جبرخطی - تمرین دوم

عباس یزدان مهر

99243077

01.

$$B = \mathrm{AA}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} & a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 2 \Rightarrow c = 2 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 0 \Rightarrow a_{21}, a_{22}, a_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow a = b = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0 + 0 + 2 = 2$$

03.

برای اینکه دستگاه جواب نداشته باشد باید مضارب یک معادله ضریبی از مضارب دیگر معادله باشند و این تناسب برای طرف راست تساوی برقرار نباشد پس

$$\frac{m}{6} = \frac{n}{-4} = \frac{1}{-2} \neq \frac{3}{P} \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = 2 \\ P \neq -6 \end{cases} \Rightarrow m + n = -1$$

06.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{r_2 -= 2r_1 \\ r_3 += r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 9 & -12 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{r_3 += 2r_2 \\ r_2 /= -3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 /= 20} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{r_2 += 3r_3 \\ r_1 += 3r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{r}1 -= 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow a + b + c = 2 + 1 - 1 = 2$$

07.

a.

$\det(A) = 1 * 4 - 3 * 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow A$ is nonsingular

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b.

چون ماتریس مربعی نیست پس معکوس پذیری برای آن تعریف نمی شود

c.

$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 1(0) - 0(\ldots) + 2(-1) = -2 \neq 0 \Rightarrow$ is nonsingular

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d.

$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2(1-3) - 0(..) + 1(1+3) = 0 \Rightarrow$ is singular.

08.

$$\begin{bmatrix}0&2&4&2&2\\4&1&0&5&1\\2&1&\frac{2}{3}&3&\frac{1}{3}\\6&6&6&12&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2,/=4}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&0&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\0&2&4&2&2\\2&1&\frac{2}{3}&3&\frac{1}{3}\\6&6&6&12&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2/=2]{r_3-=2r_1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&0&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&2&1&1\\0&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\6&6&6&12&0\end{bmatrix}\xrightarrow[/=6]{*=6}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&0&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&2&1&1\\0&3&4&3&-1\\1&1&1&2&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-=r_1]{r_3-=3r_2}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&0&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&2&1&1\\0&0&-2&1&-4\\0&\frac{3}{4}&1&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-=3r_1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&0&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&2&1&1\\0&0&-2&1&-4\\0&0&1&-3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3/=-2}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&0&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&2&1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&2\\0&0&1&-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-=r_3}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&0&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&2&1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&2\\0&0&0&-\frac{5}{2}&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4*=-\frac{2}{5}}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&0&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&2&1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&2\\0&0&0&1&\frac{6}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=4$$

09.

$$\mathrm{AB}=B+A\Rightarrow\det(\mathrm{AB})=\det(A+B)\Rightarrow\det(A)\det(B)=$$

$$\mathrm{AB}=B+A\Rightarrow A^{-1}(\mathrm{AB}=B+A)\Rightarrow B=A^{-1}B+I\Rightarrow(B=A^{-1}B+I)B^{-1}\Rightarrow I=A^{-1}+B^{-1}$$

11.

$$a+b+c=1\Rightarrow \text{suppose } a=0,b=1,c=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}\Rightarrow 2y=2\Rightarrow y=1$$

روش شهودی کرامر

در این روش به ضرایب مجهولات به عنوان بردار های پایه ای نگاه می شود که قصد داریم با آنها بردار سمت راست تساوی را با ضرب در بردار مجهولات بسازیم که در این کار مثل شهود روش الگوریتم گرام اشمیت از ضرب داخلی استفاده می کنیم و به فرمول های گفته شده در این روش می رسیم

Computer Problems Link