



## جبر خطی - تمرین سری سوم

موعد تحويل: ۱۰ خرداد، ساعت ۲۳:۵۹

مدرس: دکتر حامد ملک

نیمسال دوم ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱

### سوالات تئوری

۱- با استفاده از روش تجزیه LU، جواب‌های دستگاه معادلات زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

۲- فرم echelon ماتریس زیر را به دست آورید و ستون‌های pivot و متغیرهای free از ماتریس را مشخص نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

۳- a و b را به گونه‌ای بباید که ماتریس زیر متعامد باشد.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \end{bmatrix}$$

۴- یک ماتریس ۳ در ۵ با رنک ۳ را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

رجوع به جواب معادله  $Ax = b$  بحث کنید. (همیشه / گاهی اما نه همیشه) (یک جواب یکتا / بیشمار جواب / بدون جواب)

فضای ستونی A چیست؟

فضای پوچ A را توصیف کنید.

-۵- ماتریس زیر را در نظر بگیرید و بگویید که چطور با دانستن تمام جواب‌های  $Ax = b$  مشخص می‌شود که بردار  $b$  در فضای ستونی

ماتریس  $A$  می‌باشد؟ سپس بررسی کنید که آیا  $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 28 \\ 14 \end{bmatrix}$  در فضای ستونی  $A$  می‌باشد یا خیر؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

-۶- با استفاده از سری فوریه تابع  $f(x)$  نشان دهید:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

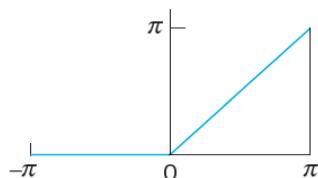
$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

-۷- ضرایب سری فوریه توابع زیر را به دست آورید.

a)  $f(x) = x^2|x - 1| \rightarrow$  if  $-1 < x < 1$

b)



-۸- سری فوریه توابع زیر را به دست آورید. (در قسمت a فرض کنید دوره تناوب  $2\pi$  است).

a)  $f(x) = |x|$

b)  $f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$

-۹- اگر ماتریس  $A$  یک ماتریس  $m^*n$  باشد، در اینصورت ثابت کنید که  $A^T A$  دارای فضای پوچ یکسانی هستند.

۱۰- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

- کمترین مقدار nullity برای یک ماتریس  $3 \times 5$  ۳ است.
- اگر یک ماتریس full rank باشد فضای پوچ ان فقط شامل بردار است.

## سوالات کامپیوتروی

هدف از انجام این تمرین بررسی کاربرد تجزیه ماتریس‌ها (روش SVD) در ریکامندر سیستم‌ها و تا حدی پیاده‌سازی آن، همچنین، آشنایی با کتابخانه `pandas` و `scipy` است. لطفاً از سوال نترسید و با آرامش صورت سوال را تا انتهای بخوانید! هر سوال یا ابهامی نیز داشتید در گروه تلگرامی درس مطرح نمایید. یک نوت‌بوک در کولب بسازید و تمامی کدها و توضیحات خود را در آن قرار دهید.

### قسمت اول

یکی از روش‌هایی که در نوشتمن ریکامندر سیستم‌ها از آن استفاده می‌شود، روش collaborative filtering است. در این روش یک ماتریس از یوزرها و آیتم‌ها (مواردی که قرار است به کاربر پیشنهاد داده شود) ساخته می‌شود و با توجه به شباهت یوزرها یا آیتم‌ها در مورد یوزرها یا آیتم‌های جدید تصمیم‌گیری می‌شود که آیا پیشنهاد شوند یا خیر. برای کسب اطلاعات بیشتر در این خصوص، می‌توانید از [این لینک](#) استفاده کنید.

فرض کنید قرار است برای [Twitch](#) یک ریکامندر سیستم بنویسیم و به کاربران، کanal پیشنهاد دهیم. از روی [این دیتاست](#) یک دیتاست تغییر یافته به شما ارائه می‌شود و در مرحله اول لازم است که شما ماتریس یوزر آیتم را به کمک آن دیتاست تغییر یافته بسازید. دیتاستی که باید با آن کار کنید در [این لینک](#) قابل دسترس است. اگر برایتان سوال بود که این دیتاست تغییر یافته چگونه ساخته شده است در گروه تلگرامی مطرح کنید.

تعداد سطرهای این ماتریس ۹۹۰۸۱ تا است و هر سطر که با عنوان `user_id` مشخص می‌شود یک کاربر را نشان می‌دهد. تعداد ستون‌های این ماتریس ۱۵۰۸۶۷ تا است و هر ستون که با عنوان `streamer_name` مشخص می‌شود نام یک استریمر (در واقع نام یک کanal) را نشان می‌دهد. از آنجایی که نام کanal‌ها به صورت رشته است و ما باید با اعداد کار کنیم، به طریقی نام هر کanal به یک عدد مپ شده است. مثلاً عدد ۴۹۵۳ نشان‌دهنده کanal `alptv` است (اگر تمایل داشتید جزئیات بیشتری در این خصوص بدانید که چگونگه مپینگ انجام شده است در گروه تلگرامی بپرسید). مقادیری هم که در هر سلول از ماتریس قرار می‌گیرد میزان علاقه کاربر به آن کanal را نشان می‌دهد و با عنوان `channel_score` مشخص شده است. عدد ۰ به این معنا است که کاربر هیچ علاقه‌ای به آن کanal ندارد. وظیفه شما این است تا با کمک تابع `csr_matrix` از کتابخانه `scipy` این ماتریس یوزر آیتم را بسازید. همچنین برای خواندن دیتاست و استفاده از آن نیاز دارید تا با کتابخانه `pandas` کار کنید.

پس از ساخت این ماتریس خروجی ماتریس برای کاربر با آی‌دی شماره ۱ به صورت زیر خواهد بود:

user_id: 1	
(0, 4953)	0.0
(0, 12902)	0.0
(0, 36505)	0.12157481821660926
(0, 37614)	0.0
(0, 37985)	0.0
(0, 49120)	1.0572100313479624
(0, 50075)	0.0
(0, 59879)	0.27403846153846156
(0, 63507)	0.0749296408870877
(0, 63611)	0.0
(0, 66867)	0.2860169491525424
(0, 85675)	0.4025607507960449
(0, 95902)	0.4797659377887281
(0, 106869)	0.19927536231884058
(0, 134476)	0.7343358395989975
(0, 137811)	1.132897603485839
(0, 143842)	0.21090790023491077
(0, 149396)	0.27817458028633223
(0, 149653)	0.29627054361567634

توجه: در بسیاری از مواقع ماتریس یوزر آیتم که قرار است ساخته شود sparse است، به همین دلیل ذخیره‌سازی ماتریس به صورت بالا انجام می‌شود.

امتیازی: از ماتریس ساخته شده shape بگیرید و خروجی را گزارش کنید. خروجی به دست آمده با چیزی که انتظار داشتید یکسان است؟ اگر نیست، به نظر شما چرا چنین اتفاقی رخ داده است؟ (راهنمایی: دیتاست تغییر یافته با دیتاست اولیه تفاوت‌هایی دارد.)

## قسمت دوم

تا به اینجا یک ماتریس  $990 \times 867$  ساخته شده است که sparse نیز است! در کاربردهای واقعی تر ماتریس ساخته شده بسیار بزرگ‌تر از چیزی است که در اینجا می‌بینید. حال به کمک روش svd باید ماتریس ساخته شده را تجزیه کنید. برای تجزیه ماتریس از تابع svds از کتابخانه scipy کمک بگیرید. پارامتر k در این تابع مشخص کننده ابعادی است که قرار است ماتریس به آن کاهش داده شود. می‌توانید مقدار آن را به صورت ثابت (مثلاً ۷۵) در نظر بگیرید. پس از تجزیه shape ماتریس‌های U و VT را نمایش دهید. هر کدام از ماتریس‌های U و VT مشخص کننده چه چیزی هستند؟ خروجی کد زیر چه چیزی را نشان می‌دهد؟

```
np.dot(np.dot(U[1], S), VT)
```

صرفاً جهت اطلاعات بیشتر:

از این مرحله به بعد، یکی از کارهایی که می‌توان انجام داد این است که کاربران مشابه یا آیتم‌های مشابه را پیدا کرد و سپس موردی را که لازم است پیشنهاد داد. مثلاً در این مثال می‌توان ۱۰ یوزر شبیه بهم را پیدا کرد و اجتماع کانال‌های این را به هر کدام از این یوزرها پیشنهاد داد. (اگر علاقه‌مند بودید که جزئیات بیشتری بدانید و یا برایتان سوال شده بود که چطور می‌توان این کار را انجام داد می‌توانید در اینترنت جستجو کنید یا در گروه تلگرامی بپرسید.)

## نکات

فرمت نام‌گذاری فایلنهای ارسالی حتماً به صورت [HW3-[student id]-[student name]] باشد.  
برای نمونه: HW3-12345678-MyName

لينك عمومي نوتبوک و فایل PDF. خود را ضميمه پاسخ‌های بخش تئوري کنيد و در نهاييت يك فایل فشرده را با فرمت نام‌گذاري گفته شده در سامانه LMS آپلود نماييد.

هر گونه سوال و ابهام را می‌توانيد در گروه تلگرامي مطرح نماييد.

سلامت و موفق باشيد

تیم حل تمرین