \mathtt{a}P$

[1] Veja a Seção 1.7, pág. 28 do livro-texto físico e pág. 26 do livro-texto em PDF.

(c) $G_3 = (\{P, A\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_3, P)$.

$R_3$: $P \to \mathtt{a}P\mathtt{a} \mid A$

$A \to \mathtt{b}A\mathtt{b} \mid \lambda$

(d) $G_4 = (\{A, X\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_4, A)$.

$R_4$: $A \to XAX \mid X$

$X \to \mathtt{0}X\mathtt{0} \mid \mathtt{1}X\mathtt{1} \mid \mathtt{0} \mid \mathtt{1}$

(e) $G_5 = (\{X, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, R_5, X)$.

$R_5$: $X \to \mathtt{a}BX \mid \mathtt{abc}$

$B\mathtt{a} \to \mathtt{a}B$

$B\mathtt{b} \to \mathtt{b}B$

$B\mathtt{c} \to \mathtt{bcc}$

5. Obtenha gramáticas para as linguagens da questão 1.

6. Construa autômatos finitos determinísticos (AFDs) que reconheçam as linguagens da questão 3. Apresente apenas os diagramas de estados.

7. Construa AFDs que reconheçam as linguagens a seguir. Apresente apenas os diagramas de estados.

   (a) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid |w| \geq 2$ e o primeiro e o penúltimo símbolos de $w$ são $\mathtt{1}\}$.

   (b) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid$ o último símbolo de $w$ é diferente do primeiro$\}$.

   (c) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid$ os três últimos símbolos de $w$ não são $\mathtt{000}\}$.

   (d) $\{x\mathtt{1}\mathtt{0}^n \mid n \geq 0, x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ e $x$ tem número par de $\mathtt{0}$s$\}$.

8. Faça AFDs que reconheçam: $X = \{\mathtt{a}\}\{\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}$. e $Y = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{bb}\}$. Bastam apenas os diagramas de estados. Em seguida, obtenha o produto dos dois AFDs e explicite que estados finais ele deve ter para reconhecer:

   (a) $X \cap Y$.

   (b) $X \cup Y$.

   (c) $X - Y$.

9. Explique porque se um AFD $M$ reconhece uma palavra de tamanho maior ou igual ao número de estados de $M$, então $L(M)$ é infinita.

10. Construa AFNs para as seguintes linguagens, com o *menor número de estados* que conseguir:

    (a) O conjunto das palavras de $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ em que o último símbolo (se houver) seja idêntico ao primeiro (se houver). Note que $\lambda$, $\mathtt{a}$ e $\mathtt{b}$ são palavras da linguagem.

    (b) O conjunto das palavras de $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ em que o último símbolo tenha ocorrido antes. Cada palavra da linguagem tem no mínimo dois símbolos.

    (c) O conjunto das palavras de $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ em que o último símbolo (caso exista) tenha ocorrido antes no máximo uma vez.

    (d) $\{x\mathtt{1}y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid n_{\mathtt{1}}(x) \bmod 3 = 1$ e $n_{\mathtt{0}}(y) \bmod 3 = 1\}$ onde $n_s(w)$ é o número de ocorrências do símbolo $s$ na palavra $w$.

11. Sejam as linguagens:

   - $A = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \text{o número de } \mathtt{a}\text{s em } w \text{ é par}\}$
   - $B = \{w \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid \text{o número de } \mathtt{b}\text{s em } w \text{ é ímpar}\}$
   - $C = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{c}\}^* \mid \text{o número de } \mathtt{c}\text{s em } w \text{ é par}\}$

   Obtenha um AFN $M$ tal que $L(M) = ABC$ assim:

   (a) obtenha AFDs para $A$, $B$ e $C$;

   (b) obtenha um AFN$\lambda$ para $ABC$ a partir dos três AFDs;

   (c) converta o AFN$\lambda$ para um AFN equivalente usando o método visto em aula.

12. Prove que $\{x\#x^R \mid x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\}$ não é linguagem regular usando o lema do bombeamento.

13. Prove que os seguintes conjuntos não são linguagens regulares, usando propriedades de fecho:

   (a) $\{\mathtt{0}^m\mathtt{1}^n \mid m \neq n\}$.

   (b) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid \text{ o número de } \mathtt{0}\text{s em } w \text{ é par e o de } \mathtt{1}\text{s é primo}\}$.

14. Sejam as linguagens $L_1 = \{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+ \mid \eta(w) \bmod 3 = 0\}$, sendo $\eta(w)$ o número representado por $w$ na base dois, e $L_2 = \{\mathtt{1}\}^*(\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{1}\}^*\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{1}\}^*)^*$.

   (a) Prove que $L_1 - L_2$ é regular usando propriedades de fecho.

   (b) Construa um autômato finito para $L_1 - L_2$.

15. Encontre expressões regulares que denotem:

   (a) A linguagem $ABC$ da questão 11.

   (b) A linguagem $\{x\#x^R \mid x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\}$ da questão 12.