



## Chapitre II – Limites de fonctions

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Limite d'une fonction en un point</b>	<b>1</b>
1. Limite infinie	1
2. Limite finie	3
3. Limites à gauche et à droite	4
4. Asymptote verticale	5
<b>II - Limite d'une fonction en l'infini</b>	<b>6</b>
1. Limite infinie	6
2. Limite finie	7
3. Asymptote horizontale	8
<b>III - Calcul de limites</b>	<b>10</b>
1. Limites de fonctions de référence	10
2. Opérations sur les limites	10
3. Comparaisons et encadrements	12

## I - Limite d'une fonction en un point

### 1. Limite infinie

À RETENIR : FONCTION TENDANT VERS  $+\infty$  EN UN POINT 💡

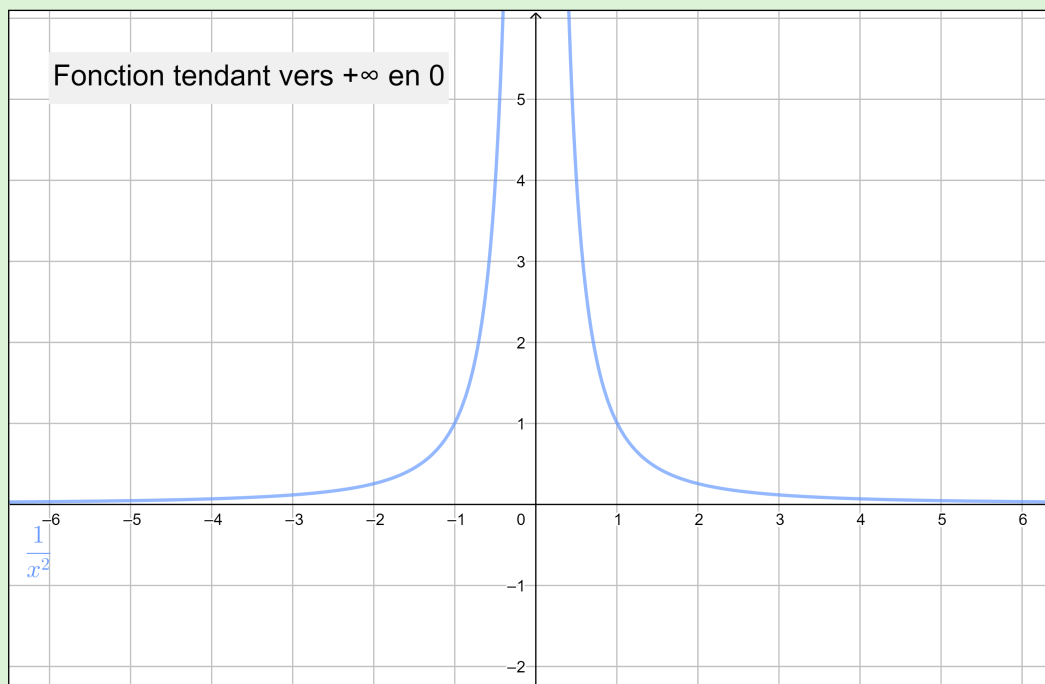
Soit  $f$  une fonction (en classe de Terminale, on se limite aux fonctions réelles) d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ . Soit  $a$  un réel appartenant à  $\mathcal{D}_f$  ou étant une borne de  $\mathcal{D}_f$ .

On dit que  $f(x)$  **tend vers**  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  si  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ .

On note ceci  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

À LIRE : EXEMPLE 📖

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0.



Il est tout à fait possible d'établir une définition similaire pour une fonction tendant vers  $-\infty$  en un point.

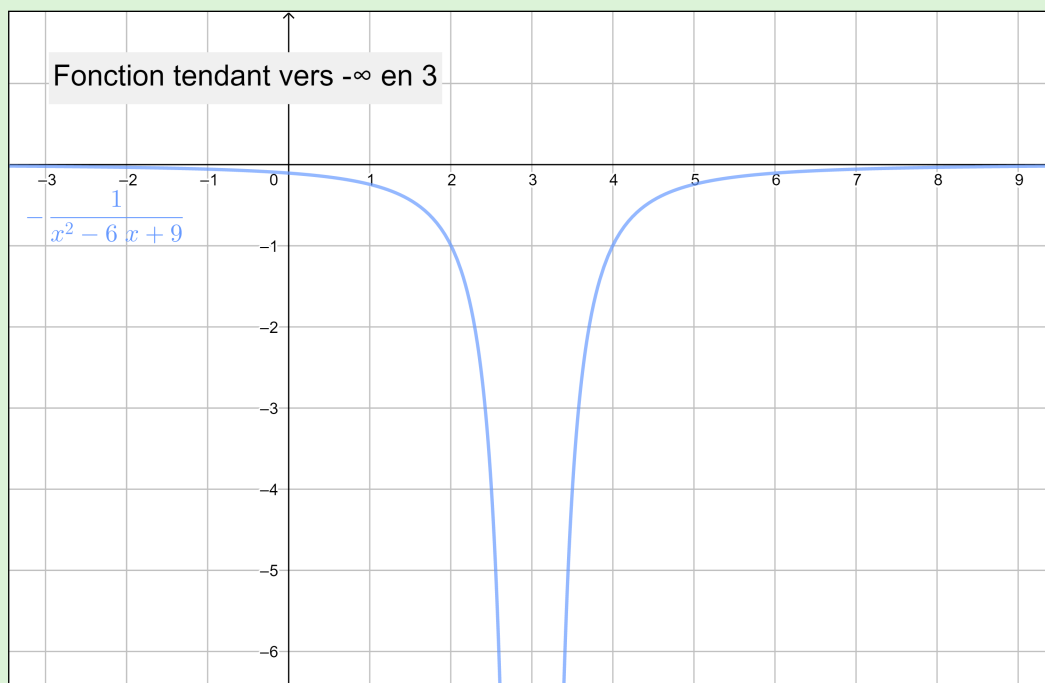
À LIRE : FONCTION TENDANT VERS  $-\infty$  EN UN POINT

En reprenant les notations précédentes, on dit que  $f(x)$  **tend vers**  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  si  $f(x)$  est aussi petit que l'on veut pourvu que  $x$  suffisamment proche de  $a$ .

On note ceci  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

À LIRE : EXEMPLE

La fonction  $f$  définie sur  $] -\infty, 3[ \cup ]3, +\infty[$  par  $f(x) = -\frac{1}{x^2 - 6x + 9}$ , tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers 3.



## 2. Limite finie

### À RETENIR : DÉFINITION

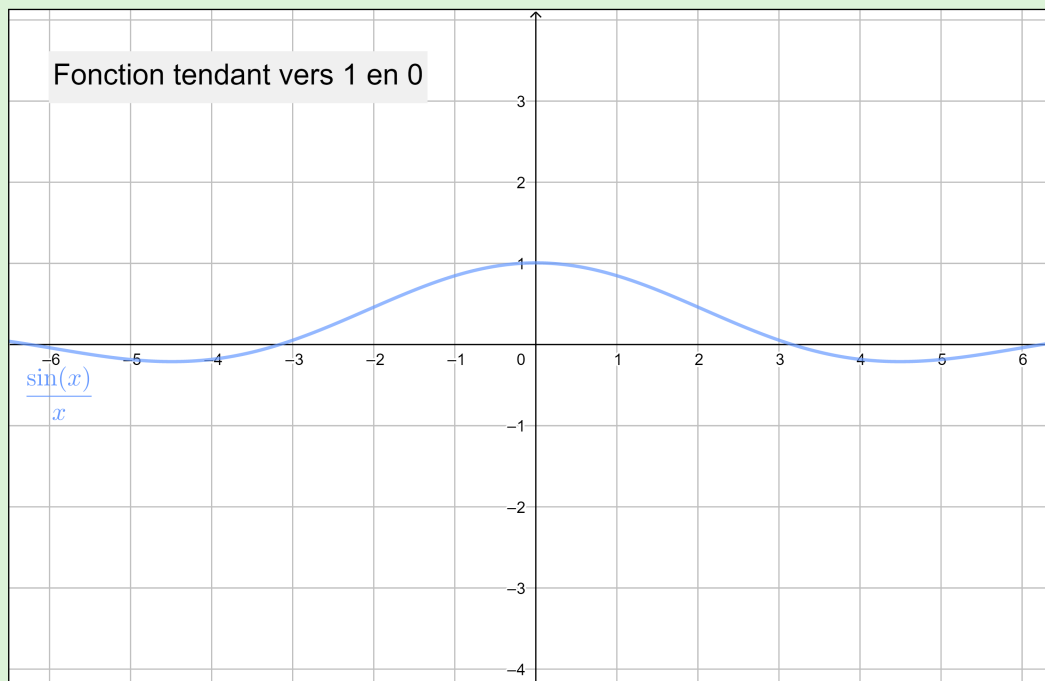
Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ . Soit  $a$  un réel appartenant à  $\mathcal{D}_f$  ou étant une borne de  $\mathcal{D}_f$ .

On dit que  $f(x)$  **tend vers**  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  si  $f(x)$  est aussi proche de  $\ell$  que l'on veut pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ .

On note ceci  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

### À LIRE : EXEMPLE

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ , tend vers 1 quand  $x$  tend vers 0.



Une petite remarque cependant : cette limite n'est pas triviale à démontrer. On peut cependant en proposer une preuve à l'aide de la dérivée de la fonction  $\sin$  (qui est  $\cos$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

### 3. Limites à gauche et à droite

#### À RETENIR : DÉFINITION

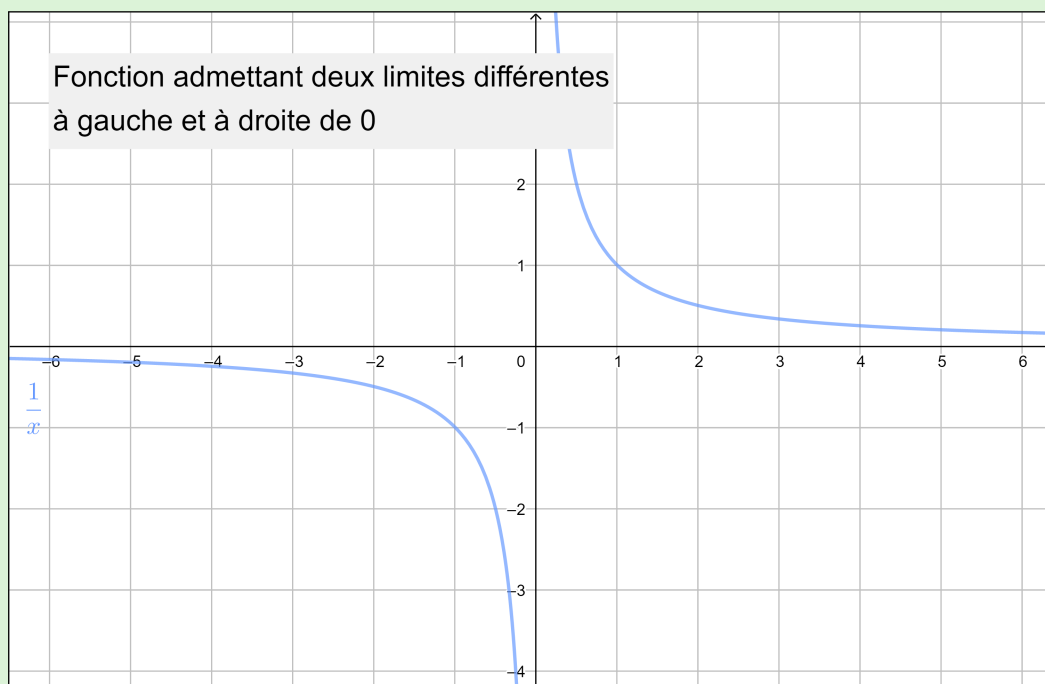
Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ . Soit  $a$  un réel appartenant à  $\mathcal{D}_f$  ou étant une borne de  $\mathcal{D}_f$ .

- On dit que  $f(x)$  admet une **limite à gauche** quand  $x$  tend vers  $a$  si  $f(x)$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $a$  avec  $x < a$ . On la note  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .
- On dit que  $f(x)$  admet une **limite à droite** quand  $x$  tend vers  $a$  si  $f(x)$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $a$  avec  $x > a$ . On la note  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

#### À LIRE : EXEMPLE

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ , admet deux limites différentes à gauche et à droite de 0 :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$



## 4. Asymptote verticale

### À RETENIR : DÉFINITION

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ . Soit  $a$  un réel appartenant à  $\mathcal{D}_f$  ou étant une borne de  $\mathcal{D}_f$ .

Alors si  $f(x)$  admet une limite infinie quand  $x$  tend vers  $a$ , alors la droite d'équation  $x = a$  est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de  $f$ .

### À LIRE : EXEMPLE

En reprenant les exemples précédents :

- Les courbes représentatives des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x}$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  admettent toutes deux une asymptote verticale d'équation  $x = 0$ .
- La courbe de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 3$ .

## II - Limite d'une fonction en l'infini

### 1. Limite infinie

À RETENIR : FONCTION TENDANT VERS  $+\infty$  EN  $+\infty$  💡

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ . On suppose qu'une des bornes de  $\mathcal{D}_f$  est  $+\infty$ .

On dit que  $f(x)$  **tend vers**  $+\infty$  si  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut pourvu que  $x$  soit suffisamment grand.

Comme précédemment, on peut écrire des définitions similaires pour dire que  $f$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

À LIRE : FONCTION TENDANT VERS  $-\infty$  EN  $+\infty$  ☞

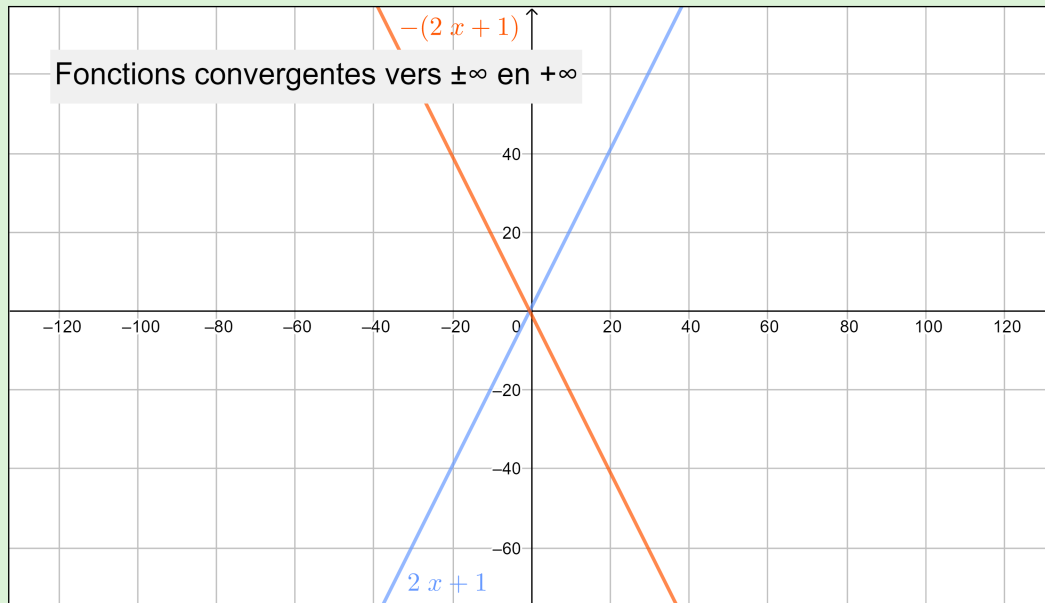
En reprenant les notations précédentes, on dit que  $f(x)$  **tend vers**  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si  $f(x)$  est aussi petit que l'on veut pourvu que  $x$  soit suffisamment grand.

À LIRE : FONCTION TENDANT VERS  $\pm\infty$  EN  $-\infty$  ☞

Pour avoir les définitions quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , il suffit de remplacer “ $x$  suffisamment grand” par “ $x$  suffisamment petit” et il faut qu'une des bornes de  $\mathcal{D}_f$  soit  $-\infty$ .

## À LIRE : EXEMPLE 99

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 1$ , tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Cependant, la fonction  $-f : x \mapsto -2x - 1$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .



## 2. Limite finie

À RETENIR : LIMITE FINIE EN  $+\infty$ 

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ . On suppose qu'une des bornes de  $\mathcal{D}_f$  est  $+\infty$ .

On dit que  $f(x)$  **tend vers**  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si  $f(x)$  est aussi proche de  $\ell$  que l'on veut pourvu que  $x$  soit suffisamment grand.

De même, on peut écrire une définition semblable quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .

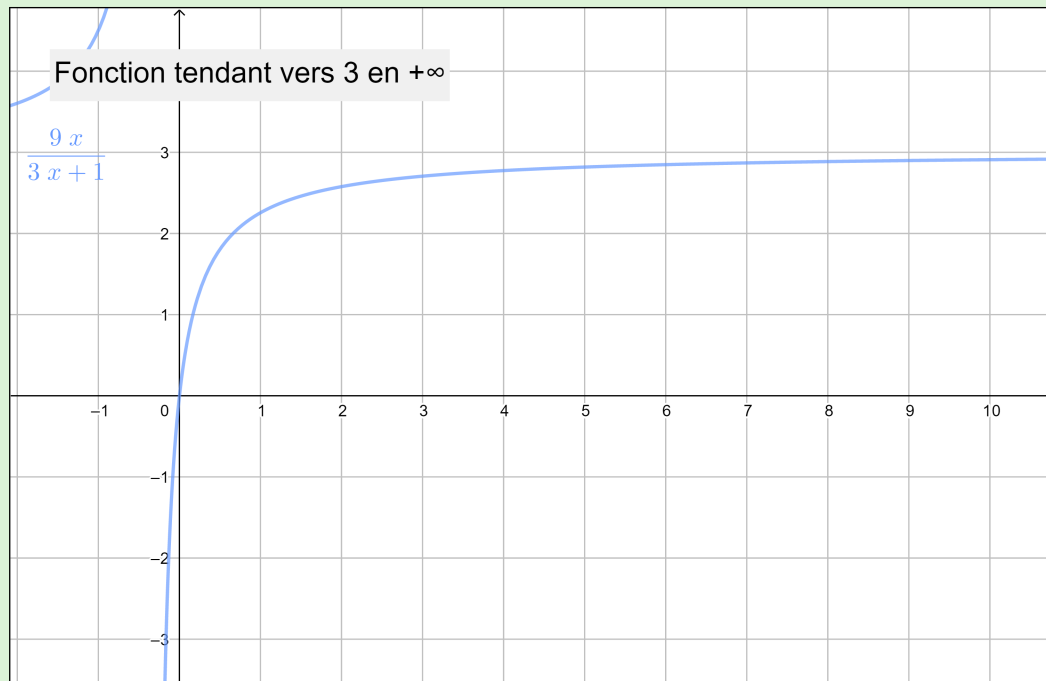
À LIRE : LIMITE FINIE EN  $-\infty$ 

En reprenant les notations précédentes et en supposant qu'une des bornes de  $\mathcal{D}_f$  soit  $-\infty$ , on dit que  $f(x)$  **tend vers**  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si  $f(x)$  est aussi proche de  $\ell$  que l'on veut pourvu que  $x$  soit suffisamment petit.



## À LIRE : EXEMPLE 99

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \frac{9x}{3x+1}$  tend vers 3 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .



## 3. Asymptote horizontale

À RETENIR : DÉFINITION EN  $+\infty$ 

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ . On suppose qu'une des bornes de  $\mathcal{D}_f$  est  $+\infty$ .

Alors si  $f(x)$  admet une limite finie  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , alors la droite d'équation  $y = \ell$  est une **asymptote horizontale** en  $+\infty$  à la courbe représentative de  $f$ .

Comme tout ce que l'on a vu avant, il existe une définition semblable en  $-\infty$ .

À LIRE : DÉFINITION EN  $-\infty$ 

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ . On suppose qu'une des bornes de  $\mathcal{D}_f$  est  $-\infty$ .

Alors si  $f(x)$  admet une limite finie  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , alors la droite d'équation  $y = \ell$  est une **asymptote horizontale** en  $-\infty$  à la courbe représentative de  $f$ .

## À LIRE : EXEMPLE 99

En reprenant l'exemple précédent, la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto \frac{9x}{3x+1}$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 3$  en  $+\infty$ .

De plus, elle admet une asymptote verticale d'équation  $x = -\frac{1}{3}$ .

### III - Calcul de limites

#### 1. Limites de fonctions de référence

Nous allons donner quelques fonctions “classiques” avec leur limite en quelques points.

##### À RETENIR : LIMITES DE FONCTIONS USUELLES

	$a = -\infty$	$a = 0$	$a = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x}$	0	$-\infty$ si $a = 0^-$ , $+\infty$ si $a = 0^+$	0
$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x}$	<b>Non définie</b>	0 si $a = 0^+$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} x^k$	$-\infty$ si $k$ est im- pair, $+\infty$ si $k$ est pair	0	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} e^x$	0	$e^0 = 1$	$+\infty$

##### À LIRE : RAPPEL

On rappelle que  $0^-$  signifie “tend vers 0 mais en restant inférieur à 0” et  $0^+$  signifie “tend vers 0 mais en restant supérieur à 0”.

#### 2. Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit,  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de domaines de définition  $\mathcal{D}_f$  et  $\mathcal{D}_g$ . Soit  $a$  un nombre réel appartenant à  $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$  (ou qui est au moins une borne des deux à la fois). Les tableaux suivants ressemblent beaucoup à ceux qui sont disponibles dans le cours sur les suites donc vous pouvez bien-sûr n'en retenir qu'un des deux, et tenter à partir de là de retrouver l'autre.

##### À RETENIR : LIMITE D'UNE SOMME

<b>Limite d'une somme</b>						
Si la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $a$ est...	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et la limite de $g$ quand $x$ tend vers $a$ est...	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors la limite de $f + g$ quand $x$ tend vers $a$ est...	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>?</b>

## À RETENIR : LIMITE D'UN PRODUIT

Limite d'un produit									
Si la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $a$ est...	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et la limite de $g$ quand $x$ tend vers $a$ est...	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors la limite de $f \times g$ quand $x$ tend vers $a$ est...	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

## À RETENIR : LIMITE D'UN QUOTIENT

Limite d'un quotient									
Si la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $a$ est...	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell$	0
Et la limite de $g$ quand $x$ tend vers $a$ est...	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$	0	0
Alors la limite de $\frac{f}{g}$ quand $x$ tend vers $a$ est...	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$\pm\infty$	?

## À RETENIR : LIMITE D'UNE COMPOSÉE

Si on pose  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ .

## À LIRE : FORMES INDÉTERMINÉES

À noter qu'il n'existe que 4 formes indéterminées : " $+\infty - \infty$ ", " $0 \times \pm\infty$ ", " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ ".

### 3. Comparaisons et encadrements

#### À RETENIR : THÉORÈMES DE COMPARAISON

Soient deux fonctions  $f$  et  $g$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et si  $f \leq g$  à partir d'un certain point, alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et si  $f \geq g$  à partir d'un certain point, alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

#### À RETENIR : THÉORÈME DES GENDARMES

Soient trois fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ . Si on a  $f \leq g \leq h$  à partir d'un certain point, et qu'il existe  $\ell$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ .

#### À LIRE : EXEMPLE

Utilisons ce théorème pour montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Tout d'abord, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ .

Donc, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{-1}{x} \leq \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{=f(x)} \leq \frac{1}{x}$ .

Comme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Le dernier théorème est la “version fonctions” du théorème des gendarmes (que l'on a vu lors du cours sur les suites). Ils permettent notamment de démontrer une partie du **théorème des croissances comparées**.

#### À RETENIR : CROISSANCES COMPARÉES

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## DÉMONSTRATION : CROISSANCES COMPARÉES

Commençons tout d'abord par montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $e^x \geq 1 + x$ . Pour cela, posons  $f : x \mapsto e^x - 1 - x$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = e^x - 1$ . Donc  $f'(x)$  est positif si et seulement si  $e^x - 1 \geq 0$ , c'est-à-dire  $e^x \geq 1$ .

En regardant le graphique de la fonction exponentielle, on trouve que cela est équivalent à  $x \geq 0$ .

Notre fonction est donc croissante sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ , et son minimum est donc atteint en  $x = 0$  et vaut  $f(0) = 0$ . Ainsi, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \geq 0 \iff e^x - 1 - x \geq 0 \iff e^x \geq 1 + x$  : ce que l'on cherchait.

Pour conclure, on utilise une petite astuce. Soit  $n \in \mathbb{N}$  :

D'après ce que l'on vient de faire, pour tout  $x > 0$ ,  $e^{\frac{x}{n+1}} \geq 1 + \frac{x}{n+1} > \frac{x}{n+1}$ . Ainsi, en mettant à la puissance  $n+1$  (qui ne change pas le sens de l'inégalité car les deux membres sont positifs), on a :

$e^x > \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$  Maintenant, on divise les deux côtés par  $x^n$  (qui est un nombre strictement positif) et on obtient :

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$$

Or, le membre de droite tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  donc le membre de gauche aussi d'après les théorèmes de comparaison.