



## Chapitre III – Dérivation

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

<b>I – Qu'est-ce-qu'une dérivée?</b>	<b>1</b>
1. Nombre dérivé	1
2. La tangente	1
3. Fonction dérivée	2
<b>II – Tables de dérivation</b>	<b>3</b>
1. Dérivées usuelles	3
2. Opérations sur les dérivées	3
3. Dérivées de composées	4
<b>III – Étude des variations d'une fonction</b>	<b>5</b>
1. Lien dérivée - variations d'une fonction	5
2. Extrema	6

# I – Qu'est-ce-qu'une dérivée?

## 1. Nombre dérivé

### À RETENIR

#### Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et deux réels  $a \in I$  et  $h \neq 0$  tels que  $(a + h) \in I$ .

La fonction  $f$  est **dérivable** en  $a$  si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou en posant  $x = a + h$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$ .

### À LIRE

#### Limite d'une fonction

La notation  $\lim_{h \rightarrow 0}$  veut simplement dire que l'on rend  $h$  aussi proche de 0 que possible (sans pour autant que  $h$  soit égal à 0). On dit que l'on "fait tendre  $h$  vers 0" et on appelle cela **une limite**.

**Attention!** Il arrive que cette limite n'existe pas ou ne soit pas finie. Dans ce cas-là,  $f'(a)$  n'existe pas et on dit que  $f$  n'est pas dérivable en  $a$ .

## 2. La tangente

### À RETENIR

#### Équation de la tangente

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et un réel  $a \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors la courbe représentative de  $f$  admet une tangente  $\mathcal{T}$  au point de coordonnées  $(a; f(a))$ .

De plus,  $f'(a)$  est le coefficient directeur de  $\mathcal{T}$ , et une équation de  $\mathcal{T}$  est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .



## DÉMONSTRATION

## Équation de la tangente

La tangente  $\mathcal{T}$  en un point d'une courbe est une droite. Une équation de droite est de la forme  $y = mx + p$  avec  $m$  le coefficient directeur et  $p$  l'ordonnée à l'origine.

On a déjà le coefficient directeur de  $\mathcal{T}$  par la propriété précédente :  $m = f'(a)$ .

De plus, on sait que  $\mathcal{T}$  passe par le point  $(a, f(a))$  (car c'est la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$ ).

Donc l'équation de droite vérifie  $f(a) = f'(a)a + p$ . Ce qui donne  $p = f(a) - af'(a)$ . Au final notre équation est la suivante :  $y = xf'(a) + f(a) - af'(a) \iff y = f(a) + (x - a)f'(a)$ .

## 3. Fonction dérivée

## À RETENIR

## Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On appelle fonction dérivée (ou plus simplement **dérivée**) de  $f$  la fonction  $g$  qui à tout réel  $x$  de  $I$ , associe le nombre dérivé  $f'(x)$  (i.e.  $g(x) = f'(x)$ ).

Très souvent, la fonction  $g$  sera notée  $f'$ .

## II – Tables de dérivation

### 1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

À RETENIR 🔥

Soit  $\lambda$  une constante réelle.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$\lambda$	0	$\mathbb{R}$
$x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_*^+$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

### 2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur certaines fonctions :

À RETENIR 🔥

Soient deux fonctions  $u$  et  $v$  et soit  $\lambda$  une constante réelle.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	En tout point où $u$ est dérivable.
$u + v$	$u' + v'$	En tout point où $u$ et $v$ sont dérivables.
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	En tout point où $u$ et $v$ sont dérivables.
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	En tout point où $v$ est dérivable et non nulle.
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	En tout point où $u$ et $v$ sont dérivables et non nulles.

### 3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles (i.e. “ $f$  de  $g$  de  $x$ ”) :

À RETENIR 🔔

Soit  $u$  une fonction.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	En tout point où $u$ est dérivable.
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	En tout point où $u$ est dérivable et non nulle.
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	En tout point où $u$ est dérivable et strictement positive.
$e^u$	$u'e^u$	En tout point où $u$ est dérivable.
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$	En tout point où $u$ est dérivable.
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$	En tout point où $u$ est dérivable.

Il est cependant possible de donner une formule plus générale.

À RETENIR 🔔

#### Dérivée d'une composée

Soient  $f$  dérivable sur  $I$  et  $g$  dérivable sur l'ensemble des valeurs prises par  $f$  sur  $I$ . On a alors  $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$ .

À LIRE 🔗

#### Fonction composée

On rappelle que la fonction  $g \circ f$  est la fonction définie pour tout  $x$  par  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

## III – Étude des variations d'une fonction

### 1. Lien dérivée - variations d'une fonction

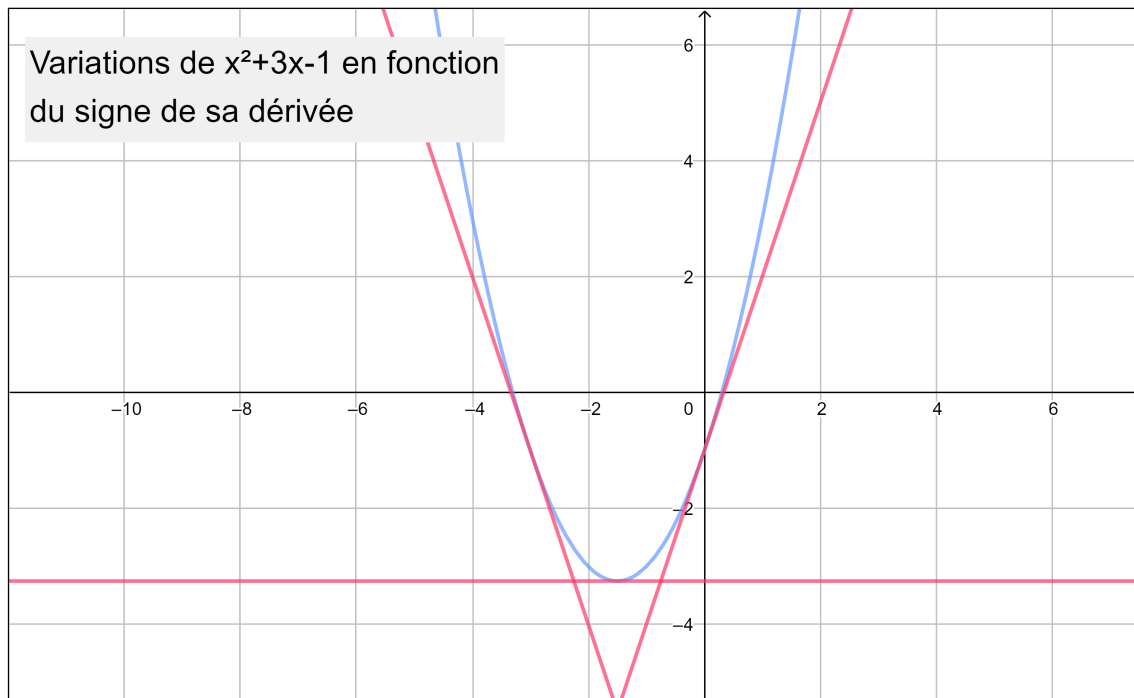
Avec le signe de la dérivée d'une fonction, il est possible d'obtenir le sens de variation de cette fonction.

#### À RETENIR

#### Variations d'une fonction

Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f' > 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f' < 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si  $f' = 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .



## 2. Extrema

### À RETENIR

#### Étude des extrema

Soient  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ , et  $a \in I$  :

- Si  $f$  admet un extremum local en  $a$ , alors on a  $f'(a) = 0$ .
- Si  $f'(a) = 0$  et que le signe de  $f'$  est différent avant et après  $a$ , alors  $f'(a)$  est un extremum local de  $f$ .
- Si  $f'(a) = 0$  et qu'on est négatif avant  $a$  et positif après, cet extremum local est un minimum local.
- Si  $f'(a) = 0$  et qu'on est positif avant  $a$  et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

### À LIRE

Avec ceci, il est possible de retrouver la plupart des formules que nous avons vues sur les fonctions du second degré (sens de variation, sommet de la parabole, ...).