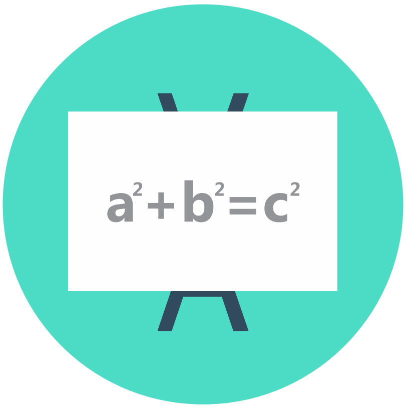


Chapitre V – Les fonctions trigonométriques

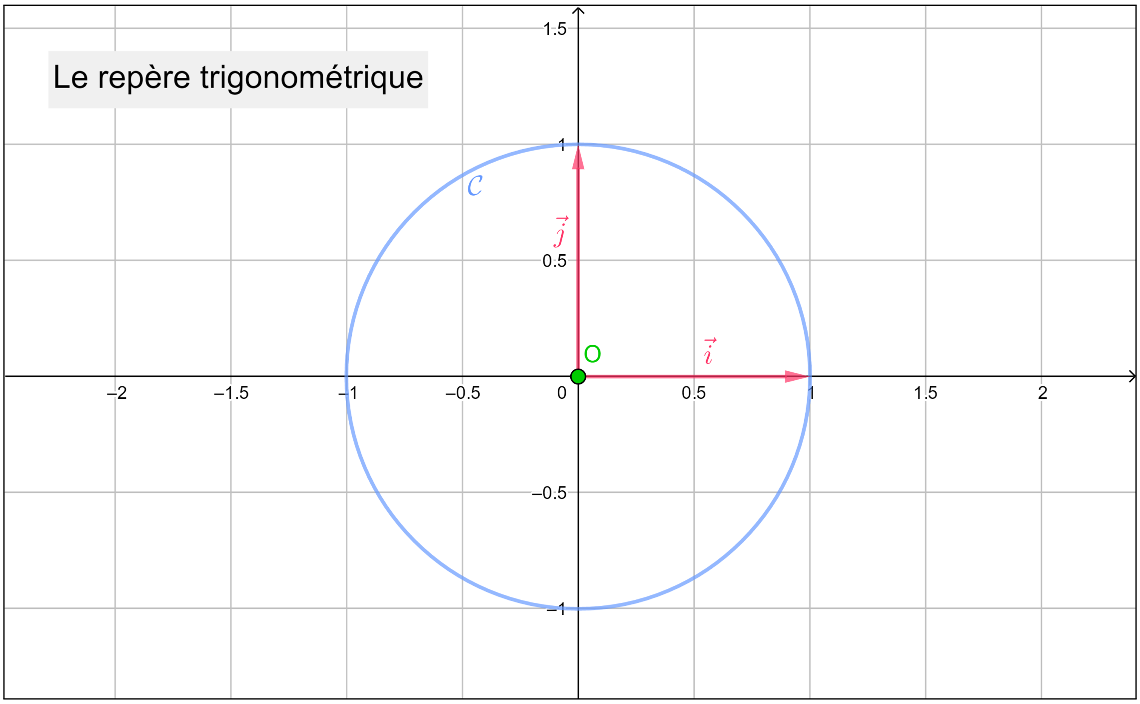
Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I – Le cercle trigonométrique

1. Définition

Dans tout le cours, le plan sera muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}\,; \vec{j})$. Il sera également muni d'un cercle $\mathscr{C}$ appelé **cercle trigonométrique** de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est le **sens direct**) :



À RETENIR

Cosinus et sinus

Soit M un point quelconque situé sur le cercle $\mathscr{C}$ faisant un angle x avec l'axe des abscisses. Les coordonnées de M sont :

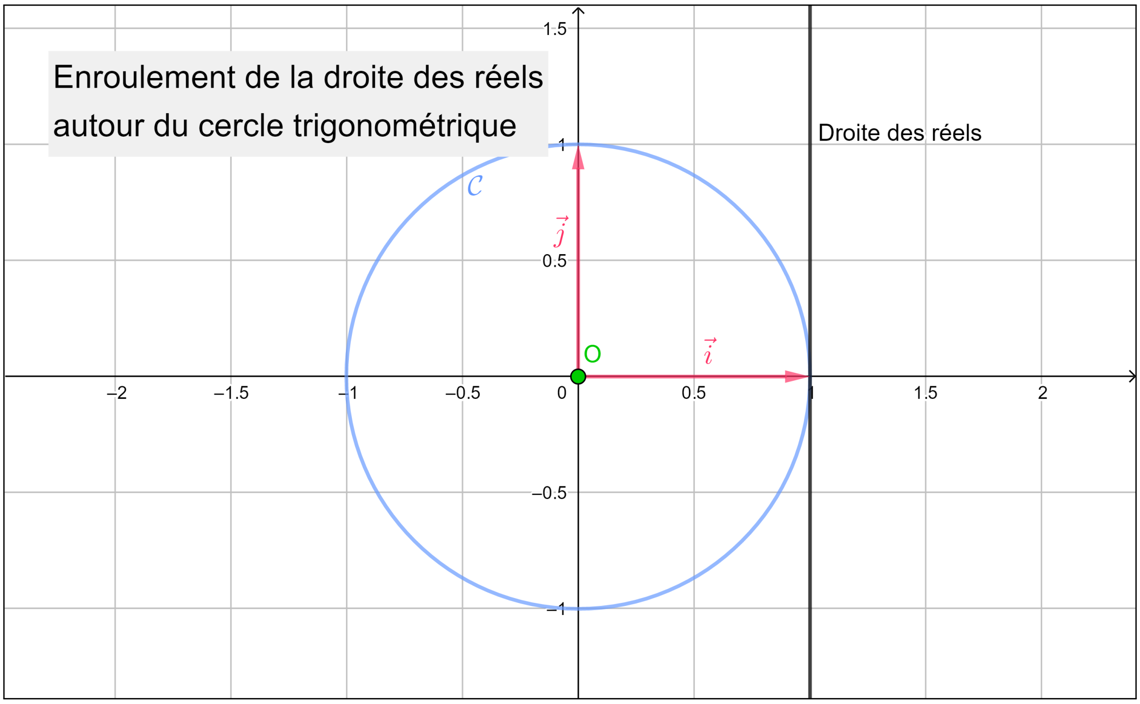
— L'abscisse de M appelée **cosinus** est notée $\cos(x)$.

— L'ordonnée de M appelée **sinus** est notée $\sin(x)$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

2. Enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique

Il est possible "d'enrouler" la droite des réels autour du cercle $\mathscr{C}$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :



À LIRE

Longueur d'arcs de cercle

L'enroulement de cette droite permet ainsi de mesurer des longueurs d'arcs sur le cercle $\mathscr{C}$. Ainsi, la longueur d'un quart de cercle vaut $\frac{\pi}{2}$ (celle d'un demi-cercle vaut π et celle d'un cercle vaut 2π).

Ainsi, puisque l'on peut enrouler infiniment cette droite autour du cercle, les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.

À RETENIR

Périodicité

Ainsi, pour tout x réel et k entier relatif :
- $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$
- $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$

À LIRE

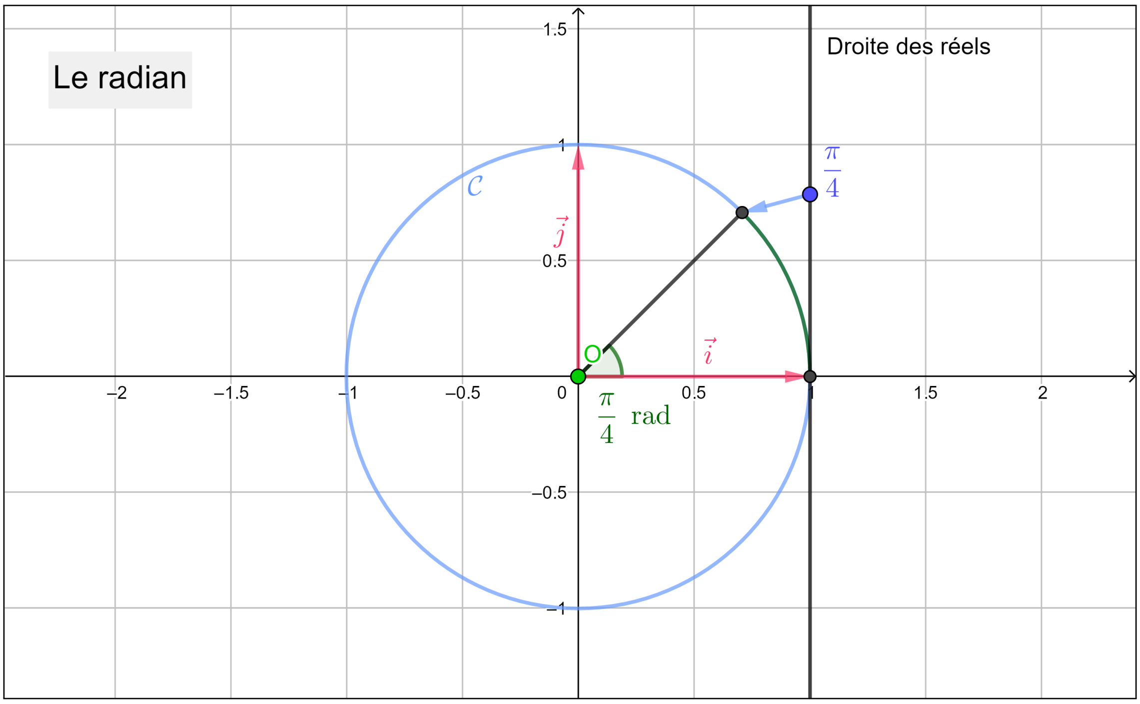
Concrètement, cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \cdots = \cos(x+2k\pi)$ et idem pour $\sin(x)$.

3. Le radian

À RETENIR

Définition

Le **radian** est une unité de mesure permettant de mesurer des **angles orientés**. La **mesure** en radians d'un angle vaut la longueur de l'arc de $\mathscr{C}$ que cet angle intercepte.



À LIRE

Cela veut simplement dire qu'un angle en radian n'est rien d'autre qu'une mesure de longueur d'arc du cercle trigonométrique.

Attention cependant, comme le radian est une unité de mesure d'angles orientés, mesurer $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ radians n'est pas la même chose car les angles ont **un sens**.

Si l'angle a une mesure positive, alors il est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le sens direct).
Si l'angle a une mesure négative, alors il est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre (le sens indirect).

II – Étude des fonctions trigonométriques

1. Formules de trigonométrie

À RETENIR

Formules

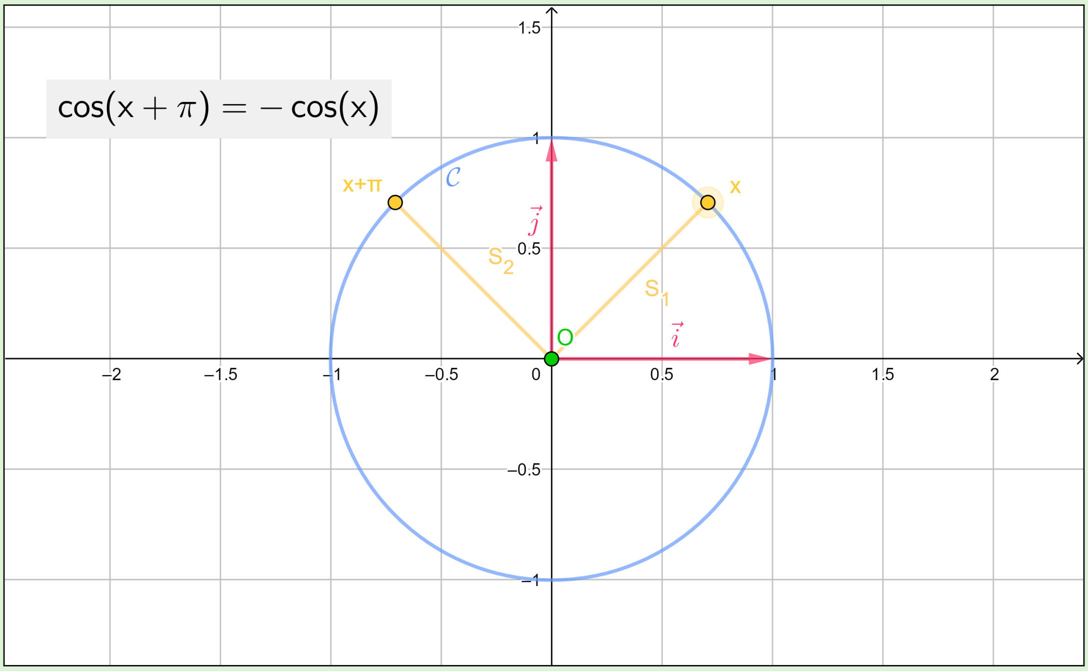
On a les relations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:

— $\cos(-x) = \cos(x)$ (la fonction cosinus est **paire**)
— $\sin(-x) = -\sin(x)$ (la fonction sinus est **impaire**)
— $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
— $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
— $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
— $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
— $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
— $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
— $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
— $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
— $\cos(x + y) = \cos(x) \times \cos(y) - \sin(x) \times \sin(y)$
— $\sin(x + y) = \sin(x) \times \cos(y) + \cos(x) \times \sin(y)$
— $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

À LIRE

Retrouver les formules

Il n'est aucunement demandé de mémoriser ces formules (sauf les trois dernières). Cependant, il doit être possible de les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique. Ainsi, prenons l'exemple de $\cos(x+\pi)$:



On remarque que l'ordonnée reste la même (le sinus est le même). Cependant, on a bien une abscisse opposée. On a retrouvé la formule $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$.

2. Dérivée

À RETENIR

Dérivée d'une composée

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

— $\cos'(u(x)) = -u'(x)\sin(u(x))$
— $\sin'(u(x)) = u'(x)\cos(u(x))$

À RETENIR

Dérivée

Ainsi, si pour tout $x \in I$ on a $u(x) = x$, on trouve :

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$

3. Signe et variations

L'étude du signe des dérivées des fonctions trigonométriques permet d'obtenir les variations de celles-ci. Nous allons donc voir le signe et les variations de ces fonctions.

À RETENIR

Signe et variation de la fonction cosinus

x	$-\pi$		0		π
$x \mapsto \cos'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$x \mapsto \cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Veuillez noter que ce tableau est périodique de période 2π.

À RETENIR

Signe et variation de la fonction sinus

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$x \mapsto \sin'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x \mapsto \sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Ce tableau est également périodique de période 2π.

4. Valeurs remarquables

À RETENIR

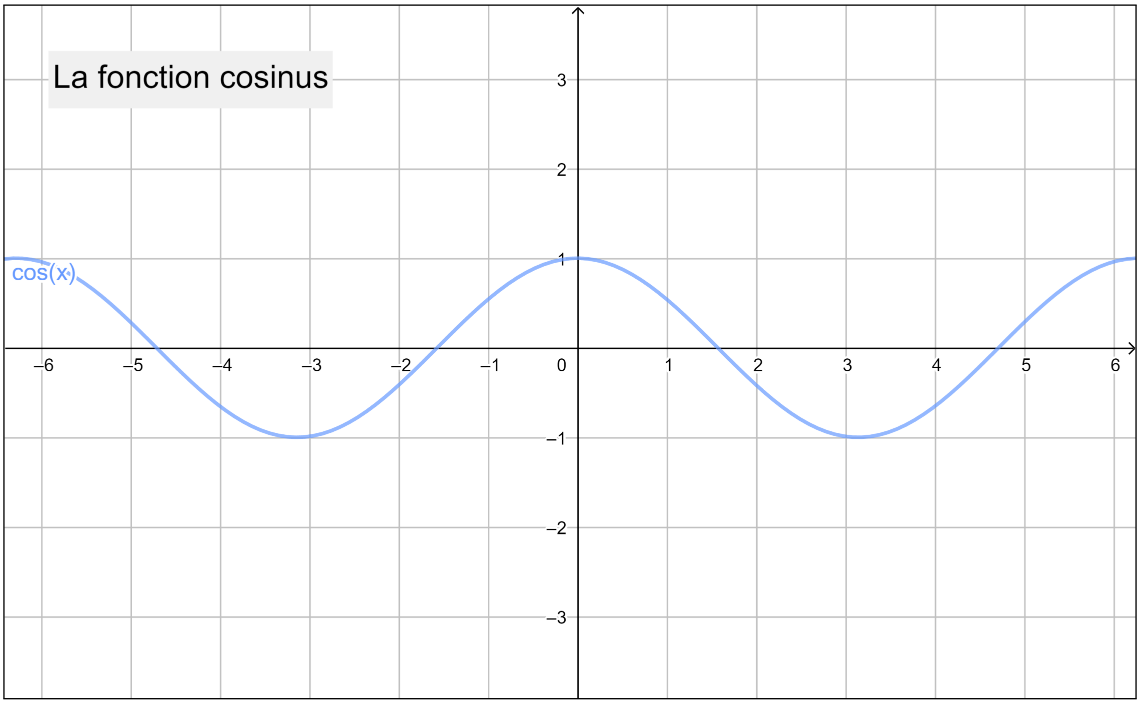
Valeurs remarquables

Voici un tableau regroupant quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus :

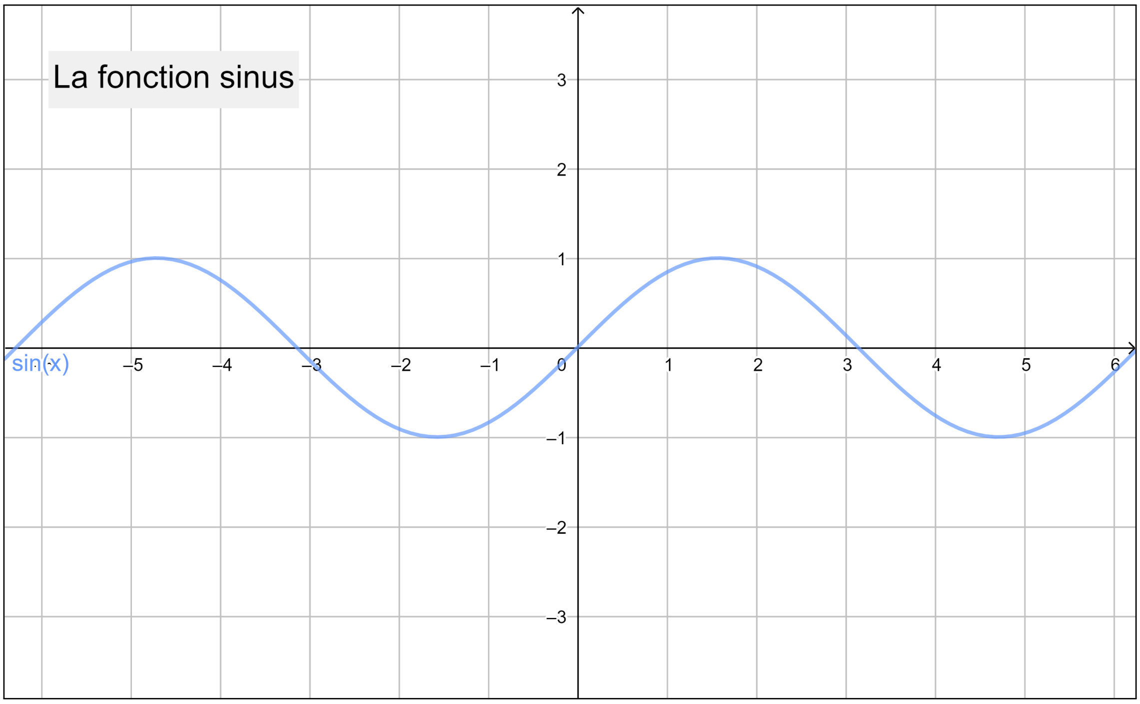
Valeur de x (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)	**Valeur de $\cos(x)$**	**Valeur de $\sin(x)$**
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0

5. Représentation graphique

À l'aide de toutes les informations et valeurs données précédemment, il est possible d'établir une représentation graphique de la fonction cosinus :



De même pour la fonction sinus :



On remarque sur ces graphiques plusieurs propriétés données : parité, signe, périodicité, etc.