



# Chapitre VI – Géométrie repérée

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Le produit scalaire</b>	<b>1</b>
1. Définition	1
2. Calcul	1
3. Théorème d'Al-Kashi	3
<b>II - Géométrie</b>	<b>5</b>
1. Équation cartésienne d'une droite	5
2. Vecteurs directeurs d'une droite	5
3. Vecteurs normaux à une droite	8
4. Description d'un cercle	9

# I - Le produit scalaire

## 1. Définition

### À RETENIR

#### Définition

Soient  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan (c'est-à-dire possédant chacun deux coordonnées).

Le **produit scalaire** entre  $u$  et  $v$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est le réel suivant :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

### À RETENIR

#### Propriétés

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs du plan et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a les propriétés suivantes :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$

À l'aide du produit scalaire, il est possible de calculer la **norme** d'un vecteur.

### À RETENIR

#### Calcul de la norme

Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur du plan : sa norme (notée  $\|\vec{u}\|$ ) vaut  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### À LIRE

#### Caractéristiques d'un vecteur

On rappelle qu'un vecteur possède 3 caractéristiques :

- Une **norme** (sa longueur, par exemple si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  alors  $\|\vec{u}\| = AB$ )
- Un **sens** (exemple : "de A vers B" ou "de haut en bas")
- Une **direction** (la direction de la droite que porte le vecteur, horizontale ou verticale par exemple)

## 2. Calcul

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le produit scalaire en fonction de la situation dans laquelle on se trouve.

## À RETENIR

## Calcul avec un angle

Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs du plan et  $\theta$  l'angle orienté entre les deux. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$

## À RETENIR

## Calcul avec un projeté orthogonal

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts du plan. On pose  $P$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ . Alors :

- Si  $P \in [AB]$  alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AP$
- Si  $P \notin [AB]$  alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AP$

Si on ne possède que les normes de nos vecteurs, il est possible d'utiliser la formule de polarisation.

## À RETENIR

## Formule de polarisation

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left( \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

## À LIRE

## Utilisation des formules

Il faut vraiment trouver la formule à utiliser selon l'énoncé de l'exercice.

Par exemple, si on se trouve dans un repère et que l'on a les coordonnées des vecteurs, on pourra utiliser la formule de la définition. À l'inverse, si on ne possède pas les coordonnées de nos vecteurs mais que l'on possède leur normes, il est possible d'utiliser la formule de polarisation.

Voici un tableau récapitulatif pour  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  vecteurs du plan :

Données	Formule	À utiliser si on possède...
$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2$ (Calcul à partir des coordonnées.)	Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ .
$\theta$ est l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ .	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\  \times \ \vec{v}\  \times \cos(\theta)$ (Calcul à partir des normes et d'un angle.)	La norme de $\vec{u}$ , la norme de $\vec{v}$ et l'angle $\theta$ entre les deux vecteurs.
$A$ et $B$ sont les deux extrémités de $\vec{u}$ , $A$ et $C$ sont les deux extrémités de $\vec{v}$ , et $P$ est le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$ .	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AP +$ si $P \in [AB)$ et $-$ sinon. (Calcul à partir d'une projection orthogonale.)	3 points distincts (qui sont ici $A$ , $B$ et $C$ ).
	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2}{2}$ (Calcul à partir des normes.)	On possède la norme de $\vec{u}$ , celle de $\vec{v}$ mais surtout celle de $\vec{u} + \vec{v}$ .

## 3. Théorème d'Al-Kashi

Le **théorème d'Al-Kashi** permet de calculer la longueur des côtés de n'importe quel triangle, qu'il soit rectangle ou non. Ainsi,

## À RETENIR

## Théorème d'Al-Kashi

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan non alignés (formant donc un triangle). On pose  $a = BC$ ,  $b = CA$  et  $c = AB$ . Alors :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos(\widehat{ACB})$$

## DÉMONSTRATION

## Théorème d'Al-Kashi

En reprenant les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\|^2 \text{ (par la relation de Chasles)} \\ &= \|\overrightarrow{CB}\|^2 - 2(\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}) + \|\overrightarrow{CA}\|^2 \text{ (par la formule de polarisation)} \\ &= CB^2 - 2(CB \times CA \times \cos(\widehat{ACB})) + CA^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos(\widehat{ACB}) \end{aligned}$$

## II - Géométrie

### 1. Équation cartésienne d'une droite

#### À RETENIR

##### Définition

Il est possible de décrire tous les points appartenant à une droite  $\mathcal{D}$  par une équation appelée **équation cartésienne**.

Une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$  est de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  et  $c$  réels, et où  $x$  et  $y$  sont des coordonnées de points.

#### À LIRE

Il est très facile de dire si oui ou non un point appartient à une droite si l'on possède l'équation cartésienne de cette droite.

Par exemple, on définit la droite  $\mathcal{D}$  par l'équation  $y = x - 1$ .

Est-ce-que  $A = (0; 1)$  appartient à  $\mathcal{D}$ ? Remplaçons  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $A$  :  $1 = -1$  : c'est faux donc  $A$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}$  car les coordonnées de  $A$  ne vérifient pas l'équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ .

Est-ce-que  $B = (4; 3)$  appartient à  $\mathcal{D}$ ? Remplaçons  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $B$  :  $3 = 3$  : c'est vrai donc  $B$  appartient à  $\mathcal{D}$  car les coordonnées de  $B$  vérifient l'équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ .

### 2. Vecteurs directeurs d'une droite

#### À RETENIR

##### Définition

Soient  $\mathcal{D}$  une droite et  $\vec{u}$  un vecteur du plan non nul. Alors  $\vec{u}$  est un **vecteur directeur** de  $\mathcal{D}$  s'il existe deux points  $A$  et  $B$  appartenants à  $\mathcal{D}$  et tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .



De plus, on a la propriété suivante qui peut s'avérer très utile :

À RETENIR

### Colinéarité des vecteurs directeurs

$\vec{v}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  si et seulement s'il est colinéaire au vecteur  $\vec{u}$  précédent.

Tous les vecteurs directeurs d'une droite sont donc colinéaires entre eux.

À LIRE

### Exemple

Soit  $\mathcal{D}$  la droite définie par l'équation  $y = 2x + 1$ , montrons que  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

Prenons deux points au hasard situés sur cette droite :

$x = 0$  donne  $y = 1$ , donc le point  $A = (0; 1)$  appartient à  $\mathcal{D}$ .

$x = 1$  donne  $y = 3$ , donc le point  $B = (1; 3)$  appartient à  $\mathcal{D}$ .

Ainsi, un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  est  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Il reste à vérifier que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont bien colinéaires, pour cela on peut utiliser la formule vue en seconde :

$2 \times 2 - 1 \times 4 = 0$  :  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont bien colinéaires et donc  $\vec{v}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

Il est facile de trouver un vecteur directeur d'une droite dont on connaît l'équation cartésienne.

À RETENIR

### Coordonnées d'un vecteur directeur

Soit  $\mathcal{D}$  une droite définie par l'équation  $ax + by + c = 0$ . Alors  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

À LIRE

### Exemple

Déterminons l'équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}$  de vecteur directeur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et passant par  $A = (1; 0)$ .

On a déjà  $a$  et  $b$  par la propriété précédente :

$$-b = 1 \iff b = -1 \text{ et } a = 2$$

Une équation cartésienne de la droite est  $2x - y + c = 0$ . Il reste à trouver  $c$ . Mais comme  $\mathcal{D}$  passe par  $A$ , les coordonnées de  $A$  vérifient l'équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ .

Remplaçons  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $A$  dans l'équation cartésienne :

$$2 + c = 0 \iff c = -2$$

L'équation cartésienne recherchée est donc  $2x - y - 2 = 0$  ou encore  $y = 2x - 2$ .

À RETENIR

### Propriétés

Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites respectivement de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Alors :

- $\mathcal{D}_1$  est parallèle à  $\mathcal{D}_2$  si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- $\mathcal{D}_1$  est perpendiculaire à  $\mathcal{D}_2$  si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

À RETENIR

### Orthogonalité

Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dits **orthogonaux**.

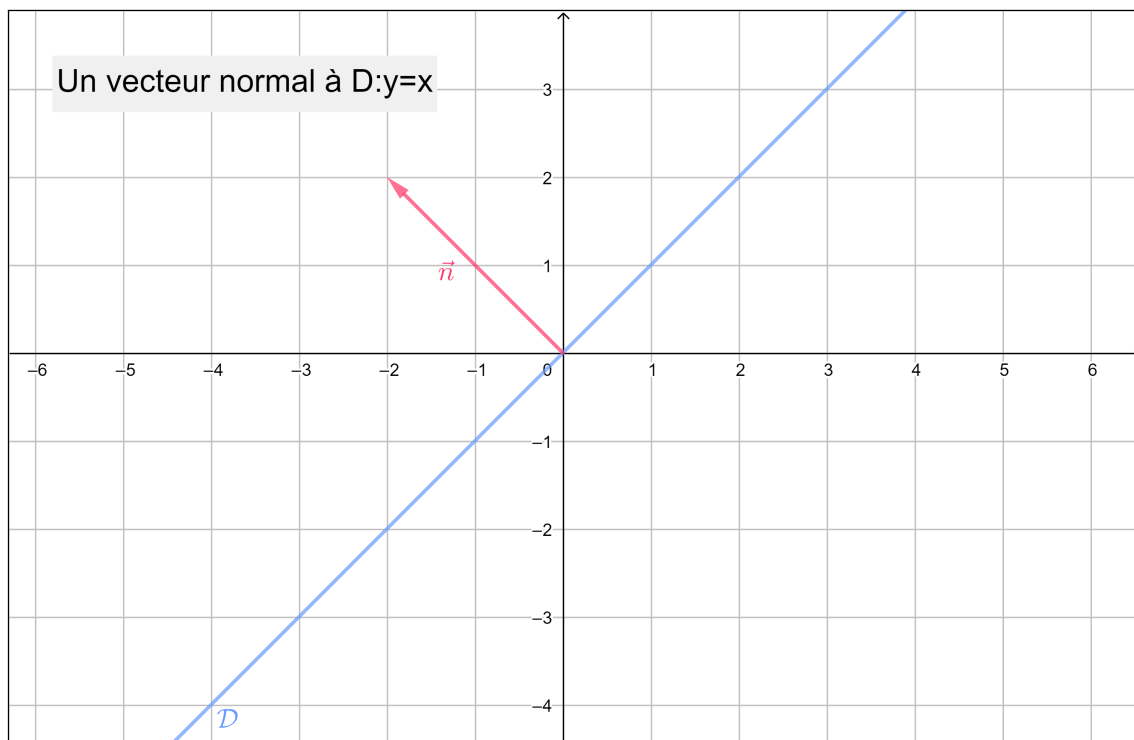


### 3. Vecteurs normaux à une droite

À RETENIR

#### Définition

Soient  $\mathcal{D}$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  un vecteur du plan non nul. Alors  $\vec{n}$  est un **vecteur normal** à  $\mathcal{D}$  si  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux entre-eux.



De plus, on a la propriété suivante qui peut s'avérer très utile :

À RETENIR

#### Colinéarité des vecteurs normaux

$\vec{m}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}$  si et seulement s'il est colinéaire au vecteur  $\vec{n}$  précédent.

Tous les vecteurs normaux d'une droite sont donc colinéaires entre-eux. Il est facile de trouver un vecteur normal à une droite dont on connaît l'équation cartésienne.

À RETENIR

#### Coordonnées d'un vecteur normal

Soit  $\mathcal{D}$  une droite définie par l'équation  $ax + by + c = 0$ . Alors  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}$ .

Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites respectivement de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Alors :

À RETENIR

$\mathcal{D}_1$  est perpendiculaire à  $\mathcal{D}_2$  si et seulement si  $\vec{u}$  est normal à  $\mathcal{D}_2$ .

À LIRE

### Exemple

Déterminons l'équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}$  admettant pour vecteur normal  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et passant par l'origine  $O = (0; 0)$ .

On a déjà  $a$  et  $b$  par la propriété précédente :

$$a = -1$$

$$b = -1$$

Une équation cartésienne de la droite est  $-x - y + c = 0$ . Il reste à trouver  $c$ . Mais comme  $\mathcal{D}$  passe par l'origine, les coordonnées de  $O$  vérifient l'équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ .

Remplaçons  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $O$  dans l'équation cartésienne :  $c = 0$ . L'équation cartésienne recherchée est donc  $-x - y = 0$  ou encore  $y = -x$ .

## 4. Description d'un cercle

De la même manière que pour les droites, il est possible de décrire l'ensemble des points appartenant à un cercle à l'aide d'une équation.

À RETENIR

### Description par équation cartésienne

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O = (x_O; y_O)$  et de rayon  $R$ .

Une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  est de la forme  $(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2$  avec  $x$  et  $y$  qui sont des coordonnées de points.

On peut de manière équivalente, décrire un cercle à l'aide du produit scalaire.

À RETENIR

### Description par produit scalaire

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan. Alors l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est le cercle de diamètre  $[AB]$ .

## DÉMONSTRATION

## Description par produit scalaire

On pose  $A = (x_A; y_A)$ ,  $B = (x_B; y_B)$  et on cherche les points  $M = (x; y)$  tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

Soit  $O$  le milieu de  $[AB]$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\iff (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = 0 \\ &\iff (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = 0 \\ &\iff (\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MO}) - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}) = 0 \\ &\iff MO^2 - OA^2 = 0 \\ &\iff MO = OA\end{aligned}$$

Donc l'ensemble cherché est l'ensemble des points situés à une distance  $OA$  du point  $O$ , c'est bien le cercle de centre  $O$  et de diamètre  $[AB]$ .

En réalité, les deux points précédents sont deux manières différentes de décrire un cercle.