Teoria dos Grafos

Aula 5

Grafo bipartido, multi-grafo, hiper-grafo,

Árvores

Isomorfismo

Material dos professores: Jaqueline Oliveira e Marcos Muniz

Grafo Bipartido

- Um grafo bipartido de m, n vértices, denominado $K_{m,n}$ é um grafo simples com vértices $v_1, v_2, \dots, v_m$ e $w_1, w_2, \dots, w_n$, que satisfaz as seguintes propriedades:

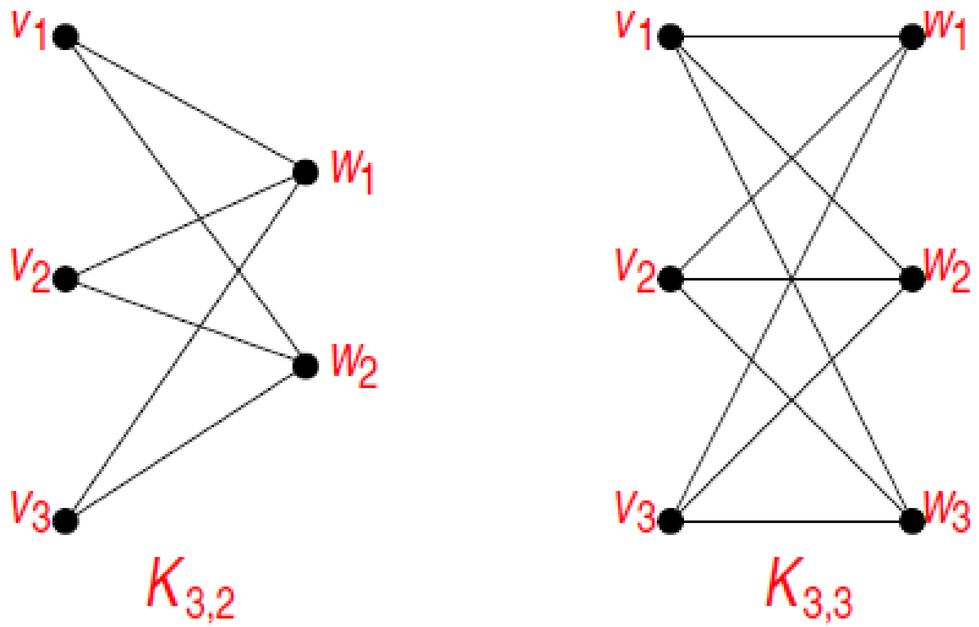
$$\forall\ i, k = 1, 2, \dots, m$$
$$\wedge$$
$$\forall\ j, l = 1, 2, \dots, n$$

Grafo Bipartido

1. Existe uma aresta entre cada par de vértices v_i e w_j;
2. Não existe uma aresta entre cada par de vértices v_i e v_k;
3. Não existe uma aresta entre cada par de vértices w_j e w_l;

Grafo Bipartido

1. Exemplo: Grafos bipartidos $K_{3,2}$ e $K_{3,3}$



Exercício

- Uma pequena fábrica tem cinco máquinas — 1, 2, 3, 4 e 5 — e seis operários — A, B, C, D, E e F.
- A tabela especifica as máquinas que cada operário sabe operar:

Operário	Máquina
A	2,3
B	1,2,3,4,5
C	3
D	
E	2,4,5
F	2,5

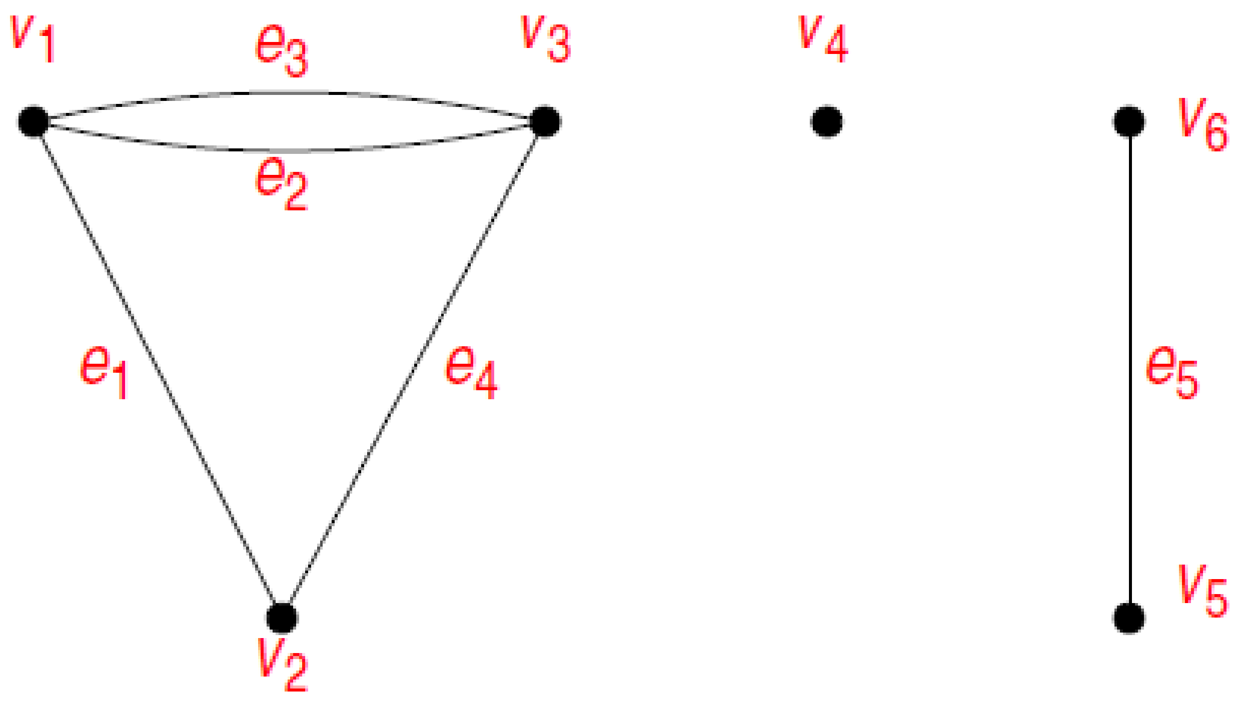
- Faça uma figura do grafo bipartido que representa a relação entre operáriose máquinas.

Multigrafo

- Um multigrafo é um grafo que não possui laços mas pode ter arestas paralelas.
- Formalmente, um multigrafo $G = (V, E)$ consiste de um conjunto V de vértices, um conjunto E de arestas, e uma função f de E para $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$
- As arestas e_1 e e_2 são chamadas múltiplas ou paralelas se $f(e_1) = f(e_2)$.

uni-bh A MARCA DA EDUCAÇÃO

Multigrafo



Pseudografo

- Um pseudografo é um grafo que pode ter laços e arestas paralelas.
- Formalmente, um pseudografo $G = (V, E)$ consiste de um conjunto V de vértices, um conjunto E de arestas, e uma função f de E para $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$
- Um pseudografo é mais geral que um multigrafo.
- Pseudografos e multigrafos são utilizados em modelagens de várias aplicações.

uni-bh A MARCA DA EDUCAÇÃO

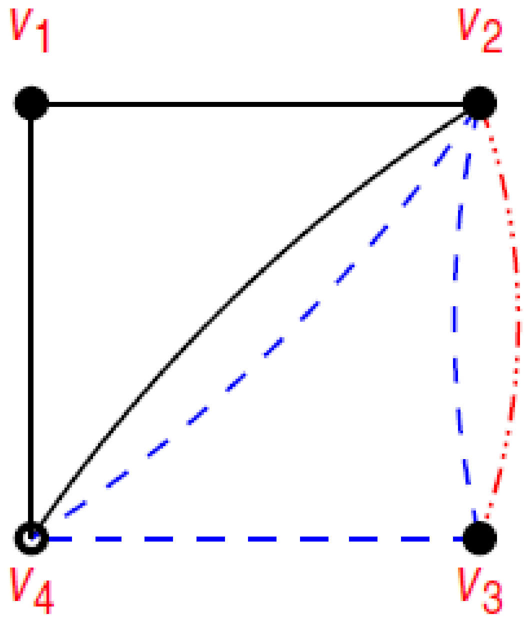
Hipergrafo

- Um hipergrafo H(V, F) é definido pelo par de conjuntos V e F, onde:
  - V é um conjunto não vazio de vértices;
  - F é um conjunto que representa uma “família” e partes não vazias de V .
- Um hipergrafo é um grafo não dirigido em que cada aresta conecta um número arbitrário de vértices.

uni-bh
A MARCA DA EDUCAÇÃO

Hipergrafo

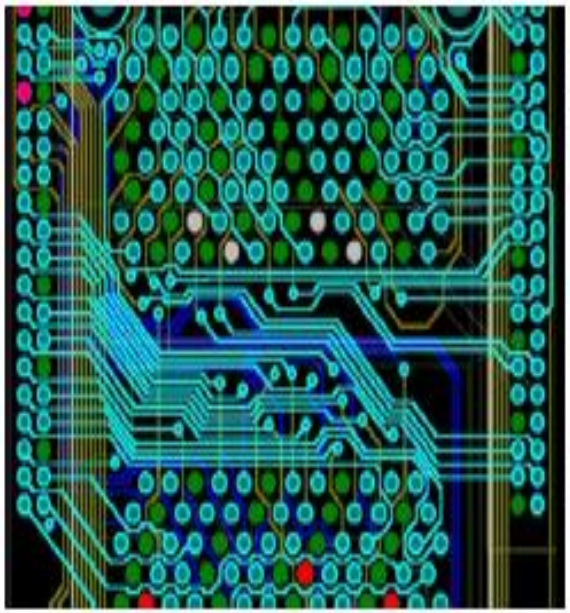
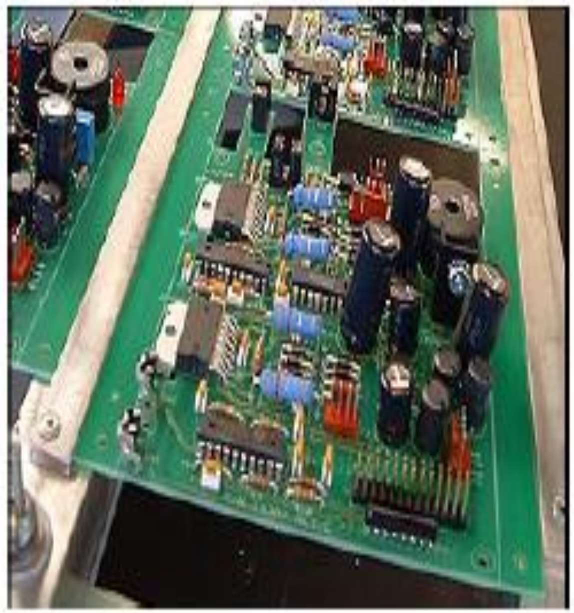
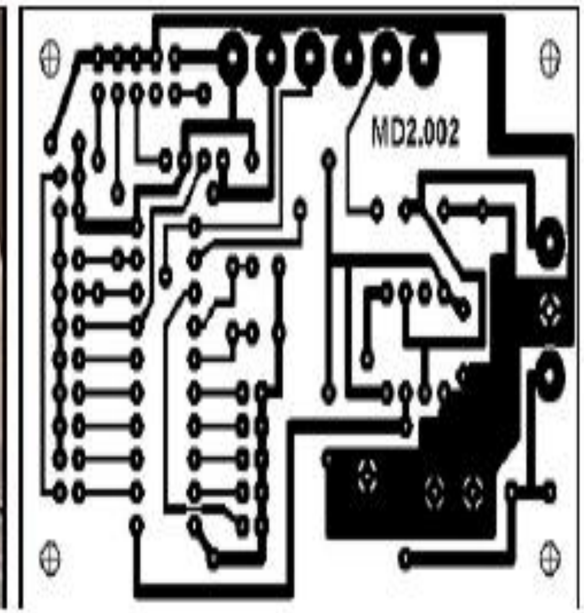
- Seja, por exemplo, o grafo H(V, F) dado por:
- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
- $F = \{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3\}\}$



Grafo imersível

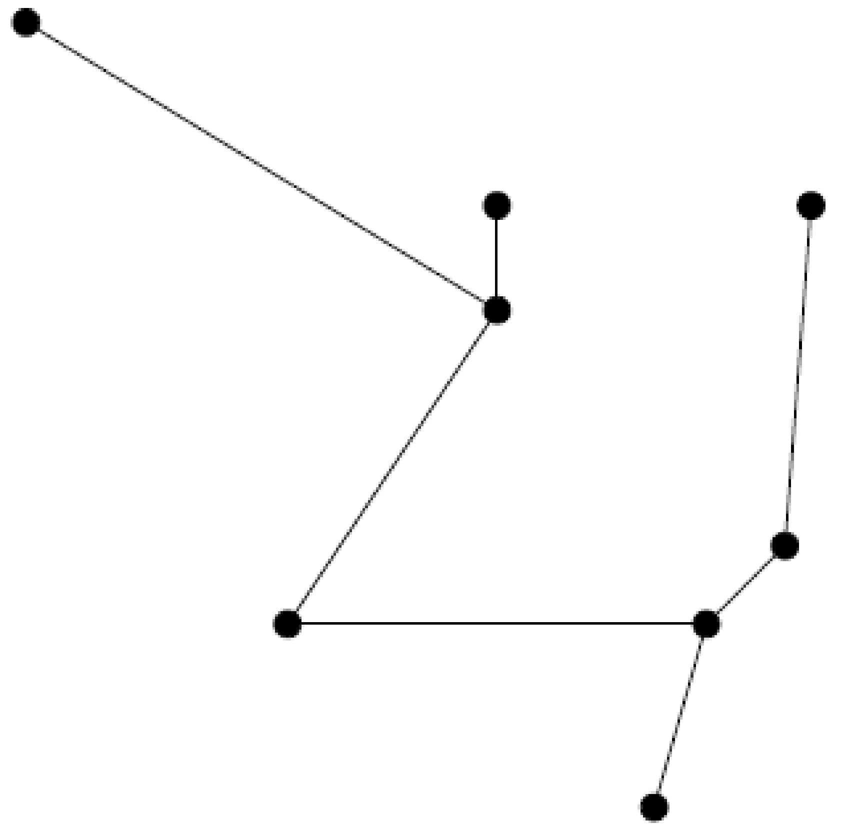
- Um grafo é imersível em uma superfície S se puder ser representado geograficamente em S de tal forma que arestas se cruzem nas extremidades (vértices).
- Um **grafo planar** é um grafo que é imersível no plano.
- Exemplo: As conexões de uma placa de circuito impresso devem ser representadas por um grafo planar.

Grafo imersível

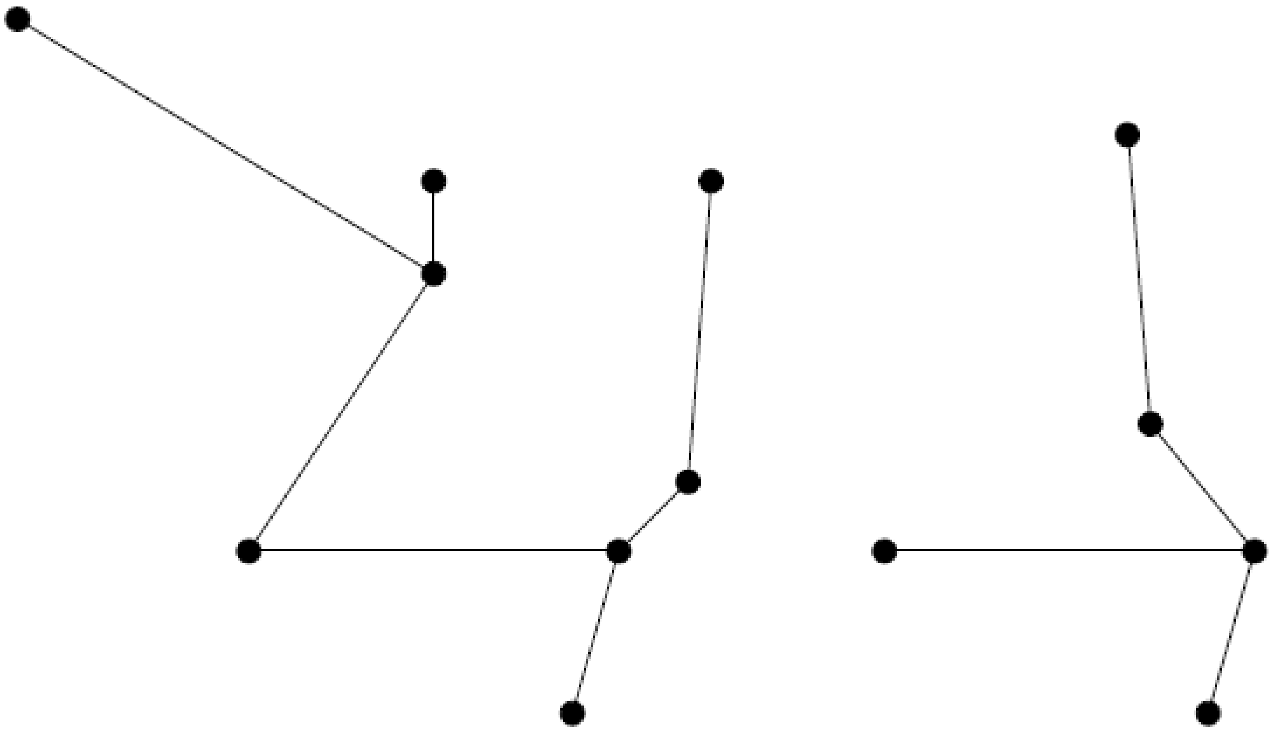
Árvore

- Uma árvore é um grafo não dirigido, acíclico e conexo.



Floresta

- Uma floresta é um grafo não dirigido acíclico podendo ou não ser conexo.

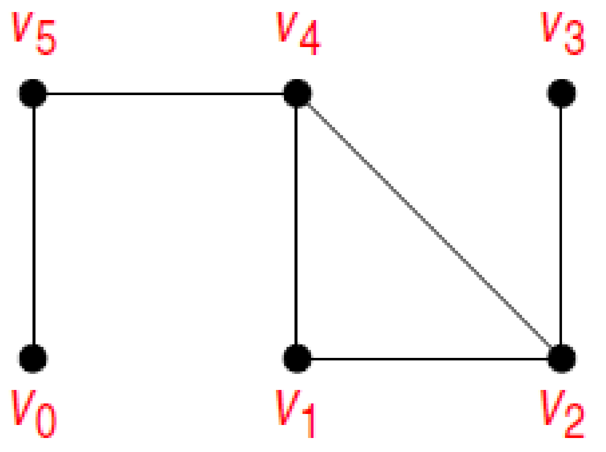


Árvore geradora

- Uma **árvore geradora** de um grafo G é um grafo que contém cada vértice de G e é uma árvore.
- Esta definição pode ser estendida para floresta geradora.
- Proposição:
  - Cada grafo conexo tem uma árvore geradora.
  - Duas árvores geradores quaisquer de um grafo têm a mesma quantidade de arestas.

Árvore geradora

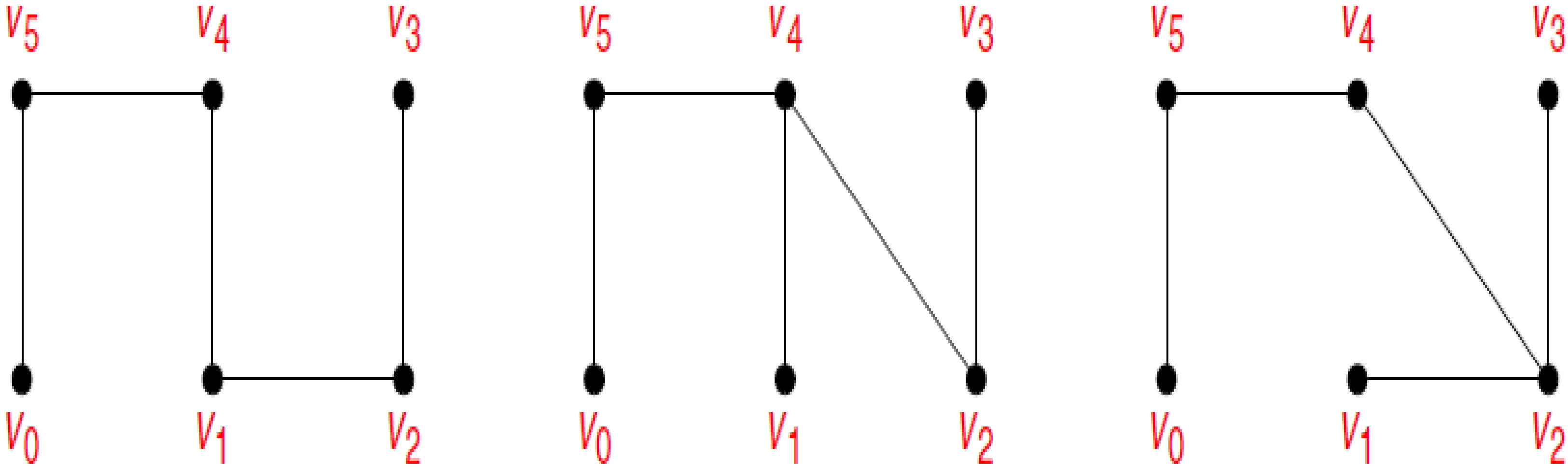
- Seja G o grafo:



- Este grafo possui o circuito $v_2 v_1 v_4 v_2$.
- A remoção de qualquer uma das três arestas do circuito leva a uma árvore.

Árvore geradora

- As árvores geradoras são:



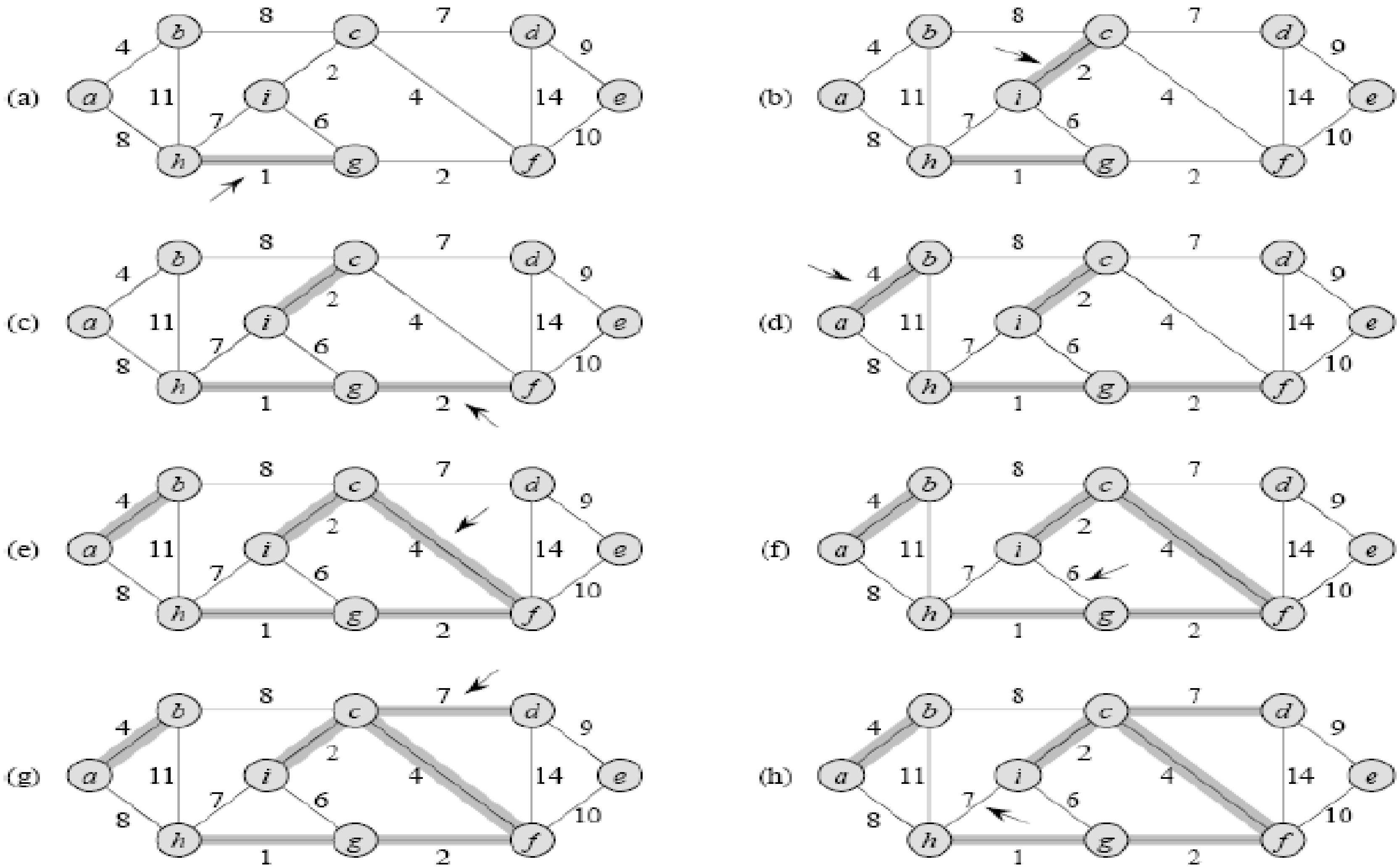
Árvore geradora mínima

- Um **grafo com peso** é um grafo onde cada aresta possui um peso representado por um número real. A soma de todos os pesos de todas as arestas é o peso total do grafo. Uma **árvore geradora mínima** para um grafo com peso é uma árvore geradora que tem o menor peso total possível dentre todas as possíveis árvores geradoras do grafo.
- Se G é um grafo com peso e e uma aresta de G então:
  - $w(e)$ indica o peso da aresta e, e
  - $w(G)$ indica o peso total do grafo G.

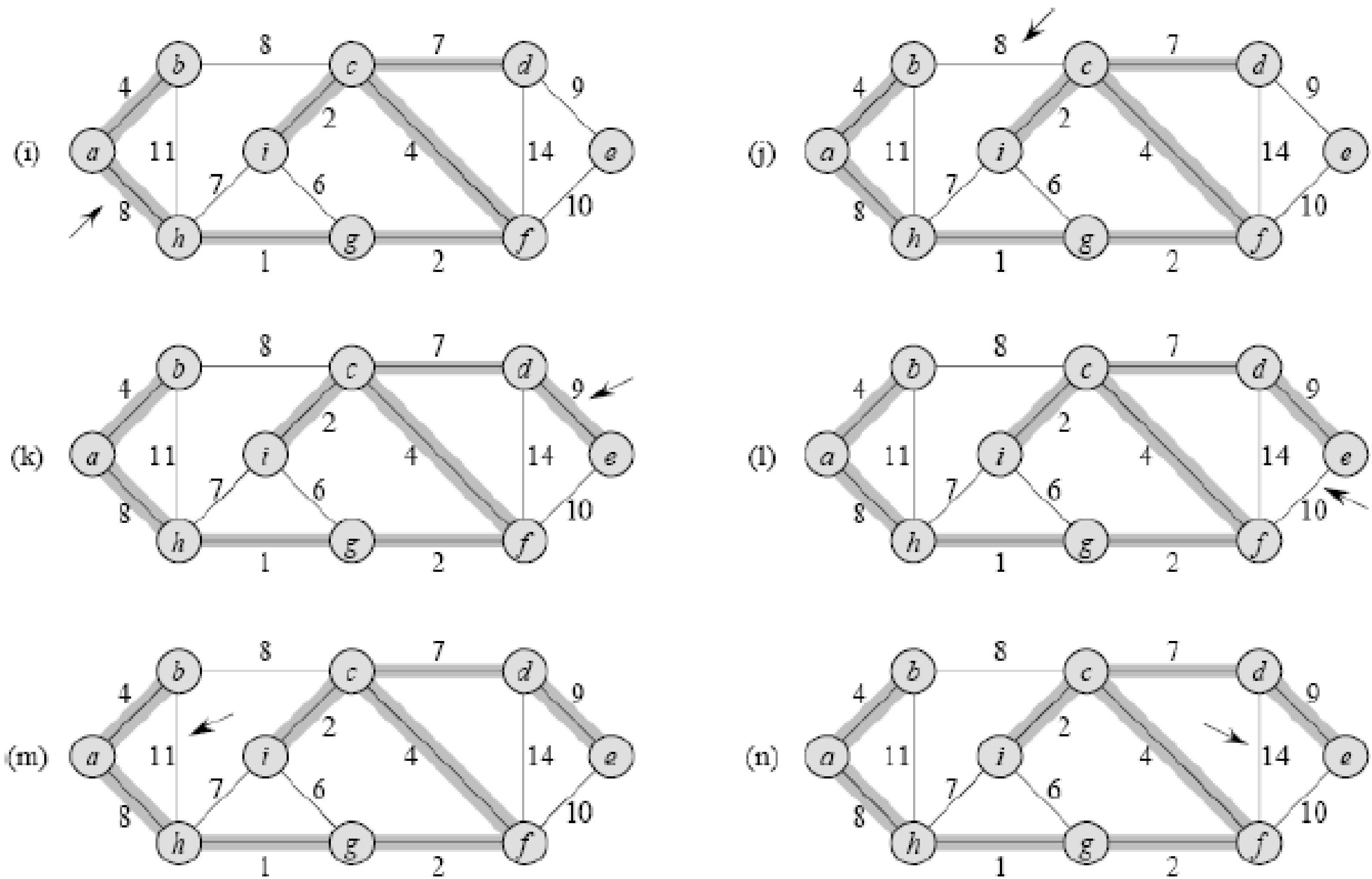
Árvore geradora mínima

- Algoritmo de Kruskal:
  - Seleciona a aresta de menor peso que conecta duas árvores de uma floresta.
  - Repita o processo até que todos os vértices estejam conectados sempre preservando a invariante de se ter uma árvore.

Árvore geradora mínima



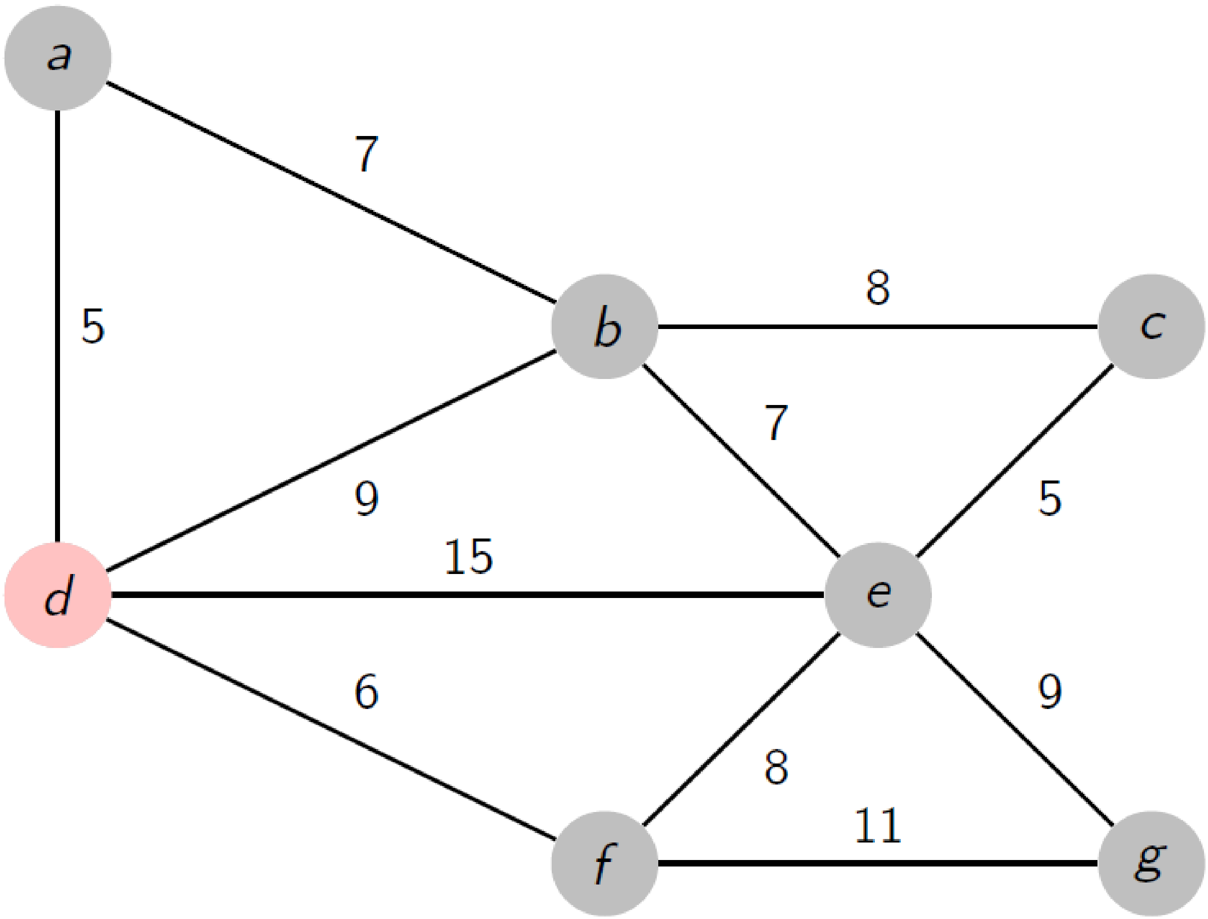
Árvore geradora mínima



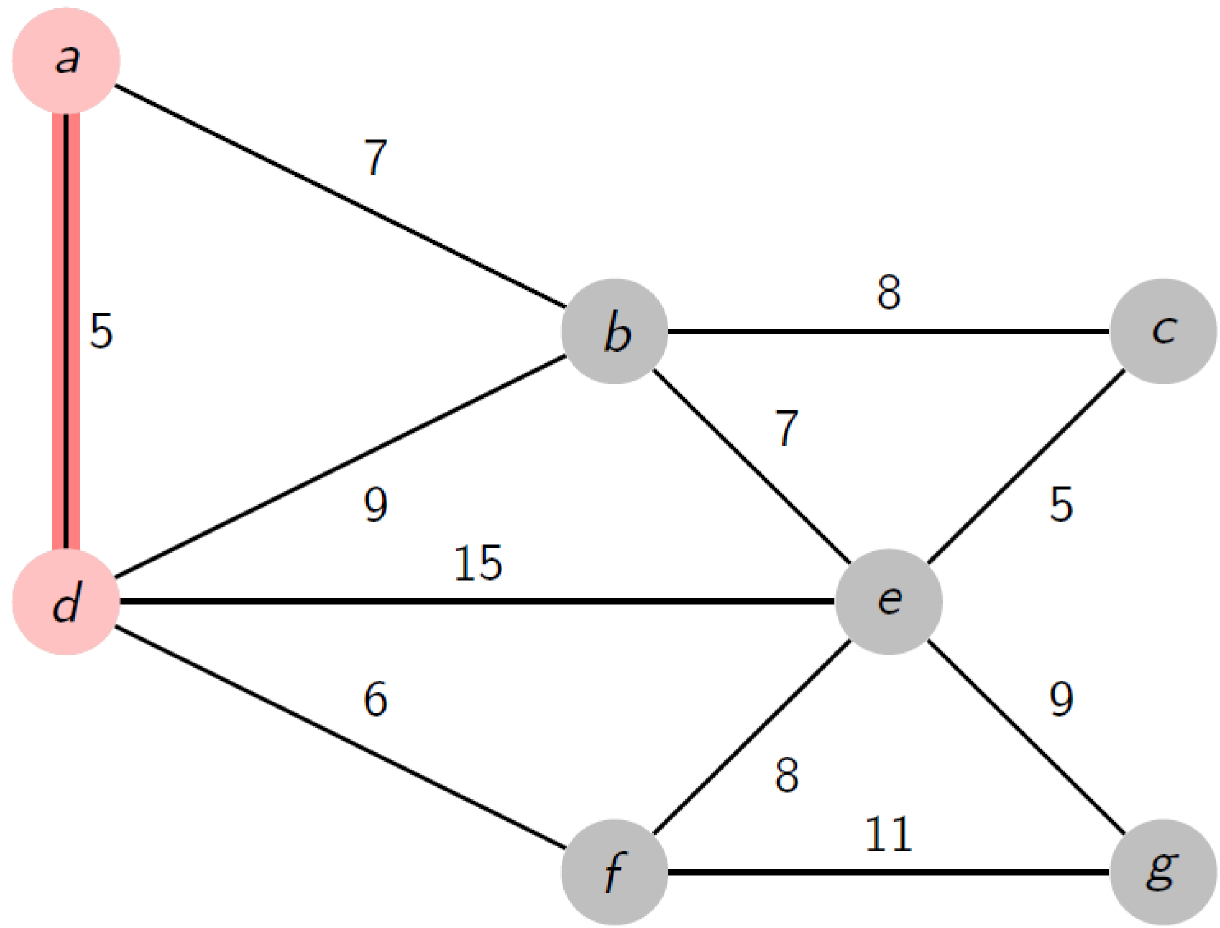
Árvore geradora mínima

- Algoritmo de Prim:
  - Tomando como vértice inicial A, crie uma fila de prioridades classificada pelos pesos das arestas conectando A.
  - Repita o processo até que todos os vértices tenham sido visitados.

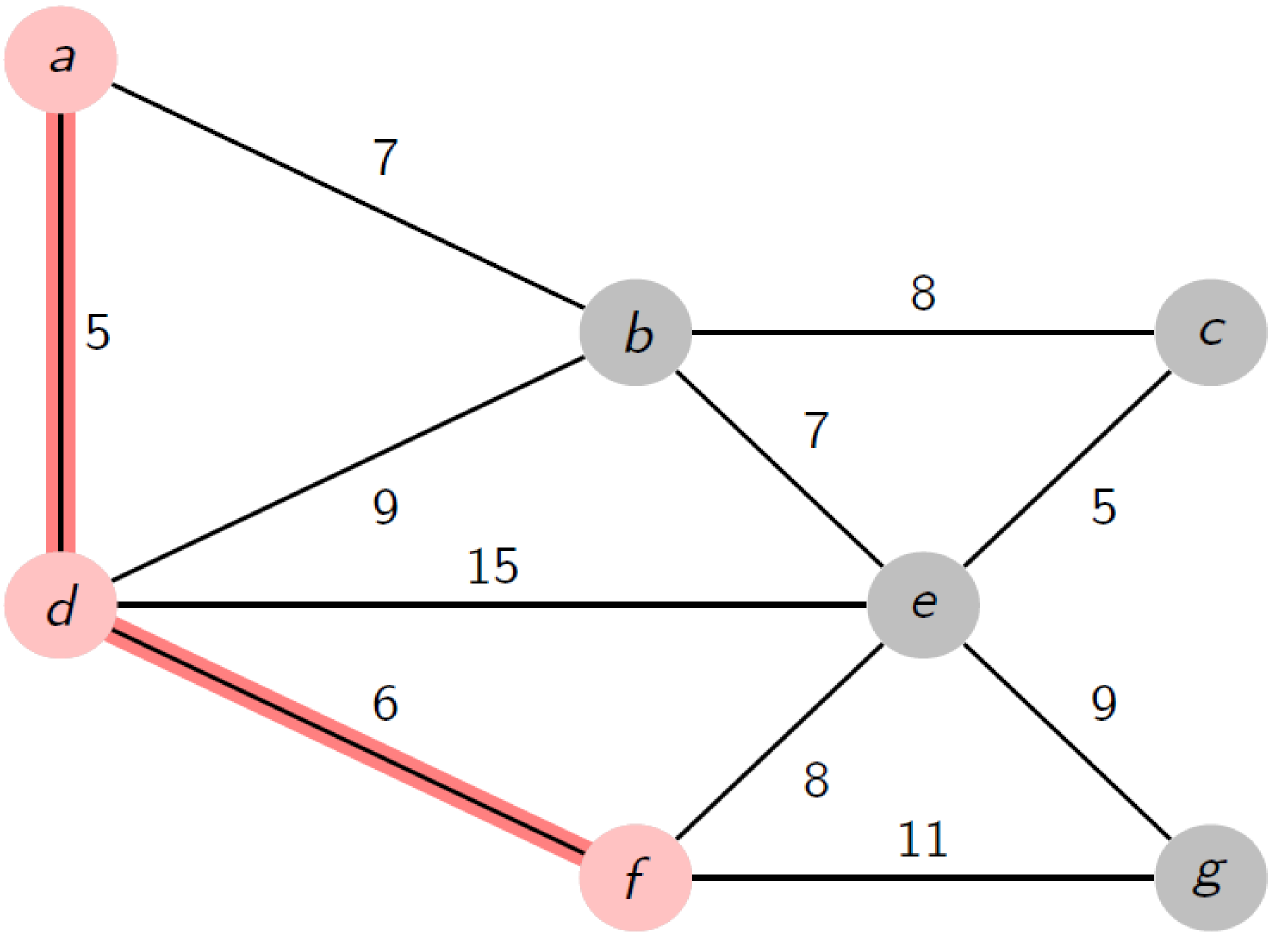
Árvore geradora mínima



Árvore geradora mínima

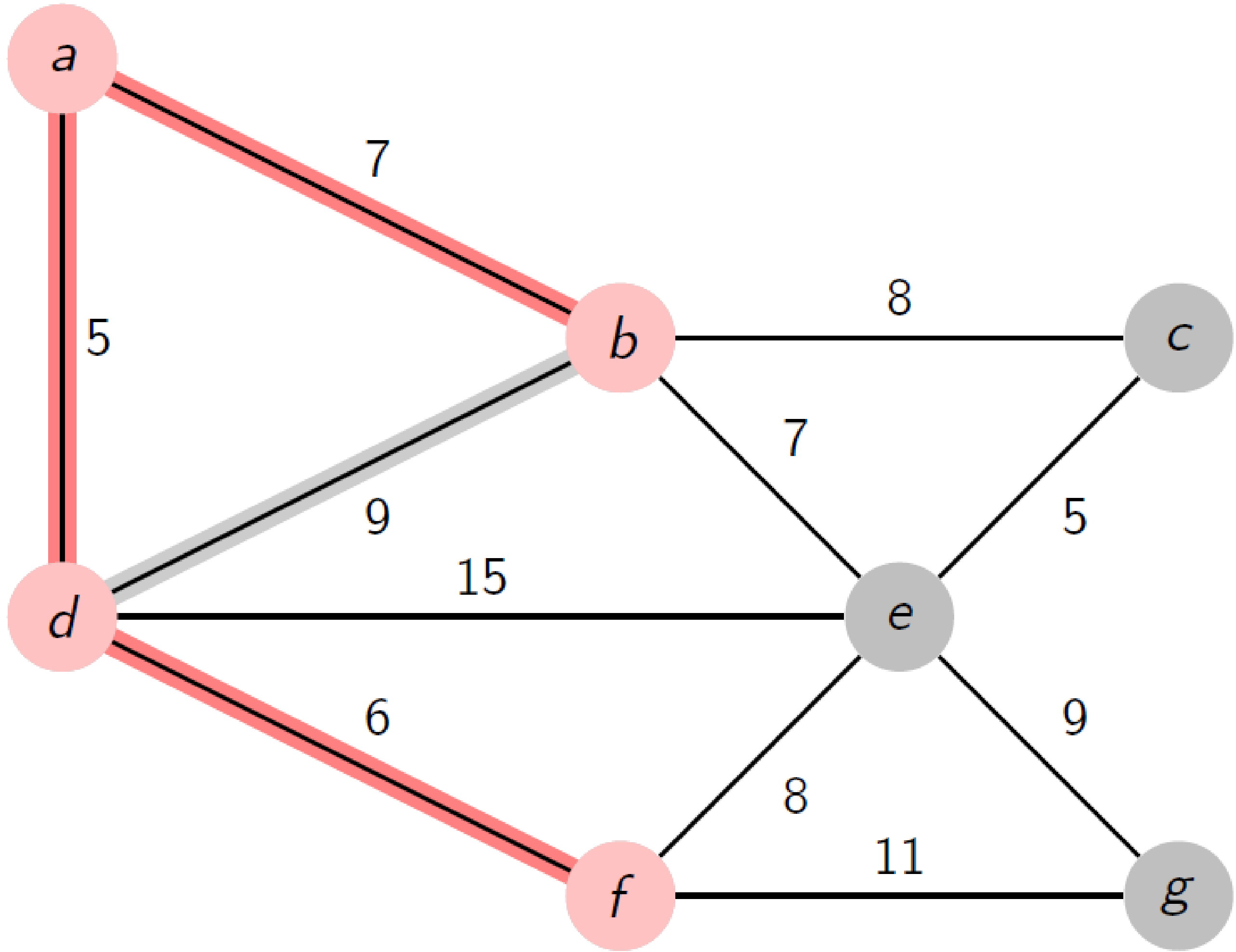


Árvore geradora mínima

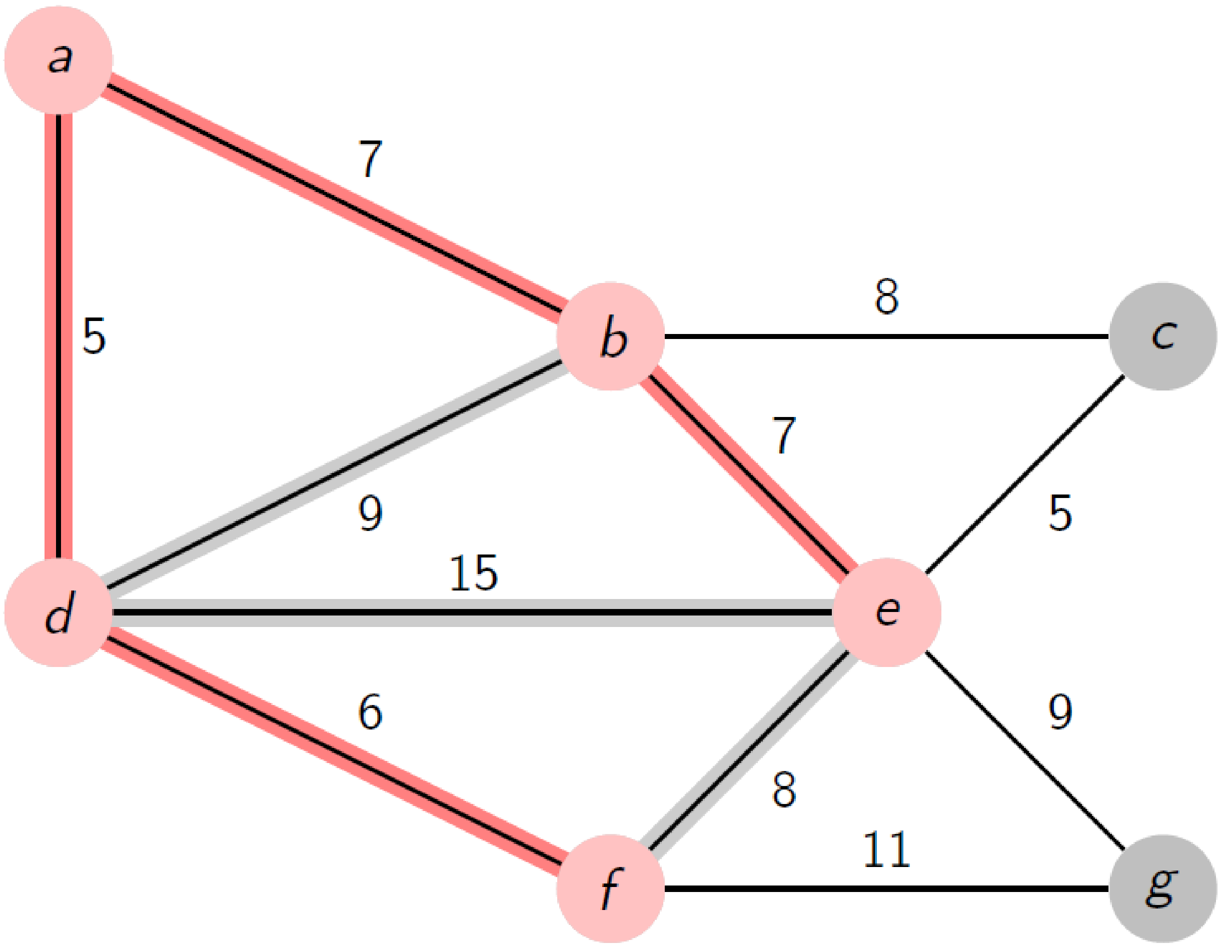


UNI-BH
A MARCA DA EDUCAÇÃO

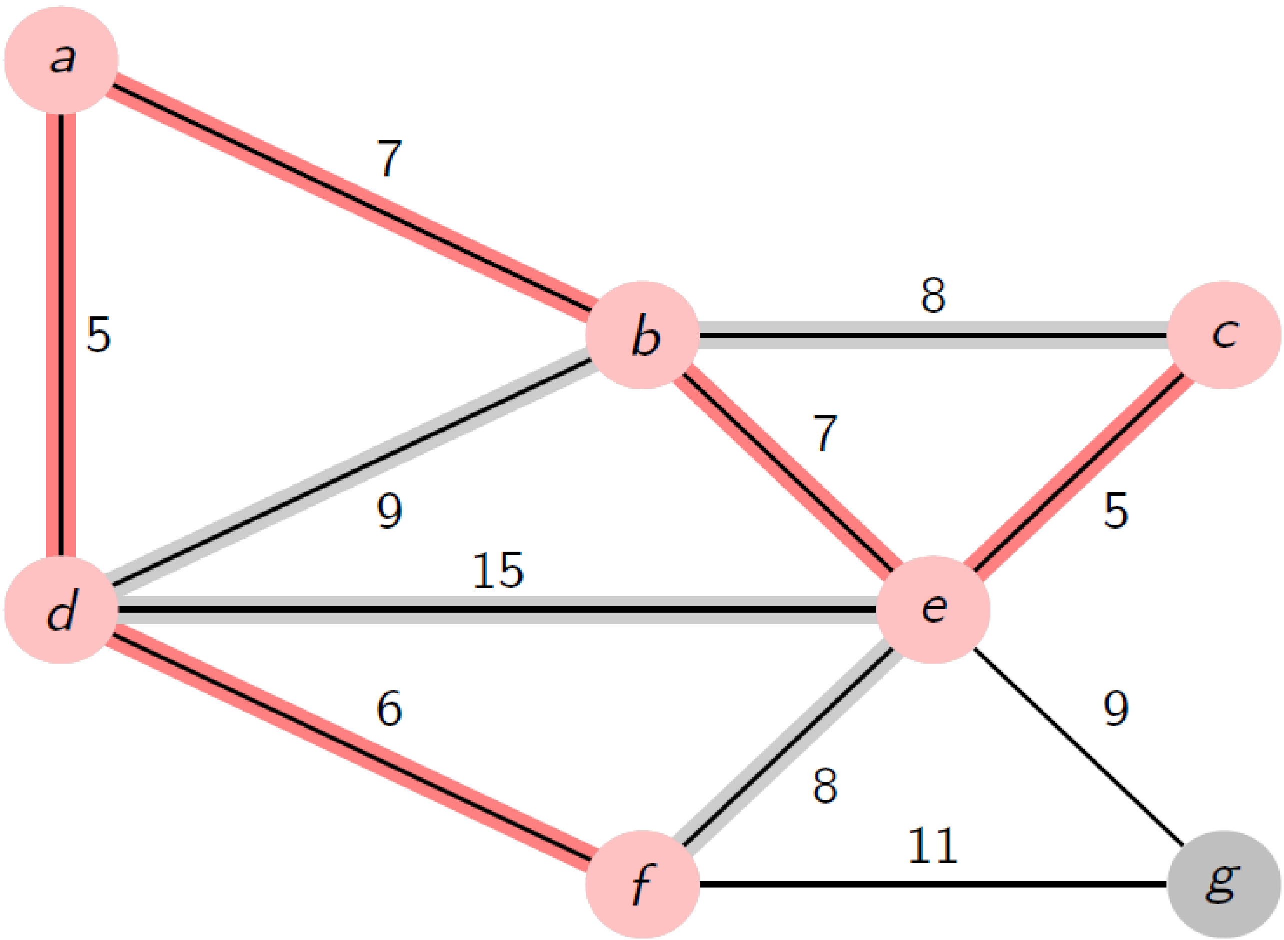
Árvore geradora mínima



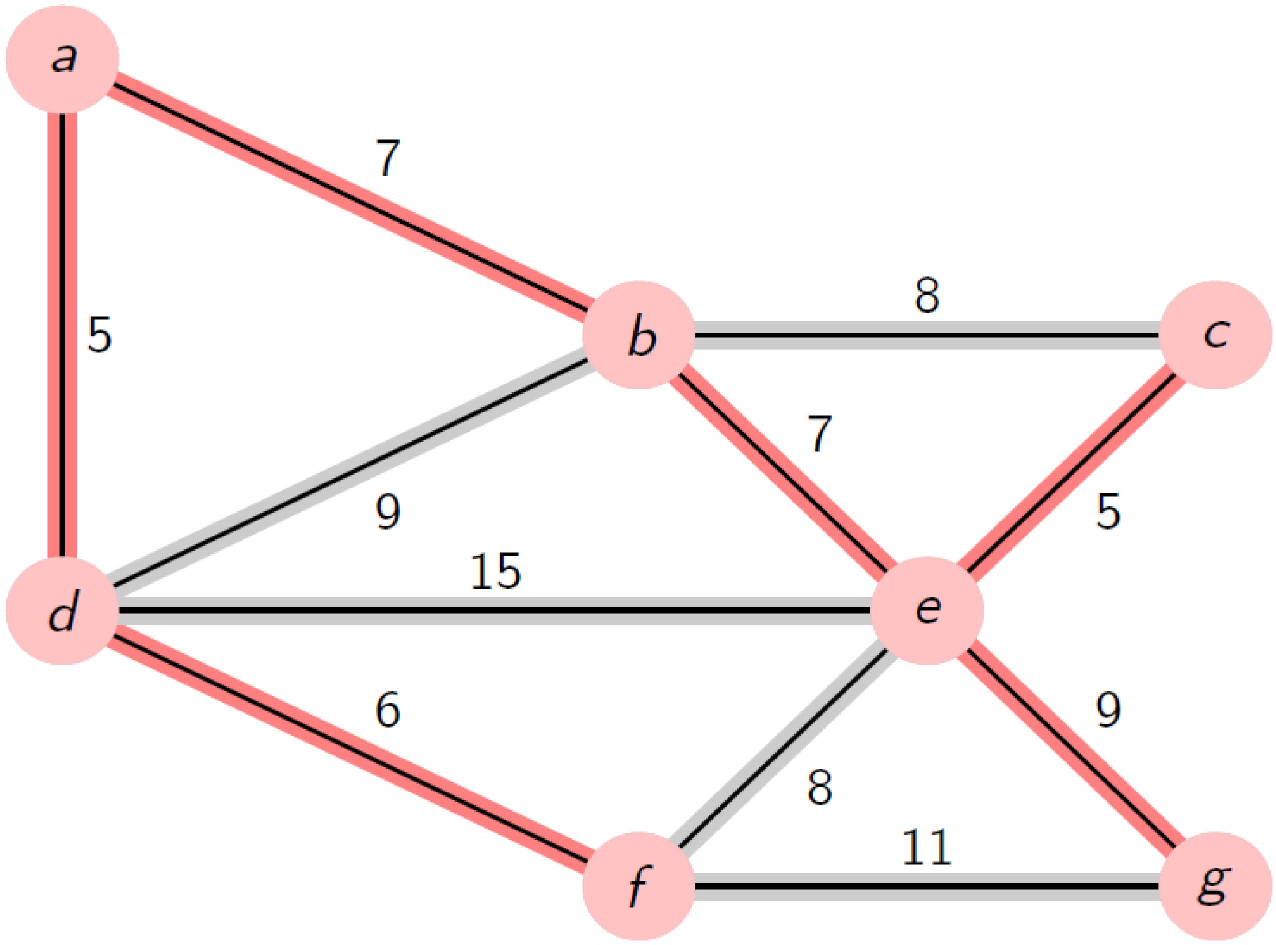
Árvore geradora mínima



Árvore geradora mínima

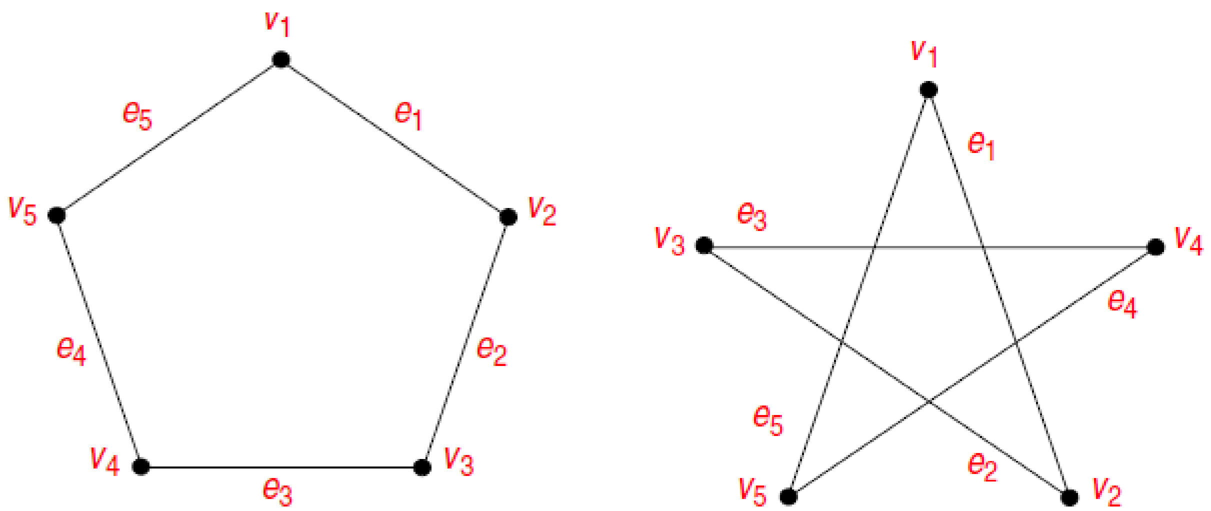


Árvore geradora mínima



Isomorfismo

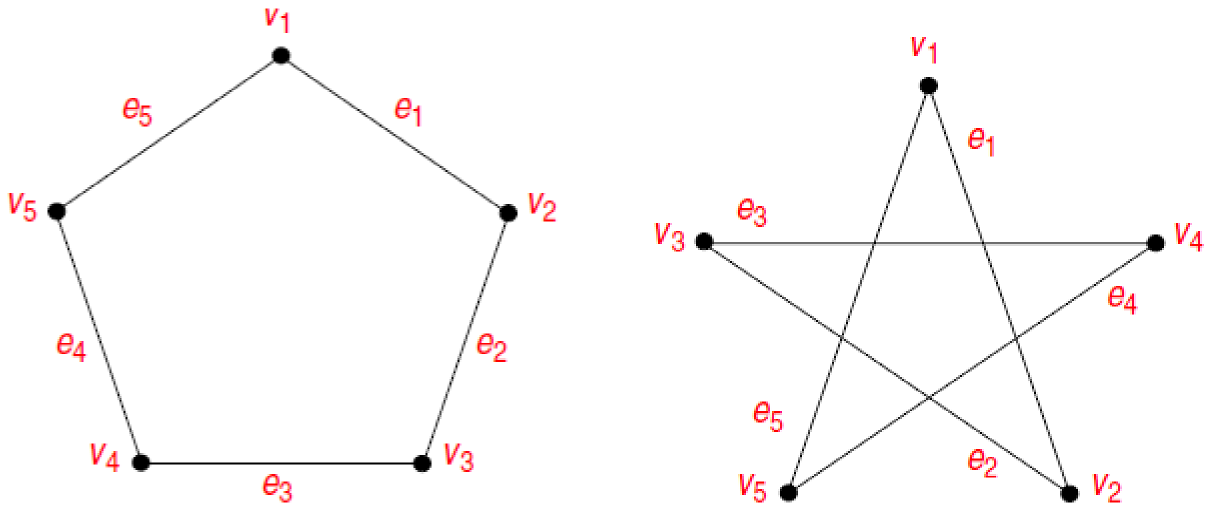
- Os grafos abaixo são idênticos:



  - Conjuntos de vértices e arestas são idênticos;
  - Funções aresta-vértice são as mesmas.

Isomorfismo

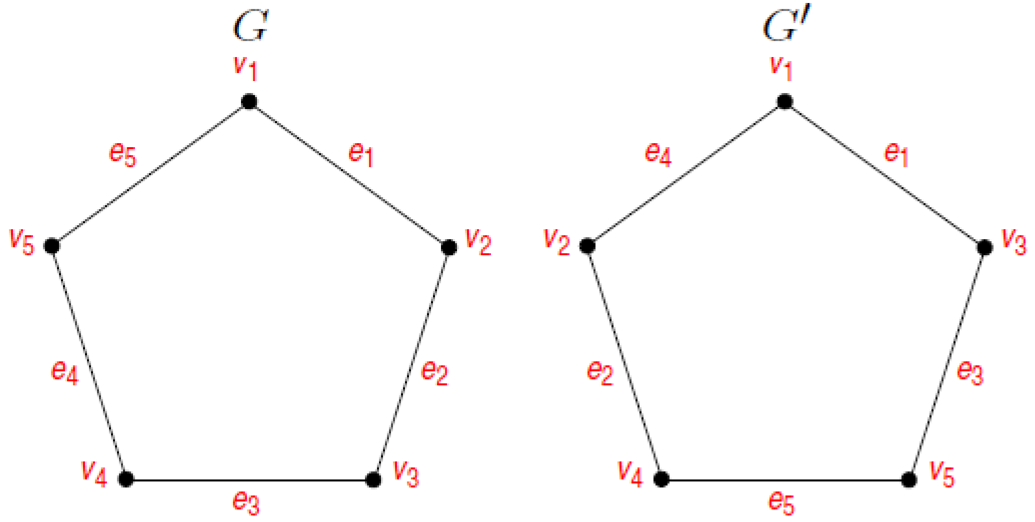
- Os grafos abaixo são idênticos:



  – Conjuntos de vértices e arestas são idênticos;
  – Funções aresta-vértice são as mesmas.

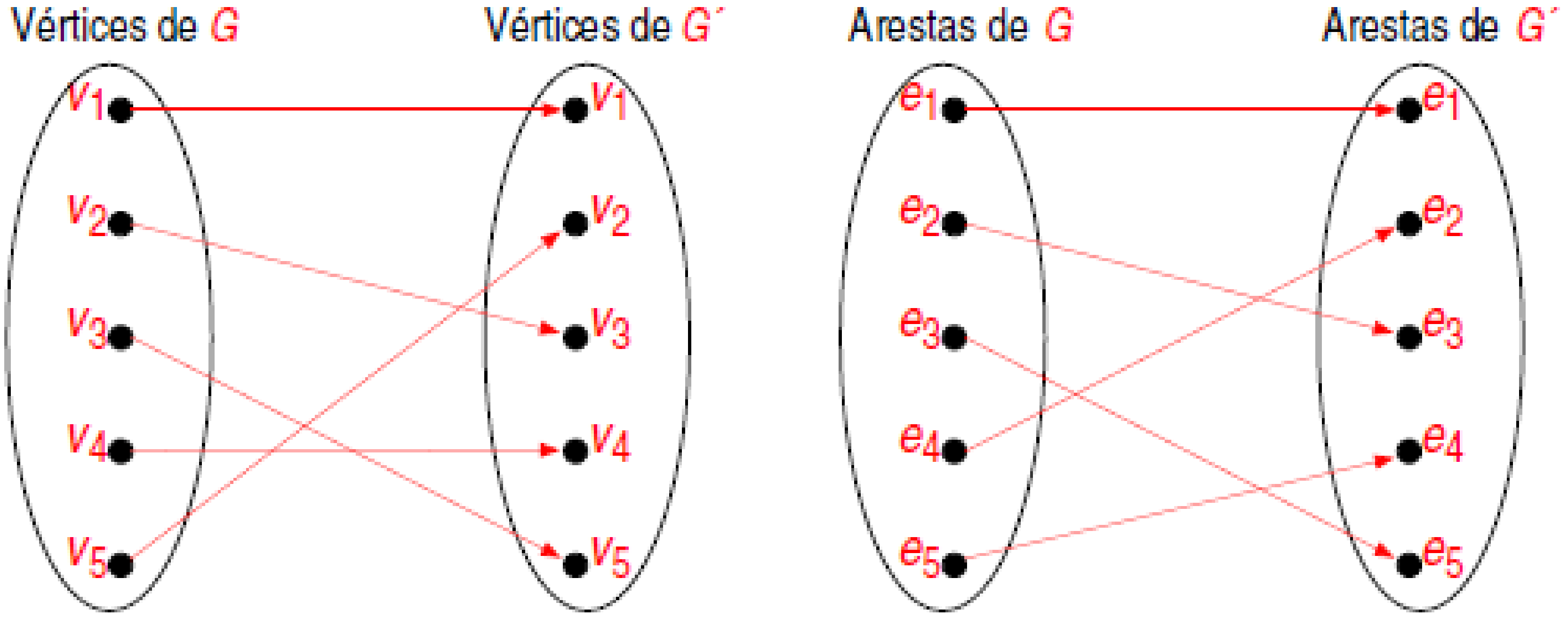
Isomorfismo

- Os grafos abaixo são diferentes:



  - Conjuntos de vértices e arestas são idênticos;
  - Funções aresta-vértice **não** são as mesmas.

Isomorfismo



Isomorfismo

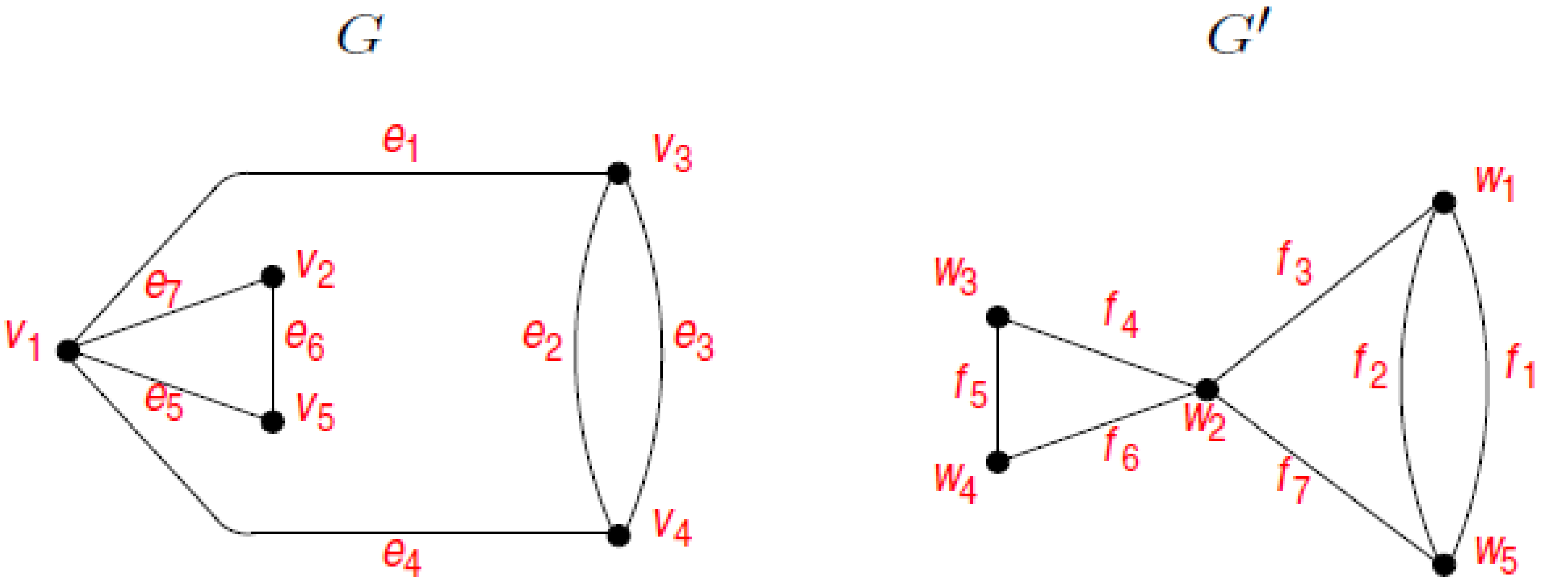
- Sejam os grafos G e G'com conjuntos de vértices $V\ (G)$ e V (G') e com conjuntos de arestas E(G) e E(G'), respectivamente.
- O grafo G é isomorfo ao grafo G' se e somente se existem correspondências um-para-um:
- $g: V(G) \rightarrow V(G')$
- $h: E(G) \rightarrow E(G')$

Isomorfismo

- As correspondência preservam as funções aresta-vértice de G e G' no sentido que
$$\forall v \ \in V(G) \wedge e \ \in E(G)$$
- Onde v é m no terminal de $e \Leftrightarrow g(v)$ é um nó terminal de $h(e)$.

Isomorfismo

- Os grafos



- São isomorfos?

Isomorfismo

- Para resolver este problema devemos encontrar funções

$$g: V(G) \to V(G')$$

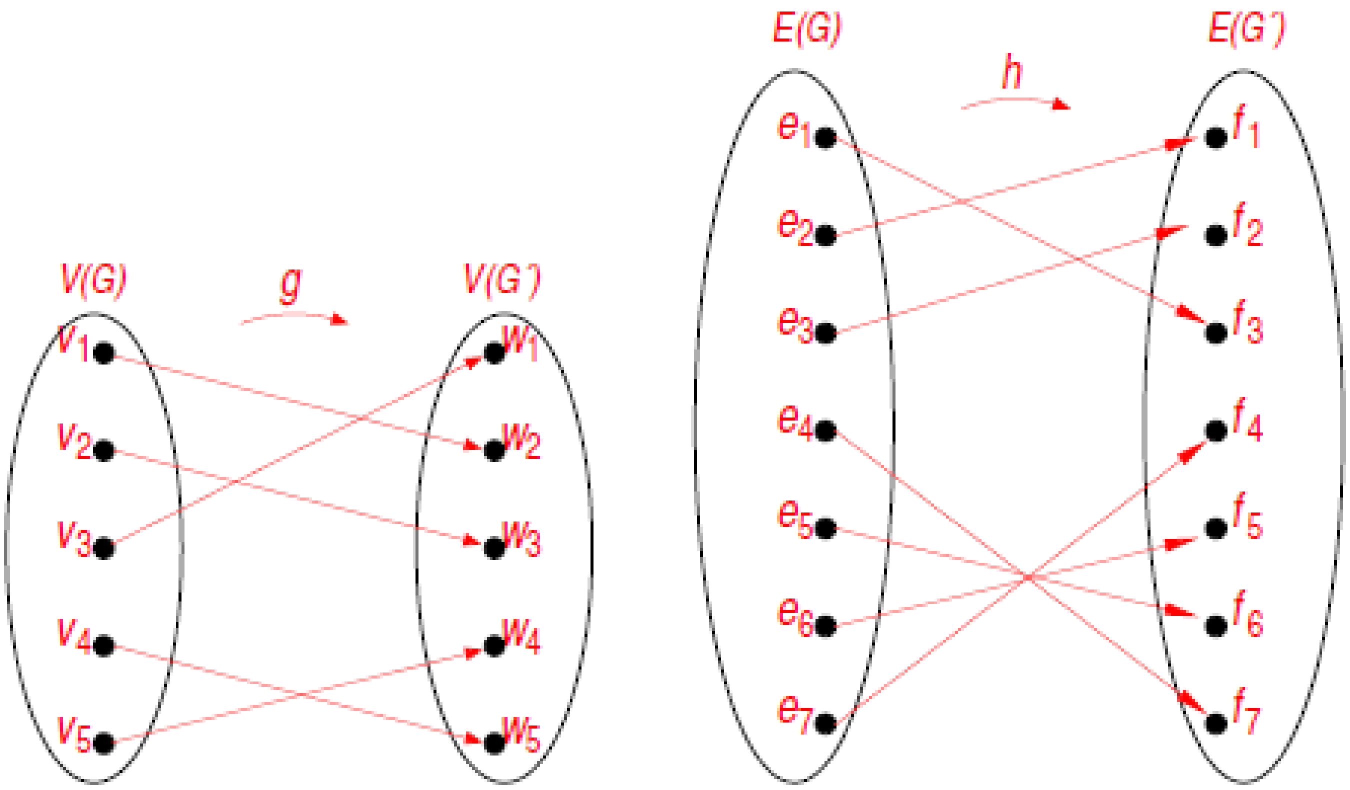
- e

$$h: E(G) \to E(G')$$

- tal que exista a correspondência como mencionado anteriormente.

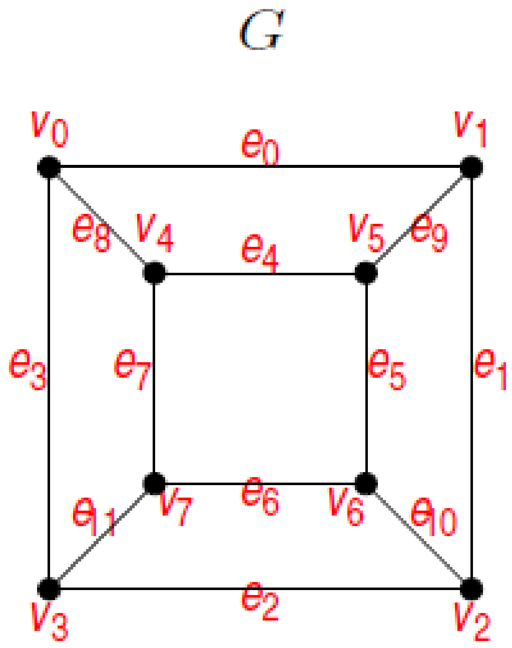
Isomorfismo

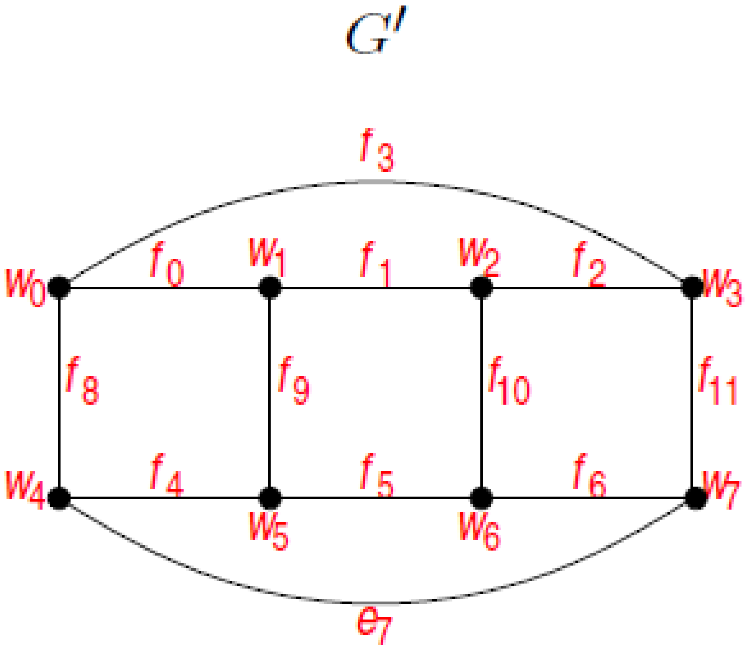
- Grafos G e G' são isomorfos.



Isomorfismo

- Os grafos

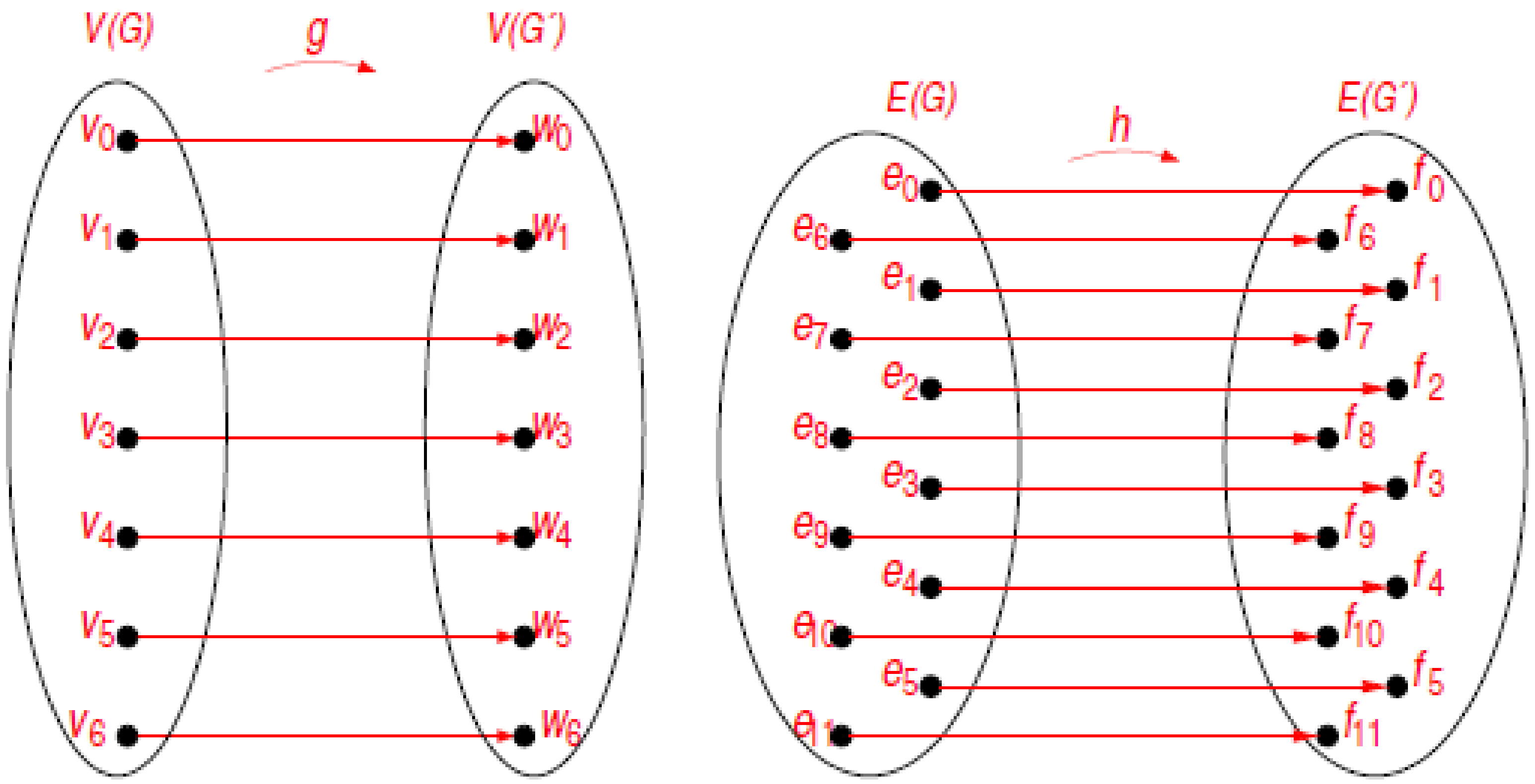




- São isomorfos?

Isomorfismo

- Grafos G e G' são isomorfos.

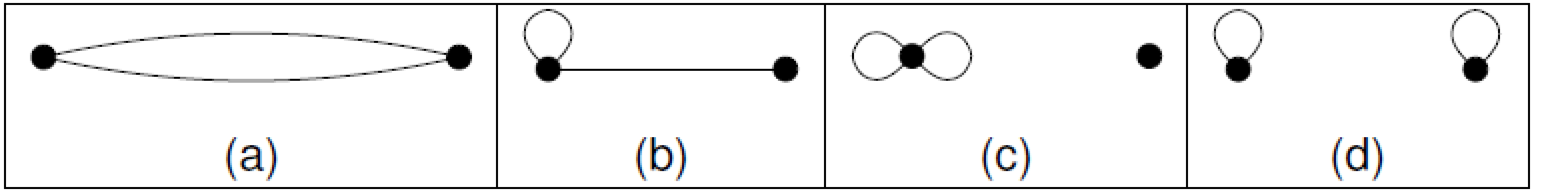


Isomorfismo

- Isomorfismo de grafos é uma relação de equivalência no conjunto de grafos.
- Informalmente, temos que esta propriedade é:
  - Reflexiva: Um grafo é isomorfo a si próprio.
  - Simétrica: Se um grafo G é isomorfo a um grafo G'então G' é isomorfo a G.
  - Transitiva: Se um grafo G é isomorfo a um grafo G' e G' é isomorfo a G'' então G é isomorfo a G''.

Isomorfismo

- Ache todos os grafos não isomorfos que têm dois vértices e duas arestas.



- Existe um algoritmo que aceita como entrada os grafos G e G' e produz como resultado uma afirmação se estes grafos são isomorfos ou não?
  – Sim. Gere todas as funções g e h e determine se elas preservam as funções aresta–vértice de G e G'.

Isomorfismo

- Se G e G' têm cada um n vértices e m arestas, o número de funções g é $n!$ e o número de funções h é $m!$, o que dá um número total de $n! \; \cdot m!$ funções.
- Exemplo para $\mathrm{n} = \; m \; = \; 20$.
  - Temos $20! \; \cdot \; 20! \;\; 5,9 \; \times \; 1036$ pares a verificar.
  - Assumindo que cada combinação possa ser achada e calculada em apenas 1µs, seria necessário aproximadamente $1,9 \; \times \; 10^{23}$anos para terminar a computação nesse computador

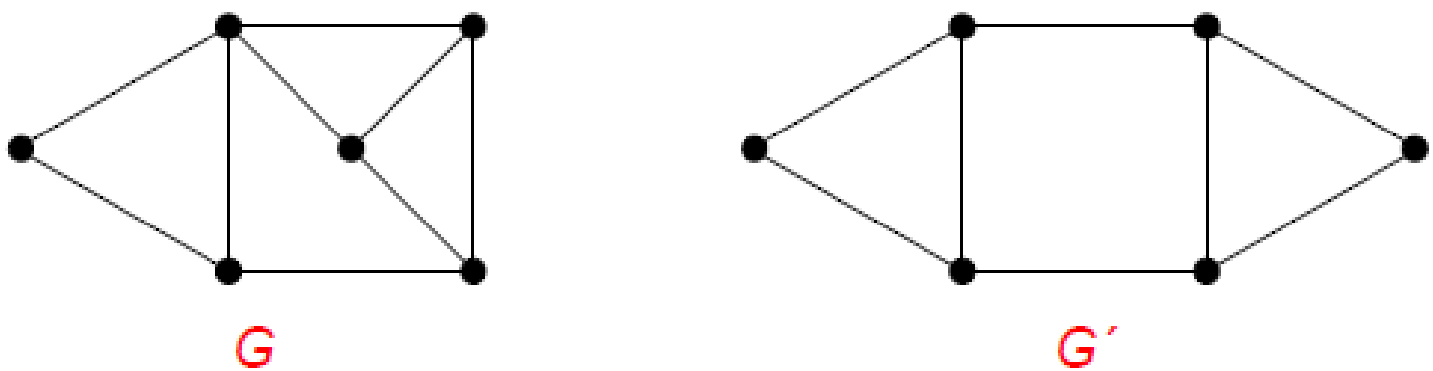
Isomorfismo

- **<u>Teorema:</u>** Cada uma das seguintes propriedades é uma invariante para isomorfismo de dois grafos G e G', onde n, m e k são inteiros não negativos:

1. Tem n vértices;
2. Tem m arestas;
3. Tem um vértice de grau k;
4. Tem m vértices de grau k;
5. Tem um circuito de tamanho k;
6. Tem um circuito simples de tamanho k;
7. Tem m circuitos simples de tamanho k;
8. É conexo;
9. Tem um circuito Euleriano;
10. Tem um circuito Hamiltoniano.

Isomorfismo

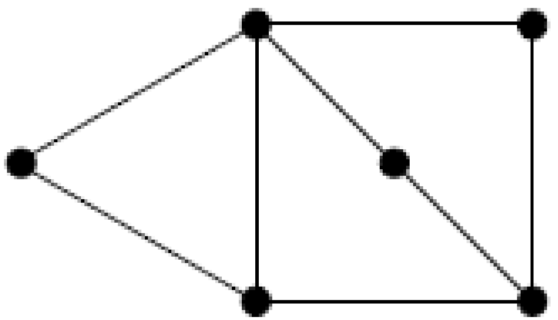
- Os grafos



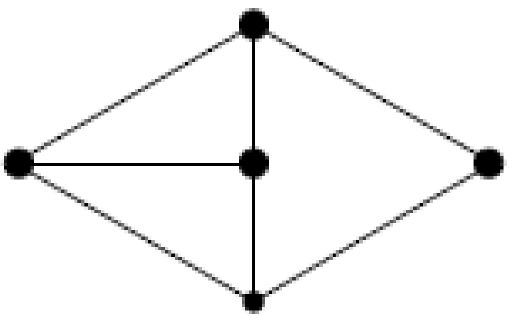
- São isomorfos?
  - Não. G tem nove arestas e G' tem oito arestas.

Isomorfismo

- Os grafos



H

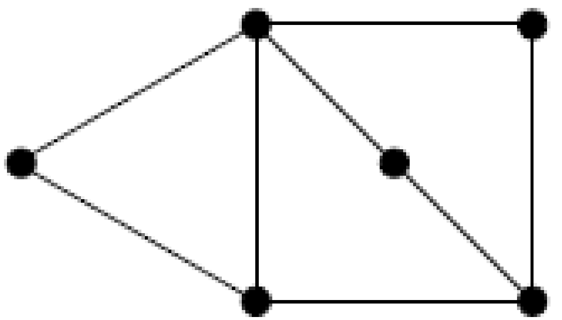


H´

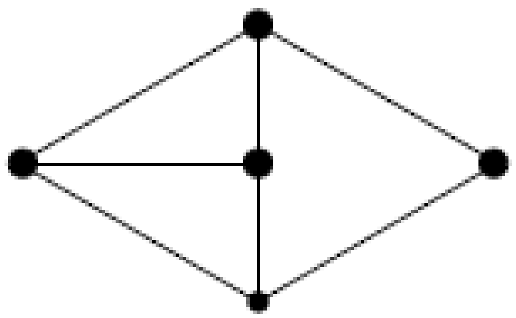
- São isomorfos?
  - Não. H tem um vértice de grau 4 e H' não tem.

Isomorfismo

- Os grafos



H



H'

- São isomorfos?
  - Não. H tem um vértice de grau 4 e H' não tem.

Isomorfismo

- Se G e G' são grafos simples (sem arestas paralelas e sem laços) então G é isomorfo a G' se e somente se existe uma correspondência g um-para-um do conjunto de vértices V (G) de G para o conjunto de vértices V (G') de G' que preserva a função aresta–vértice de G e de G' no sentido que

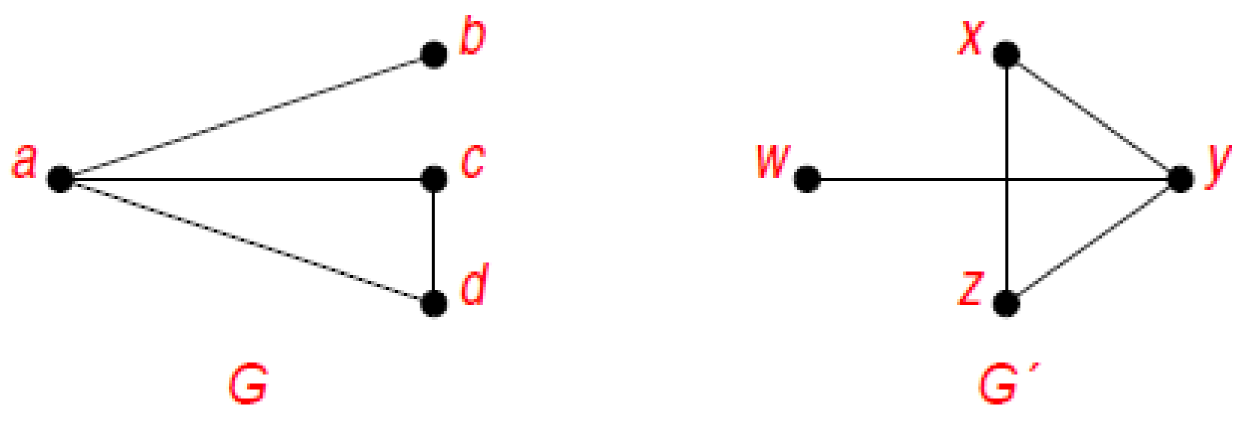
$$\forall \text{ vértices } u, v \in G$$

$$uv \text{ é uma aresta de } G \Leftrightarrow \{g(u), g(v)\} \text{ é uma aresta de } G'$$

uni-bh A MARCA DA EDUCAÇÃO

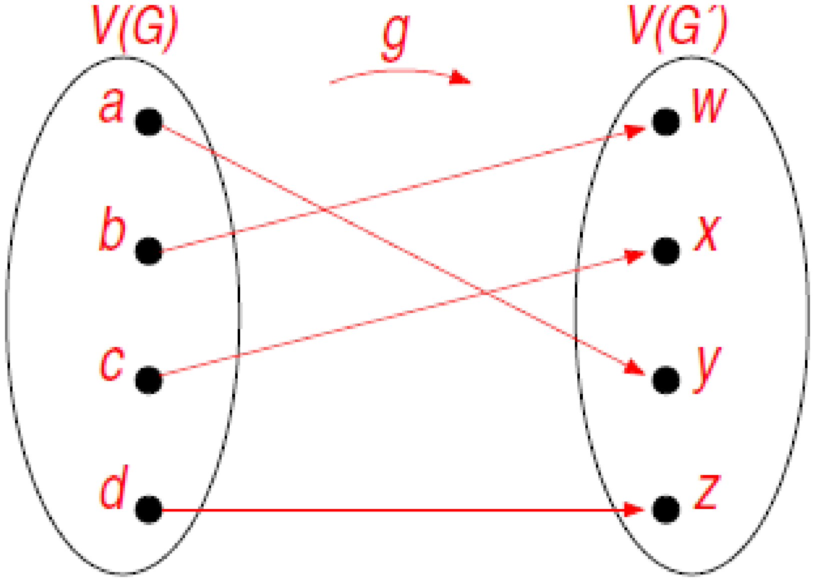
Isomorfismo

- Os grafos



- São isomorfos?
  - Sim.

Isomorfismo



Arestas de G	Arestas de G'
ab	$yw = \{g(a), g(b)\}$
ac	$yx = \{g(a), g(c)\}$
ad	$yz = \{g(a), g(d)\}$
cd	$xz = \{g(c), g(d)\}$

Perguntas

?