Computação Gráfica

Transformações Geométricas em 3D

Moisés Henrique Ramos Pereira

Introdução

- Transformações geométricas tridimensionais são estendidas a partir de transformações geométricas em duas dimensões quando é considerada a Coordenada z.
  - translação considerando um vetor em três dimensões.
  - escalar um objeto escolhendo fatores de escala para cada uma dos três eixos coordenados.
  - rotações são um pouco mais complicadas.

Coordenadas Homogêneas 3D

- Uma posição tridimensional, expressa em coordenadas homogêneas, é representada por um vetor coluna de 4 elementos;
  - ponto *P(x, y, z)* no espaço tem coordenadas $$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
  - e em coordenadas homogêneas $$P_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix}$$
    - onde $$x = x_h / w$$ $$y = y_h / w$$ $$z = z_h / w$$

w = 0, ponto no infinito

Translação 3D

- Um ponto *P(x, y, z)* no espaço tridimensional é transladado para uma localização *P'(x', y', z')* por meio da adição de fatores de translação t_x, t_y e t_z.

$$x' = x + t_x, \qquad y' = y + t_y, \qquad z' = z + t_z$$

  - em coordenadas homogêneas temos

€

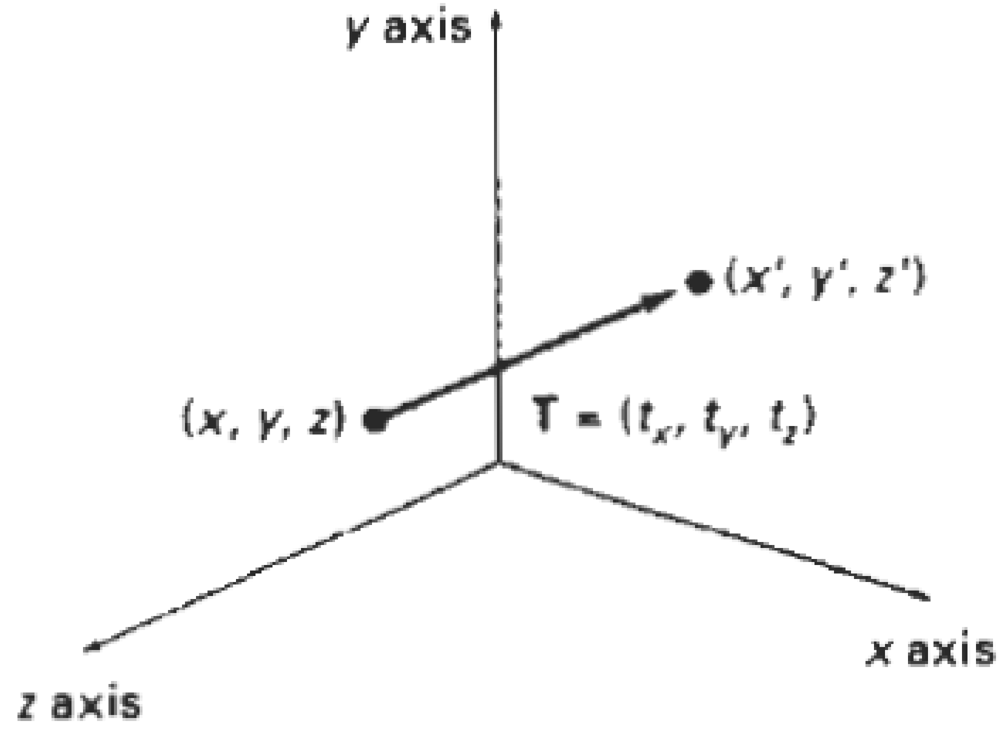
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

    - ou

$$P' = T \,.\, P$$

€

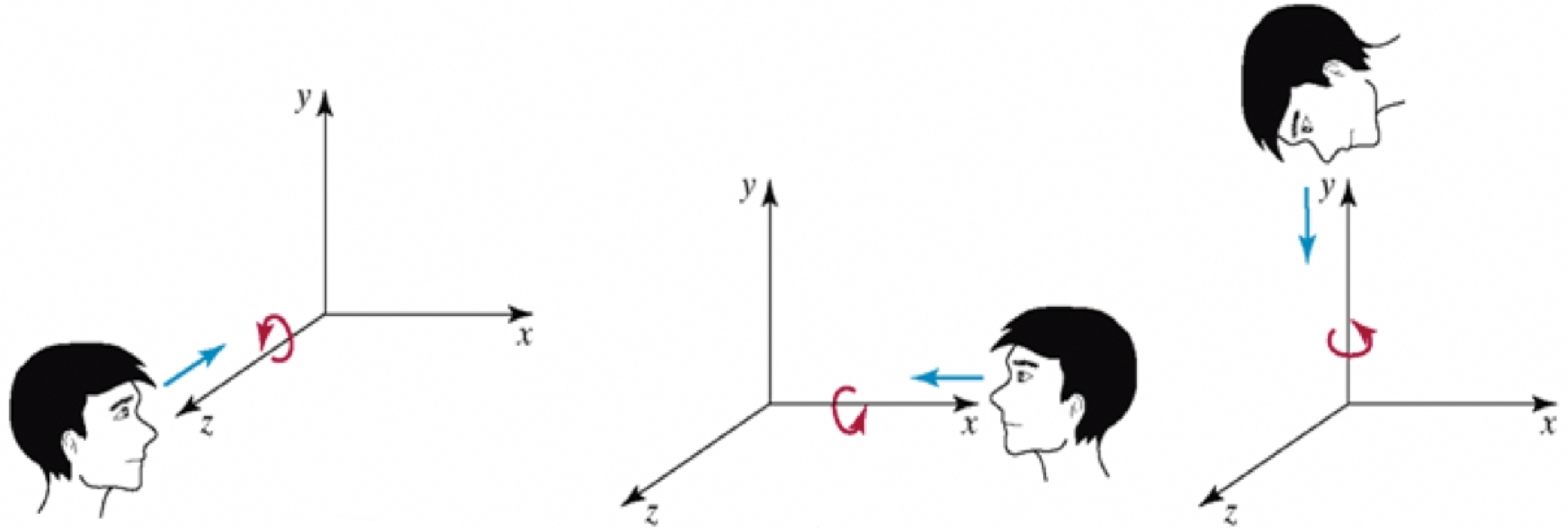
Translação 3D



Rotação 3D

- Um objeto pode ser rotacionado com relação a qualquer eixo no espaço tridimensional, mas rotações com relação aos eixos cartesianos são as mais simples de serem realizadas.

  - é convencionado que ângulos de rotação positivos resultam em rotações anti-horárias.



Rotação 3D

- A rotação bidimensional com relação ao eixo z pode ser facilmente estendida para três dimensões:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = \sin\theta + y\cos\theta$$

$$z' = z$$

  - em coordenadas homogêneas temos

€

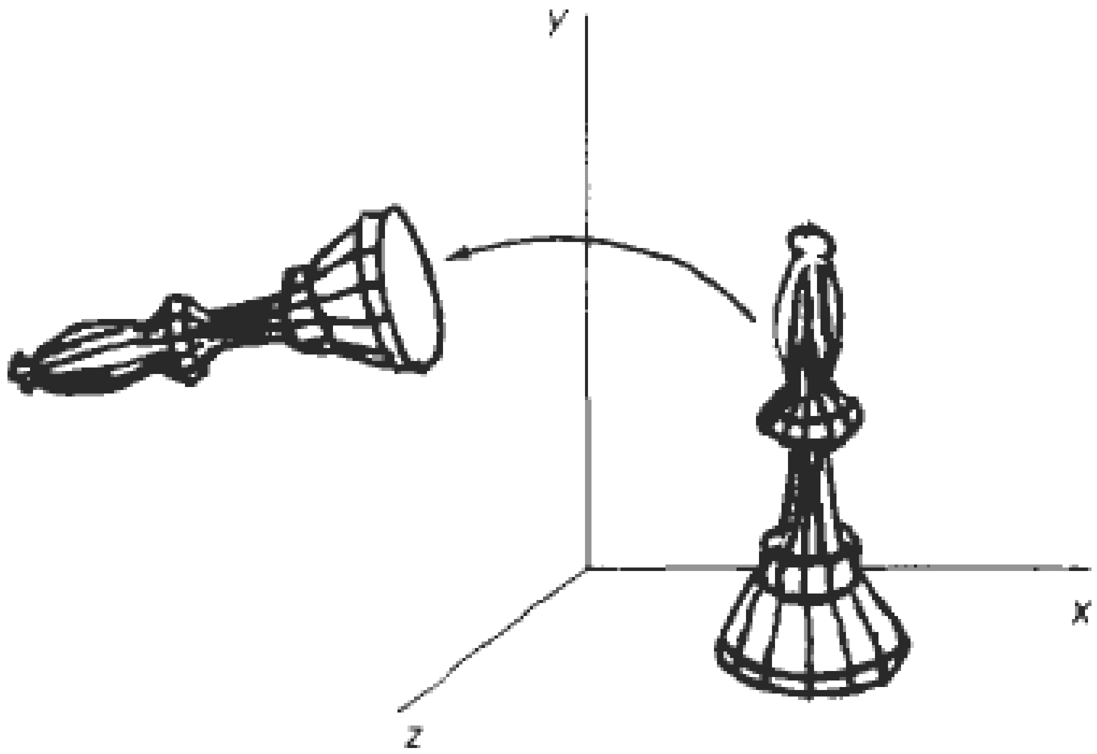
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

    - ou

$$P' = R_z(\theta)\ .\ P$$

Rotação 3D

- Rotação com relação ao eixo z

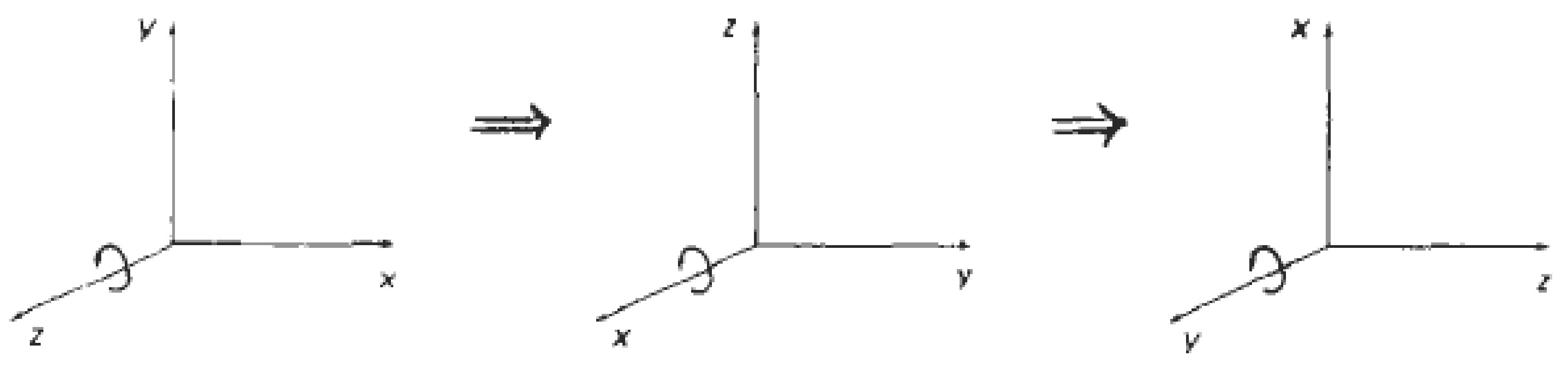


Rotação 3D

- As matrizes de rotação com relação aos demais eixos coordenados pode ser obtida pela permutação dos parâmetros coordenados x, y e z.

$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$$

  - assim, para obter as transformações para os eixos x e y, basta trocar x por y, y por z e z por x, conforme ilustrado abaixo:



Rotação 3D

- Rotação com relação ao eixo *x* em coordenadas homogêneas:

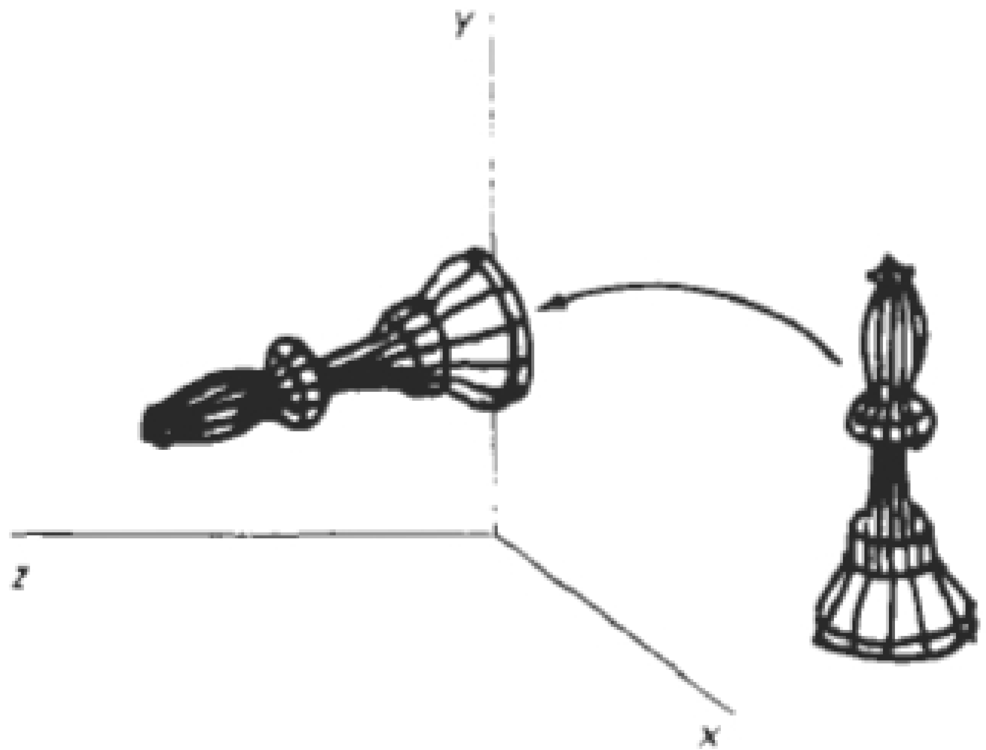
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - ou

$$P' = R_x(\theta)\, P$$

Rotação 3D

- Rotação com relação ao eixo *x*



Rotação 3D

- Rotação com relação ao eixo *y* em coordenadas homogêneas:

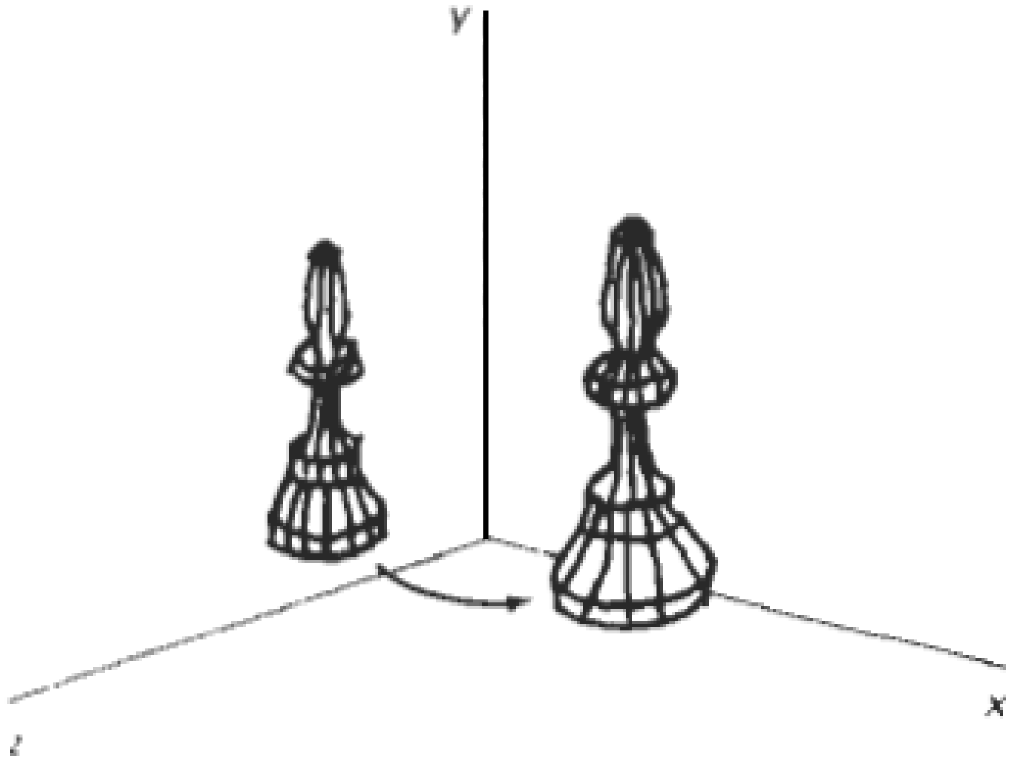
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - ou

$$P' = R_y(\theta) P$$

Rotação 3D

- Rotação com relação ao eixo *y*



Escala 3D

- A representação matricial da transformação de escala no espaço tridimensional é uma simples extensão da transformação de escala em duas dimensões:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - ou

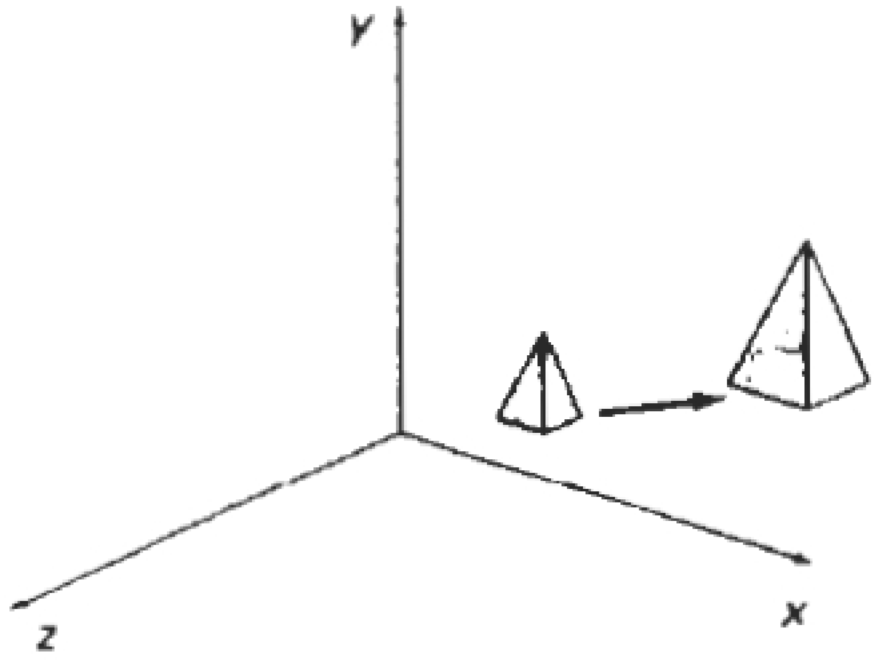
€

$$P' = S \, . \, P$$

€

Escala 3D

- Novamente, fatores de escala maior que 1 afastam o objeto da origem e, fatores menores que 1 aproximam os objetos da origem.



Escala 3D

- Uma vez que muitas bibliotecas gráficas proveem apenas uma rotina de escala com relação à origem, é possível construir uma transformação de escala com relação a qualquer posição fixa (x_f, y_f, z_f) da seguinte forma:

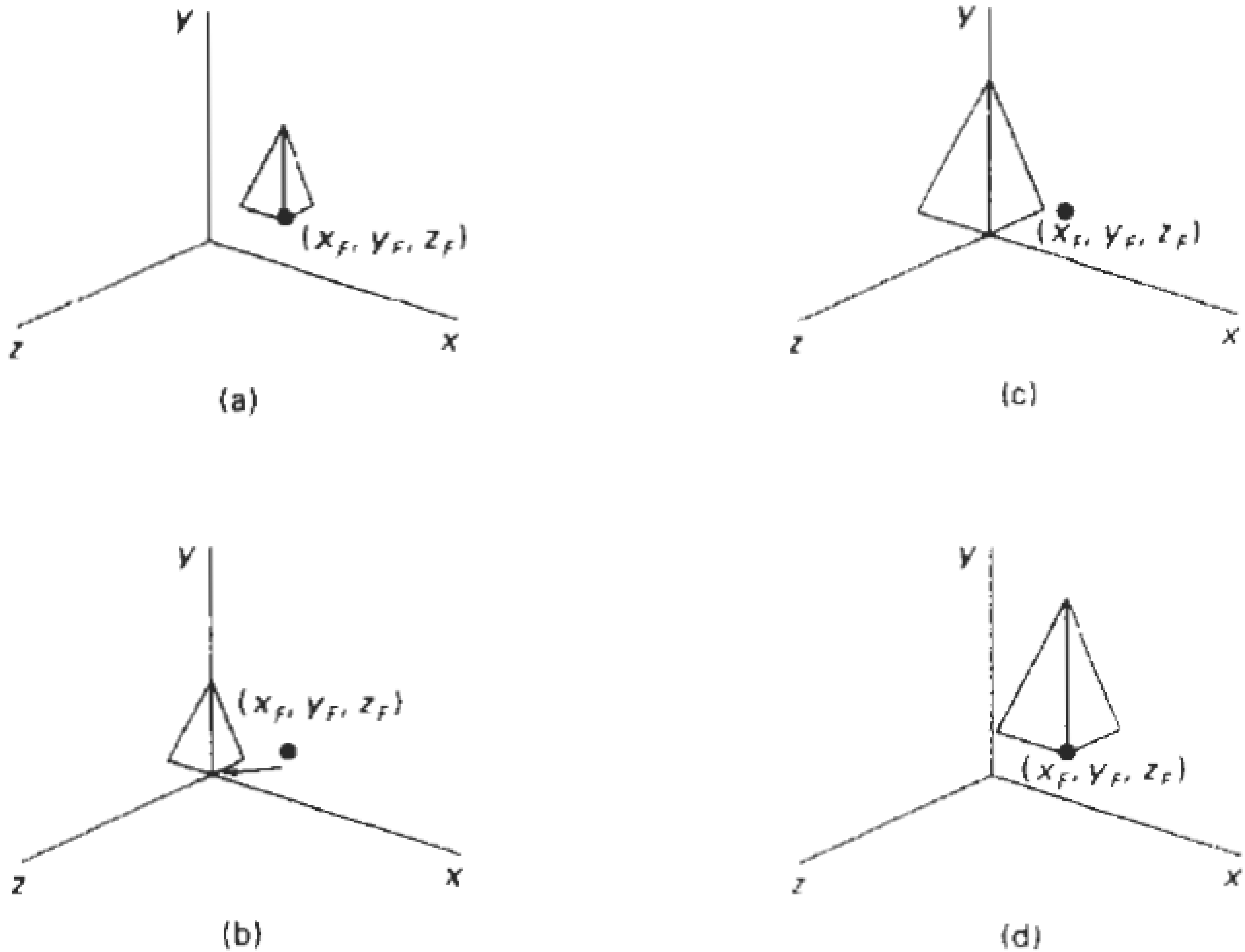
1. translade o ponto fixo para a origem.

2. aplique a transformação de escala desejada utilizando a equação anterior.

3. translade o ponto fixo de volta sua posição original.

$$T(x_f, y_f, z_f) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(-x_f, -y_f, -z_f) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala 3D

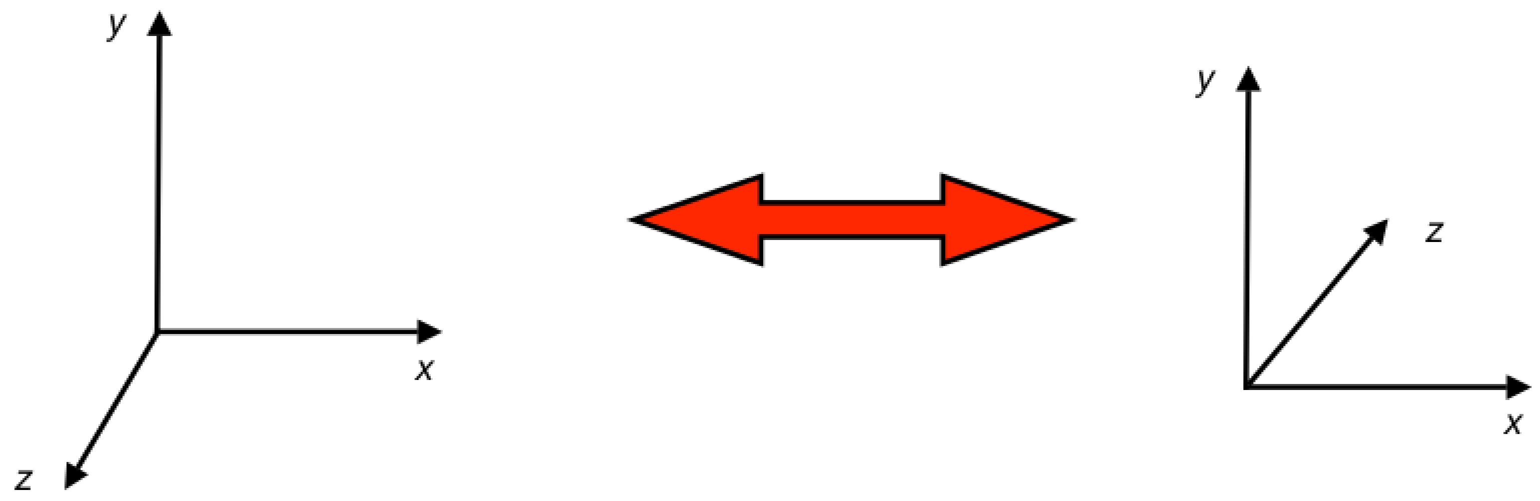


Espelhamento 3D

- O espalhamento ou reflexão no espaço tridimensional pode ser realizado
    - segundo um eixo de reflexão
    - ou segundo um plano de reflexão.
- Matrizes de reflexão 3D são semelhantes àquelas bidimensionais:
    - reflexões segundo um eixo de reflexão correspondem à rotações de 180º ao redor deste eixo.
    - reflexões segundo um plano de reflexão correspondem à rotações de 180º no espaço quadridimensional.

Espelhamento 3D

- Reflexão no plano *xy* converte o sistema de coordenadas do sistema da mão esquerda para o sistema da mão direita
  - inverte o sinal das coordenas z mantendo inalteradas as coordenadas x e y.
  - $$M_{zreflect} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cisalhamento 3D

- A transformação de cisalhamento 3D pode ser utilizada para modificar as formas de objetos assim como em aplicação bidimensionais.

  - no espaço tridimensional, esta transformação geométrica é utilizada em transformações de visualização para projeção de perspectivas.

  - cisalhamentos relativos aos eixos x e y são iguais ao caso bidimensional.

Cisalhamento 3D

- A transformação de cisalhamento no eixo z com relação a uma posição de referencia é dada por:

$$M_{zshear} = \begin{matrix} 1 & 0 & sh_{zx} & -sh_{zx} \times z_{ref} \\ 0 & 1 & sh_{zy} & -sh_{zy} \times z_{ref} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

- o resultado de aplicar esta matriz é a alteração dos valores de x e y de uma quantidade proporcional à distância de z_{ref} enquanto mantém a coordenada z inalterada.

Transformações Afim

- Uma transformação afim é qualquer transformação que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

  - onde $a_{ij}, b_i \in \Re$

€

  - ou

$$x' = a11x + a12y + a13z + b1$$

$$y' = a21x + a22y + a23z + b2$$

$$z' = a31x + a32y + a33z + b3$$

€

Transformações Afim

- Exemplos de transformação afim
  - translação
  - rotação
  - escala
- Exemplos de transformações não afim
  - $x' = x^2, \qquad x' = \dfrac{x}{z}$

Propriedades da Transformação Afim

- Qualquer transformação afim pode ser representada como uma combinação de cinco transformações:
  - translação, rotação, escala, espelhamento ou reflexão e cisalhamento.
- Transformações afim que empregam apenas translação, rotação e reflexão preservam ângulos, comprimentos de linhas e linhas paralelas.
  - linhas paralelas permanecem paralelas.
  - pontos finitos permanecem finitos.