

Chapitre IV – La fonction exponentielle

Bacomathiques -- https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES ■	
I – Le nombre <i>e</i>	1
II – La fonction exponentielle	2
1. Définition	2
2. Relations algébriques	3
3. Représentation graphique	3
III – Étude de la fonction	5
1. Dérivée	5
2. Variations	5
3. La suite (e^{na})	6
	O

I – Le nombre *e*

I – Le nombre e

Le **nombre d'Euler** *e* (également appelé constante de Neper) est une constante mathématique irrationnelle qui possède de nombreuses propriétés.

À RETENIR 💡

Valeur approchée

Une valeur approchée de e est $\approx 2,71828$.

Cependant, une définition plus exacte de *e* existe.

À RETENIR 💡

Autre définition

On définit la suite (e_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Alors la limite de la suite (e_n) quand n tend vers $+\infty$ est e.

ÀLIRE 99

Grâce à cette définition, il est plus facile de construire un algorithme pour approximer e.

II - La fonction exponentielle

1. Définition

À RETENIR 💡

Définition

La fonction exponentielle notée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par e^x (ou parfois $\exp(x)$) est l'unique fonction f définie sur \mathbb{R} remplissant les critères suivants :

- f est dérivable sur \mathbb{R} et f' = f
- $f > 0 \operatorname{sur} \mathbb{R}$
- f(0) = 1

DÉMONSTRATION

Existence

L'existence de cette fonction est admise, il faut cependant en démontrer l'unicité.

Soit une autre fonction g vérifiant les mêmes propriétés que notre fonction f. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Comme g ne s'annule pas et que h est un quotient de fractions dérivables ne s'annulant pas sur \mathbb{R} , h est dérivable sur \mathbb{R} .

D'où, pour tout
$$x \in \mathbb{R}$$
, $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = 0$ (car $f = f'$ et $g = g'$).

On a donc h constante sur \mathbb{R} et la valeur de h est $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$.

Pour tout
$$x \in \mathbb{R}$$
, $h(x) = 1 \iff \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff f(x) = g(x)$. Donc $g = f$.

ÀLIRE 00

Formules

La fonction exponentielle, telle qu'on l'a écrite, est composée d'un réel ($e \approx 2,718$) et d'un exposant réel x. Les opérations sur les exposants sont disponibles, par exemple, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

emple, pour tout
$$x$$

$$-e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$-e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$-e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$-(e^x)^y = e^{x \times y}$$

Et bien entendu, $e^0 = 1$.

2. Relations algébriques

À RETENIR 💡

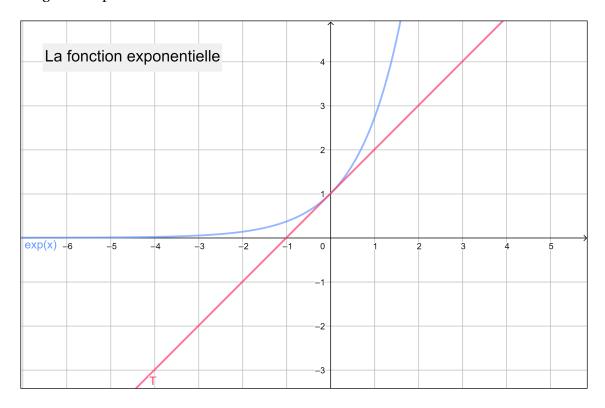
Relations algébriques

La fonction exponentielle a plusieurs propriétés algébriques qu'il faut connaître. Ainsi, pour tous réels x et y:

$$- e^x = e^y \iff x = y$$
$$- e^x < e^y \iff x < y$$

3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction exponentielle (courbe bleue) et de sa tangente au point d'abscisse 0 :



On voit plusieurs propriétés données précédemment : $e^0 = 1$, $e \approx 2,718$, etc. Mais également d'autres propriétés que nous verrons par la suite comme le fait que la fonction soit **strictement positive** sur \mathbb{R} . À noter que la **tangente** à sa courbe représentative en x = 0 est y = x + 1.

ÀLIRE 99

Représentation d'une fonction exponentielle

Il peut être utile de savoir représenter une courbe d'une fonction du type $x\mapsto e^{kx}$ avec $k\in\mathbb{R}$:

- L'image de 0 par ces fonctions est toujours 1.
- Plus k est grand, plus la croissance est forte et rapide.
- Si k est négatif, la courbe est symétrique à celle de $x \mapsto e^{-kx}$ par rapport à l'axe des ordonnées.

III – Étude de la fonction

1. Dérivée

À RETENIR 💡

Dérivée d'une composée

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle : $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

À RETENIR 🧣

Dérivée

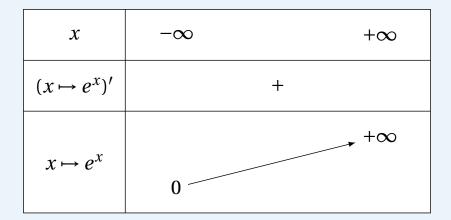
Ainsi, si pour tout $x \in I$ on a u(x) = x, on retrouve : $(e^x)' = e^x$.

Cette propriété a été donnée dans la section "Définition".

2. Variations

Avec la dérivée donnée précédemment, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction exponentielle.





On remarque sur le tableau de variation que la fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur \mathbb{R} .

3. La suite (e^{na})

À RETENIR 💡

Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme 1.

DÉMONSTRATION @

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{na}$.

Calculons u_{n+1} :

$$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na} \times e^a = u_n \times e^a.$$

Et on a bien $u_0 = e^0 = 1$.