



# Chapitre IX – Dénombrement

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Définitions</b>	<b>1</b>
1. Ensemble d'éléments	1
2. Sous-ensemble	2
3. Liste d'éléments	2
<b>II - Combinaisons</b>	<b>4</b>
1. Factorielle	4
2. Définition	4
3. Formules	5
<b>III - Dénombrement</b>	<b>6</b>
1. Principe additif	6
2. Principe multiplicatif	6
3. Formules de dénombrement	7

# I - Définitions

## 1. Ensemble d'éléments

Cette partie donne quelques rappels sur la notion d'ensemble en mathématiques.

### À RETENIR

#### Définition

Un **ensemble**  $E$  désigne une collection finie ou infinie d'objets distincts qu'on appelle ses **éléments**.

On note  $x \in E$  si l'objet  $x$  appartient à  $E$ . Dans le cas contraire, on note  $x \notin E$ .

À noter que l'ordre des objets n'a aucune importance lorsque l'on compare deux ensembles.

### À LIRE

#### Exemple

Voici quelques exemples d'ensembles :

- $\{2; 4; 6\}$  est un ensemble contenant 3 éléments.
- $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{R}$  sont deux ensembles contenant une infinité d'éléments.
- $\{\}$  est un ensemble ne contenant aucun élément : c'est l'**ensemble vide**, noté  $\emptyset$ .
- $\{1\}$  est un ensemble contenant 1 élément : c'est un **singleton**.

### À LIRE

Il est possible de créer des ensembles contenant autre chose que des nombres. Par exemple, on définit les fonctions  $f : x \mapsto x^2$  et  $g : x \mapsto x^3 + 1$ . Alors l'ensemble  $E = \{f; g\}$  est un ensemble contenant des fonctions.

### À RETENIR

#### Réunion et intersection

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

- Leur **réunion** notée  $E \cup F$  est l'ensemble constitué des éléments de  $E$  et des éléments de  $F$ .
- Leur **intersection** notée  $E \cap F$  est l'ensemble constitué des éléments communs à  $E$  et  $F$ .
- Si  $E \cap F = \emptyset$ , on dit que  $E$  et  $F$  sont **disjoints**.

## 2. Sous-ensemble

### À RETENIR

#### Définition

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On dit que  $F$  est un **sous-ensemble** (ou une partie) de  $E$  si tout élément de  $F$  est un élément de  $E$ .

On note ceci par  $F \subset E$  (qui signifie “ $F$  est inclus dans  $E$ ”).

### À LIRE

#### Exemple

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Alors  $E \cap F \subset E$  et  $E \cap F \subset F$ .

## 3. Liste d'éléments

Nous allons désormais voir un type de collection similaire aux ensembles, mais qui prend en compte l'ordre des éléments.

### À RETENIR

#### Définition

Un  **$p$ -uplet** (ou une  $p$ -liste) d'un ensemble  $E$  désigne une collection ordonnée de  $p$  éléments de  $E$ .

Remarquons que l'on ne demande pas que les éléments d'un  $p$ -uplet soient tous distincts.

### À LIRE

#### Attention à l'ordre des éléments

Il faut bien faire attention à l'ordre des éléments ! Prenons par exemple deux points du plan  $A = (1; 2)$  et  $B = (2; 1)$ .

On peut voir  $A$  et  $B$  comme des 2-uplets de  $\mathbb{R}$ . Or, ce sont deux points différents, d'où la nécessité de bien faire attention à ne pas mélanger  $(1; 2)$  et  $(2; 1)$ .

## À LIRE ☞

## Notation

Bien que l'on note un ensemble avec des accolades, on note plutôt un  $p$ -uplet avec des parenthèses. Ainsi :

- $\{1; 2; 3; 4; 5\}$  désigne l'ensemble constitué des nombres entiers de 1 à 5 (on a  $\{1; 2; 3; 4; 5\} = \{2; 1; 3; 4; 5\} = \{5; 4; 3; 2; 1\} = \dots$ ).
- $(1; 2; 3; 4; 5)$  désigne le 5-uplet constitué des nombres entiers de 1 à 5 (on a  $(1; 2; 3; 4; 5) \neq (2; 1; 3; 4; 5) \neq (5; 4; 3; 2; 1) \neq \dots$ ).

## II - Combinaisons

### 1. Factorielle

À RETENIR 🔔

#### Définition

Soit  $n$  un nombre entier. On appelle factorielle de  $n$  le nombre entier suivant :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

À LIRE ∞

#### Convention

Par convention, on pose  $0! = 1$ .

Il est très courant de rencontrer des calculs avec des factorielles en mathématiques, leur utilisation ne se limitant pas au dénombrement.

### 2. Définition

À RETENIR 🔔

#### Définition

Une **combinaison** de  $k$  éléments parmi  $n$  éléments, notée  $\binom{n}{k}$ , est le nombre de sous-ensembles de  $k$  éléments que possède un ensemble de  $n$  éléments.

À RETENIR 🔔

#### Calcul d'une combinaison

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers. Alors  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ .

À LIRE ∞

#### Exemple

Soit  $E = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ . On cherche à connaître le nombre de sous-ensembles de 3 éléments que possède  $E$ . Pour cela, il suffit d'appliquer la formule :

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{27!3!} = \frac{28 \times 29 \times 30}{1 \times 2 \times 3} = 4060$$

$E$  contient 4060 sous-ensembles de 3 éléments.

### 3. Formules

#### À RETENIR

#### Formules

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

#### À LIRE

#### Triangle de Pascal

Une autre formule très utile est  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ . Elle peut se retrouver à l'aide du triangle de Pascal, que l'on construit comme tel :

1. Dans une pyramide, on place un 1 au sommet de la pyramide.
2. On place 1 et 1 en dessous, de part et d'autre.
3. Les extrémités des lignes sont toujours des 1, et les autres nombres sont la somme des deux nombres directement au-dessus.

Les premières lignes du triangle de Pascal sont donc :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Ainsi, le  $k$ -ième coefficient de la  $n$ -ième ligne est égal à  $\binom{n}{k}$  (en partant de 0).

## III - Dénombrement

### 1. Principe additif

#### À RETENIR

#### Principe additif

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles disjoints contenant respectivement  $n$  et  $m$  éléments. Alors  $E \cup F$  contient  $n + m$  éléments.

#### À LIRE

#### Exemple

Si on pose  $E = \{1; 3; 5\}$  et  $F = \{2; 4; 6; 8\}$ .  $E$  et  $F$  sont alors bien disjoints, donc  $E \cup F$  contient  $3 + 4 = 7$  éléments.

### 2. Principe multiplicatif

Commençons cette sous-section par une définition.

#### À RETENIR

#### Produit cartésien

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Leur produit cartésien  $E \times F$  est l'ensemble des couples  $(e; f)$  où  $e \in E$  et  $f \in F$ .

#### À LIRE

#### Exemple

Cette définition peut sembler un peu compliquée, mais elle est en faite très intuitive. Prenons  $E = \{1; 2; 3\}$  et  $F = \{4; 5\}$ .

Alors on a  $E \times F = \{(1; 4); (1; 5); (2; 4); (2; 5); (3; 4); (3; 5)\}$ .

#### À LIRE

#### Construction du plan cartésien

Prenons maintenant  $E = F = \mathbb{R}$ . Le produit cartésien  $E \times F$  est l'ensemble des couples  $(x; y)$  où  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

Il s'agit en fait du plan cartésien.

## À RETENIR

## Principe multiplicatif

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles contenant respectivement  $n$  et  $m$  éléments. Alors  $E \times F$  contient  $n \times m$  éléments.

Ce principe (tout comme le principe additif vu précédemment) sont notamment utilisés en probabilités.

### 3. Formules de dénombrement

## À RETENIR

## Permutations

Soit  $E$  un ensemble de taille  $n$ . On appelle **permutation** de  $E$  tout  $n$ -uplet d'éléments distincts de  $E$ .

## À LIRE

## Exemple

Prenons  $E = \{1; 2; 3\}$ . Alors  $E$  admet 6 permutations qui sont :

- (1; 2; 3)
- (1; 3; 2)
- (2; 1; 3)
- (2; 3; 1)
- (3; 1; 2)
- (3; 2; 1)

## À RETENIR

## Formules

Soit  $E$  un ensemble possédant  $n$  éléments.

- Le nombre de  $p$ -uplets d'éléments de  $E$  est égal à  $n^p$ .
- Le nombre de  $p$ -uplets d'éléments distincts de  $E$  est égal à  $\frac{n!}{(n-p)!}$ .
- Le nombre de permutations de  $E$  est égal à  $n!$ .
- Le nombre de sous-ensembles de  $E$  est égal à  $2^n$ .
- Le nombre de sous-ensembles de  $k$  éléments que possède  $E$  est égal à  $\binom{n}{k}$  (pour rappel).

À noter également une dernière petite formule qu'il peut être utile de savoir démontrer à l'aide des formules ci-dessus.



## À RETENIR

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

## DÉMONSTRATION

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments.

Par la dernière formule de dénombrement,  $E$  a  $\binom{n}{0}$  sous-ensembles qui possèdent 0 éléments,  $\binom{n}{1}$  sous-ensembles qui possèdent 1 éléments, ...

En fait, pour tout  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,  $E$  a exactement  $\binom{n}{k}$  sous-ensembles qui possèdent  $k$  éléments (toujours d'après la dernière formule).

Donc finalement, on obtient bien que la somme des  $\binom{n}{k}$  vaut  $2^n$  (qui est, d'après l'avant-dernière formule, le nombre de sous-ensembles que possède  $E$ ).