



# Chapitre VI – Primitives et équations différentielles

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Primitives de fonctions continues</b>	<b>1</b>
1. Définition	1
2. Primitive de fonctions usuelles	2
3. Opérations sur les primitives	2
<b>II - Équations différentielles</b>	<b>4</b>
1. Qu'est-ce-qu'une équation différentielle?	4
2. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay$	4
3. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay + b$	5

# I - Primitives de fonctions continues

## 1. Définition

### À RETENIR

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$ . On appelle **primitive** de  $f$ , toute fonction  $F$  définie sur  $I$  et qui vérifie pour tout  $x \in I$  :

$$F'(x) = f(x)$$

### À LIRE

#### Note

Une primitive est toujours définie à une constante près.

En effet. On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x$ . Alors,  $F_1 : x \mapsto x^2 + 1$  est une primitive de la fonction  $f$  (car pour tout  $x$ ,  $F_1'(x) = 2x = f(x)$ ).

Mais  $F_1$  **n'est pas la seule primitive** de  $f$  ! On peut citer par exemple  $F_2 : x \mapsto x^2 + 10$  et  $F_3 : x \mapsto x^2 + 3$  qui sont également des primitives de  $f$ .

C'est pour cette raison que l'on dit que les primitives sont définies à une constante près (lorsque l'on dérive, la constante devient nulle).

Ainsi, toute **fonction continue** sur un intervalle admet **une infinité de primitives** d'une forme particulière sur cet intervalle. Plus formellement :

### À RETENIR

#### Infinité de primitives

Une fonction continue  $f$  sur un intervalle  $I$  admet une infinité de primitives sur  $I$  de la forme  $x \mapsto F_0(x) + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$  (où  $F_0$  est une primitive de  $f$ ).

### DÉMONSTRATION

#### Infinité de primitives

Soit  $F$  une autre primitive de  $f$  sur  $I$ . On a pour tout  $x \in I$  :

$(F - F_0)'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0$  (car  $F_0$  et  $F$  sont deux primitives de  $f$ ).

Donc il existe une constante réelle  $c$  telle que  $F - F_0 = c$ . D'où pour tout  $x \in I$ ,  $F(x) = F_0(x) + c$  : ce qu'il fallait démontrer.

## 2. Primitive de fonctions usuelles

Le tableau suivant est à connaître (mais il peut être obtenu en prenant celui des dérivées usuelles à l'envers) :

À RETENIR

Soient  $\lambda$  et  $a$  deux constantes réelles avec  $a \neq -1$ .

Fonction	Primitive	Domaine de définition de la primitive
$x \mapsto \lambda$	$x \mapsto \lambda x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^a$	$x \mapsto \frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$

## 3. Opérations sur les primitives

Le tableau suivant est également à connaître (mais il peut être obtenu en prenant celui des dérivées usuelles à l'envers) :

## À RETENIR

Soit  $u$  une fonction continue.

Fonction	Primitive	Domaine de définition de la primitive
$u' e^u$	$e^u$	En tout point où $u$ est définie.
$\frac{u'}{u}$	$\ln( u )$	En tout point où $u$ est définie et est non-nulle. On peut retirer la valeur absolue si $u$ est positive.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	En tout point où $u$ est définie et est strictement positive.
$u'(u)^a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} u^{a+1}$	En tout point où $u$ est définie.
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	En tout point où $u$ est définie.
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	En tout point où $u$ est définie.

## II - Équations différentielles

### 1. Qu'est-ce-qu'une équation différentielle?

Commençons cette partie par quelques définitions.

#### À RETENIR

##### Définition

- Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue  $y$  à ses dérivées successives ( $y'$ ,  $y''$ , ...) contenant éventuellement d'autres fonctions connues.
- Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction vérifiant l'égalité décrite précédemment.

#### À LIRE

##### Exemple

La fonction logarithme est une solution de l'équation différentielle  $y' = \frac{1}{x}$ .

La fonction exponentielle est une solution de l'équation différentielle  $y' = y$ , mais aussi de l'équation différentielle  $y'' = y$ , etc.

### 2. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay$

Nous allons donner une formule permettant de résoudre des équations différentielles de la forme  $y' = ay$ .

#### À RETENIR

##### Formule

On pose  $(E) : y' = ay$  (où  $a$  est un réel). Alors l'ensemble des solutions de  $(E)$  est l'ensemble des fonctions  $x \mapsto ce^{ax}$  où  $c \in \mathbb{R}$ .

## DÉMONSTRATION

Vérifions tout d'abord que les fonctions  $x \mapsto ke^{ax}$  sont solutions de (E). Soit  $c \in \mathbb{R}$ , posons pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y_c(x) = ce^{ax}$ .

Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y'_c(x) = ace^{ax}$  et  $ay_c(x) = ace^{ax}$ . Donc  $y'_c = ay_c$  :  $y_c$  est bien solution de (E).

Montrons que les fonctions  $y_c$  sont les seules solutions de (E). Soit  $y$  une solution quelconque de (E) sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $z(x) = y(x)e^{-ax}$ . En dérivant :

$$z'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x)(-ae^{-ax}) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x))$$

De plus, comme  $y$  est solution de (E), on a  $y' - ay = 0$ , donc  $z' = 0$ .

Ainsi, il existe une constante réelle  $c$  telle que  $z = c$ . C'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$c = y(x)e^{-ax} \iff y(x) = ce^{ax}. \text{ Ce qui termine la preuve.}$$

## À RETENIR

## Théorème

Pour tout réels  $x_0$  et  $y_0$ , il existe une **unique** fonction  $y$  solution de l'équation différentielle (E) telle que  $y(x_0) = y_0$ .

## À LIRE

## Exemple

Résolvons l'équation différentielle (E) :  $y' - 5y = 0$  sous condition d'avoir  $y(0) = 1$ .

Dans un premier temps, on écrit l'équation sous une meilleure forme :  $y' - 5y = 0 \iff y' = 5y$ . On a donc  $a = 5$ . Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies  $x \mapsto ce^{5x}$  où  $c \in \mathbb{R}$ .

Maintenant, il faut trouver la fonction  $y$  qui vaut 1 en 0. Soit donc  $y$  une telle solution de (E). Alors :

$$y(0) = 1 \iff ce^{5 \times 0} = 1 \iff c = e^{-1}. \text{ La solution recherchée est donc la fonction } y : x \mapsto e^{-1}e^{5x}.$$

### 3. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay + b$

Nous allons donner une formule permettant de résoudre des équations différentielles de la forme  $y' = ay + b$ .

## À RETENIR 🔔

## Formule

On pose  $(E) : y' = ay + b$  (où  $a$  est un réel non-nul et  $b$  est un réel). Alors l'ensemble des solutions de  $(E)$  est l'ensemble des fonctions  $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$  où  $c \in \mathbb{R}$ .

## À RETENIR 🔔

## Théorème

Pour tout réels  $x_0$  et  $y_0$ , il existe une **unique** fonction  $y$  solution de l'équation différentielle  $(E)$  telle que  $y(x_0) = y_0$ .

## À LIRE 🔗

## Exemple

Réolvons l'équation différentielle  $(E) : y' = 2y - 1$  sous condition d'avoir  $y(1) = 0$ .

On a donc  $a = 2$  et  $b = -1$ . Les solutions de l'équation  $(E)$  sont les fonctions définies  $x \mapsto ce^{2x} + \frac{1}{2}$  où  $c \in \mathbb{R}$ .

Maintenant, il faut trouver la fonction  $y$  qui vaut 0 en 1. Soit donc  $y$  une telle solution de  $(E)$ . Alors :

$$y(1) = 0 \iff ce^{2 \times 1} + \frac{1}{2} = 0 \iff c = -\frac{1}{2e^2}$$

La solution recherchée est donc la fonction  $y : x \mapsto -\frac{e^{2x}}{2e^2} + \frac{1}{2}$ .