



# Chapitre V – La fonction logarithme népérien

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

|  |          |
|--|----------|
| <b>I – Propriétés du logarithme népérien</b> | <b>1</b> |
| 1. Définition                                | 1        |
| 2. Relations algébriques                     | 1        |
| 3. Représentation graphique                  | 2        |
| <b>II – Étude de la fonction</b>             | <b>4</b> |
| 1. Limites                                   | 4        |
| 2. Dérivée                                   | 5        |
| 3. Variations                                | 5        |

# I – Propriétés du logarithme népérien

## 1. Définition

À RETENIR

### Définition

Le **logarithme népérien** est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $x \mapsto \ln(x)$ .

À RETENIR

On a la relation fondamentale suivante pour tout  $x > 0$  et  $y$  réels :

$$\ln(x) = y \iff x = e^y.$$

Ainsi, à tout réel **strictement positif**  $x$ , la fonction logarithme népérien  $y$  associe **son unique antécédent**  $y$  par rapport à la fonction exponentielle. De même pour la fonction exponentielle.

On dit que ces fonctions sont des **fonctions réciproques** (à la manière de  $\sin$  et  $\arcsin$  ou  $\cos$  et  $\arccos$ ).

À LIRE

### Exemple

Cette relation peut sembler compliquer à assimiler mais il n'en est rien ! Prenons  $x = 0$ , on a :

$e^0 = 1$  (tout réel mis à la puissance zéro vaut un), la relation précédente nous donne  $\ln(1) = 0$ .

Si on prend maintenant  $x = 1$ , on a :

$e^1 = e$ , on a donc  $\ln(e) = 1$ .

Les relations suivantes sont par conséquent disponibles :

À RETENIR

### Relations entre fonctions réciproques

Pour tout réel  $x$  **strictement positif**, on a  $e^{\ln(x)} = x$ .

Et pour tout réel  $x$ , on a  $\ln(e^x) = x$ .

## 2. Relations algébriques

Le logarithme népérien a plusieurs propriétés intéressantes qu'il faut connaître.

## À RETENIR

## Formules

Pour tous réels  $x$  et  $y$  **strictement positifs** :

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
- $\ln(\sqrt[p]{x}) = \frac{1}{p} \times \ln(x)$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$

Certaines de ces propriétés peuvent se déduire les unes des autres.

### 3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction logarithme népérien :



On voit sur ce graphique plusieurs propriétés données précédemment :  $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$  par exemple. On trace maintenant le graphe de la fonction logarithme népérien, avec celui de la fonction exponentielle. On trace également la droite d'équation  $y = x$  :



On remarque plusieurs choses : le graphe de la fonction logarithme népérien est le symétrique de celui de la fonction exponentielle par rapport à la droite  $y = x$  et on voit que la fonction logarithme népérien croît moins vite que la fonction puissance qui elle-même croît moins vite que la fonction exponentielle. Cette propriété est importante : c'est la **croissance comparée**.

## II – Étude de la fonction

### 1. Limites

#### À RETENIR

##### Limites

Les limites de la fonction logarithme népérien aux bornes de son ensemble de définition sont :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Il faut aussi savoir que la fonction puissance “l’emporte” sur le logarithme népérien (voir la partie “Représentation graphique”).

#### À RETENIR

##### Croissances comparées

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0.$

#### DÉMONSTRATION

##### Croissances comparées

Nous allons démontrer le second point en utilisant le premier (qui n’est pas éligible à une démonstration au lycée) dans le cas  $n = 1$ . Pour tout  $x > 0$ , posons  $y = \frac{1}{x}$ .

On a donc pour tout,  $x \ln(x) = \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(y)}{y}$ .

Or, quand  $x$  tend vers  $0^+$ ,  $y$  tend vers  $+\infty$ . Par le premier point :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0 \iff \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

Et en remplaçant  $y$  par  $\frac{1}{x}$  dans le résultat ci-dessus, on a bien ce que l’on cherchait.

Pour finir, on donne une limite qu’il peut être utile de savoir redémontrer.

#### À RETENIR

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

## DÉMONSTRATION

La fonction logarithme népérien est dérivable en 1 (voir sous-section suivante), on peut donc écrire :

$$\ln'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1}$$

Ce qui est équivalent à (car on a  $\ln(1) = 0$  et  $\ln'(1) = 1$ ) :

$$1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

On pose  $y = x - 1$  ce qui nous donne finalement :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y + 1)}{y} = 1$$

## 2. Dérivée

## À RETENIR

### Dérivée d'une composée

Soit une fonction  $u$  dérivable et **strictement positive** sur un intervalle  $I$ , on a pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle :

$$\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

## À RETENIR

### Dérivée

Ainsi, si pour tout  $x \in I$  on a  $u(x) = x$ , on trouve :

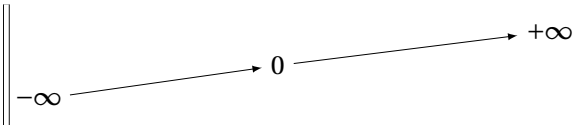
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

## 3. Variations

Avec la dérivée donnée précédemment ainsi que les limites données, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction logarithme népérien.

## À RETENIR

## Signe et variations

|                     |  |   |           |
|---------------------|--|---|-----------|
| $x$                 | 0  | 1 | $+\infty$ |
| $x \mapsto \ln'(x)$ |  | + |           |
| $x \mapsto \ln(x)$  |  |   |           |

On remarque qu'avec le tableau de variation, il est possible d'obtenir le signe de la fonction (avec le théorème des valeurs intermédiaires).

Ainsi, sur  $]0; 1[$ ,  $\ln$  est **strictement négative** et sur  $]1; +\infty[$ ,  $\ln(x)$  est **strictement positive** et, comme vu précédemment,  $\ln(1) = 0$ .

On observe également les variations de la fonction : strictement croissante sur son ensemble de définition.