



Chapitre I – Les suites

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----------|
| I – Définitions | 1 |
| 1. Suites numériques | 1 |
| 2. Sens de variation | 1 |
| 3. Convergence et divergence | 2 |
| II – Calcul de limites | 3 |
| 1. Limites de suites de référence | 3 |
| 2. Opérations sur les limites | 4 |
| 3. Majoration, minoration et bornes | 6 |
| 4. Comparaisons et encadrements | 7 |
| III – Raisonnement par récurrence | 9 |

I – Définitions

1. Suites numériques

Pour rappel, on appelle **suite** une fonction (et plus précisément application) de \mathbb{N} dans \mathbb{R} : cette fonction va prendre des éléments de l'ensemble de départ \mathbb{N} et va les amener dans l'ensemble d'arrivée \mathbb{R} .

À RETENIR

Définition

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- **Par récurrence** : On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang $n + 1$.
- **Par son terme général** : On donne le n -ième terme de la suite en fonction de n .

Attention! Bien que ces deux modes de génération soient les principaux, il en existe d'autres : algorithmes, motifs géométriques, ...

À LIRE

Exemple

On définit les suites (u_n) et (v_n) ainsi :

- $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ((u_n) est définie par son terme général).
- $(v_n) = \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$ ((v_n) est définie par récurrence).

On remarque que bien que définies différemment, (u_n) et (v_n) sont égales.

2. Sens de variation

À RETENIR

Définition

Soit (u_n) une suite.

- (u_n) est **croissante** si on a $u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \geq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **décroissante** si on a $u_{n+1} \leq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est dite **constante** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

3. Convergence et divergence

À RETENIR

Convergence

On dit qu'une suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ si :

Pour tout $\epsilon > 0$, l'intervalle ouvert $]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

À LIRE

Cette définition est un peu abstraite mais elle signifie simplement que u_n se rapproche autant que l'on veut de ℓ pourvu que n soit assez grand.

Attention! Il est tout à fait possible que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ mais ne soit jamais égal à ℓ .

À RETENIR

Divergence vers $+\infty$

On dit qu'une suite (v_n) **diverge** vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si :

Pour tout $A > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $v_n > A$. On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Il existe une définition similaire pour la divergence vers $-\infty$.

À LIRE

Divergence vers $-\infty$

Dire que (v_n) **diverge** vers $-\infty$ signifie que :

Pour tout $A > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $v_n < -A$. On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

À LIRE

À noter que l'on n'étudie les limites des **suites** que quand n tend vers $+\infty$, et qu'il est possible qu'une suite n'admette pas de limite. On dit alors que cette suite **diverge**. Par contre, si une suite converge vers une limite, alors cette limite est **unique**.

II – Calcul de limites

1. Limites de suites de référence

Nous allons donner quelques suites “classiques” avec leur limite en $+\infty$:

À RETENIR

Limites de suites usuelles

| Suite | Limite quand n tend vers $+\infty$ |
|--|--------------------------------------|
| (\sqrt{n}) | $+\infty$ |
| (n) | $+\infty$ |
| (n^k) , pour $k \in \mathbb{N}^*$ | $+\infty$ |
| $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | 0 |
| $\left(\frac{1}{n}\right)$ | 0 |
| $\left(\frac{1}{n^k}\right)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$ | 0 |

Nous allons désormais donner la limite d’une catégorie de suite très importante en mathématiques : celle des **suites géométriques**. Ainsi :

À RETENIR

Limite de suites géométriques

Soit (v_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = q^n$ (où q est un nombre réel). Alors, on peut donner la limite de la suite (v_n) en fonction de q :

| Limite d’une suite géométrique | | | | |
|---|--------------|-----------|---------------|---------|
| Si on a... | $-1 < q < 1$ | $1 < q$ | $q \leq -1$ | $q = 1$ |
| Alors la suite (v_n) a pour limite... | 0 | $+\infty$ | Pas de limite | 1 |

À LIRE ∞

Le réel q est la **raison** de la suite : si $q > 1$, (v_n) est strictement croissante, si $0 < q < 1$, (v_n) est strictement décroissante et si $q = 1$ ou 0 , (v_n) est constante.

2. Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, (u_n) et (v_n) sont deux suites. Ces tableaux sont à connaître et sont requis pour pouvoir travailler sur les limites.

À RETENIR

Limite d'une somme

| Limite d'une somme | | | | | | |
|---|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Si la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est... | ℓ | ℓ | ℓ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Et la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est... | ℓ' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| Alors la limite de $(u_n + v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ est... | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? |

À RETENIR

Limite d'un produit

| Limite d'un produit | | | | | | | | | |
|--|---------------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| Si la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est... | ℓ | $\ell > 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| Et la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est... | ℓ' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| Alors la limite de $(u_n \times v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ est... | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? |

À RETENIR

Limite d'un quotient

| Limite d'un quotient | | | | | | | | | |
|--|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---|
| Si la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est... | ℓ | ℓ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | ℓ | 0 |
| Et la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est... | $\ell' \neq 0$ | $\pm\infty$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $\pm\infty$ | 0_{\pm}^+ | 0 |
| Alors la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$ est... | $\frac{\ell}{\ell'}$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? | $\pm\infty$ | ? |

À LIRE

Formes indéterminées

À noter qu'il n'existe que 4 formes indéterminées : " $+\infty - \infty$ ", " $0 \times \pm\infty$ ", " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ ".

3. Majoration, minoration et bornes

À RETENIR

Définition

Soient une suite (u_n) et deux réels m et M :

- On dit que m est un **minorant** de (u_n) si pour tout n : $u_n > m$.
- On dit que M est un **majorant** de (u_n) si pour tout n : $u_n < M$.
- On dit que (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

À RETENIR

Théorème

- Si (u_n) est croissante et est majorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas majorée, (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et est minorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas minorée, (u_n) diverge vers $-\infty$.

DÉMONSTRATION

Il faut savoir montrer que toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$. C'est ce que nous allons faire ici. Soit donc (u_n) une telle suite. Soit $A > 0$, on cherche un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$.

Or, comme (u_n) est non majorée, il existe N tel que $u_N > A$. De plus, comme (u_n) est croissante, alors $A < u_N \leq u_{N+1} \leq u_{N+2} \leq \dots$

Donc on a bien trouvé notre rang N vérifiant la définition de la divergence vers $+\infty$.

À LIRE

Toute suite convergente est également bornée.

4. Comparaisons et encadrements

À RETENIR

Théorèmes de comparaison

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang N . On a :

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ alors $\ell < \ell'$.

DÉMONSTRATION

Il peut être utile de savoir démontrer le premier point dans le cas $N = 0$ (les autres points se démontrent de manière semblable). Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Soit $A > 0$, on cherche un rang p tel que pour tout $n \geq p$, $v_n > A$.

Comme u_n diverge vers $+\infty$, il existe un rang q tel que pour tout $n \geq q$, $u_n > A$. Donc on a : $A < u_q < v_q$, mais aussi $A < u_{q+1} < v_{q+1}$, etc.

Donc il suffit de poser $p = q$ et on a bien notre rang vérifiant la définition de la divergence vers $+\infty$.

À RETENIR

Théorème des gendarmes

Soient trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) . On suppose que $u_n < v_n < w_n$ à partir d'un certain rang et que (u_n) et (w_n) convergent vers le réel ℓ .

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

III – Raisonnement par récurrence

Si on souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir d'un certain rang p , il est possible d'utiliser un type de raisonnement appelé **raisonnement par récurrence**.

À RETENIR

Raisonnement par récurrence

Initialisation : On teste la propriété au rang p . Si elle est vérifiée, on passe à l'étape suivante.

Hérédité : On suppose la propriété vraie à un rang $n \geq p$. Puis on montre qu'elle reste vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : On explique que l'on vient de démontrer la propriété au rang $n + 1$ et que comme celle-ci est initialisée et héréditaire, alors elle est vraie à partir du rang p .

À LIRE

Exemple

Soit une suite (u_n) définie par $(u_n) = \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} \end{cases}$. On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4 \leq u_n \leq 5$.

On note \mathcal{P}_n la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathcal{P}_n : 4 \leq u_n \leq 5$.

On constate que $u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} = \frac{4(u_n+4)+1}{u_n+4} = 4 + \frac{1}{u_n+4}$.

Initialisation : On teste la propriété au rang 0 :

$\mathcal{P}_0 : 4 \leq u_0 \leq 5 \iff 4 \leq 4 \leq 5$. C'est vrai : la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ et vérifions qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

D'après $\mathcal{P}_n : 4 \leq u_n \leq 5$. Donc on a :

$$\iff 4 \leq u_n \leq 5$$

$$\iff 4 + 4 \leq u_n + 4 \leq 5 + 4$$

$$\iff \frac{1}{9} \leq \frac{1}{u_n+4} \leq \frac{1}{8} \text{ (la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}^+ \text{ donc on change de sens l'inégalité)}$$

$$\iff 4 + \frac{1}{9} \leq 4 + \frac{1}{u_n+4} \leq 4 + \frac{1}{8}$$

Or $4 + \frac{1}{9} \approx 4.111 > 4$ et $4 + \frac{1}{8} = 4.125 < 5$. On a donc bien :

$$4 \leq u_{n+1} \leq 5$$

Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Ainsi, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le raisonnement par récurrence est très utilisé en mathématiques et ne se limite pas qu'à l'étude des suites. On peut par exemple l'utiliser pour montrer l'**inégalité de Bernoulli**.

À RETENIR**Inégalité de Bernoulli**

$(1+x)^n > 1+nx$ pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

DÉMONSTRATION**Inégalité de Bernoulli**

Soit $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$. On note \mathcal{P}_n la propriété définie pour tout $n \geq 2$ par \mathcal{P}_n : $(1+x)^n > 1+nx$. Montrons \mathcal{P}_n par récurrence.

Initialisation : On teste la propriété au rang 2 :

$$\mathcal{P}_2 : (1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x \text{ (car } x^2 > 0 \text{)}.$$

La propriété est vraie au rang 2.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 2$ et vérifions qu'elle est vraie au rang $n+1$.

En multipliant les deux membres de l'inégalité de l'hypothèse de récurrence par $1+x \geq 0$ (qui ne change donc pas le sens de l'inégalité), on obtient :

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x) &\geq (1+nx)(1+x) \\ \iff (1+x)^{n+1} &\geq 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x \end{aligned}$$

Conclusion :

La propriété est initialisée au rang 2 et est héréditaire. Ainsi, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 2$.