Teoria dos Grafos

Aula 4

Quantidade de grafos distintos com *n* vértices

Grafos valorados

Ciclo Euleriano

Ciclo Hamiltoniano

Material dos professores: Jaqueline Oliveira e Marcos Muniz

Quantidade de grafos distintos com *n* vértices

- O número total de grafos distintos com n vértices (|V|) é

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{(|V|^2-|V|)}{2}}$$

que representa a quantidade de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de

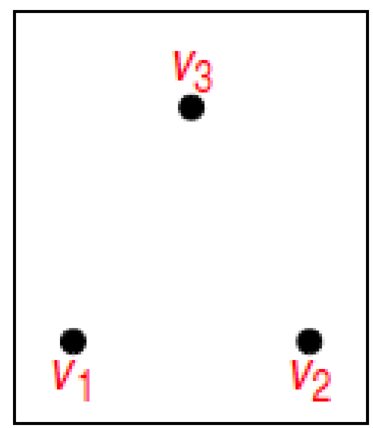
$$\frac{n^2-n}{2} = \frac{(|V|^2-|V|)}{2}$$

possíveis arestas de um grafo com n vértices.

Quantidade de grafos distintos com *n* vértices

- *Exemplo: Quantos grafos distintos com 3 vértices existem?*
  - Um grafo com 3 vértices *v1, v2* e *v3* possui no máximo 3 arestas, ou seja, *V = {v1v2, v1v3, v2v3}*.
  - O número de sub-conjuntos distintos de *V* é dado por *P(V)*, ou seja, o conjunto potência de *V* que vale $2^{|V|}$.
  - Cada elemento de P(V) deve ser mapeado num grafo com 3 vértices levando a um grafo distinto:

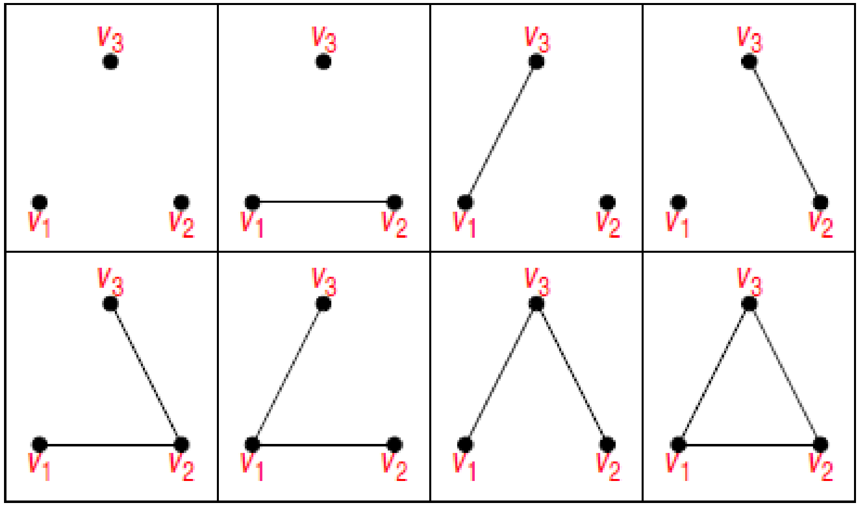
$$P(V) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \\ \{v_1v_2\}, \\ \{v_1v_3\}, \\ \{v_2v_3\}, \\ \{v_1v_2, v_2v_3\}, \\ \{v_1v_3, v_2v_3\}, \\ \{v_1v_2, v_1v_3\}, \\ \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\} \end{array} \right\}$$



Quantidade de grafos distintos com *n* vértices

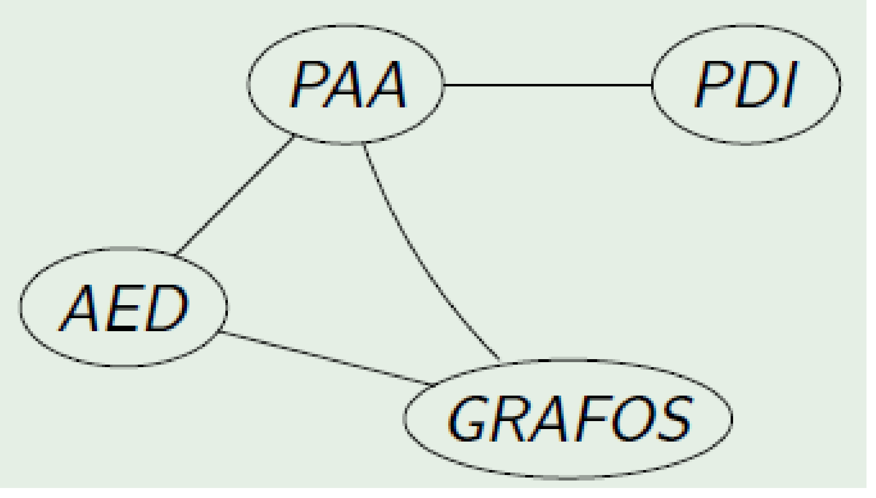
- *Exemplo: Quantos grafos distintos com 3 vértices existem?*
  - Para cada elemento (sub-conjunto) do conjunto potência de E temos um grafo distinto associado, ou seja, o número total de grafos com 3 vértices é:

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{3^2-3}{2}} = 2^3 = 8$$



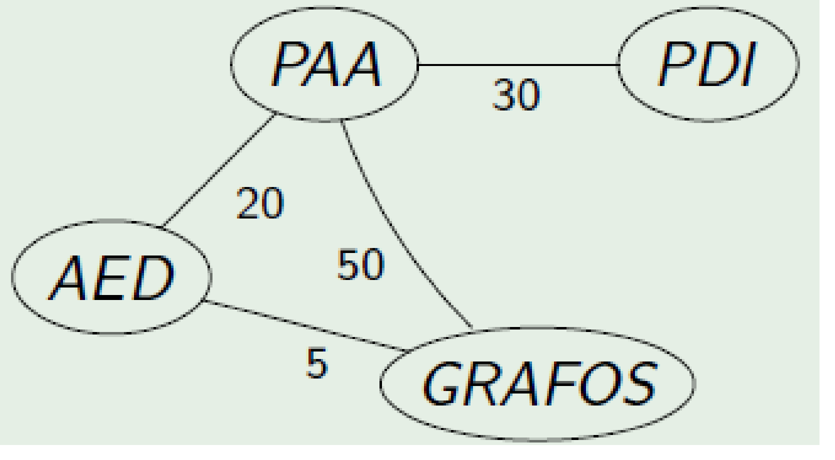
Grafos Rotulados

- Grafo rotulado
  - Um grafo *G(V,E)* é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo



Grafos Valorados

- Grafo valorado
  - Um grafo valorado é um grafo em que cada aresta tem um valor associado. Formalmente, um grafo valorado *G = (V,E)* consiste de um conjunto *V* de vértices, um conjunto *E* de arestas, e uma função *f* de *E* para *P*, onde *P* representa o conjunto de valores (pesos) associados às arestas.

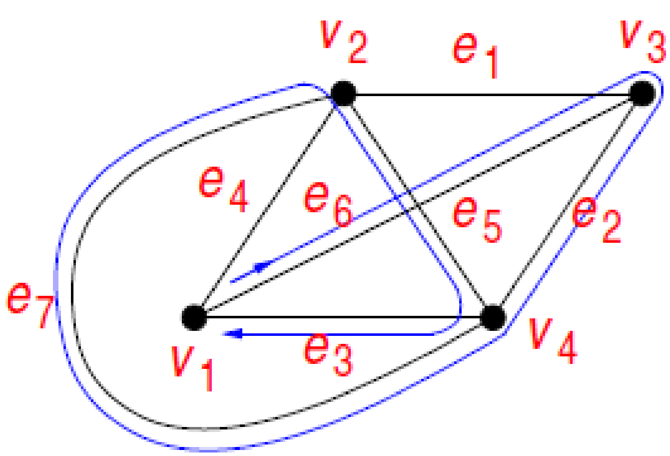


Circuitos

- **Circuito:** Trajeto fechado, ou seja, um caminho onde não há aresta repetida e os vértices inicial e final são idênticos:

$$(v =)v0\ e1\ v1\ e2\ v3 \ldots Vn - 1en\ vn\ (= w)$$

onde toda aresta ei, $1 \leq i \leq n$, é distinta e $v0 = vn$.

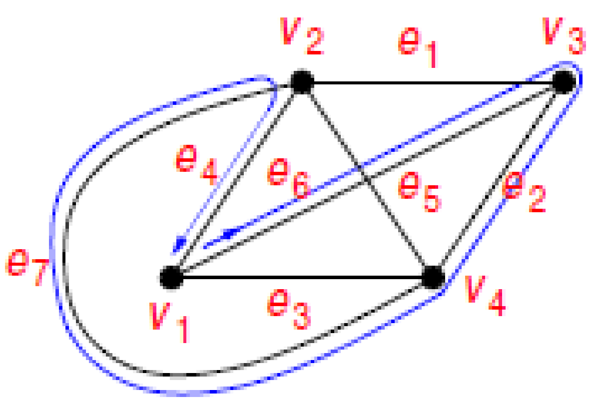


Um possível circuito é:

$v_1 e_6 v_3 e_2 v_4 e_7 v_2 e_1 v_3$

Circuitos

- **Circuito simples:** Também chamado de ciclo simples, é um trajeto fechado, ou seja, um caminho onde <u>não há arestas e vértices repetidos</u>, <u>exceto os vértices inicial e final</u> que são idênticos.

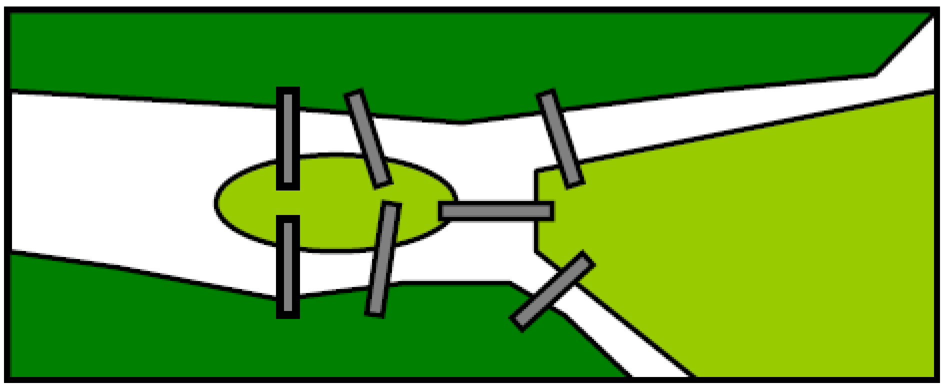


Um possível circuito simples é:

$v_1 e_6 v_3 e_2 v_4 e_7 v_2 e_4 v_1$

Grafos Eulerianos

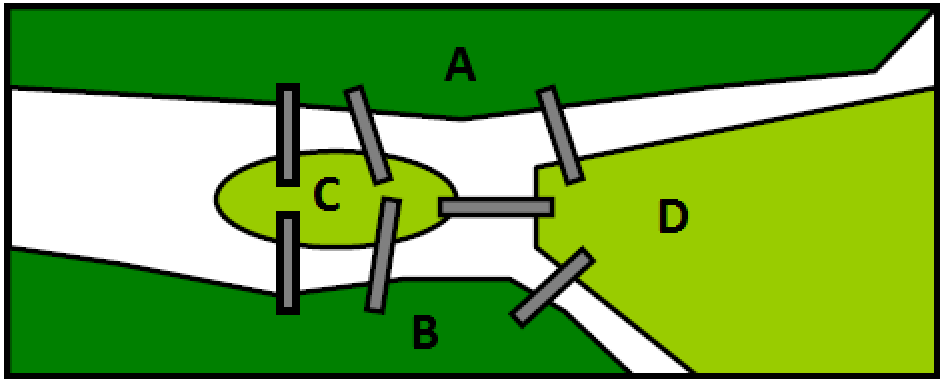
Problema das Pontes de Königsberg: No século XVIII havia na cidade de Königsberg um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel . Elas conectavam duas ilhas entre si e as ilhas com as margens.



Por muito tempo os habitantes daquela cidade perguntavam-se se era possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas.

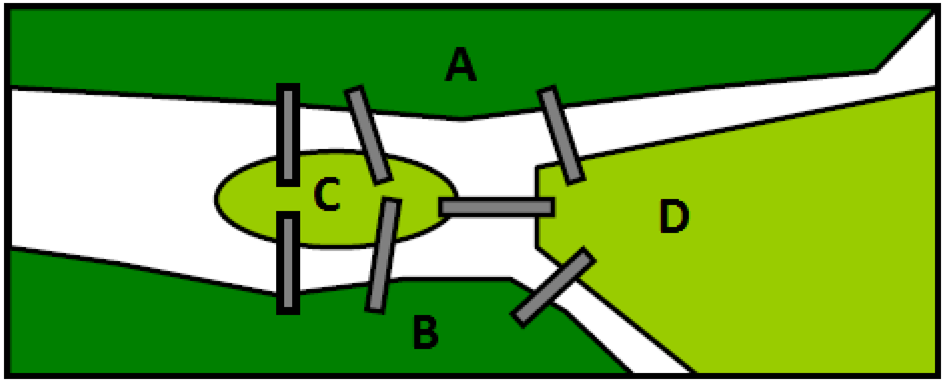
Grafos Eulerianos

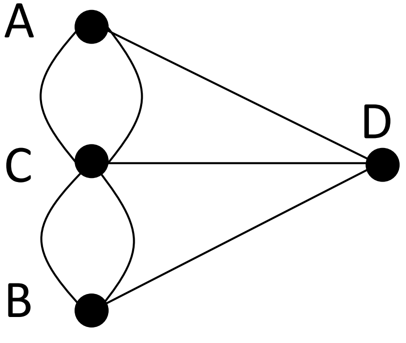
- As pontes de Königsberg: é possível começar em algum ponto (A, B, C ou D) andar por todas as pontes exatamente 1 vez e retornar ao ponto inicial?



Grafos Eulerianos

- As pontes de Königsberg





vértices: pontos de terra

aresta: pontes

Grafos Eulerianos

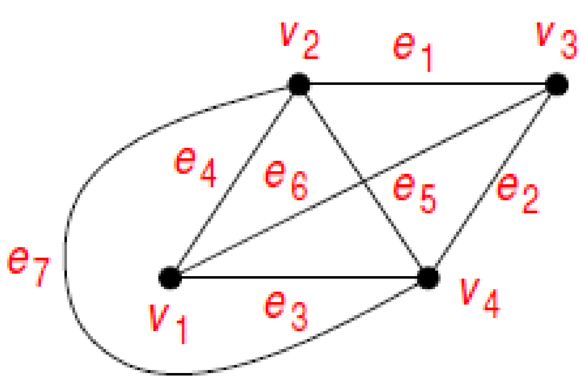
- **Definição:** Seja um grafo G(V,E), é dito euleriano uma seqüência de vértices e arestas adjacentes que começa e termina no mesmo vértice de G, passando pelo menos uma vez por cada vértice e exatamente uma única vez por cada aresta de G.

Grafos Eulerianos

- **Teorema:** Se um grafo possui um circuito Euleriano, então cada vértice do grafo tem grau par.

Grafos Eulerianos

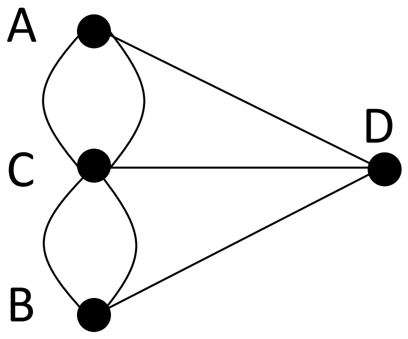
- O contrapositivo deste teorema (que é logicamente equivalente ao teorema original) é:
  - **Teorema:** Se algum vértice de um grafo tem grau ímpar, então o grafo não tem um circuito Euleriano
- Esta versão do teorema é útil para mostrar que um grafo não possui um circuito Euleriano.

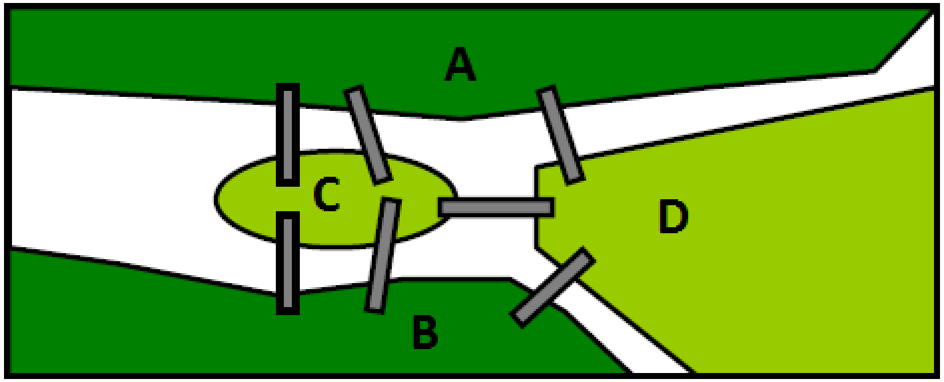


Vértices v1 e v3 possuem grau 3 e, assim, não possuem um circuito Euleriano.

Grafos Eulerianos

- Revisitando o problema das pontes de Königsberg



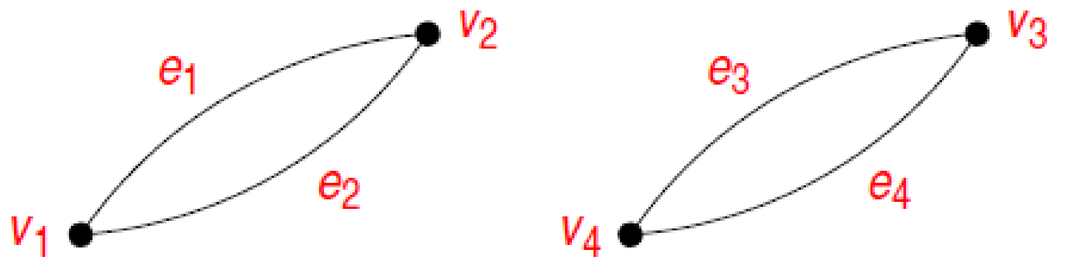


- **Problema:** É possível que uma pessoa faça um percurso na cidade de tal forma que inicie e volte a mesma posição passando por todas as pontes somente uma única vez?

- **Não. Todos os vértices têm grau ímpar.**

Grafos Eulerianos

- No entanto, se cada vértice de um grafo tem grau par, então o grafo tem um circuito Euleriano?
  - Não. Por exemplo, no grafo abaixo todos os vértices têm grau par, mas como o grafo não é conexo, não possui um circuito Euleriano.

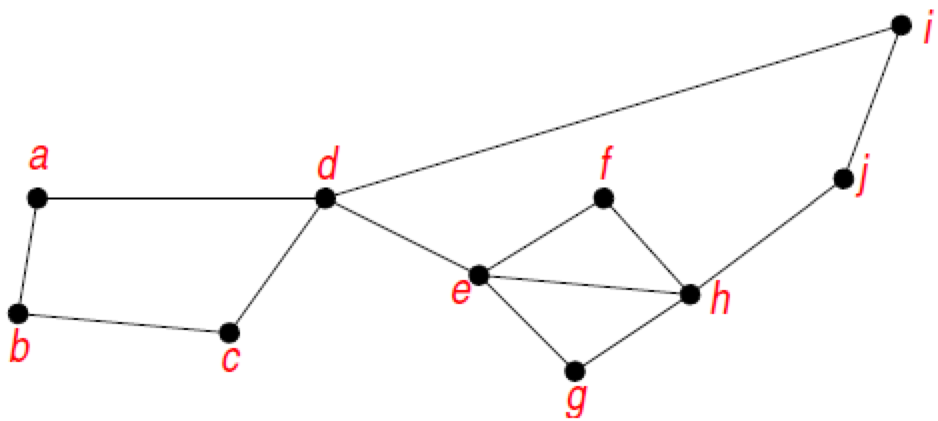


Grafos Eulerianos

- **Reescrevendo o teorema:** Se cada vértice de um grafo G não vazio tem grau par e é conexo, então o grafo tem um circuito Euleriano.

Circuito Euleriano

- Determine se o grafo abaixo tem um circuito Euleriano. Em caso positivo ache um circuito Euleriano para o grafo.

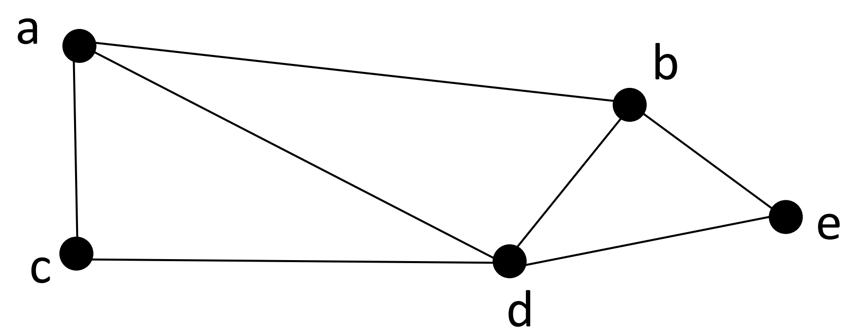


  – Os vértices *a, b, c, f, g, i, j* têm grau 2.
  – Os vértices *d, e, h* têm grau 4.
  – Pelo teorema anterior, este grafo possui um circuito Euleriano.

Grafos Unicursais

- Um grafo G é dito **unicursal** se ele possuir um caminho aberto de euler, ou seja, se é possível percorrer todas as arestas de G apenas 1 vez sem retornar ao vértice inicial.

Caminho aberto de euler: *a c d a b d e b*



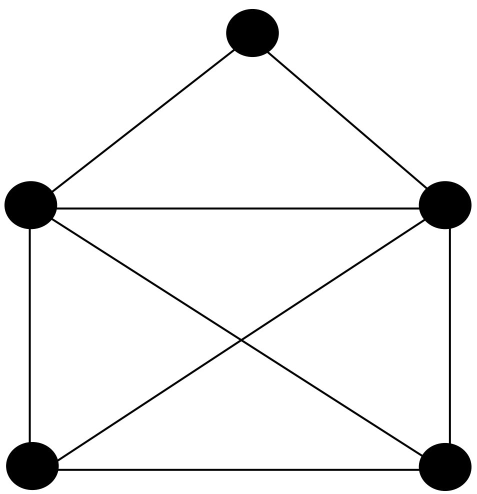
- Se adicionarmos uma aresta entre os vértices inicial e final do caminho aberto de euler, esse grafo passa a ser um grafo euleriano.

Grafos Unicursais

- Um grafo conexo é unicursal se, e somente se, ele possuir exatamente 2 vértices de grau ímpar.
- **Teorema**: Em um grafo conexo G com exatamente 2K vértices de grau ímpar, existem K subgrafos disjuntos de arestas, todos eles unicursais, de maneira que juntos eles contêm todas as arestas de G

Grafos Unicursais

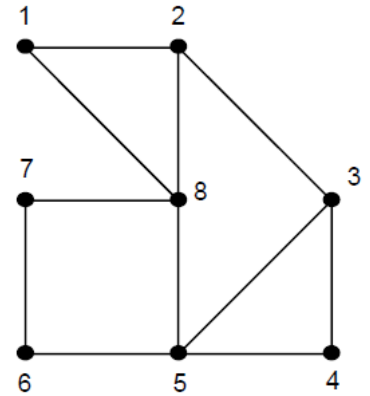
- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



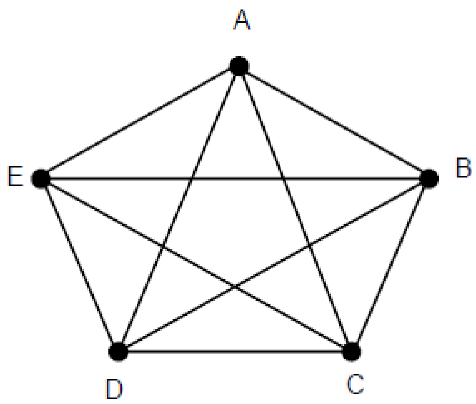
Exercícios

- Verifique se os grafos abaixo são Eulerianos ou Unicursais. Identifique em cada um o circuito ou caminho euleriano.

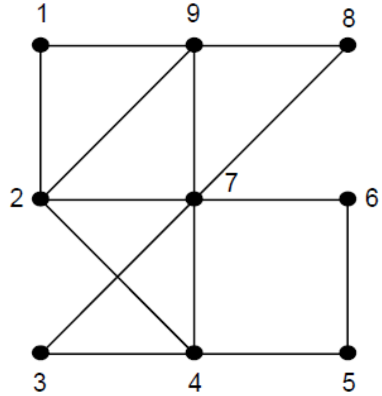
a) .



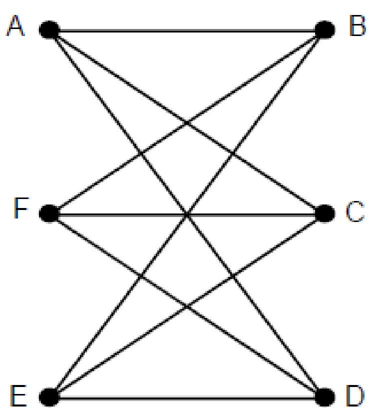
c) .



b) .

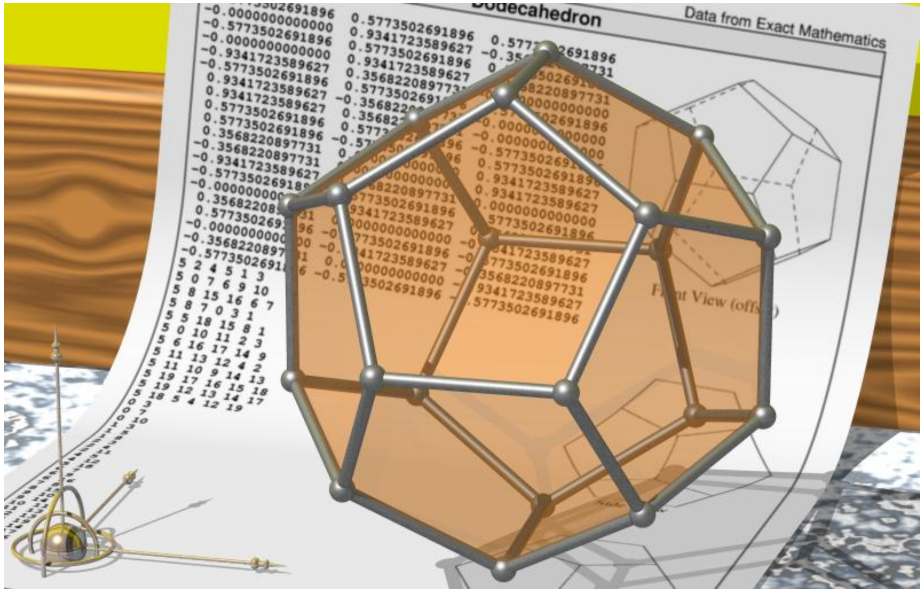


d) .



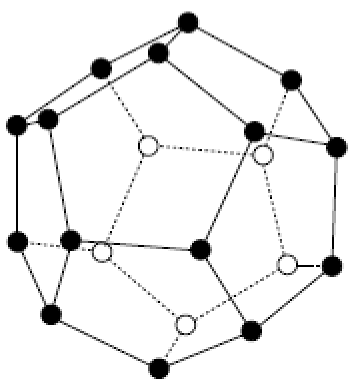
Circuito Hamiltoniano

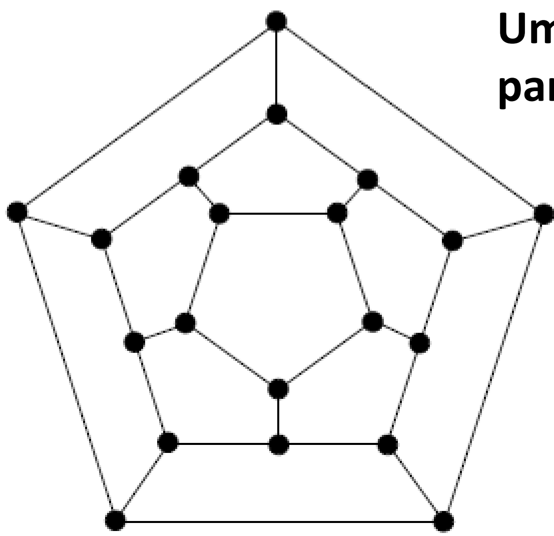
- William Hamilton (1805–1865), matemático irlandês.
- Em 1859, propôs um jogo na forma de um dodecaedro (sólido de 12 faces).



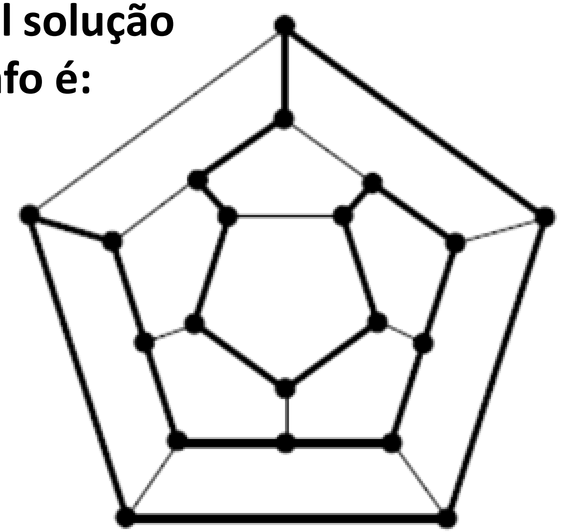
Circuito Hamiltoniano

- Cada vértice recebeu o nome de uma cidade: Londres, Paris, Hong Kong, New York, etc.
- O problema era: É possível começar em uma cidade e visitar todas as outras cidades exatamente uma única vez e retornar à cidade de partida?
- O jogo é mais fácil de ser imaginado projetando o dodecaedro no plano:





Uma possível solução para este grafo é:



Circuito Hamiltoniano

- **Definição:** Um Caminho de Hamilton em um grafo conexo é um caminho aberto que passa por todos os vértices do grafo exatamente uma única vez.
  - Condições suficientes, mas não necessárias, para que um grafo G seja hamiltoniano
    - G é conexo
    - loops e arestas paralelas podem ser desconsideradas
    - se um grafo é hamiltoniano, então a inclusão de qualquer aresta não atrapalha esta condição.

Circuito Hamiltoniano

- TEOREMA: Em um grafo completo com *n* vértices, *n* ímpar e $(n \geq 3)$, existem $\frac{n-1}{2}$ circuitos hamiltonianos disjuntos de arestas.

- TEOREMA: Em um grafo completo com *n* vértices, *n* par e $(n \geq 4)$, existem $\frac{n-2}{2}$ circuitos hamiltonianos disjuntos de arestas.

UNI-BH A MARCA DA EDUCAÇÃO

Circuitos Eulerianos e Hamiltonianos

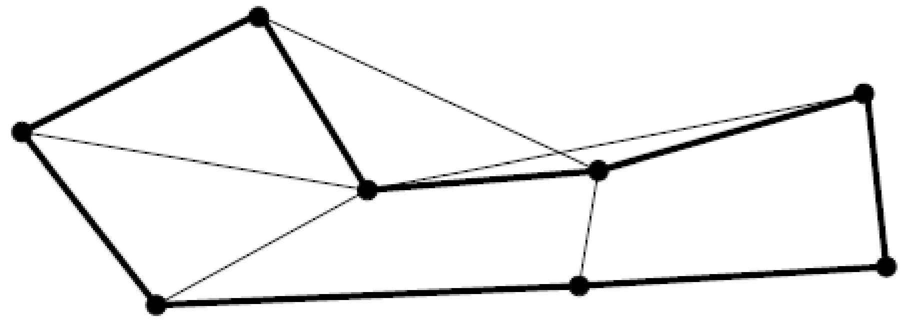
- Circuito Euleriano:
  - Inclui todas as arestas uma única vez.
  - Inclui todos os vértices, mas que podem ser repetidos, ou seja, pode não gerar um circuito Hamiltoniano.
- Circuito Hamiltoniano:
  - Inclui todas os vértices uma única vez (exceto o inicial = final).
  - Pode não incluir todas as arestas, ou seja, pode não gerar um circuito Euleriano.

Circuitos Eulerianos e Hamiltonianos

- Circuito Euleriano:
  - É possível determinar a priori se um grafo G possui um circuito Euleriano.
- Circuito Hamiltoniano:
  - Não existe um teorema que indique se um grafo possui um circuito Hamiltoniano nem se conhece um algoritmo eficiente (polinomial) para achar um circuito Hamiltoniano.
  - No entanto, existe uma técnica simples que pode ser usada em muitos casos para mostrar que um grafo não possui um circuito Hamiltoniano.

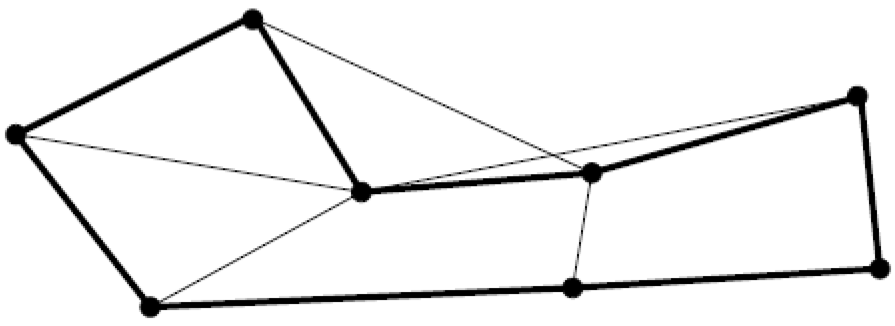
Circuito Hamiltoniano

- Determinando se um grafo não possui um circuito Hamiltoniano:
  - Suponha que um grafo G tenha um circuito Hamiltoniano C dado por: $C : v0\ e1\ v1\ e2\ .\ .\ .\ vn-1\ en\ vn$
  - Como C é um circuito simples, todas as arestas *ei* são distintas e todos os vértices são distintos, exceto *v0* = *vn*.
  - Seja H um subgrafo de G que é formado pelos vértices e arestas de C, como mostrado na figura abaixo (H é o subgrafo com as linhas grossas).



Circuito Hamiltoniano

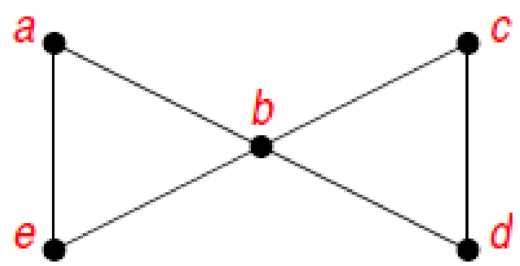
- Determinando se um grafo não possui um circuito Hamiltoniano:
  - Se um grafo G tem um circuito Hamiltoniano então G tem um subgrafo H com as seguintes propriedades:
    1. H contém cada vértice de G;
    2. H é conexo;
    3. H tem o mesmo número de arestas e de vértices;
    4. Cada vértice de H tem grau 2.



  - Contrapositivo desta afirmação:
    - Se um grafo G não tem um subgrafo H com propriedades (1)–(4) então G não possui um circuito Hamiltoniano.

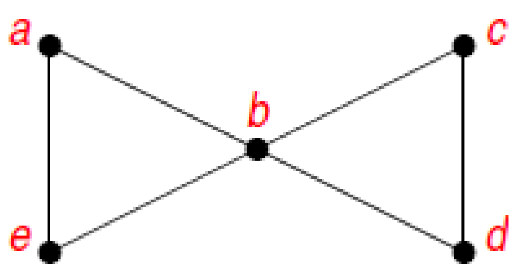
Circuito Hamiltoniano

- Prove que o grafo G abaixo não tem um circuito Hamiltoniano.



- Se G tem um circuito Hamiltoniano, então G tem um subgrafo H que:
  1. H contém cada vértice de G;
  2. H é conexo;
  3. H tem o mesmo número de arestas e de vértices;
  4. Cada vértice de H tem grau 2.

Circuito Hamiltoniano

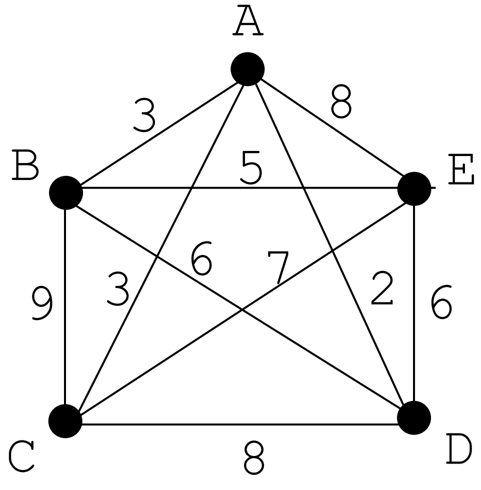


- Em *G*, *grau(b)* = 4 e cada vértice de *H* tem grau 2;
- Duas arestas incidentes a *b* devem ser removidas de *G* para criar *H*;
- Qualquer aresta incidente a *b* que seja removida fará com que os outros vértices restantes tenham grau menor que 2;

- Conseqüentemente, não existe um subgrafo *H* com as quatro propriedades acima e, assim, *G* não possui um circuito Hamiltoniano.

Circuito Hamiltoniano

- O Problema do Caixeiro Viajante: Um caixeiro viajante deseja visitar um número de cidades e voltar ao ponto de origem de maneira que ele visite todas as cidades e percorra a menor distância possível. Como escolher sua rota?



Grafo com peso nas arestas

- Vértices: cidades
- Arestas: estradas

⇒ Encontrar um circuito de hamilton de peso mínimo

Perguntas

?