

Teoria dos Grafos

Marcos Muniz

7 de agosto de 2012

Sumário

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

1 Introdução

2 Conceitos Básicos

3 Aplicações

Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Pode-se dizer que a Teoria dos grafos teve início em 1736.

Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Pode-se dizer que a Teoria dos grafos teve início em 1736.
- Neste ano, o matemático Euler conseguiu solucionar o problema das pontes de Königsberg.

Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Pode-se dizer que a Teoria dos grafos teve início em 1736.
- Neste ano, o matemático Euler conseguiu solucionar o problema das pontes de Königsberg.
- E a partir da solução deste problema surgiu a sub-área da matemática conhecida como Teoria dos grafos.

Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Pode-se dizer que a Teoria dos grafos teve início em 1736.
- Neste ano, o matemático Euler conseguiu solucionar o problema das pontes de Königsberg.
- E a partir da solução deste problema surgiu a sub-área da matemática conhecida como Teoria dos grafos.
- Em 1840, August Ferdinand Möbius criou a idéia de grafo completo e bipartido.

Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Pode-se dizer que a Teoria dos grafos teve início em 1736.
- Neste ano, o matemático Euler conseguiu solucionar o problema das pontes de Königsberg.
- E a partir da solução deste problema surgiu a sub-área da matemática conhecida como Teoria dos grafos.
- Em 1840, August Ferdinand Möbius criou a idéia de grafo completo e bipartido.
- O conceito de árvores foi implementado por Gustav Kirchhoff em 1845.
- Esse conceito foi utilizado para calcular a corrente elétrica em redes ou circuitos.

Problema das Pontes de Königsberg

- Este problema, citado anteriormente foi solucionado por Euler.

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

Problema das Pontes de Königsberg

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Este problema, citado anteriormente foi solucionado por Euler.
- Na cidade de Königsberg, atualmente Kaliningrado, existem 7 pontes que interligam quatro partes de terra.
- O problema das pontes de Königsberg questiona a existência de um trajeto que, tendo qualquer uma das partes de terra como origem, percorra todas as pontes, exatamente uma vez e retorne ao ponto inicial.

Problema das Pontes de Königsberg

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Euler conseguiu resolver este problema.

Problema das Pontes de Königsberg

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Euler conseguiu resolver este problema.
- Ele conseguiu provar que não existia um caminho possível.

Problema das Pontes de Königsberg

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Euler conseguiu resolver este problema.
- Ele conseguiu provar que não existia um caminho possível.
- Este problema hoje também conhecido como Caminho de Euler.

Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

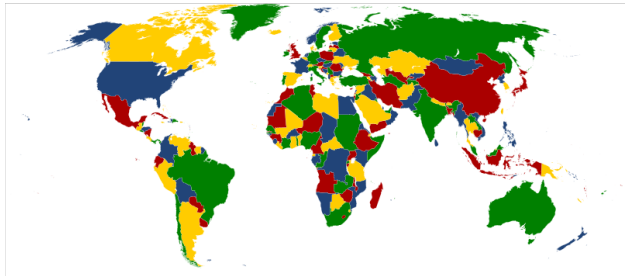
Aplicações

- Em 1852, Thomas Guthrie criou o Teorema das quatro cores.
- O teorema das quatro cores é o seguinte:
- Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

Histórico

- Em 1852, Thomas Guthrie criou o Teorema das quatro cores.
- O teorema das quatro cores é o seguinte:
- Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

Figura: Problema das quatro cores



Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Em 1856, Thomas. P. Kirkman and William R.Hamilton criaram o caminho Hamiltoniano.
- O caminho Hamiltoniano consiste em fazer um percurso por várias cidades, passando por cada cidade exatamente uma vez.

Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Em 1856, Thomas. P. Kirkman and William R.Hamilton criaram o caminho Hamiltoniano.
- O caminho Hamiltoniano consiste em fazer um percurso por várias cidades, passando por cada cidade exatamente uma vez.
- 200 anos depois da solução do problema das pontes de Königsberg foi escrito o primeiro livro sobre teoria dos grafos.

Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Em 1856, Thomas. P. Kirkman and William R.Hamilton criaram o caminho Hamiltoniano.
- O caminho Hamiltoniano consiste em fazer um percurso por várias cidades, passando por cada cidade exatamente uma vez.
- 200 anos depois da solução do problema das pontes de Königsberg foi escrito o primeiro livro sobre teoria dos grafos.
- O livro é "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" escrito por König em 1936.
- Desde então a Teoria dos grafos têm sido desenvolvida como uma ramificação da Matemática com aplicações em diversas áreas.

Histórico

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Em 1856, Thomas. P. Kirkman and William R.Hamilton criaram o caminho Hamiltoniano.
- O caminho Hamiltoniano consiste em fazer um percurso por várias cidades, passando por cada cidade exatamente uma vez.
- 200 anos depois da solução do problema das pontes de Königsberg foi escrito o primeiro livro sobre teoria dos grafos.
- O livro é "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" escrito por König em 1936.
- Desde então a Teoria dos grafos têm sido desenvolvida como uma ramificação da Matemática com aplicações em diversas áreas.
- Em 1969, o problema das quatro cores foi resolvido por Heinrich utilizando computadores.

Conceitos básicos

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Grafo é uma coleção de vértices e arestas.

Conceitos básicos

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Grafo é uma coleção de vértices e arestas.
- Vértice é um objeto simples que pode ter nome e outros atributos.

Conceitos básicos

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

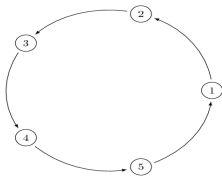
Conceitos
Básicos

Aplicações

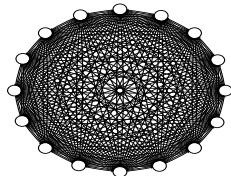
- Grafo é uma coleção de vértices e arestas.
- Vértice é um objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- Aresta é uma conexão entre dois vértices.

Conceitos básicos

- Grafo é uma coleção de vértices e arestas.
- Vértice é um objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- Aresta é uma conexão entre dois vértices.



(a) Um grafo simples.



(b) Um grafo completo com vários vértices.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Provavelmente vocês já se depararam com algum problema resolvido por grafos.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Provavelmente vocês já se depararam com algum problema resolvido por grafos.
- Conseguem citar algum?

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Provavelmente vocês já se depararam com algum problema resolvido por grafos.
- Conseguem citar algum?
- Vamos lá pessoal!

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- As aplicações da teoria dos grafos estão em diversas áreas:

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- As aplicações da teoria dos grafos estão em diversas áreas:
- Estudo de moléculas, construção de ligações em química e estudo de átomos;

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- As aplicações da teoria dos grafos estão em diversas áreas:
- Estudo de moléculas, construção de ligações em química e estudo de átomos;
- Em biologia para estudar a migração de determinadas espécies e o impacto que ela causa em outras espécies;

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- As aplicações da teoria dos grafos estão em diversas áreas:
- Estudo de moléculas, construção de ligações em química e estudo de átomos;
- Em biologia para estudar a migração de determinadas espécies e o impacto que ela causa em outras espécies;
- Em pesquisa operacional: Problema do caixeiro viajante; Problema da árvore geradora mínima; Problema de alocação de recursos;

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- As aplicações da teoria dos grafos estão em diversas áreas:
- Estudo de moléculas, construção de ligações em química e estudo de átomos;
- Em biologia para estudar a migração de determinadas espécies e o impacto que ela causa em outras espécies;
- Em pesquisa operacional: Problema do caixeiro viajante; Problema da árvore geradora mínima; Problema de alocação de recursos;
- Em gerenciamento de projetos com os problemas PERT(Project Evaluation Review Technique) e CPM (Critical Path Method).

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Vários problemas em Ciência da computação podem ser resolvidos através de grafos:

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Vários problemas em Ciência da computação podem ser resolvidos através de grafos:
- Menor caminho de uma rede;

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Vários problemas em Ciência da computação podem ser resolvidos através de grafos:
- Menor caminho de uma rede;
- Encontrar a árvore geradora mínima;

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Vários problemas em Ciência da computação podem ser resolvidos através de grafos:
- Menor caminho de uma rede;
- Encontrar a árvore geradora mínima;
- Encontrar planaridade em grafos;

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Vários problemas em Ciência da computação podem ser resolvidos através de grafos:
- Menor caminho de uma rede;
- Encontrar a árvore geradora mínima;
- Encontrar planaridade em grafos;
- Encontrar matriz de adjacências;

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Vários problemas em Ciência da computação podem ser resolvidos através de grafos:
- Menor caminho de uma rede;
- Encontrar a árvore geradora mínima;
- Encontrar planaridade em grafos;
- Encontrar matriz de adjacências;
- Encontrar conectividade;

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Vários problemas em Ciência da computação podem ser resolvidos através de grafos:
- Menor caminho de uma rede;
- Encontrar a árvore geradora mínima;
- Encontrar planaridade em grafos;
- Encontrar matriz de adjacências;
- Encontrar conectividade;
- Encontrar ciclo em grafos;

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Vários problemas em Ciência da computação podem ser resolvidos através de grafos:
- Menor caminho de uma rede;
- Encontrar a árvore geradora mínima;
- Encontrar planaridade em grafos;
- Encontrar matriz de adjacências;
- Encontrar conectividade;
- Encontrar ciclo em grafos;
- Busca em estruturas de dados (Busca em largura, busca em profundidade);

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Vários problemas em Ciência da computação podem ser resolvidos através de grafos:
- Menor caminho de uma rede;
- Encontrar a árvore geradora mínima;
- Encontrar planaridade em grafos;
- Encontrar matriz de adjacências;
- Encontrar conectividade;
- Encontrar ciclo em grafos;
- Busca em estruturas de dados (Busca em largura, busca em profundidade);
- Entre outros algoritmos...

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Coloração de grafos é um dos principais problemas da teoria dos grafos e utilizado em diversas aplicações de tempo real na Ciência da computação.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Coloração de grafos é um dos principais problemas da teoria dos grafos e utilizado em diversas aplicações de tempo real na Ciência da computação.
- Existem vários métodos de coloração que devem ser usados de acordo com o problema de aplicação.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Coloração de grafos é um dos principais problemas da teoria dos grafos e utilizado em diversas aplicações de tempo real na Ciência da computação.
- Existem vários métodos de coloração que devem ser usados de acordo com o problema de aplicação.
- O problema de coloração de grafos original busca encontrar o número mínimo de cores para colorir vértices e arestas de forma que dois vértices interligados por uma aresta não possuam a mesma cor.
- O número mínimo de cores é chamado de número cromático de um grafo.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

Aplicações

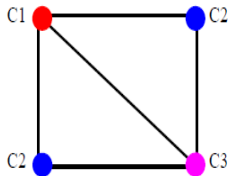
Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações



(a) Coloração de
vértices.

Aplicações

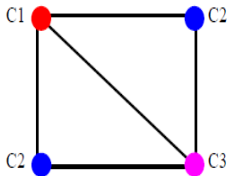
Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

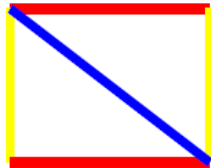
Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações



(a) Coloração de vértices.



(b) Coloração de arestas.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Coloração de grafos não serve apenas para colorir desenhos!!!

Figura: Problema de colorir com giz de cera ;)



- Coloração de grafos para agendamento:

- Coloração de grafos para agendamento:
- Agendamento de tarefas: As tarefas são tratadas como vértices e existe uma aresta entre os vértices se as duas tarefas não podem ser executadas em paralelo.
- Existe uma correspondência 1-1 entre agendamentos viáveis e o problema de coloração de grafos.

■ Agendamento de vôos:

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Agendamento de vôos:
- Supondo que existam k aviões e os mesmos tenham que atender n vôos. O i -ésimo deve ser realizado no intervalo a_i, b_i . Se dois vôos se sobrepõem então o mesmo avião não pode ser assinalado para os vôos.
- Este problema pode ser modelado por grafos.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Agendamento de vôos:
- Supondo que existam k aviões e os mesmos tenham que atender n vôos. O i -ésimo deve ser realizado no intervalo a_i, b_i . Se dois vôos se sobrepõem então o mesmo avião não pode ser assinalado para os vôos.
- Este problema pode ser modelado por grafos.
- Os vértices correspondem aos vôos.
- Dois vértices serão conectados, se eles correspondem a intervalos de tempo que se sobrepõem.
- Desta maneira, o grafo é um grafo de intervalos que podem ser coloridos em tempo polinomial.

- Problema de quadro de horários:

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Problema de quadro de horários:
- Alocação de turmas e disciplinas a professores é um problema bastante complexo.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Problema de quadro de horários:
- Alocação de turmas e disciplinas a professores é um problema bastante complexo.
- Para m professores e n disciplinas o número p de períodos deve ser encontrado.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Problema de quadro de horários:
- Alocação de turmas e disciplinas a professores é um problema bastante complexo.
- Para m professores e n disciplinas o número p de períodos deve ser encontrado.
- Este é um problema NP-Completo.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Problema de quadro de horários:
- Alocação de turmas e disciplinas a professores é um problema bastante complexo.
- Para m professores e n disciplinas o número p de períodos deve ser encontrado.
- Este é um problema NP-Completo.
- Algumas soluções podem ser criadas utilizando grafos.

Aplicações

Teoria dos
Grafos

Marcos Muniz

Introdução

Conceitos
Básicos

Aplicações

- Problema de quadro de horários:
- Alocação de turmas e disciplinas a professores é um problema bastante complexo.
- Para m professores e n disciplinas o número p de períodos deve ser encontrado.
- Este é um problema NP-Completo.
- Algumas soluções podem ser criadas utilizando grafos.
- Mais adiante a solução deste problema será apresentada ;)