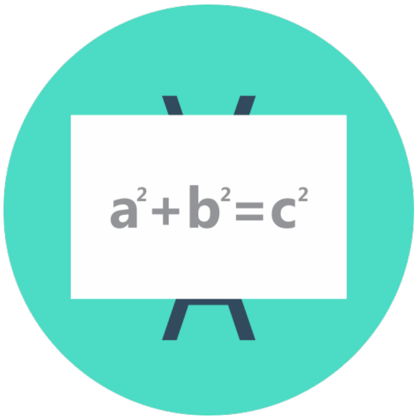


Chapitre IV – La fonction exponentielle

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Le nombre e

Le **nombre d'Euler** e (également appelé constante de Neper) est une constante mathématique irrationnelle qui possède de nombreuses propriétés.

À RETENIR : VALEUR APPROCHÉE

Une valeur approchée de e est $\approx 2,71828$.

Cependant, une définition plus exacte de e existe.

À RETENIR : AUTRE DÉFINITION

On définit la suite (e_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Alors la limite de la suite (e_n) quand n tend vers $+\infty$ est e.

À LIRE

Grâce à cette définition, il est plus facile de construire un algorithme pour approximer e.

II - La fonction exponentielle

1. Définition

À RETENIR : DÉFINITION

La fonction exponentielle notée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par e^x (ou parfois $\exp(x)$) est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ remplissant les critères suivants :

— f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = f$

— $f > 0$ sur $\mathbb{R}$

— $f(0) = 1$

DÉMONSTRATION : EXISTENCE

L'existence de cette fonction est admise, il faut cependant en démontrer **l'unicité**.

Soit une autre fonction g vérifiant les mêmes propriétés que notre fonction f. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Comme g ne s'annule pas et que h est un quotient de fractions dérivables ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} = 0$ (car $f = f'$ et $g = g'$).

On a donc h constante sur $\mathbb{R}$ et la valeur de h est $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1 \iff \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff f(x) = g(x)$. Donc $g = f$.

À LIRE : FORMULES

La fonction exponentielle, telle qu'on l'a écrite, est composée d'un réel ($e \approx 2,718$) et d'un exposant réel x. **Les opérations sur les exposants** sont disponibles, par exemple, pour tout x, $y \in \mathbb{R}$:

— $e^{x+y} = e^x \times e^y$

— $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

— $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

— $(e^x)^y = e^{x \times y}$

Et bien entendu, $e^0 = 1$.

2. Relations algébriques

À RETENIR : RELATIONS ALGÉBRIQUES

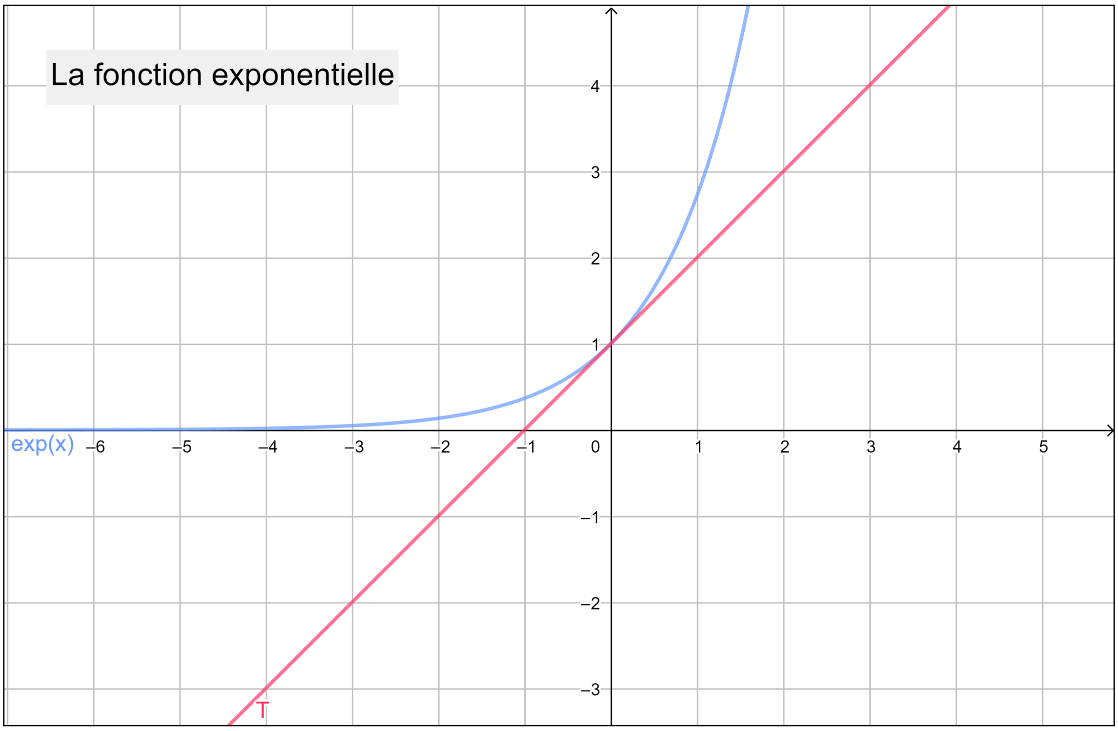
La fonction exponentielle a plusieurs propriétés algébriques qu'il faut connaître. Ainsi, pour tous réels x et y :

— $e^x = e^y \iff x = y$

— $e^x < e^y \iff x < y$

3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction exponentielle (courbe bleue) et de sa tangente au point d'abscisse 0 :



On voit plusieurs propriétés données précédemment : $e^0 = 1$, $e \approx 2,718$, etc. Mais également d'autres propriétés que nous verrons par la suite comme le fait que la fonction soit **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. À noter que la **tangente** à sa courbe représentative en $x = 0$ est $y = x + 1$.

À LIRE : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

Il peut être utile de savoir représenter une courbe d'une fonction du type $x \mapsto e^{kx}$ avec $k \in \mathbb{R}$:

- L'image de 0 par ces fonctions est toujours 1.
- Plus k est grand, plus la croissance est forte et rapide.
- Si k est négatif, la courbe est symétrique à celle de $x \mapsto e^{-kx}$ par rapport à l'axe des ordonnées.

III - Étude de la fonction

1. Dérivée

À RETENIR : DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle : $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

À RETENIR : DÉRIVÉE

Ainsi, si pour tout $x \in I$ on a $u(x) = x$, on retrouve : $(e^x)' = e^x$.

Cette propriété a été donnée dans la section "Définition".

2. Variations

Avec la dérivée donnée précédemment, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction exponentielle.

À RETENIR : VARIATIONS

x	$-\infty$		$+\infty$
$(x \mapsto e^x)'$		$+$	
$x \mapsto e^x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque sur le tableau de variation que la fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$.

3. La suite (e^{na})

À RETENIR

Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme 1.

DÉMONSTRATION

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{na}$.

Calculons u_{n+1} :

$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na} \times e^a = u_n \times e^a$.

Et on a bien $u_0 = e^0 = 1$.