Chapitre VII – Calcul intégral

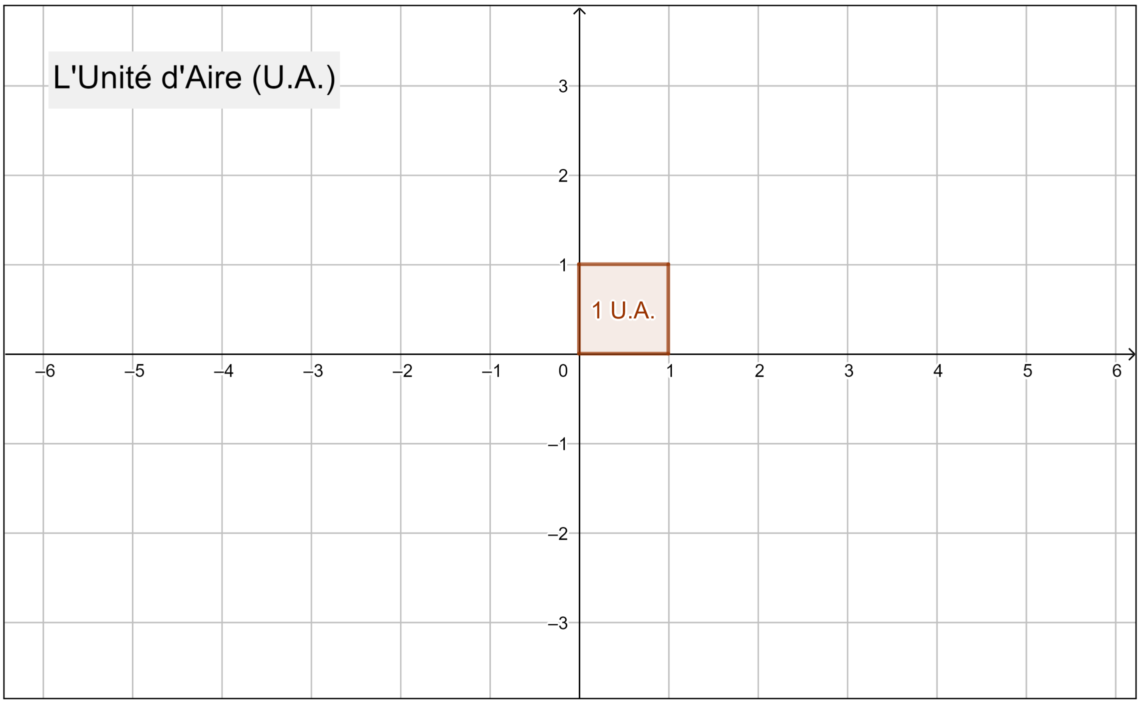
Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

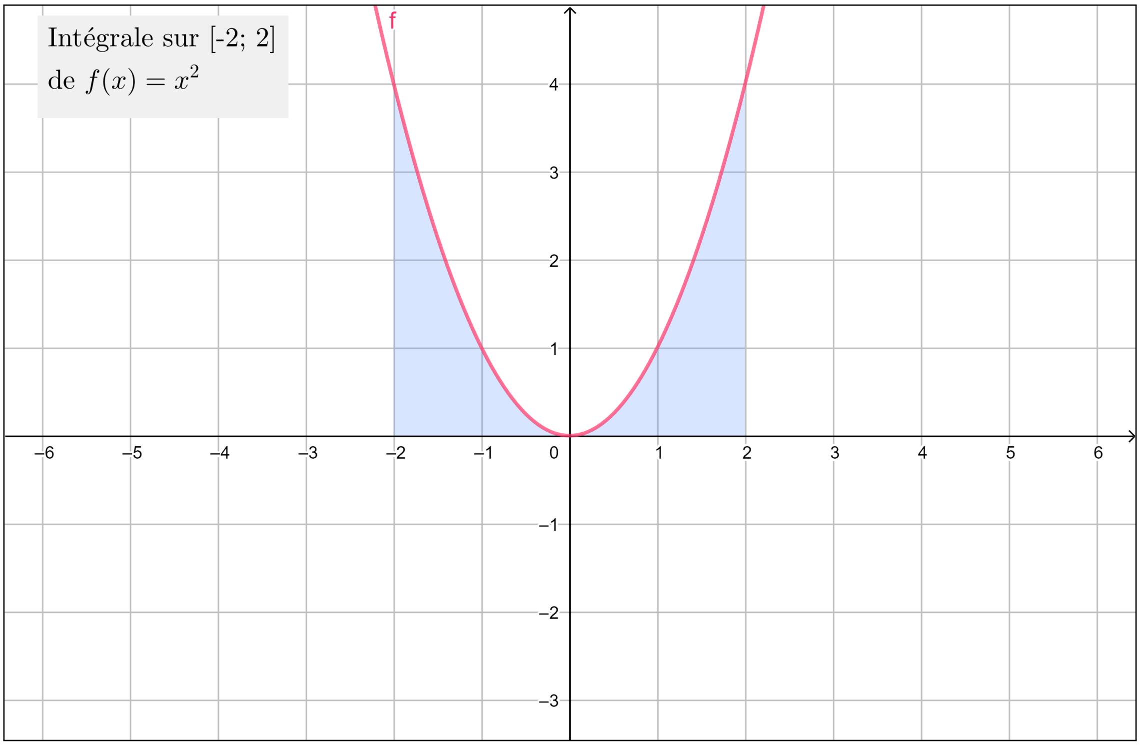
I – Calcul d'aire

1. Aires et intégrales

Dans un repère orthogonal $(O; I; J)$, on prend un point $A = (1; 1)$ et on appelle **Unité d'Aire** (U.A.) l'aire du rectangle formé par les points O, I, A et J.



Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$. L'**intégrale** de la fonction f sur $[a; b]$ notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses délimitée par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et est exprimée en **U.A.**.



On dit que les réels a et b sont les **bornes** de l'intégrale.

2. Théorème fondamental de l'analyse

Pour calculer l'intégrale d'une fonction, il faut d'abord trouver la primitive de celle-ci (voir le cours sur les primitives).

À RETENIR 💡

Théorème fondamental de l'analyse

Soient une fonction f continue sur un intervalle I et deux réels a et b appartenant à I.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

À LIRE

Exemple

On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$, et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1;4]$:

1re étape : On cherche une primitive de f. On trouve $F(x) = x^2 + x = x(x+1)$.

2e étape : On calcule l'intégrale. On a $\int_1^4 2x + 1 \,\mathrm{d}x = [x(x+1)]_1^4 = 4(4+1) - 1(1+1) = 20 - 2 = 18$ U.A.

À LIRE

Autre exemple

On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x$, et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2;2]$:

1re étape : On cherche une primitive de f. On trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

2e étape : On calcule l'intégrale. On a $\int_{-2}^{2} x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2} = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0$ U.A.

Ce résultat est logique car l'aire au-dessus de la courbe de la fonction f sur $[-2;0]$ est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[0;2]$ (voir les propriétés sur les intégrales des fonctions impaires).

3. Signe de l'intégrale

De manière générale, le signe de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle dépend du signe de cette fonction sur cet intervalle.

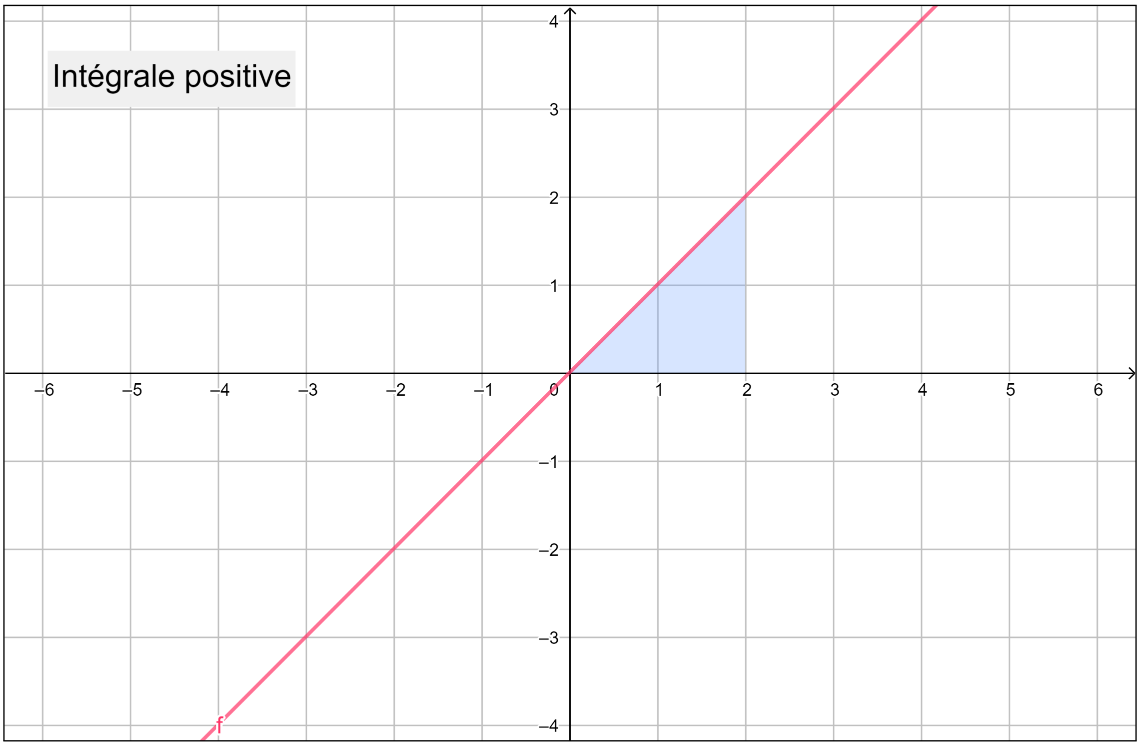
À RETENIR

Relation signe de l'intégrale - signe de la fonction

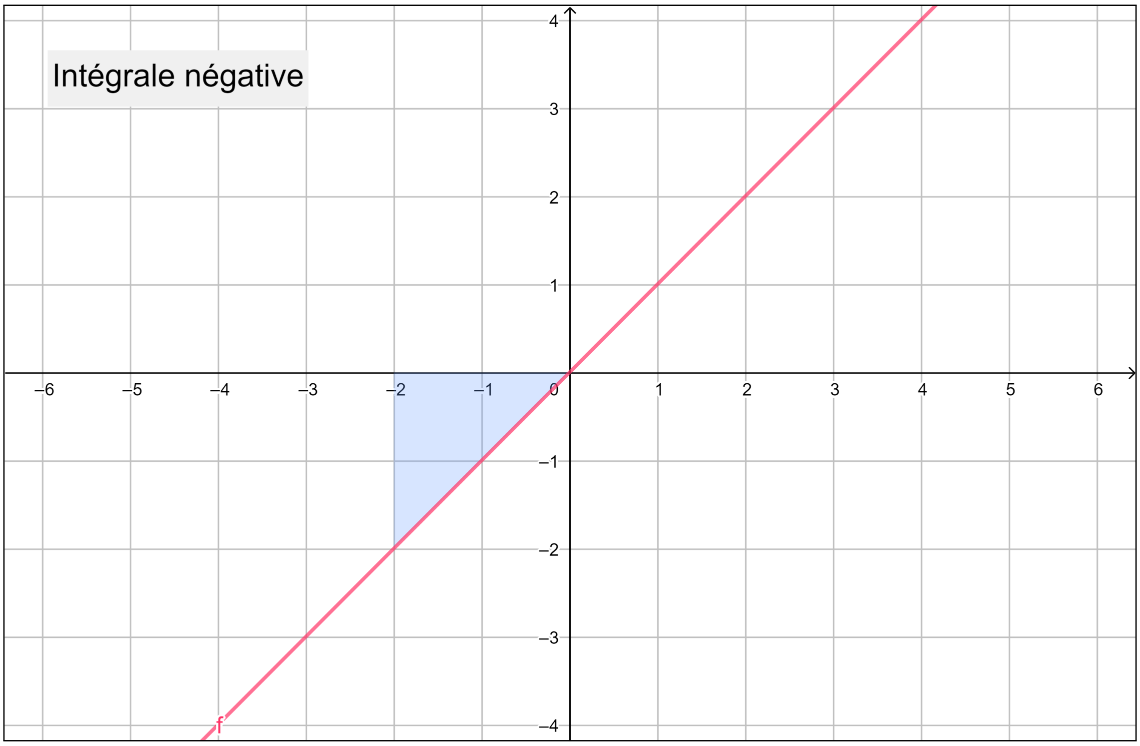
Soient une fonction f continue sur un intervalle $I = [a;b]$.

- Si $f > 0$ sur I, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.
- Si $f < 0$ sur I, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0$.
- Si f change de signe sur I, on ne connaît pas directement le signe de l'intégrale. Le signe dépend de la partie de l'aire qui est la plus "grande".
- Soit g une fonction définie sur I avec $f > g$ sur I, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, cette intégrale sera positive :



Et cette intégrale sera négative :



II – Propriétés de l'intégrale

1. Propriétés algébriques

À RETENIR

Propriétés

Soient une fonction f continue sur un intervalle I et deux réels a et b appartenant à I.

— $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

— $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. Linéarité

À RETENIR

Linéarité de l'intégrale

Soient une fonction f continue sur un intervalle I et deux réels a et b appartenant à I. Soit λ un réel quelconque.

— $\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a g(x)\,\mathrm{d}x$

— $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

3. Relation de Chasles

À RETENIR

Relation de Chasles

Soient une fonction f continue sur un intervalle I et deux réels a et b appartenant à I. Pour tout $c \in I$, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

À LIRE

Exemple

On veut calculer $I = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ où $f(x) = |x| = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

1re étape : On sépare l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles :

$I = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} -x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} x\,\mathrm{d}x.$

2e étape : On calcule l'intégrale :

$I = \int_{-2}^{0} -x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4} = 0 - (-\frac{2^2}{2}) + ((\frac{4^2}{2}) - 0) = 10$ U.A.

III – Calculs d'intégrale

1. Intégration par parties

Il peut arriver que vous ayez à intégrer un produit de fonctions. En classe de Terminale, il est possible de faire appel à une technique appelée **intégration par parties** pour en venir à bout.

À RETENIR

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soient a et b appartenant à I.

Alors $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

DÉMONSTRATION

Intégration par parties

Comme $(u\times v)' = u'v+uv'$, la fonction $u\times v$ est une primitive de la fonction $u'v+uv'$ sur I. Or, par la relation de Chasles :

$$\int_a^b u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc, avec ce que l'on a fait au tout début, on a bien :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b$$

C'est-à-dire :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

À LIRE

Exemple

En utilisant cette technique, calculons $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$. Nous souhaitons faire disparaître le "x", on va donc poser $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$ (afin de dériver x).

Donc par la formule d'intégration par parties :

$$I = \left[\underbrace{e^x}_{=u}\underbrace{x}_{=v}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{=u}\times\underbrace{1}_{=v'}\,\mathrm{d}x = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

Il vous faudra un peu de pratique pour savoir quelle fonction il faut dériver et quelle fonction il faut primitiver.

2. Intégrales de fonctions paires et impaires

À RETENIR

Intégrale d'une fonction paire

Soit f une **fonction paire** continue sur un intervalle I (comme $x \mapsto x^2$).

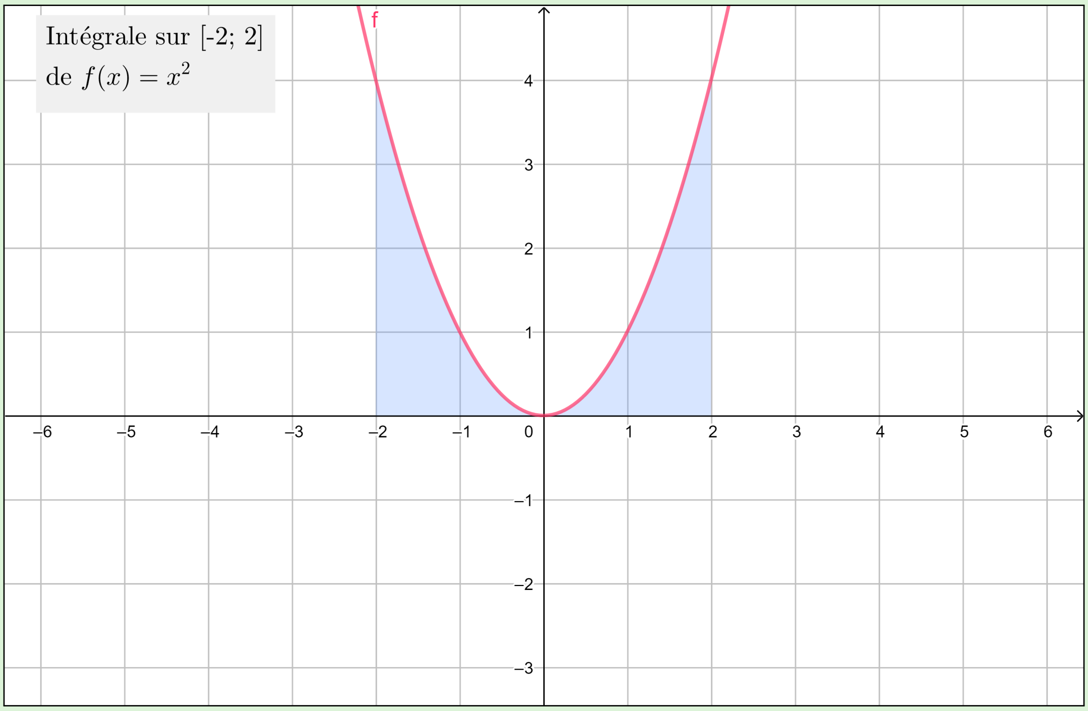
On a la relation suivante pour tout $a \in I$ ($-a$ doit aussi être dans I) :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

À LIRE

Exemple

Cette relation peut se retrouver visuellement, l'aire du côté gauche par rapport à (Oy) est égale à l'aire de l'autre côté de (Oy), et les deux sont positives ; on peut donc les additionner pour retrouver l'aire totale :



À RETENIR

Intégrale d'une fonction impaire

Soit f une **fonction impaire** continue sur un intervalle I (comme $x \longmapsto x^3$).

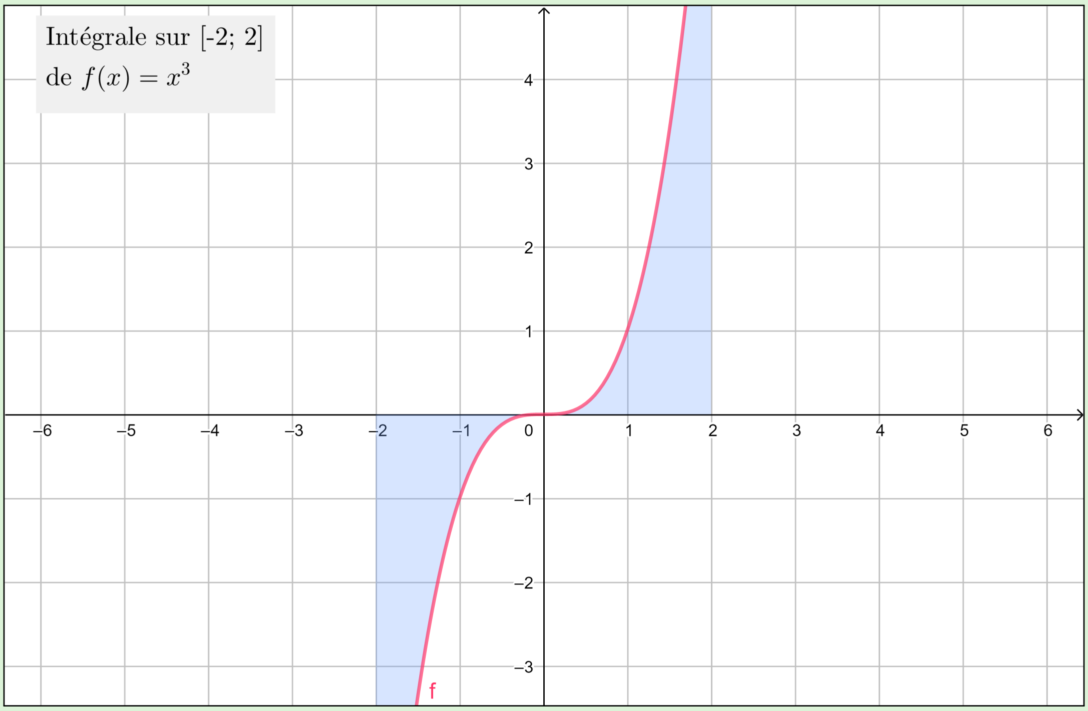
On a la relation suivante pour tout $a \in I$ ($-a$ doit aussi être dans I) :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

À LIRE

Exemple

De même, on peut retrouver cette relation visuellement, l'aire du côté gauche par rapport à (Oy) est négative et égale à l'aire de l'autre côté de (Oy) qui est positive, les deux s'annulent donc :



3. Intégrales de fonctions périodiques

À RETENIR

Intégrale d'une fonction périodique

Soit f une **fonction périodique** de période T (comme cos avec $T = 2\pi$) continue sur chacune de ses périodes, on a la relation suivante pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

4. Valeur moyenne d'une fonction

À RETENIR

Valeur moyenne

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La valeur moyenne M de f sur $[a;b]$ est donnée par $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

5. Aire entre deux courbes

À RETENIR

Différence d'aires

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Si on a $f \geq g$ sur cet intervalle, alors l'aire entre les deux courbes est donnée par $\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$.

6. Primitive s'annulant en a

À RETENIR

Existence d'une primitive s'annulant en un point

Soient une fonction f continue sur un intervalle I et un réel $a \in I$. La primitive de f sur I qui vaut 0 en a (notée F_a) est donnée par $F_a : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

DÉMONSTRATION

Existence d'une primitive

Soit F une autre primitive de f. Alors on a pour tout $x \in I$, $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$ par le théorème fondamental de l'analyse.

Donc pour tout $x \in I$, $F_a'(x) = F'(x) - 0 = f(x)$, donc F_a est bien une primitive de f.

De plus, $F_a(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Enfin, comme les primitives d'une fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante près, on a bien l'unicité de F_a.