Chapitre III – Dérivation

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I – Qu'est-ce-qu'une dérivée ?

1. Nombre dérivé

À RETENIR

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels $a \in I$ et $h \neq 0$ tels que $(a+h) \in I$.

La fonction f est **dérivable** en a si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ou en posant $x = a+h$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$.

À LIRE

Limite d'une fonction

La notation $\lim\limits_{h \to 0}$ veut simplement dire que l'on rend h aussi proche de 0 que possible (sans pour autant que h soit égal à 0). On dit que l'on "fait tendre h vers 0" et on appelle cela **une limite**.

Attention ! Il arrive que cette limite n'existe pas ou ne soit pas finie. Dans ce cas-là, $f'(a)$ n'existe pas et on dit que f n'est pas dérivable en a.

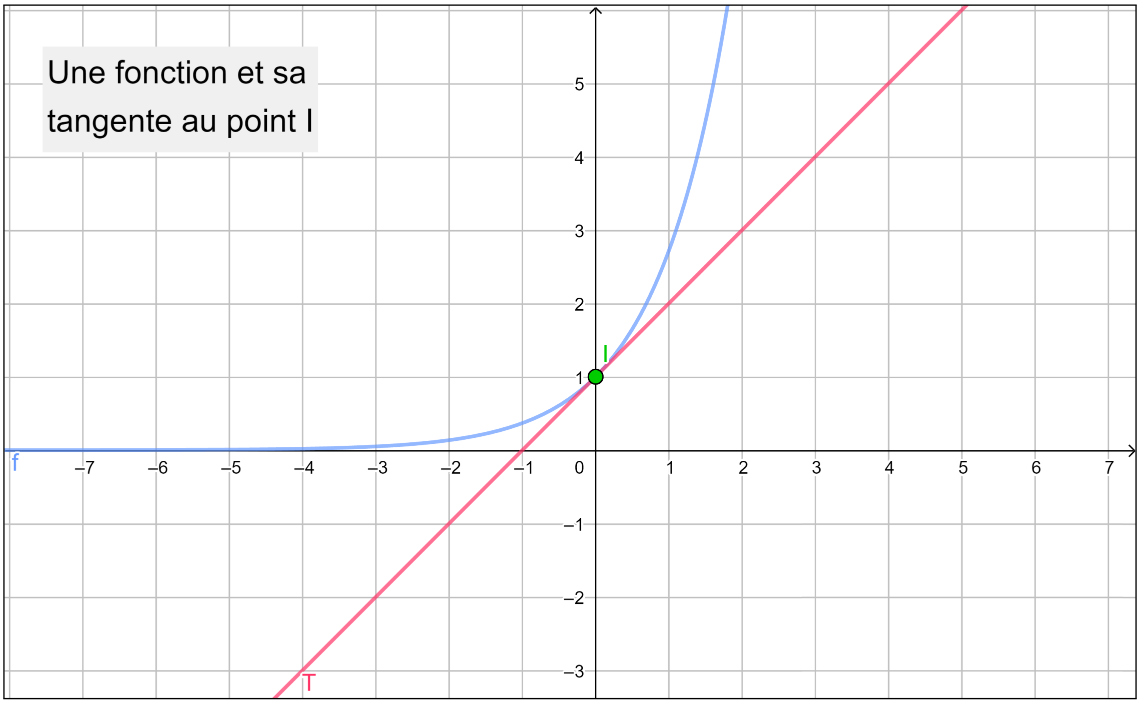
2. La tangente

À RETENIR

Équation de la tangente

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet une tangente $\mathscr{T}$ au point de coordonnées $(a; f(a))$.

De plus, $f'(a)$ est le coefficient directeur de $\mathscr{T}$, et une équation de $\mathscr{T}$ est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.



DÉMONSTRATION

Équation de la tangente

La tangente $\mathscr{T}$ en un point d'une courbe est une droite. Une équation de droite est de la forme $y = mx + p$ avec m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

On a déjà le coefficient directeur de $\mathscr{T}$ par la propriété précédente : $m = f'(a)$.

De plus, on sait que $\mathscr{T}$ passe par le point $(a, f(a))$ (car c'est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a).

Donc l'équation de droite vérifie $f(a) = f'(a)a + p$. Ce qui donne $p = f(a) - af'(a)$. Au final notre équation est la suivante : $y = xf'(a) + f(a) - af'(a) \iff y = f(a) + (x-a)f'(a)$.

3. Fonction dérivée

À RETENIR

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle fonction dérivée (ou plus simplement **dérivée**) de f la fonction g qui à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ (i.e. $g(x) = f'(x)$).

Très souvent, la fonction g sera notée f'.

II – Tables de dérivation

1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

À RETENIR

Soit λ une constante réelle.

Fonction	**Dérivée**	**Domaine de dérivabilité**
λ	0	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_*^+$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur certaines fonctions :

À RETENIR

Soient deux fonctions u et v et soit λ une constante réelle.

Fonction	**Dérivée**	**Domaine de dérivabilité**
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	En tout point où u est dérivable.
$u + v$	$u' + v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	En tout point où v est dérivable et non nulle.
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	En tout point où u et v sont dérivables et non nulles.

3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles (i.e. “f de g de x”) :

À RETENIR

Soit u une fonction.

Fonction	**Dérivée**	**Domaine de dérivabilité**
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	En tout point où u est dérivable.
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	En tout point où u est dérivable et non nulle.
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
e^u	$u'e^u$	En tout point où u est dérivable.
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$	En tout point où u est dérivable.
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	En tout point où u est dérivable.

Il est cependant possible de donner une formule plus générale.

À RETENIR

Dérivée d'une composée

Soient f dérivable sur I et g dérivable sur l'ensemble des valeurs prises par f sur I. On a alors $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

À LIRE

Fonction composée

On rappelle que la fonction $g \circ f$ est la fonction définie pour tout x par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

III – Étude des variations d’une fonction

1. Lien dérivée - variations d’une fonction

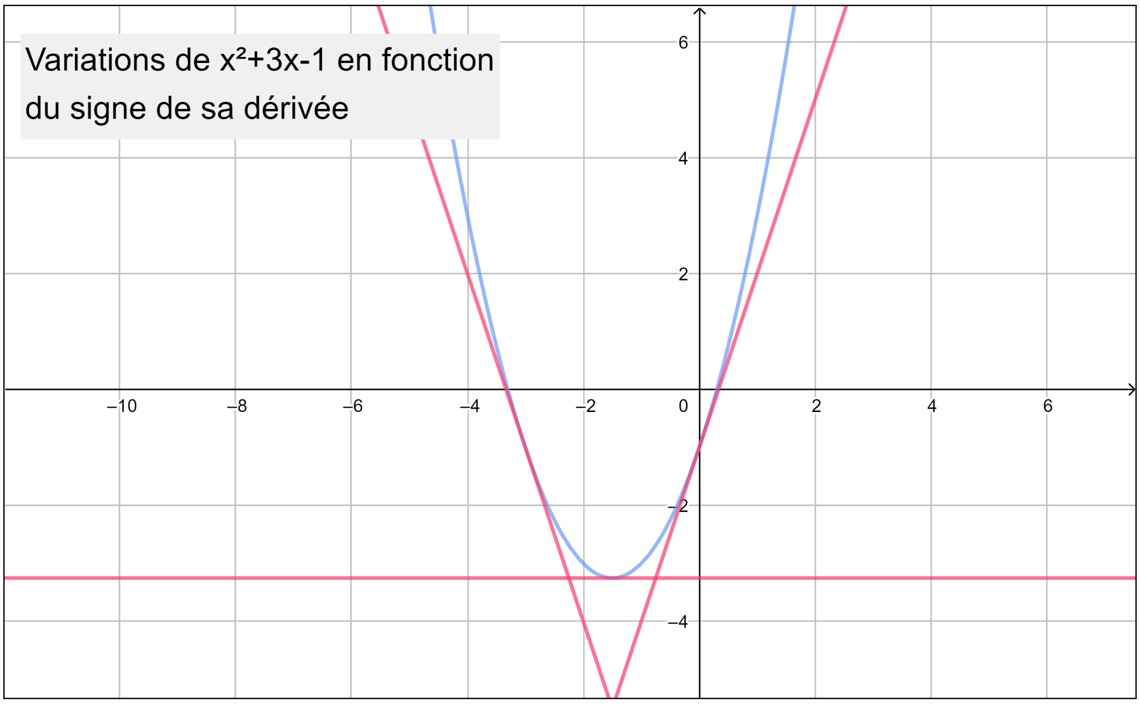
Avec le signe de la dérivée d’une fonction, il est possible d’obtenir le sens de variation de cette fonction.

À RETENIR

Variations d’une fonction

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.



2. Extrema

À RETENIR

Étude des extrema

Soient f dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$:

— Si f admet un extremum local en a, alors on a $f'(a) = 0$.

— Si $f'(a) = 0$ et que le signe de f' est différent avant et après a, alors $f'(a)$ est un extremum local de f.

— Si $f'(a) = 0$ et qu'on est négatif avant a et positif après, cet extremum local est un minimum local.

— Si $f'(a) = 0$ et qu'on est positif avant a et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

À LIRE

Avec ceci, il est possible de retrouver la plupart des formules que nous avons vues sur les fonctions du second degré (sens de variation, sommet de la parabole, ...).