



## Chapitre IV – Les fonctions trigonométriques

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

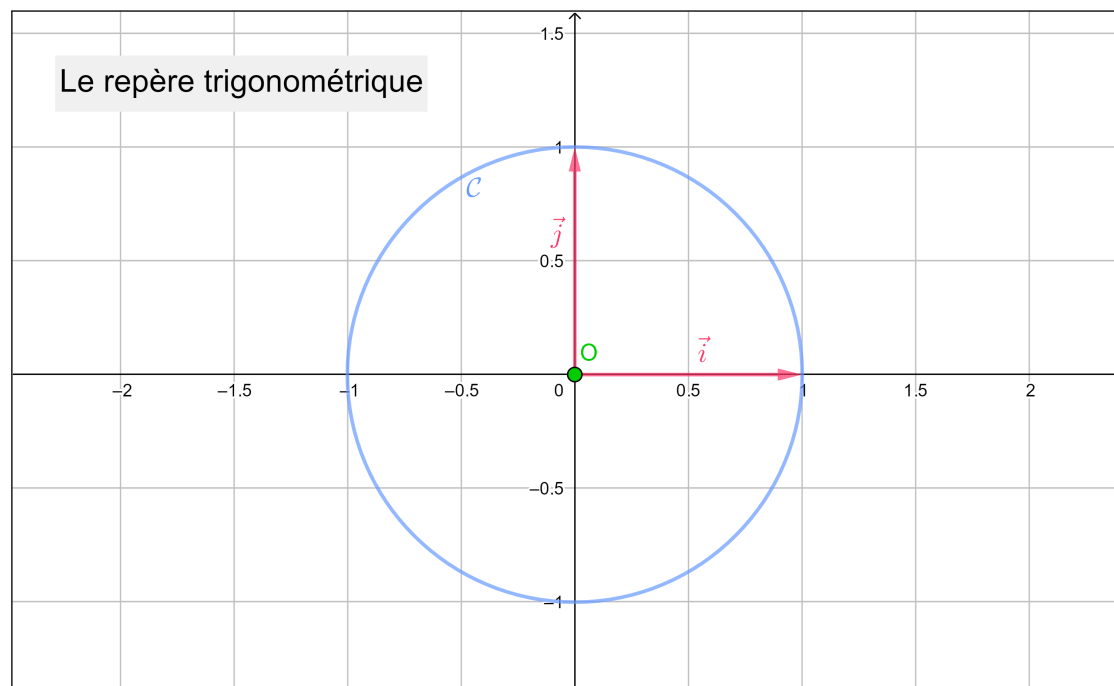
### TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Sinus et cosinus</b>	<b>1</b>
1. Définition	1
2. Périodicité	2
3. Formules de trigonométrie	2
4. Résolution d'équations	4
5. Fonctions réciproques	4
<b>II - Étude des fonctions trigonométriques</b>	<b>5</b>
1. Dérivée	5
2. Signe et variations	5
3. Limite	6
4. Valeurs remarquables	6
5. Représentation graphique	7

## I - Sinus et cosinus

### 1. Définition

Dans tout le cours, le plan sera muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Il sera également muni d'un cercle  $\mathcal{C}$  appelé **cercle trigonométrique** de centre  $O$  et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est le **sens direct**) :



#### À RETENIR : COSINUS ET SINUS

Soit  $M$  un point quelconque situé sur le cercle  $\mathcal{C}$  faisant un angle  $x$  avec l'axe des abscisses. Les coordonnées de  $M$  sont :

- L'abscisse de  $M$  appelée **cosinus** est notée  $\cos(x)$ .
- L'ordonnée de  $M$  appelée **sinus** est notée  $\sin(x)$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ .

## 2. Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

### À RETENIR : PÉRIODICITÉ

Ainsi pour tout  $x$  réel et  $k$  entier relatif :

- $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$
- $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$

### À LIRE

Concrètement, cela signifie que  $\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + 2k\pi)$  et idem pour  $\sin(x)$ .

## 3. Formules de trigonométrie

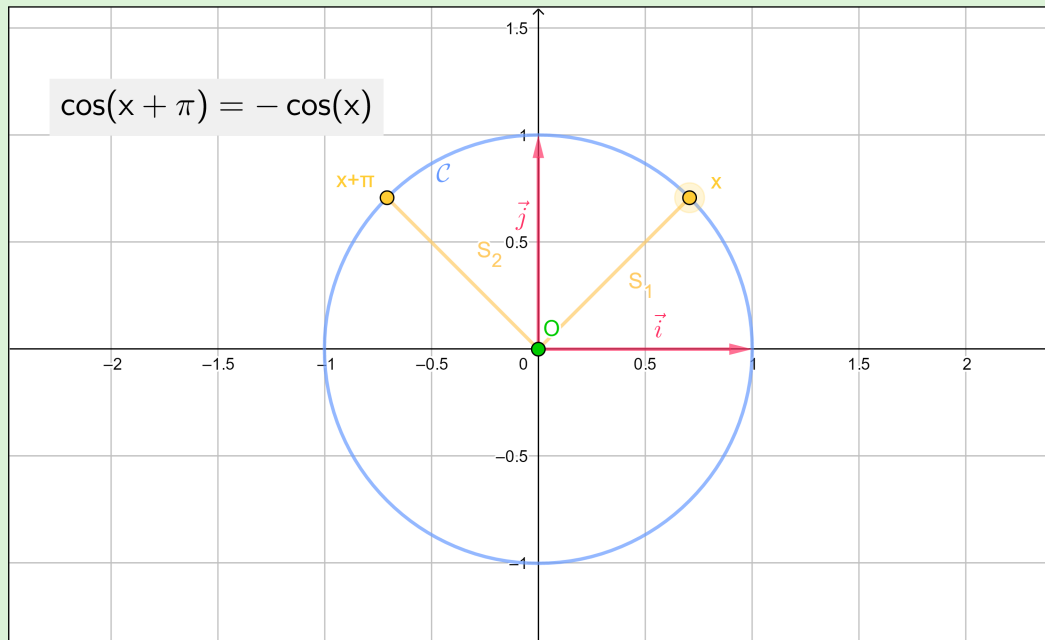
### À RETENIR : FORMULES

On a les relations suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

- $\cos(-x) = \cos(x)$  (la fonction cosinus est **paire**)
- $\sin(-x) = -\sin(x)$  (la fonction sinus est **impaire**)
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos(x + y) = \cos(x) \times \cos(y) - \sin(x) \times \sin(y)$
- $\sin(x + y) = \sin(x) \times \cos(y) + \cos(x) \times \sin(y)$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

## À LIRE : RETROUVER LES FORMULES 39

Il n'est aucunement demandé de mémoriser ces formules (sauf les trois dernières). Cependant, il doit être possible de les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique. Ainsi, prenons l'exemple de  $\cos(x + \pi)$  :



On remarque que l'ordonnée reste la même (le sinus est le même). Cependant, on a bien une abscisse opposée. On a retrouvé la formule  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ .

## 4. Résolution d'équations

Il est possible de résoudre des équations incluant des sinus et des cosinus.

### À RETENIR : RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

Soient  $x$  et  $y$  deux réels. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{— } \cos(x) = \cos(y) &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = -x + 2k\pi \end{cases} \\ \text{— } \sin(x) = \sin(y) &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Comme précédemment, ces formules peuvent se retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

## 5. Fonctions réciproques

### À RETENIR : DÉFINITION

Soient  $x$  et  $y \in \mathbb{R}$ , on admettra qu'il existe une **fonction réciproque** à  $\cos$  (notée  $\arccos$ ) et une **fonction réciproque** à  $\sin$  (notée  $\arcsin$ ). On a les relations suivantes pour tout  $x \in [0; 2\pi]$  et  $y \in [-1; 1]$  :

$$\begin{aligned} \text{— } \cos(x) = y &\iff x = \arccos(y) \\ \text{— } \sin(x) = y &\iff x = \arcsin(y) \end{aligned}$$

Cela signifie qu'à tout  $x \in [0; 2\pi]$ , la fonction  $\arccos$  y associe son **antécédent**  $y$  par rapport à  $\cos$  (pareil pour  $\arcsin$  avec  $\sin$ ).

### À LIRE : EXEMPLE

$$\cos(0) = 1, \arccos(1) = 0 \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Ces fonctions (accessibles depuis la calculatrice) peuvent également être utilisées pour résoudre certains types d'équations.

## II - Étude des fonctions trigonométriques

### 1. Dérivée

#### À RETENIR : DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE

Soit une fonction  $u$  dérivable sur un intervalle  $I$ , on a pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle :

$$\text{— } \cos'(u(x)) = -u'(x) \sin(u(x))$$

$$\text{— } \sin'(u(x)) = u'(x) \cos(u(x))$$

#### À RETENIR : DÉRIVÉE

Ainsi, si pour tout  $x \in I$  on a  $u(x) = x$ , on trouve :

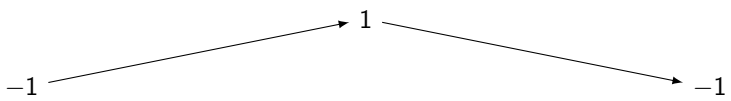
$$\text{— } \cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\text{— } \sin'(x) = \cos(x)$$

### 2. Signe et variations

L'étude du signe des dérivées des fonctions trigonométriques permet d'obtenir les variations de celles-ci. Nous allons donc voir le signe et les variations de ces fonctions.

#### À RETENIR : SIGNE ET VARIATION DE LA FONCTION COSINUS

$x$	$-\pi$		$0$		$\pi$
$x \mapsto \cos'(x)$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$
$x \mapsto \cos(x)$					

Veuillez noter que ce tableau est périodique de période  $2\pi$ .

## À RETENIR : SIGNE ET VARIATION DE LA FONCTION SINUS

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$x \mapsto \sin'(x)$	–	0	+	–
$x \mapsto \sin(x)$	0	–1	1	0

Ce tableau est également périodique de période  $2\pi$ .

## 3. Limite

Les fonctions trigonométriques ont pour particularité de **ne pas admettre de limite** en  $\pm\infty$ . Ceci provenant du fait que ces fonctions sont périodiques et que leur valeur oscille entre  $-1$  et  $1$ .

## 4. Valeurs remarquables

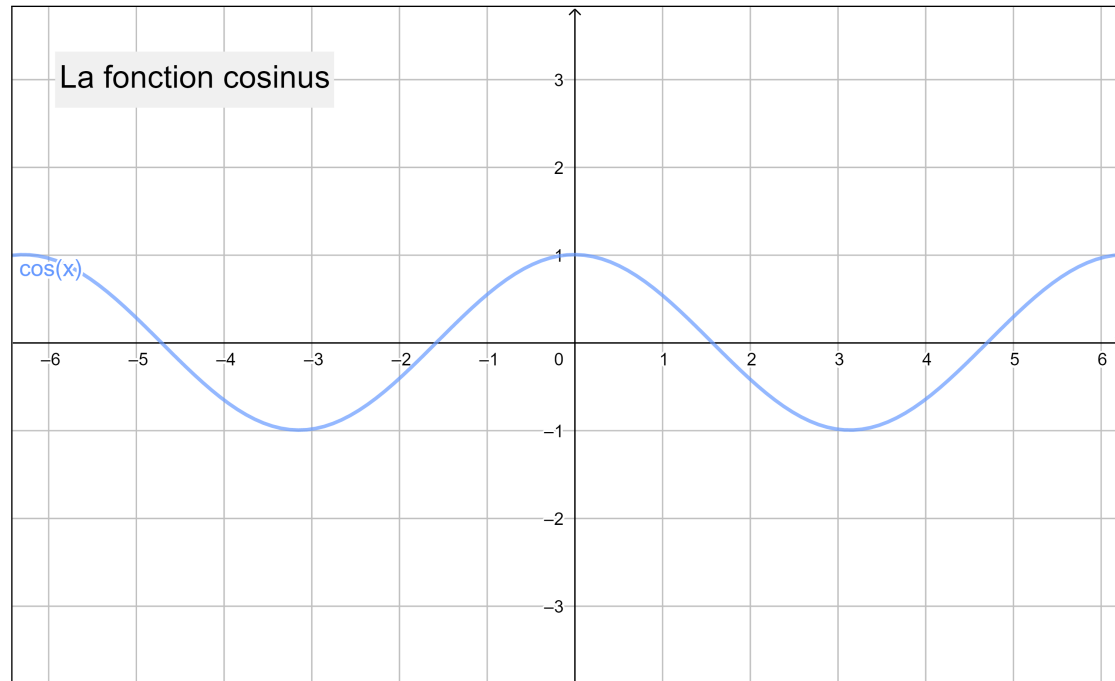
## À RETENIR : VALEURS REMARQUABLES

Voici un tableau regroupant quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus :

Valeur de $x$ (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$ )	Valeur de $\cos(x)$	Valeur de $\sin(x)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\pi$	-1	0

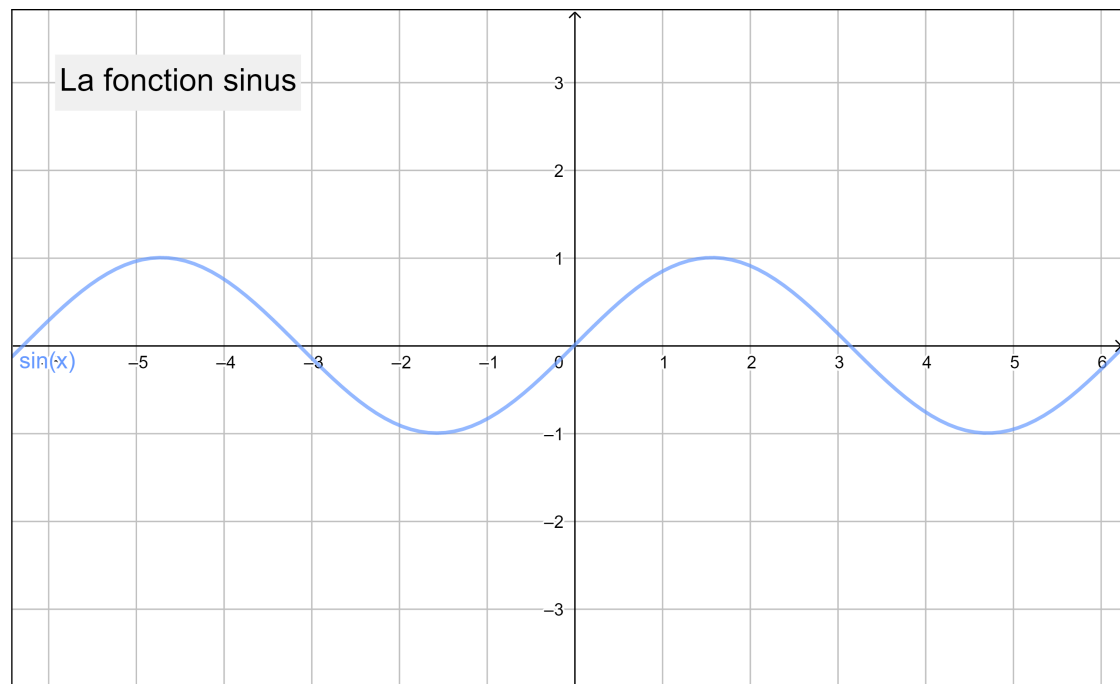
## 5. Représentation graphique

À l'aide de toutes les informations et valeurs données précédemment, il est possible d'établir une représentation graphique de la fonction cosinus :





De même pour la fonction sinus :



On remarque sur ces graphiques plusieurs propriétés données : parité, signe, périodicité, etc.