



# Chapitre IV – Les fonctions trigonométriques

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

|  |          |
|--|----------|
| <b>I – Sinus et cosinus</b>                      | <b>1</b> |
| 1. Définition                                    | 1        |
| 2. Périodicité                                   | 1        |
| 3. Formules de trigonométrie                     | 2        |
| 4. Résolution d'équations                        | 3        |
| 5. Fonctions réciproques                         | 4        |
| <b>II – Étude des fonctions trigonométriques</b> | <b>5</b> |
| 1. Dérivée                                       | 5        |
| 2. Signe et variations                           | 5        |
| 3. Limite  | 6        |
| 4. Valeurs remarquables                          | 7        |
| 5. Représentation graphique                      | 7        |

# I – Sinus et cosinus

## 1. Définition

Dans tout le cours, le plan sera muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ . Il sera également muni d'un cercle  $\mathcal{C}$  appelé **cercle trigonométrique** de centre  $O$  et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est le **sens direct**) :



### À RETENIR

#### Cosinus et sinus

Soit  $M$  un point quelconque situé sur le cercle  $\mathcal{C}$  faisant un angle  $x$  avec l'axe des abscisses. Les coordonnées de  $M$  sont :

- L'abscisse de  $M$  appelée **cosinus** est notée  $\cos(x)$ .
- L'ordonnée de  $M$  appelée **sinus** est notée  $\sin(x)$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ .

## 2. Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

## À RETENIR

## Périodicité

Ainsi pour tout  $x$  réel et  $k$  entier relatif :

- $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$
- $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$

## À LIRE

Concrètement, cela signifie que  $\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + 2k\pi)$  et idem pour  $\sin(x)$ .

### 3. Formules de trigonométrie

## À RETENIR

## Formules

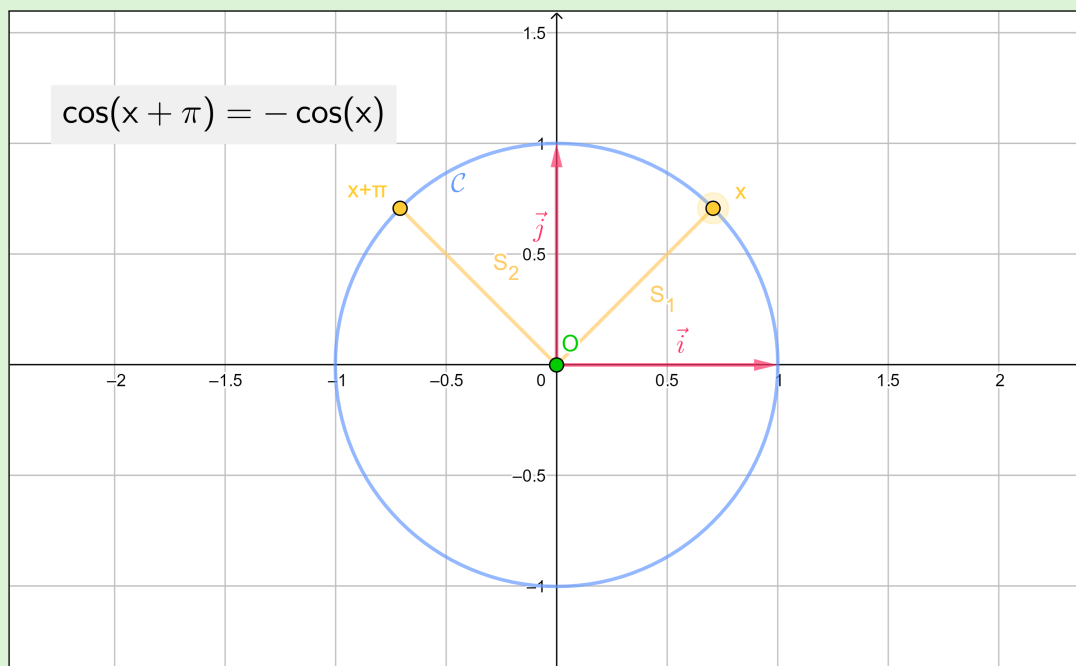
On a les relations suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

- $\cos(-x) = \cos(x)$  (la fonction cosinus est **paire**)
- $\sin(-x) = -\sin(x)$  (la fonction sinus est **impaire**)
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos(x + y) = \cos(x) \times \cos(y) - \sin(x) \times \sin(y)$
- $\sin(x + y) = \sin(x) \times \cos(y) + \cos(x) \times \sin(y)$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

À LIRE ∞

### Retrouver les formules

Il n'est aucunement demandé de mémoriser ces formules (sauf les trois dernières). Cependant, il doit être possible de les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique. Ainsi, prenons l'exemple de  $\cos(x + \pi)$  :



On remarque que l'ordonnée reste la même (le sinus est le même). Cependant, on a bien une abscisse opposée. On a retrouvé la formule  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ .

## 4. Résolution d'équations

Il est possible de résoudre des équations incluant des sinus et des cosinus.

À RETENIR

### Résolution d'équations

Soient  $x$  et  $y$  deux réels. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{— } \cos(x) = \cos(y) &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = -x + 2k\pi \end{cases} \\
 \text{— } \sin(x) = \sin(y) &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

Comme précédemment, ces formules peuvent se retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

## 5. Fonctions réciproques

### À RETENIR

#### Définition

Soient  $x$  et  $y \in \mathbb{R}$ , on admettra qu'il existe une **fonction réciproque** à cos (notée arccos) et une **fonction réciproque** à sin (notée arcsin). On a les relations suivantes pour tout  $x \in [0; 2\pi]$  et  $y \in [-1; 1]$  :

- $\cos(x) = y \iff x = \arccos(y)$
- $\sin(x) = y \iff x = \arcsin(y)$

Cela signifie qu'à tout  $x \in [0; 2\pi]$ , la fonction arccos  $y$  associe son **antécédent**  $y$  par rapport à cos (pareil pour arcsin avec sin).

### À LIRE

#### Exemple

$\cos(0) = 1$ ,  $\arccos(1) = 0$  et  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ ,  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ .

Ces fonctions (accessibles depuis la calculatrice) peuvent également être utilisées pour résoudre certains types d'équations.

## II – Étude des fonctions trigonométriques

### 1. Dérivée

À RETENIR

#### Dérivée d'une composée

Soit une fonction  $u$  dérivable sur un intervalle  $I$ , on a pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle :

- $\cos'(u(x)) = -u'(x) \sin(u(x))$
- $\sin'(u(x)) = u'(x) \cos(u(x))$

À RETENIR

#### Dérivée

Ainsi, si pour tout  $x \in I$  on a  $u(x) = x$ , on trouve :

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$

### 2. Signe et variations

L'étude du signe des dérivées des fonctions trigonométriques permet d'obtenir les variations de celles-ci. Nous allons donc voir le signe et les variations de ces fonctions.

À RETENIR

#### Signe et variation de la fonction cosinus

| $x$                  | $-\pi$ | $0$ | $\pi$ |
|----------------------|--------|-----|-------|
| $x \mapsto \cos'(x)$ | 0      | +   | 0     |
| $x \mapsto \cos(x)$  | -1     | 1   | -1    |

Veuillez noter que ce tableau est périodique de période  $2\pi$ .

## À RETENIR

## Signe et variation de la fonction sinus

|                      |        |                  |                 |       |
|----------------------|--------|------------------|-----------------|-------|
| $x$                  | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| $x \mapsto \sin'(x)$ | -      | 0                | +               | 0     |
| $x \mapsto \sin(x)$  | 0      | -1               | 1               | 0     |

Ce tableau est également périodique de période  $2\pi$ .

## 3. Limite

Les fonctions trigonométriques ont pour particularité de **ne pas admettre de limite** en  $\pm\infty$ . Ceci provenant du fait que ces fonctions sont périodiques et que leur valeur oscille entre  $-1$  et  $1$ .

## 4. Valeurs remarquables

À RETENIR

### Valeurs remarquables

Voici un tableau regroupant quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus :

| Valeur de $x$ (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$ ) | Valeur de $\cos(x)$   | Valeur de $\sin(x)$  |
|---|-----------------------|----------------------|
| 0   | 1                     | 0                    |
| $\frac{\pi}{6}$                                     | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{1}{2}$        |
| $\frac{\pi}{4}$                                     | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$                                     | $\frac{1}{2}$         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$                                     | 0                     | 1                    |
| $\frac{2\pi}{3}$                                    | $-\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{3\pi}{4}$                                    | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{5\pi}{6}$                                    | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\pi$   | -1                    | 0                    |

## 5. Représentation graphique

À l'aide de toutes les informations et valeurs données précédemment, il est possible d'établir une représentation graphique de la fonction cosinus :





De même pour la fonction sinus :



On remarque sur ces graphiques plusieurs propriétés données : parité, signe, périodicité, etc.