Cálculo Numérico
Aula Prática: Sistemas Lineares
Prof$^{\text{a}}$ Dayanne Gouveia

1 Sistemas Lineares

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z & = 10 \\ -x + 3y + 2z & = 5 \\ x - y - z & = -1 \end{cases} \tag{1}$$

Este sistema pode ser reescrito em forma de matriz $Ax = B$, de forma que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1.1 Resolução de Sistemas Lineares utilizando o MATLAB

1.1.1 Divisão de matrizes

A solução do sistema $Ax = B$ pode ser calculada pela divisão de $A \setminus B$. No MATLAB os comandos são:

- $A = [3 \;\; 2 \;\; -1; \;\; -1 \;\; 3 \;\; 2; \;\; 1 \;\; -1 \;\; -1];$
- $B = [10; 5; -1];$
- x =A\ B.

O vetor x contém os seguintes valores: -2, 5, -6. Para verificar se a resposta está correta basta fazer a multiplicação $A.x$ e verificar se o resultado é vetor B.

1.1.2 Matriz Inversa

O sistema linear pode ser resolvido usando a matriz inversa. Dado o sistema linear $Ax = B$, então o vetor x é dado por $x = A^{-1}B$. Assim, os comandos do MATLAB para resolver o sistema utilizando matriz inversa é dado por:

- $A = [3 \;\; 2 \;\; -1; \;\; -1 \;\; 3 \;\; 2; \;\; 1 \;\; -1 \;\; -1];$
- $B = [10; \; 5; \; -1];$
- $x = inv(A) * B.$

1.1.3 Exercícios

1. Resolva os sistemas de equações lineares utilizando divisão de matrizes e matriz inversa:

a) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 & = 6,90 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 & = -6,60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 10,20 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 & = -12,30 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2 + x_4 & = 3 \end{cases}$$

2 Métodos Diretos

Os métodos diretos determinam a solução de um sistema linear com um número finito de operações. Na pasta CodigosMatlab estão dois procedimentos implmentados: SubRetroativa.m e EliminacaoGauss.m.

O procedimento SubRetroativa apresenta a implementação do método de susbtituição retroativa. Teste este método para os seguintes sistemas, use a rotina principal (start.m) para executar os testes.

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 & = 3 \\ x_3 + x_4 & = 2 \\ x_4 & = 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 & = 6 \\ 4x_2 - x_3 & = 5 \\ x_3 & = 4 \end{cases}$$

2.1 Método de Eliminação de Gauss

O procedimento EliminacaoGauss.m apresenta a implementação do método de Eliminação de Gauss usando Susbtituição Retroativa. Teste este método para os seguintes sistemas, use a rotina principal (start.m) para executar os testes.

1. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 & = 6,90 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 & = -6,60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 10,20 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 & = -12,30 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = 5 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 & = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 & = -9 \\ 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 & = 2 \end{cases}$$

4. $\begin{cases} 7x + 2y - 5z & = -18 \\ x + 5y - 3z & = -40 \\ 2x - y + 9z = -26 \end{cases}$

3 Métodos Iterativos

O método iterativo implementado na pasta CodigosMatlab é o jacobi.m.

3.1 Método de Jacobi

Teste o algoritmo, utilizando a rotina principal para os seguintes exemplos:

1. $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^t$ e $\epsilon < 10^{-2}$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 7 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 & = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 & = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 & = -1 \end{cases}$

2. $x^{(0)} = [1 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 3]^t$ e $\epsilon < 10^{-2}$ $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = 5 \\ x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 26 \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 & = -7 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 & = 33 \end{cases}$

Faça novos testes alterando os parâmetros de entrada do algoritmo.

4 Relatório Final

O relatório desta aula deve ser feito seguindo as regras do relatório 1. Exercícios a serem avaliados:

- Descrição dos métodos estudados em sala de aula.
- Escolher os sistemas lineares dados nesta aula pelos métodos de Eliminação de Gauss e o Método de Jacobi, comparar os resultados obtidos pelos métodos.
- No método de Jacobi na linha 24 é apresentado o cálculo do resíduo. Pesquisar o que é este resíduo e o que ele indica.

4.1 Atividade Extra

Esta atividade não vale nota no trabalho, mas será levada em consideração caso o aluno precise de pontos para recuperar a média da avaliação AIA.

- Utilizando as rotinas apresentadas, crie uma nova rotina, chamada SubProgressiva.m. Esta rotina deverá conter a implementação do método de substituição progressiva.
- Utilizando as rotinas apresentadas, crie uma nova rotina, chamada DecomposicaoLU.m. Esta rotina deverá conter a implementação do método de decomposição LU.
- Utilizando as rotinas apresentadas, crie uma nova rotina, chamada GaussSeidel.m. Esta rotina deverá conter a implementação do método de Gauss Seidel.