



## Chapitre I – Les suites

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

|  |   |
|--|---|
| <b>I - Définitions</b>                   | 1 |
| 1. Suites numériques                     | 1 |
| 2. Sens de variation                     | 1 |
| 3. Convergence et divergence             | 2 |
| <b>II - Calcul de limites</b>            | 3 |
| 1. Limites de suites de référence        | 3 |
| 2. Opérations sur les limites            | 4 |
| 3. Majoration, minoration et bornes      | 5 |
| 4. Comparaisons et encadrements          | 6 |
| <b>III - Raisonnement par récurrence</b> | 7 |

## I - Définitions

### 1. Suites numériques

Pour rappel, on appelle **suite** une fonction (et plus précisément application) de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  : cette fonction va prendre des éléments de l'ensemble de départ  $\mathbb{N}$  et va les amener dans l'ensemble d'arrivée  $\mathbb{R}$ .

#### À RETENIR : DÉFINITION

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- **Par récurrence** : On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang  $n + 1$ .
- **Par son terme général** : On donne le  $n$ -ième terme de la suite en fonction de  $n$ .

**Attention !** Bien que ces deux modes de génération soient les principaux, il en existe d'autres : algorithmes, motifs géométriques, ...

#### À LIRE : EXEMPLE

On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ainsi :

- $u_n = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ( $(u_n)$  est définie par son terme général).
- $(v_n) = \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$  ( $(v_n)$  est définie par récurrence).

On remarque que bien que définies différemment,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont égales.

### 2. Sens de variation

#### À RETENIR : DÉFINITION

Soit  $(u_n)$  une suite.

- $(u_n)$  est **croissante** si on a  $u_{n+1} \geq u_n$  (ou  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(u_n)$  est **décroissante** si on a  $u_{n+1} \leq u_n$  (ou  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(u_n)$  est dite **constante** s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n = c$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

### 3. Convergence et divergence

#### À RETENIR : CONVERGENCE

On dit qu'une suite  $(u_n)$  **converge** vers un réel  $\ell$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si :

Pour tout  $\epsilon > 0$ , l'intervalle ouvert  $]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$ , contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang. On note alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

#### À LIRE

Cette définition est un peu abstraite mais elle signifie simplement que  $u_n$  se rapproche autant que l'on veut de  $\ell$  pourvu que  $n$  soit assez grand.

**Attention !** Il est tout à fait possible que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  mais ne soit jamais égal à  $\ell$ .

#### À RETENIR : DIVERGENCE VERS $+\infty$

On dit qu'une suite  $(v_n)$  **diverge** vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si :

Pour tout  $A > 0$ , il existe un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $v_n > A$ . On note alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Il existe une définition similaire pour la divergence vers  $-\infty$ .

#### À LIRE : DIVERGENCE VERS $-\infty$

Dire que  $(v_n)$  **diverge** vers  $-\infty$  signifie que :

Pour tout  $A > 0$ , il existe un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $v_n < -A$ . On note alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

#### À LIRE

À noter que l'on n'étudie les limites des **suites** que quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et qu'il est possible qu'une suite n'admette pas de limite. On dit alors que cette suite **diverge**. Par contre, si une suite converge vers une limite, alors cette limite est **unique**.

## II - Calcul de limites

### 1. Limites de suites de référence

Nous allons donner quelques suites “classiques” avec leur limite en  $+\infty$  :

#### À RETENIR : LIMITES DE SUITES USUELLES

| Suite   | Limite quand $n$ tend vers $+\infty$ |
|---|--------------------------------------|
| $(\sqrt{n})$                                  | $+\infty$                            |
| $(n)$   | $+\infty$                            |
| $(n^k)$ , pour $k \in \mathbb{N}^*$           | $+\infty$                            |
| $(\frac{1}{\sqrt{n}})$                        | 0                                    |
| $(\frac{1}{n})$                               | 0                                    |
| $(\frac{1}{n^k})$ , pour $k \in \mathbb{N}^*$ | 0                                    |

Nous allons désormais donner la limite d’une catégorie de suite très importante en mathématiques : celle des **suites géométriques**. Ainsi :

#### À RETENIR : LIMITE DE SUITES GÉOMÉTRIQUES

Soit  $(v_n)$  une suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = q^n$  (où  $q$  est un nombre réel). Alors, on peut donner la limite de la suite  $(v_n)$  en fonction de  $q$  :

| Limite d’une suite géométrique          |              |           |               |         |
|---|--------------|-----------|---------------|---------|
| Si on a...                              | $-1 < q < 1$ | $1 < q$   | $q \leq -1$   | $q = 1$ |
| Alors la suite $(v_n)$ a pour limite... | 0            | $+\infty$ | Pas de limite | 1       |

#### À LIRE

Le réel  $q$  est la **raison** de la suite : si  $q > 1$ ,  $(v_n)$  est strictement croissante, si  $0 < q < 1$ ,  $(v_n)$  est strictement décroissante et si  $q = 1$  ou 0,  $(v_n)$  est constante.

## 2. Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites. Ces tableaux sont à connaître et sont requis pour pouvoir travailler sur les limites.

### À RETENIR : LIMITE D'UNE SOMME

| Limite d'une somme  |                |           |           |           |           |           |
|---|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Si la limite de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...          | $\ell$         | $\ell$    | $\ell$    | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Et la limite de $(v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...          | $\ell'$        | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| Alors la limite de $(u_n + v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est... | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ?         |

### À RETENIR : LIMITE D'UN PRODUIT

| Limite d'un produit  |                     |            |            |            |            |           |           |           |             |
|--|---------------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| Si la limite de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...               | $\ell$              | $\ell > 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0           |
| Et la limite de $(v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...               | $\ell'$             | $+\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| Alors la limite de $(u_n \times v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est... | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$  | $-\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ?           |

## À RETENIR : LIMITE D'UN QUOTIENT

| Limite d'un quotient   |                      |             |             |             |             |             |             |                 |   |
|--|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------------|---|
| Si la limite de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...                           | $\ell$               | $\ell$      | $+\infty$   | $+\infty$   | $-\infty$   | $-\infty$   | $\pm\infty$ | $\ell$          | 0 |
| Et la limite de $(v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...                           | $\ell' \neq 0$       | $\pm\infty$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $\pm\infty$ | $0_{\pm}^{\pm}$ | 0 |
| Alors la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est... | $\frac{\ell}{\ell'}$ | 0           | $+\infty$   | $-\infty$   | $-\infty$   | $+\infty$   | ?           | $\pm\infty$     | ? |

## À LIRE : FORMES INDÉTERMINÉES

À noter qu'il n'existe que 4 formes indéterminées : " $+\infty - \infty$ ", " $0 \times \pm\infty$ ", " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ ".

## 3. Majoration, minoration et bornes

## À RETENIR : DÉFINITION

Soient une suite  $(u_n)$  et deux réels  $m$  et  $M$  :

- On dit que  $m$  est un **minorant** de  $(u_n)$  si pour tout  $n$  :  $u_n > m$ .
- On dit que  $M$  est un **majorant** de  $(u_n)$  si pour tout  $n$  :  $u_n < M$ .
- On dit que  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

## À RETENIR : THÉORÈME

- Si  $(u_n)$  est croissante et est majorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas majorée,  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si  $(u_n)$  est décroissante et est minorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas minorée,  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

## DÉMONSTRATION

Il faut savoir montrer que toute suite croissante et non majorée diverge vers  $+\infty$ . C'est ce que nous allons faire ici. Soit donc  $(u_n)$  une telle suite. Soit  $A > 0$ , on cherche un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n > A$ .

Or, comme  $(u_n)$  est non majorée, il existe  $N$  tel que  $u_N > A$ . De plus, comme  $(u_n)$  est croissante, alors  $A < u_N \leq u_{N+1} \leq u_{N+2} \leq \dots$

Donc on a bien trouvé notre rang  $N$  vérifiant la définition de la divergence vers  $+\infty$ .

## À LIRE

Toute suite convergente est également bornée.

## 4. Comparaisons et encadrements

## À RETENIR : THÉORÈMES DE COMPARAISON

Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $u_n < v_n$  à partir d'un certain rang  $N$ . On a :

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$  alors  $\ell < \ell'$ .

## DÉMONSTRATION

Il peut être utile de savoir démontrer le premier point dans le cas  $N = 0$  (les autres points se démontrent de manière semblable). Supposons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . Soit  $A > 0$ , on cherche un rang  $p$  tel que pour tout  $n \geq p$ ,  $v_n > A$ .

Comme  $u_n$  diverge vers  $+\infty$ , il existe un rang  $q$  tel que pour tout  $n \geq q$ ,  $u_n > A$ . Donc on a :  $A < u_q < v_q$ , mais aussi  $A < u_{q+1} < v_{q+1}$ , etc.

Donc il suffit de poser  $p = q$  et on a bien notre rang vérifiant la définition de la divergence vers  $+\infty$ .

## À RETENIR : THÉORÈME DES GENDARMES

Soient trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$ . On suppose que  $u_n < v_n < w_n$  à partir d'un certain rang et que  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers le réel  $\ell$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

### III - Raisonnement par récurrence

Si on souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  à partir d'un certain rang  $p$ , il est possible d'utiliser un type de raisonnement appelé **raisonnement par récurrence**.

#### À RETENIR : RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

**Initialisation** : On teste la propriété au rang  $p$ . Si elle est vérifiée, on passe à l'étape suivante.

**Hérédité** : On suppose la propriété vraie à un rang  $n \geq p$ . Puis on montre qu'elle reste vraie au rang  $n + 1$ .

**Conclusion** : On explique que l'on vient de démontrer la propriété au rang  $n + 1$  et que comme celle-ci est initialisée et héréditaire, alors elle est vraie à partir du rang  $p$ .

#### À LIRE : EXEMPLE

Soit une suite  $(u_n)$  définie par  $(u_n) = \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} \end{cases}$ . On souhaite montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $4 \leq u_n \leq 5$ .

On note  $\mathcal{P}_n$  la propriété définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $\mathcal{P}_n : 4 \leq u_n \leq 5$ .

On constate que  $u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} = \frac{4(u_n+4)+1}{u_n+4} = 4 + \frac{1}{u_n+4}$ .

**Initialisation** : On teste la propriété au rang 0 :

$\mathcal{P}_0 : 4 \leq u_0 \leq 5 \iff 4 \leq 4 \leq 5$ . C'est vrai : la propriété est vraie au rang 0.

**Hérédité** : Supposons la propriété vraie à un rang  $n \in \mathbb{N}$  et vérifions qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ .

D'après  $\mathcal{P}_n : 4 \leq u_n \leq 5$ . Donc on a :

$$\iff 4 \leq u_n \leq 5$$

$$\iff 4 + 4 \leq u_n + 4 \leq 5 + 4$$

$\iff \frac{1}{9} \leq \frac{1}{u_n+4} \leq \frac{1}{8}$  (la fonction inverse est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc on change de sens l'inégalité)

$$\iff 4 + \frac{1}{9} \leq 4 + \frac{1}{u_n+4} \leq 4 + \frac{1}{8}$$

Or  $4 + \frac{1}{9} \approx 4.111 > 4$  et  $4 + \frac{1}{8} = 4.125 < 5$ . On a donc bien :

$$4 \leq u_{n+1} \leq 5$$

**Conclusion** : La propriété est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Ainsi,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Le raisonnement par récurrence est très utilisé en mathématiques et ne se limite pas qu'à l'étude des suites. On peut par exemple l'utiliser pour montrer l'**inégalité de Bernoulli**.



## À RETENIR : INÉGALITÉ DE BERNOULLI 🔔

$(1+x)^n > 1+nx$  pour tout  $n \geq 2$  et tout  $x \in [-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .

## DÉMONSTRATION : INÉGALITÉ DE BERNOULLI 🧠

Soit  $x \in [-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ . On note  $\mathcal{P}_n$  la propriété définie pour tout  $n \geq 2$  par  $\mathcal{P}_n$  :  $(1+x)^n > 1+nx$ . Montrons  $\mathcal{P}_n$  par récurrence.

**Initialisation** : On teste la propriété au rang 2 :

$$\mathcal{P}_2 : (1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x \text{ (car } x^2 > 0 \text{)}.$$

La propriété est vraie au rang 2.

**Hérédité** : Supposons la propriété vraie à un rang  $n \geq 2$  et vérifions qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

En multipliant les deux membres de l'inégalité de l'hypothèse de récurrence par  $1+x \geq 0$  (qui ne change donc pas le sens de l'inégalité), on obtient :

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x) &\geq (1+nx)(1+x) \\ \iff (1+x)^{n+1} &\geq 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x \end{aligned}$$

**Conclusion** :

La propriété est initialisée au rang 2 et est héréditaire. Ainsi,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 2$ .