Chapitre III – Continuité, dérivabilité et convexité

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Continuité 1
1. Définition 1
2. Théorème des valeurs intermédiaires 1
3. La partie entière $[x]$ 2

II - Dérivation 3
1. Nombre dérivé 3
2. La tangente 4
3. Fonction dérivée 5
4. Applications 5

III - Tables de dérivation 7
1. Dérivées usuelles 7
2. Opérations sur les dérivées 7
3. Dérivées de composées 8

IV - Convexité 9
1. Dérivée seconde d'une fonction 9
2. Fonction convexe 9
3. Lien avec les tangentes 10

I - Continuité

1. Définition

À RETENIR : DÉFINITION

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. La fonction f est continue en a si on a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

f est dite **continue** sur I, si on peut appliquer la formule ci-dessus à tous les réels de l'intervalle I.

On dit de manière générale qu'une fonction est continue sur un intervalle s'il est possible de tracer sa courbe représentative sur cet intervalle “sans lever le crayon”.

À RETENIR : OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

- Toute somme, produit, composée ou quotient (avec le dénominateur ne s'annulant pas) de fonctions continues est également continue sur le même intervalle.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (la réciproque n'est pas vraie cependant).

À LIRE : EXEMPLE

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de son ensemble de définition ($\mathbb{R}^*$) mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

À RETENIR : THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel y_0 tel que $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **au moins** un réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

À LIRE : EXEMPLE

Ce théorème est **très important** ! Voici un exemple : soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x$. Prouvons qu'il existe au moins un réel $x_0 \in [0; 3]$ tel que $f(x_0) = 5$. On a $f(0) = 0$ et $f(3) = 33$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $[0; 3]$ et que $0 < 5 < 33$, il existe un réel $x_0 \in [0, 3]$ tel que $f(x_0) = 5$.

On peut encore tenter d'affiner la précision : $f(1) = 1$ et $f(2) = 10$. On a bien $1 < 5 < 10$ donc $x_0 \in [1; 2]$, etc.

À LIRE

Une conséquence de ce théorème est que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors la fonction f s'annule au moins une fois entre a et b.

Enfin, il existe un corollaire qui donne en plus **l'unicité** du point x_0.

À RETENIR : COROLLAIRE

Si f est continue sur $[a; b]$ et que f est **strictement monotone** sur cet intervalle, alors pour tout réel y_0 tel que $f(a) < y_0 < f(b)$ (ou $f(a) > y_0 > f(b)$), il existe **un unique** réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

3. La partie entière $[x]$

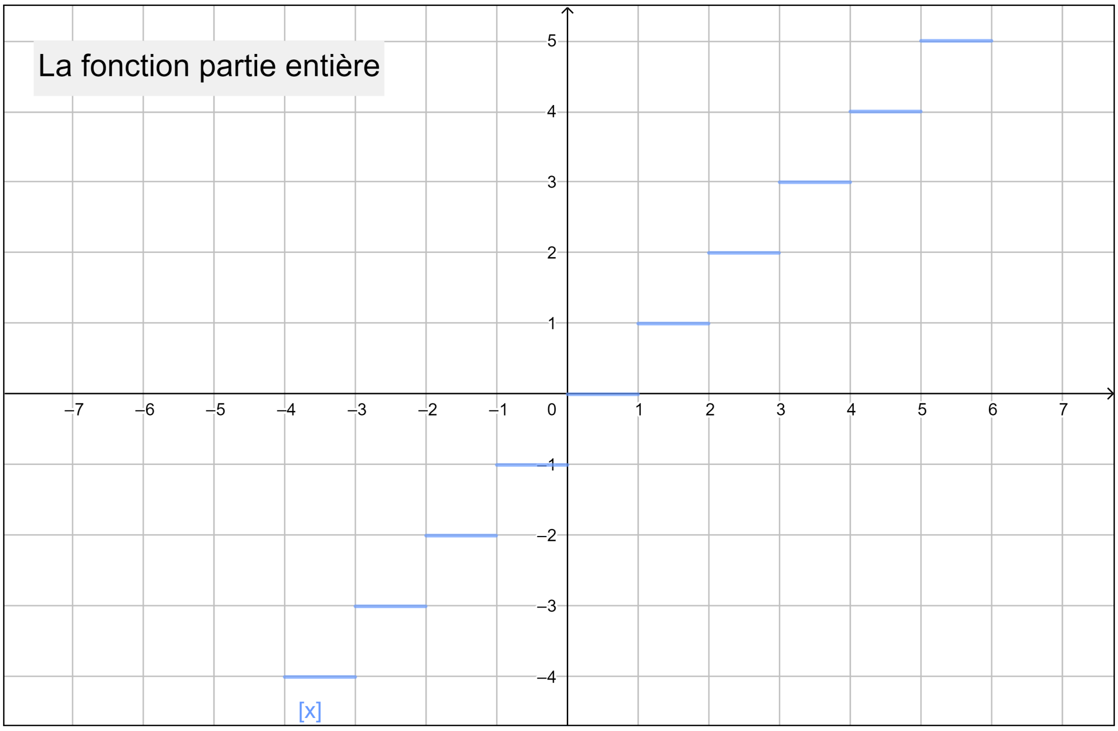
À RETENIR : DÉFINITION

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **partie entière** de x notée $[x]$ (ou $E(x)$) est l'unique réel tel que : $[x] \leq x < [x] + 1$.

À LIRE : EXEMPLE

$[1,216] = 1$ et $[-2,198] = -3$.

La fonction partie entière définie par $x \mapsto [x]$ **n'est pas continue** sur $\mathbb{R}$:



II - Dérivation

1. Nombre dérivé

À RETENIR : DÉFINITION

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels $a \in I$ et $h \neq 0$ tels que $(a+h) \in I$.

La fonction f est **dérivable** en a si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou en posant $x = a + h$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$.

À LIRE : REMARQUE

Notez bien que toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

2. La tangente

À RETENIR : ÉQUATION DE LA TANGENTE

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet une tangente $\mathcal{T}$ au point de coordonnées $(a; f(a))$.

De plus, $f'(a)$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$, et une équation de $\mathcal{T}$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

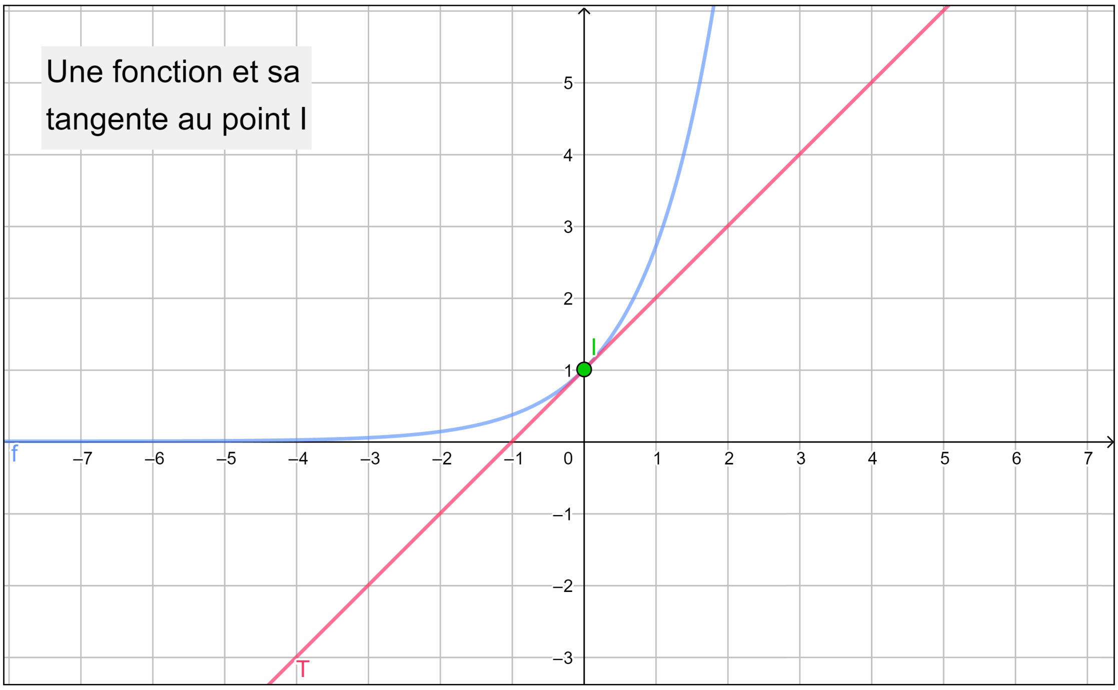
À LIRE : EXEMPLE

Soit $f(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ (voir cours sur la fonction exponentielle).

Cherchons une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$:

On a $f'(x) = f(x)$ donc $f'(0) = 1$.

Par conséquent, une équation de la tangente est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x + 1$: on retrouve ce qui a été constaté sur la représentation graphique de la fonction exponentielle.



3. Fonction dérivée

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

On appelle fonction dérivée (ou plus simplement **dérivée**) de f la fonction g qui à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ (i.e. $g(x) = f'(x)$).

Très souvent, la fonction g sera notée f'.

4. Applications

Plusieurs applications peuvent être trouvées aux dérivées. Avec le signe de la dérivée d'une fonction, il est possible d'obtenir le sens de variation de cette fonction.

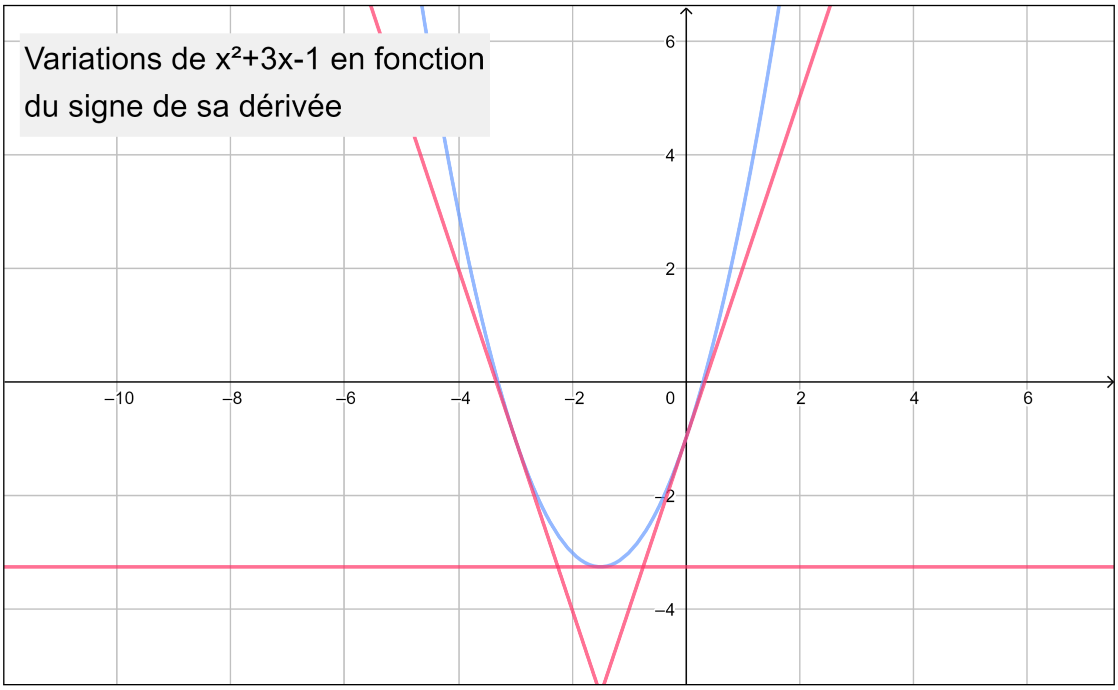
À RETENIR : VARIATIONS D'UNE FONCTION

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

— Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.

— Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

— Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.



Il est également possible d'en déduire diverses propriétés sur les extrema dits "locaux" (sur un certain intervalle) d'une fonction.

À RETENIR : ÉTUDE DES EXTREMA

Soient f dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$:

— Si f admet un extremum local en a, alors on a $f'(a) = 0$.

— Si $f'(a) = 0$ et que le signe de f' est différent avant et après a, alors $f'(a)$ est un extremum local de f.

— Si $f'(a) = 0$ et qu'on est négatif avant a et positif après, cet extremum local est un minimum local.

— Si $f'(a) = 0$ et qu'on est positif avant a et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

III - Tables de dérivation

1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

À RETENIR

Soit λ une constante réelle.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
λ	0	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_*^+$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*^+$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur les fonctions u et v :

À RETENIR

Soient deux fonctions u et v et soit λ une constante réelle.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	En tout point où u est dérivable.
$u + v$	$u' + v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	En tout point où u et v sont dérivables.
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	En tout point où v est dérivable et non nulle.
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	En tout point où u et v sont dérivables et non nulles.

3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles :

À RETENIR

Soit u une fonction.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	En tout point où u est dérivable.
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	En tout point où u est dérivable et non nulle.
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
e^u	$u'e^u$	En tout point où u est dérivable.
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	En tout point où u est dérivable et strictement positive.
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$	En tout point où u est dérivable.
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$	En tout point où u est dérivable.

Il est cependant possible de donner une formule plus générale.

À RETENIR : DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE

Soient f dérivable sur I et g dérivable sur l'ensemble des valeurs prises par f sur I. On a alors $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

À LIRE : FONCTION COMPOSÉE

On rappelle que la fonction $g \circ f$ est la fonction définie pour tout x par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

IV - Convexité

1. Dérivée seconde d'une fonction

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée f' dérivable sur I.

On appelle **dérivée seconde** (notée f'') de f, la fonction dérivée de f'.

Ainsi, pour calculer f'', on calcule d'abord f', puis on dérive f'.

À LIRE : EXEMPLE

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$. Calculons f''.

On applique la formule pour dérivée $\sin(u)$ (où u est la fonction $u : x \mapsto 2x$) :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u' \cos(u) = 2\cos(2x)$.

Pour finir, il suffit juste de dériver f' : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 2 \times (-2\sin(2x)) = -4\sin(2x)$.

2. Fonction convexe

À RETENIR : DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée f' dérivable sur I.

— On dit que f est **convexe** sur I si f'' est positive sur I.

— On dit que f est **concave** sur I si f'' est négative sur I.

— On dit que $a \in I$ est un **point d'inflexion** si f'' change de signe en a (i.e. $f''(a) = 0$ et f'' est positive avant a puis négative après ou inversement).

À LIRE

Dire que f'' est positive sur I revient à dire que f' est croissante sur I. De même, dire que f'' est négative sur I revient à dire que f' est décroissante sur I.

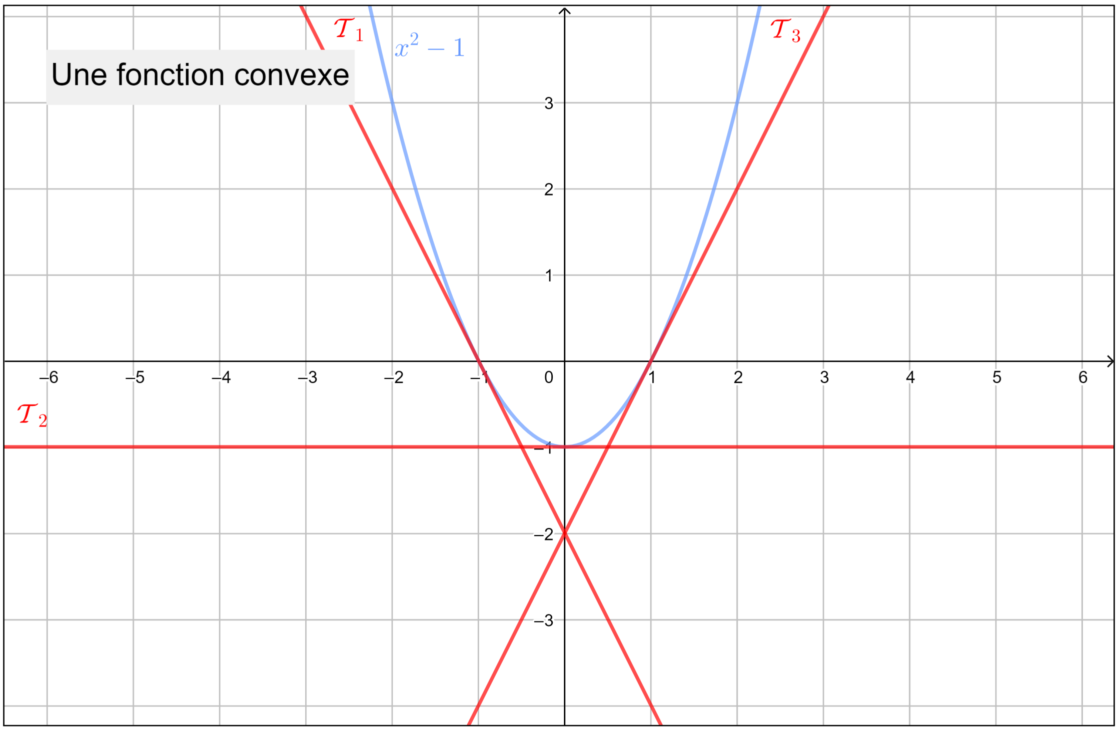
3. Lien avec les tangentes

À RETENIR : LIEN AVEC LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée f' dérivable sur I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

— f est **convexe** sur I si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes sur I.

— f est **concave** sur I si $\mathcal{C}_f$ est en dessous de chacune de ses tangentes sur I.



À LIRE : EXEMPLE

À titre d'exemple, la fonction exponentielle est une fonction convexe.