

Chapitre IX – Dénombrement

Bacomathiques -- https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES		
I - D	éfinitions 1 Ensemble d'éléments 1	
2. 3.	Sous-ensemble	
II - C o 1.	ombinaisons 3 Factorielle 3	
2. 3.	Qu'est-ce-qu'une combinaison? 3 Formules 4	
III - D 1. 2. 3.	énombrement5Principe additif5Principe multiplicatif5Formules de dénombrement6	

I - Définitions

1. Ensemble d'éléments

Cette partie donne quelques rappels sur la notion d'ensemble en mathématiques.

À RETENIR : DÉFINITION 🕴

Un **ensemble** E désigne une collection finie ou infinie d'objets distincts qu'on appelle ses **éléments**.

On note $x \in E$ si l'objet x appartient à E. Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.

À noter que l'ordre des objets n'a aucune importance lorsque l'on compare deux ensembles.

À LIRE : EXEMPLE 👀

Voici quelques exemples d'ensembles :

- {2; 4; 6} est un ensemble contenant 3 éléments.
- \mathbb{Z} et \mathbb{R} sont deux ensembles contenant une infinité d'éléments.
- $\{\}$ est un ensemble ne contenant aucun élément : c'est **l'ensemble vide**, noté \emptyset .
- $\{1\}$ est un ensemble content 1 élément : c'est un **singleton**.

À LIRE 00

Il est possible de créer des ensembles contenant autre choses que des nombres. Par exemple, on définit les fonctions $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto x^3 + 1$. Alors l'ensemble $E = \{f; g\}$ est un ensemble contenant des fonctions.

À RETENIR : RÉUNION ET INTERSECTION 9

Soient E et F deux ensembles.

- Leur **réunion** notée $E \cup F$ est l'ensemble constitué des éléments de E et des éléments de F.
- Leur **intersection** notée $E \cap F$ est l'ensemble constitué des éléments communs à E et F.
- Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont **disjoints**.

2. Sous-ensemble

À RETENIR : DÉFINITION 📍

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est un **sous-ensemble** (ou une partie) de E si tout élément de F est un élément de E.

On note ceci par $F \subset E$ (qui signifie "F est inclus dans E").

À LIRE : EXEMPLE 99

Soient E et F deux ensembles. Alors $E \cap F \subset E$ et $E \cap F \subset F$.

3. Liste d'éléments

Nous allons désormais voir un type de collection similaire aux ensembles, mais qui prend en compte l'ordre des éléments.

À RETENIR : DÉFINITION 💡

Un p-**uplet** (ou une p-liste) d'un ensemble E désigne une collection ordonnée de p éléments de E.

Remarquons que l'on ne demande pas que les éléments d'un p-uplet soient tous distincts.

À LIRE : ATTENTION À L'ORDRE DES ÉLÉMENTS 👀

Il faut bien faire attention à l'ordre des éléments! Prenons par exemple deux points du plan A = (1; 2) et B = (2; 1).

On peut voir A et B comme des 2-uplets de \mathbb{R} . Or, ce sont deux points différents, d'où la nécessité de bien faire attention à ne pas mélanger (1; 2) et (2; 1).

À LIRE : NOTATION 99

Bien que l'on note un ensemble avec des accolades, on note plutôt un p-uplet avec des parenthèses. Ainsi :

- $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ désigne l'ensemble constitué des nombres entiers de 1 à 5 (on a $\{1; 2; 3; 4; 5\} = \{2; 1; 3; 4; 5\} = \{5; 4; 3; 2; 1\} = ...$).
- (1; 2; 3; 4; 5) désigne le 5-uplet constitué des nombres entiers de 1 à 5 (on a (1; 2; 3; 4; 5) \neq (2; 1; 3; 4; 5) \neq (5; 4; 3; 2; 1) \neq ...).

II - Combinaisons

1. Factorielle

À RETENIR : DÉFINITION 💡

Soit *n* un nombre entier. On appelle factorielle de *n* le nombre entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

À LIRE : CONVENTION 99

Par convention, on pose 0! = 1.

Il est très courant de rencontrer des calculs avec des factorielles en mathématiques, leur utilisation ne se limitant pas au dénombrement.

2. Qu'est-ce-qu'une combinaison?

À RETENIR : DÉFINITION 🕴

Une **combinaison** de k éléments parmi n éléments, notée $\binom{n}{k}$, est le nombre de sous-ensembles de k éléments que possède un ensemble de n éléments.

À RETENIR : CALCUL D'UNE COMBINAISON 📍

Soient n et k deux entiers. Alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

À LIRE : EXEMPLE 99

Soit $E = \{1, 2, 3, ..., 30\}$. On cherche à connaître le nombre de sous-ensembles de 3 éléments que possède E. Pour cela, il suffit d'appliquer la formule :

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{27!3!} = \frac{28 \times 29 \times 30}{1 \times 2 \times 3} = 4060$$

E contient 4060 sous-ensembles de 3 éléments.

3. Formules

À RETENIR : FORMULES 📍

Soient n et k deux entiers.

$$-\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$-\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$-\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

À LIRE : TRIANGLE DE PASCAL 99

Une autre formule très utile est $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Elle peut se retrouver à l'aide du triangle de Pascal, que l'on construit comme tel :

- 1. Dans une pyramide, on place un 1 au sommet de la pyramide.
- 2. On place 1 et 1 en dessous, de part et d'autre.
- 3. Les extrémités des lignes sont toujours des 1, et les autres nombres sont la somme des deux nombres directement au-dessus.

Les premières lignes du triangle de Pascal sont donc :

On a alors que le k-ième coefficient de la n-ième ligne est égal à $\binom{n}{k}$ (en partant de 0).

III - Dénombrement

1. Principe additif

À RETENIR : PRINCIPE ADDITIF 📍

Soient E et F deux ensembles disjoints contenant respectivement n et m éléments. Alors $E \cup F$ contient n + m éléments.

À LIRE : EXEMPLE 99

Si on pose $E = \{1; 3; 5\}$ et $F = \{2; 4; 6; 8\}$. On a bien que E et F sont disjoints donc $E \cup F$ contient 3 + 4 = 7 éléments.

2. Principe multiplicatif

Commençons cette sous-section par une définition.

À RETENIR : PRODUIT CARTÉSIEN 📍

Soient E et F deux ensembles. Leur produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples (e; f) où $e \in E$ et $f \in F$.

À LIRE : EXEMPLE 👀

Cette définition peut sembler un peu compliquée, mais elle est en faite très intuitive. Prenons $E = \{1; 2; 3\}$ et $F = \{4; 5\}$.

Alors on a $E \times F = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$

À LIRE : CONSTRUCTION DU PLAN CARTÉSIEN 99

Prenons maintenant $E = F = \mathbb{R}$.

Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples (x; y) où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Il s'agit en fait du plan cartésien.

À RETENIR : PRINCIPE MULTIPLICATIF 📍

Soient E et F deux ensembles contenant respectivement n et m éléments. Alors $E \times F$ contient $n \times m$ éléments.

Ce principe (tout comme le principe additif vu précédemment) sont notamment utilisés en probabilités.

3. Formules de dénombrement

À RETENIR : PERMUTATIONS •

Soit E un ensemble de taille n. On appelle **permutation** de E tout n-uplet d'éléments distincts de E.

À LIRE : EXEMPLE 00

Prenons $E = \{1, 2, 3\}$. Alors E admet 6 permutations qui sont :

- -(1;2;3)
- **—** (1; 3; 2)
- -(2;1;3)
- -(2;3;1)
- -(3;1;2)
- -(3;2;1)

À RETENIR : FORMULES 💡

Soit E un ensemble possédant n éléments.

- Le nombre de p-uplets d'éléments de E est égal à n^p .
- Le nombre de *p*-uplets d'éléments distincts de *E* est égal à $\frac{n!}{(n-p)!}$.
- Le nombre de permutations de E est égal à n!.
- Le nombre de sous-ensembles de E est égal à 2^n .
- Le nombre de sous-ensembles de k éléments que possède E est égal à $\binom{n}{k}$ (pour rappel).

À noter également une dernière petite formule qu'il peut être utile de savoir démontrer à l'aide des formules ci-dessus.

À RETENIR 💡

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

DÉMONSTRATION

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit E un ensemble à n éléments.

Par la dernière formule de dénombrement, E a $\binom{n}{0}$ sous-ensembles qui possèdent 0 éléments, $\binom{n}{1}$ sous-ensembles qui possèdent 1 éléments, ...

En fait, pour tout k compris entre 0 et n, E a exactement $\binom{n}{k}$ sous-ensembles qui possèdent k éléments (toujours d'après la dernière formule).

Donc finalement, on obtient bien que la somme des $\binom{n}{k}$ vaut 2^n (qui est, d'après l'avant-dernière formule, le nombre de sous-ensembles que possède E).