



Chapitre III – Dérivation

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----------|
| I – Qu'est-ce-qu'une dérivée? | 1 |
| 1. Nombre dérivé | 1 |
| 2. La tangente | 1 |
| 3. Fonction dérivée | 2 |
| II – Tables de dérivation | 3 |
| 1. Dérivées usuelles | 3 |
| 2. Opérations sur les dérivées | 3 |
| 3. Dérivées de composées | 4 |
| III – Étude des variations d'une fonction | 6 |
| 1. Lien dérivée - variations d'une fonction | 6 |
| 2. Extrema | 7 |

I – Qu'est-ce-qu'une dérivée?

1. Nombre dérivé

À RETENIR

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels $a \in I$ et $h \neq 0$ tels que $(a + h) \in I$.

La fonction f est **dérivable** en a si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou en posant $x = a + h$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$.

À LIRE

Limite d'une fonction

La notation $\lim_{h \rightarrow 0}$ veut simplement dire que l'on rend h aussi proche de 0 que possible (sans pour autant que h soit égal à 0). On dit que l'on "fait tendre h vers 0" et on appelle cela **une limite**.

Attention! Il arrive que cette limite n'existe pas ou ne soit pas finie. Dans ce cas-là, $f'(a)$ n'existe pas et on dit que f n'est pas dérivable en a .

2. La tangente

À RETENIR

Équation de la tangente

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et un réel $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors la courbe représentative de f admet une tangente \mathcal{T} au point de coordonnées $(a; f(a))$.

De plus, $f'(a)$ est le coefficient directeur de \mathcal{T} , et une équation de \mathcal{T} est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



DÉMONSTRATION

Équation de la tangente

La tangente \mathcal{T} en un point d'une courbe est une droite. Une équation de droite est de la forme $y = mx + p$ avec m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

On a déjà le coefficient directeur de \mathcal{T} par la propriété précédente : $m = f'(a)$.

De plus, on sait que \mathcal{T} passe par le point $(a, f(a))$ (car c'est la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a).

Donc l'équation de droite vérifie $f(a) = f'(a)a + p$. Ce qui donne $p = f(a) - af'(a)$. Au final notre équation est la suivante : $y = xf'(a) + f(a) - af'(a) \iff y = f(a) + (x - a)f'(a)$.

3. Fonction dérivée

À RETENIR

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On appelle fonction dérivée (ou plus simplement **dérivée**) de f la fonction g qui à tout réel x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ (i.e. $g(x) = f'(x)$).

Très souvent, la fonction g sera notée f' .

II – Tables de dérivation

1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

À RETENIR

Soit λ une constante réelle.

| Fonction | Dérivée | Domaine de dérivabilité |
|---------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| λ | 0 | \mathbb{R} |
| x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ | nx^{n-1} | \mathbb{R} |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | \mathbb{R}^* |
| \sqrt{x} | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | \mathbb{R}_*^+ |
| e^x | e^x | \mathbb{R} |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | \mathbb{R} |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | \mathbb{R} |

2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur certaines fonctions :

À RETENIR

Soient deux fonctions u et v et soit λ une constante réelle.

| Fonction | Dérivée | Domaine de dérivabilité |
|--------------------|---|--|
| $\lambda \times u$ | $\lambda \times u'$ | En tout point où u est dérivable. |
| $u + v$ | $u' + v'$ | En tout point où u et v sont dérivables. |
| $u \times v$ | $u' \times v + u \times v'$ | En tout point où u et v sont dérivables. |
| $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ | En tout point où v est dérivable et non nulle. |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ | En tout point où u et v sont dérivables et non nulles. |

3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles (i.e. “ f de g de x ”) :

À RETENIR

Soit u une fonction.

| Fonction | Dérivée | Domaine de dérivabilité |
|---------------------------------|------------------------|---|
| u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ | $nu'u^{n-1}$ | En tout point où u est dérivable. |
| $\frac{1}{u}$ | $-\frac{u'}{u^2}$ | En tout point où u est dérivable et non nulle. |
| \sqrt{u} | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | En tout point où u est dérivable et strictement positive. |
| e^u | $u'e^u$ | En tout point où u est dérivable. |
| $\sin(u)$ | $u' \cos(u)$ | En tout point où u est dérivable. |
| $\cos(u)$ | $-u' \sin(u)$ | En tout point où u est dérivable. |

Il est cependant possible de donner une formule plus générale.

À RETENIR

Dérivée d'une composée

Soient f dérivable sur I et g dérivable sur l'ensemble des valeurs prises par f sur I . On a alors $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

À LIRE

Fonction composée

On rappelle que la fonction $g \circ f$ est la fonction définie pour tout x par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

III – Étude des variations d'une fonction

1. Lien dérivée - variations d'une fonction

Avec le signe de la dérivée d'une fonction, il est possible d'obtenir le sens de variation de cette fonction.

À RETENIR

Variations d'une fonction

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f' > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f' < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .



2. Extrema

À RETENIR

Étude des extrema

Soient f dérivable sur un intervalle I , et $a \in I$:

- Si f admet un extremum local en a , alors on a $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et que le signe de f' est différent avant et après a , alors $f'(a)$ est un extremum local de f .
- Si $f'(a) = 0$ et qu'on est négatif avant a et positif après, cet extremum local est un minimum local.
- Si $f'(a) = 0$ et qu'on est positif avant a et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

À LIRE

Avec ceci, il est possible de retrouver la plupart des formules que nous avons vues sur les fonctions du second degré (sens de variation, sommet de la parabole, ...).