



جبر خطی - تمرین سری دوم

موعد تحويل: ۳۰ فروردین، ساعت ۲۳:۵۹

مدرس: دکتر حامد ملک

نیمسال دوم ۱۴۰۱ - ۱۴۰۰

سوالات تئوری

۱- اگر ماتریس A ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ باشد و $a + b + c$ برابر چیست؟

$$AA^t = \begin{bmatrix} 9 & a & 2 \\ a & 0 & b \\ c & b & 6 \end{bmatrix}$$

۲- اگر $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, ماتریس BA را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۳- فرض کنید دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + ny + z = 3 \\ 6x - 4y - 2z = p \end{cases}$ جواب نداشته باشد، حاصل $m + n$ برابر چیست؟

۴- فرض کنید دو ماتریس A و B دارای مقادیر ویژه $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ و بردار ویژه‌های یکسان مستقل خطی X_1, \dots, X_n باشند، ثابت کنید $A = B$.

۵- اگر B و C و D به ترتیب دارای جفت مقادیر ویژه (α_1, α_2) و (β_1, β_2) و (γ_1, γ_2) باشد، مقادیر ویژه ماتریس A را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

۶- پس از انجام چند عمل سطري مقدماتی روی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ این ماتریس به شده است. حاصل $a + b + c$ را به دست آورید.

۷- تعیین کنید که آیا ماتریس‌های زیر معکوس پذیر هستند یا خیر و اگر معکوس پذیر است، ماتریس معکوس را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

۸- مرتبه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2/3 & 3 & 1/3 \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

-۹ اگر A و B ماتریس های مربعی هم مرتبه باشند به طوری که $AB = B + A$ ، ثابت کنید با فرض وارون پذیری A ، B نیز وارون پذیر است و داریم:

$$A^{-1} + B^{-1} = I$$

-۱۰ اگر A ماتریس مقادیر دستگاه معادلات زیر باشد، X^{2017} را به دست آورید. (X ماتریس جواب های دستگاه است)

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a+1 & b & c \\ a & b+1 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۱۱- فرض کنید $a + b + c = 1$. مقدار y از معادله

امتیازی: در مورد شهود هندسی روش کرامر جستجو کنید و آنچه که متوجه شدید را در قالب چند سطر به زبانی ساده توضیح دهید.
همچنین، می توانید از منابع زیر استفاده کنید:

[ویدیو \(۱۲ دقیقه - به زبان انگلیسی\)](#)

[متن \(۱۰ دقیقه - به زبان فارسی\)](#)

سوالات کامپیوتری

هدف از انجام این تمرین بررسی مفهوم بردار ویژه و ویژگی قطری بودن ماتریس ها به کمک کتابخانه `numpy` در پایتون است. لطفاً برای اینکه تمامی پاسخ ها یک دست باشد، کدهای مربوط با این تکلیف را در محیط `colab` نوشته و لینک عمومی آن را ضمیمه پاسخ های خود کنید.

بخش اول

ماتریس زیر را در نظر بگیرید. مقادیر A^2 و A^3 و چند توان دیگر را به کمک کتابخانه `numpy` محاسبه نمایید و در قالب یک سلول `text`، به زبان فارسی یا انگلیسی توضیح دهید که چه الگویی در توان های مختلف این ماتریس مشاهده می شود؟ چگونه می توان A^n را محاسبه کرد؟ فرمولی برای محاسبه آن ارائه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بخش دوم

به کمک کتابخانه `numpy` کدهایی بنویسید تا:

۱. مستقیماً حاصل ماتریس A^{10} را محاسبه کنید.
۲. به کمک بردارهای ویژه ماتریس A ، حاصل A^{10} را به دست آورید.
۳. جواب به دست آمده از دو قسمت ۱ و ۲ را مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

راهنمایی: بردارهای ویژه ماتریس A به صورت زیر است:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

نکات

فرمت نام‌گذاری فایلنهای ارسالی حتماً به صورت [student id]-[student name] HW2-[student id]-[student name] باشد.
برای نمونه: HW2-12345678-MyName

لينك عمومي نوتبوک و فایل PDF. خود را ضميمه پاسخ‌های بخش تئوري کنيد و در نهاييت يك فایل فشرده را با فرمت نام‌گذاري گفته شده در سامانه LMS آپلود نماييد.

هر گونه سوال و ابهام را می‌توانيد در گروه تلگرامي مطرح نماييد.

سلامت و موفق باشيد

تیم حل تمرین