جبرخطی - تمرین اول

عباس یزدان مهر

99243077

01.

$$a \times b = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (2b_3 - b_2)i - (b_3 - b_1)j + (b_2 - 2b_1)k \Rightarrow (2b_3 - b_2)i - (b_3 - b_1)j + (b_2 - 2b_1)k = 3i + j - 5k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b_3 - b_2 = 3 \\ -b_3 + b_1 = 1 \\ b_2 - 2b_1 = -5 \end{cases} \Rightarrow b_1 = b_3 + 1$$

$$a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1 + 2b_2 + b_3 = 7 \Rightarrow (b_3 + 1) + 2b_2 + b_3 = 2b_2 + 2b_3 = 6 \Rightarrow b_2 + b_3 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b_3 - b_2 = 3 \\ b_2 + b_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow + \Rightarrow 3b_3 = 6 \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 2 \\ \Rightarrow b_2 = 1 \\ \Rightarrow b_1 = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow b = (3, 1, 2)$$

02.

$$V_{\text{old}} = \left| \vec{a} . \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \right| = 5 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right| = 5$$

$$V_{\text{new}} = \left| \overrightarrow{(2a + b)} . \left(\overrightarrow{(a - c)} \times \overrightarrow{(a - b + 2c)} \right) \right| = \left| \begin{bmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 & 2a_3 + b_3 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 & a_3 - c_3 \\ a_1 - b_1 + 2c_1 & a_2 - b_2 + 2c_2 & a_3 - b_3 + 2c_3 \end{bmatrix} \right|$$

$$V_{\text{old}} \rightarrow V_{\text{new}} : \left| \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right| \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left| \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right| \xrightarrow{r_1 = 2r_2 + r_1} \left| \begin{bmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 & 2a_3 + b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right|$$

$$\xrightarrow{r_2 = r_2 - r_3} \left| \begin{bmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 & 2a_3 + b_3 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 & a_3 - c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right| \xrightarrow{r_2 = 3r_2} \left| \begin{bmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 & 2a_3 + b_3 \\ 3a_1 - 3c_1 & 3a_2 - 3c_2 & 3a_3 - 3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right|$$

$$\xrightarrow{r_3 = 5r_3} \left| \begin{bmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 & 2a_3 + b_3 \\ 3a_1 - 3c_1 & 3a_2 - 3c_2 & 3a_3 - 3c_3 \\ 5c_1 & 5c_2 & 5c_3 \end{bmatrix} \right| \xrightarrow{r_3 = r_3 + (r_2 - r_1)} \left| \begin{bmatrix} 2a_1 + b_1 & 2a_2 + b_2 & 2a_3 + b_3 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 & a_3 - c_3 \\ a_1 - b_1 + 2c_1 & a_2 - b_2 + 2c_2 & a_3 - b_3 + 2c_3 \end{bmatrix} \right|$$

از خواص دترمینان استفاده میکنیم

$$||V_{\text{old}}|| = 3 * 5 * ||V_{\text{new}}|| = 75$$

03.

الف) بله با توجه به قضیه ی زیرفضا فقط باید اثبات کنیم که نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است

نسبت به ضرب اسکالر بسته است چون دو عدد که برابرند ضربشان هم برابر است پس رابطه ی گفته شده نسبت به ضرب بسته است و جمع هم فرق چندانی نمی کند و رابطه ی تساوی همچنان برقرار خواهد بود

ب)خیر این مجموعه بردارها(توابع)نسبت به جمع بسته نیستند مثال نقض آن در زیر آورده شده

$$f_1(x) = x - 1, f_2(x) = -x - 1 \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = f(x) = -2 \qquad f(-1) = -2 \neq 0 \wedge f(1) = -2 \neq 0$$

04.

$$u_1 = v_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 = u_2 - \left(\frac{u_2. v_1}{v_1. v_1}\right) v_1 = x - \left(\frac{\int_0^1 x}{\int_0^1 1}\right) 1 = x - \frac{1}{2} \\ v_3 = u_3 - \left(\frac{u_3. v_1}{v_1. v_1}\right) v_1 - \left(\frac{u_3. v_2}{v_2. v_2}\right) v_2 = x^2 - \left(\frac{\int_0^1 x^2}{\int_0^1 1}\right) 1 - \left(\frac{\int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3} - \left(\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = 1,$$

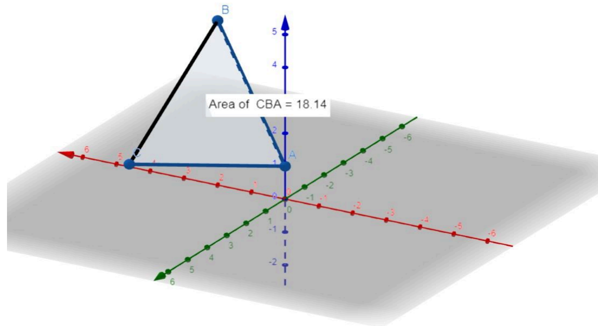
$$w_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right),$$

$$w_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2}} = \sqrt{180} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

05.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left| \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} \right| = -32i - 6j + 16k$$

$$A = \frac{1}{2} \left|\left|V\right|\right| = \frac{1}{2} \sqrt{32^2 + 6^2 + 16^2} = \sqrt{256 + 9 + 64} = \sqrt{329} = 18.14$$



06.

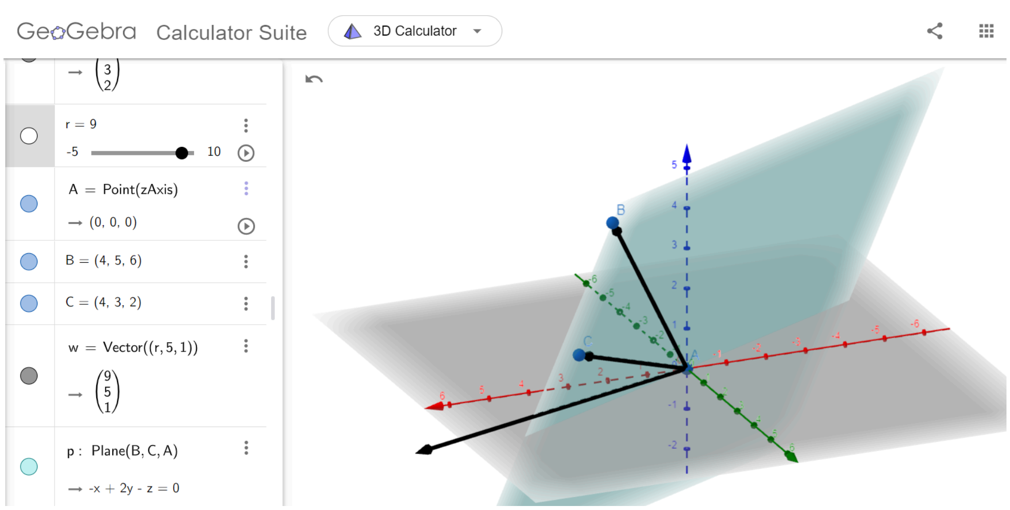
فضای برداری نیست چون خاصیت جابه جایی در جمع را به درستی برآورده نمی کند مثال نقض

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{1}{x} \\ g(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow f(x) + g(x) = f(g(x)) = -\frac{1}{x^2} \neq g(x) + f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2}$$

07.

ابتدا صفحه ی دو بردار مشخص را می یابیم و سپس کاری می کنیم که بردار سوم هم در صفحه ی آنها باشد این گونه دیگر ترکیب خطی بردار ها نمی توانند بیش از همان صفحه از فضا را پوشش دهند

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \overset{\text{xX} \quad + \text{yY} \quad = z}{\begin{cases} 4X + 5Y = 6 \\ 4X + 3Y = 2 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} X = -1 \\ Y = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 2y - x \Rightarrow \text{Plane}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2y - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 5 \\ 2(5) - r = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r = 9$$



08.

هر دو مجموعه می توانند شامل اعداد مختلط شوند که در فضای حقیقی وجود ندارند

- $v_1 = (0, 1, i) \in H,\ k = 1 \Rightarrow k.v_1 = (0, 1, i) \notin R^3$

- $v_2 = (i, i, 1) \in W, k = 1 \Rightarrow k.v_2 = (i, i, 1) \notin R^3$

09.

$$E = \left\{ u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow v_2 = u_2 - \left(\frac{u_2 . v_1}{v_1 . v_1} \right) v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{1 - 3 + 0 - 1}{1 + 1 + 1 + 1} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, w_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \begin{bmatrix} \frac{7 * 2}{4\sqrt{35}} \\ -\frac{9 * 2}{4\sqrt{35}} \\ \frac{3 * 2}{4\sqrt{35}} \\ -\frac{1 * 2}{4\sqrt{35}} \end{bmatrix}$$

Computer Problems:

01.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Span}(S) = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 \\ 2(k_1 + k_2 + k_3) \\ k_1 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 2q \\ q \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Span}(S) = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + (k_2 + k_3) \\ 2(k_1 - (k_2 + k_3)) \\ k_1 - (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q + p \\ 2(q - p) \\ q - p \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Span}(S) = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - k_3 \\ 2(k_1 - k_2 + k_3) \\ k_1 + k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Link For Computer Problems