



# Chapitre XIII – Les nombres complexes (Maths expertes)

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I – L'ensemble des nombres complexes <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>1</b>
1. L'ensemble $\mathbb{C}$	1
2. Forme algébrique d'un nombre complexe	2
3. Égalité entre nombres complexes	2
4. Conjugué	2
5. Module	3
<b>II – Polynômes dans <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>5</b>
1. Généralités sur les polynômes	5
2. Résolution d'une équation du second degré	6
3. Factorisation par $z - a$	7
<b>III – Géométrie avec les nombres complexes</b>	<b>9</b>
1. Formes trigonométrique et exponentielle	9
2. Propriétés de l'argument	10
3. Affixe et représentation	11
4. Lien Géométrie - Nombres complexes	13
5. L'ensemble $\mathbb{U}$ et les racines $n$ -ièmes de l'unité	14

# I – L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

## 1. L'ensemble $\mathbb{C}$

### À RETENIR

#### L'ensemble $\mathbb{C}$

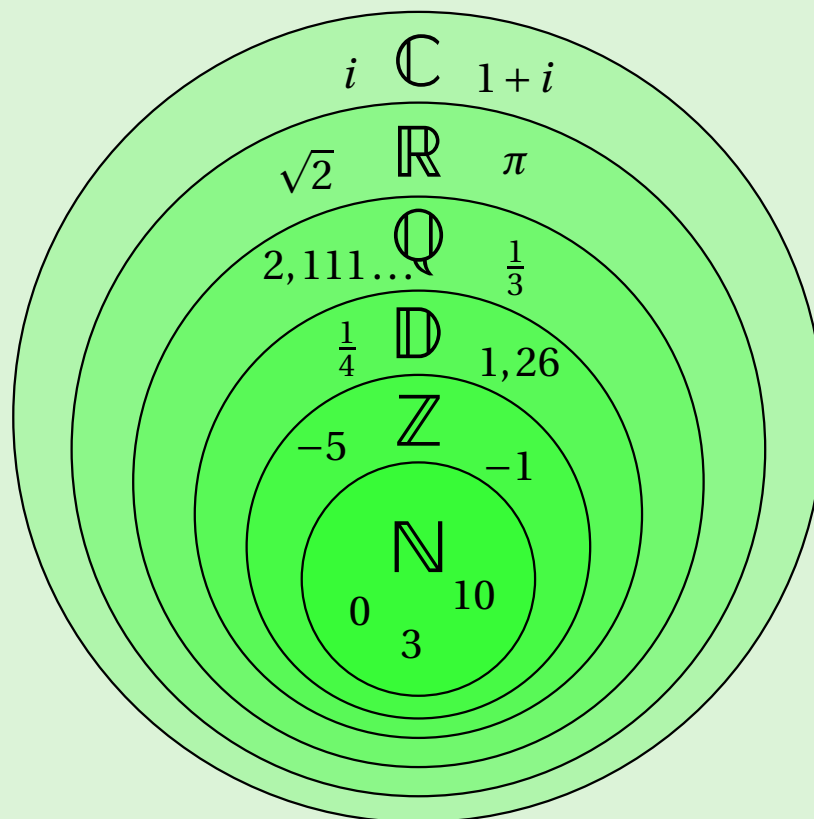
Il existe un ensemble de nombres noté  $\mathbb{C}$  qui contient l'ensemble  $\mathbb{R}$  ainsi qu'un nombre  $i \in \mathbb{C}$  vérifiant  $i^2 = -1$ .

Cet ensemble est appelé **ensemble des nombres complexes** et obéit aux “mêmes” règles de calcul que l'ensemble  $\mathbb{R}$ .

### À LIRE

#### Schéma

Il peut être dur de se représenter l'ensemble des nombres complexes, voici un schéma représentant les ensembles de nombres déjà connus :



Comme on peut le voir ici, l'ensemble  $\mathbb{C}$  contient l'ensemble  $\mathbb{R}$  mais également des nombres qui ne sont pas réels ( $i$ ,  $1+i$ , etc.).

## 2. Forme algébrique d'un nombre complexe

### À RETENIR

#### Forme algébrique

Tout **nombre complexe**  $z$  peut s'écrire  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont deux réels. Cette écriture est appelée **forme algébrique** de  $z$ . On dit que :

- $x$  est la **partie réelle** de  $z$  (notée  $\operatorname{Re}(z)$ ).
- $y$  est la **partie imaginaire** de  $z$  (notée  $\operatorname{Im}(z)$ ).

### À LIRE

Le nombre  $z$  est dit **réel** si  $y = 0$  et il est dit **imaginaire pur** si  $x = 0$ .

## 3. Égalité entre nombres complexes

### À RETENIR

#### Lien entre égalité et parties réelle et imaginaire

Deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  sont **égaux** si et seulement si  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$ .

Ainsi, pour que deux nombres complexes soient égaux, leur partie réelle et leur partie imaginaire doivent toutes deux être égales.

### À LIRE

#### Attention !

Il n'y pas de relation d'ordre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$ . On ne pourra donc pas avoir de relation du type " $z \leq z'$ ".

## 4. Conjugué

### À RETENIR

#### Définition

Tout nombre complexe  $z = x + iy$  admet un nombre complexe **conjugué** noté  $\bar{z}$ . Ce conjugué est le nombre complexe  $\bar{z} = x - iy$ .

On donne également quelques formules permettant de calculer plus facilement des conjugués de nombres complexes.

## À RETENIR

## Relations

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes.

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$  où  $z' \neq 0$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$  où  $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

Enfin, on a plusieurs propriétés intéressantes que l'on peut dégager.

## À RETENIR

## Propriétés

Soit  $z$  un nombre complexe.

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
- $z$  est un réel si et seulement si  $z = \bar{z}$
- $z$  est un imaginaire pur si et seulement si  $z = -\bar{z}$

## 5. Module

## À RETENIR

## Définition

On appelle **module** d'un nombre complexe  $z = x + iy$  (noté  $|z|$ ) le réel  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Le module possède des propriétés intéressantes (à la manière de la valeur absolue pour les réels).

## À RETENIR

## Formules

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes.

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|\alpha z| = \sqrt{\alpha^2} |z|$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  (en particulier,  $|-z| = |z|$ )
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$  où  $z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$  où  $n \in \mathbb{N}$

À LIRE ∞

### Retrouver les formules

Ces propriétés peuvent sembler compliquées mais heureusement il est possible de les retrouver par le calcul. Par exemple, pour la quatrième propriété, en posant  $z = x + iy$  (et donc  $\bar{z} = x - iy$ ) :

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

## II – Polynômes dans $\mathbb{C}$

### 1. Généralités sur les polynômes

À RETENIR

#### Définition

Soit  $n$  un entier. On dit que  $P$  est un **polynôme de degré  $n$**  si  $P$  est une expression formelle de la forme :  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ .

En classe de Terminale, on peut remplacer “expression formelle” par “fonction” (un polynôme de degré  $n$  sera donc la même chose qu’une **fonction polynomiale de degré  $n$** ). Dans ce chapitre, ce seront des fonctions à valeurs complexes.

À LIRE

Il peut être intéressant pour vous de faire le lien avec les fonctions polynomiales du second degré vues en Première.

À RETENIR

#### Racine d’un polynôme

On dit qu’un nombre complexe  $a$  est une racine d’un polynôme  $P$  si on a  $P(a) = 0$ .

On donne enfin la **formule du binôme de Newton**, qui peut s’avérer utile pour développer certaines expressions.

À RETENIR

#### Formule du binôme de Newton

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes.

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

## DÉMONSTRATION

## Formule du binôme de Newton

Nous allons prouver cette propriété en utilisant le dénombrement, mais il est tout à fait possible de le faire par récurrence (c'est d'ailleurs un très bon exercice!)

Ainsi, on a  $(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \times (a + b) \times \cdots \times (a + b)}_{n \text{ fois}}$ .

En développant cette expression on peut obtenir une somme de termes de la forme  $a^k b^j$  où :

- $k$  représente le nombre de fois où l'on a choisi  $a$  en développant.
- $j$  représente le nombre de fois où l'on a choisi  $b$  en développant.

Ainsi, forcément,  $i = n - k$  (car si on ne choisit pas  $a$ , alors on choisit  $b$ ; choisir  $k$  fois  $a$  revient donc à choisir  $n - k$  fois  $b$ ).

De plus, il y a  $\binom{n}{k}$  manières de choisir  $k$  fois  $a$  parmi les  $n$  expressions  $(a + b)$ , alors

l'expression  $a^k b^{n-k}$  apparaît  $\binom{n}{k}$  lors du développement. Notre somme de termes devient donc :

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \underbrace{(a^0 b^{n-0} + \cdots + a^0 b^{n-0})}_{\binom{n}{0} \text{ termes}} \\ &+ \cdots + \underbrace{(a^k b^{n-k} + \cdots + a^k b^{n-k})}_{\binom{n}{k} \text{ termes}} \\ &+ \cdots + \underbrace{(a^n b^{n-n} + \cdots + a^n b^{n-n})}_{\binom{n}{n} \text{ termes}}. \end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

## À LIRE

Si  $n = 2$ , on retrouve  $(a + b)^2 = \binom{0}{2} a^2 b^0 + \binom{1}{2} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

On admet de plus une propriété fondamentale de  $\mathbb{C}$ .

## À RETENIR

## Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme non-nul de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines complexes.

## 2. Résolution d'une équation du second degré

Il est possible d'étendre la résolution d'une équation du second degré du type  $ax^2 + bx + c = 0$  dans le cas où le polynôme admet un discriminant est négatif. Nous allons

voir ici une méthode de résolution.

À RETENIR

### Résolution d'une équation du second degré

On considère l'équation  $(E) : az^2 + bz + c = 0$  (où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels et  $a \neq 0$ ).

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ , et alors les solutions de  $(E)$  dépendent du signe de  $\Delta$  :

- Si  $\Delta > 0$ ,  $(E)$  admet deux solutions réelles  $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- Si  $\Delta = 0$ ,  $(E)$  admet une solution réelle  $z_0 = \frac{-b}{2a}$ .
- Si  $\Delta < 0$ ,  $(E)$  admet deux solutions complexes conjuguées  $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \bar{z}_1$ .

À LIRE

### Exemple

On souhaite résoudre l'équation  $-2z^2 + 4z = 10$  dans  $\mathbb{C}$ .

**1<sup>re</sup> étape :** On fait apparaître une équation du second degré :  $-2z^2 + 4z - 10 = 0$ .

**2<sup>e</sup> étape :** On calcule le discriminant :  $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 80 = -64$ .

**3<sup>e</sup> étape :** On "transforme" le discriminant négatif :  $\Delta = 64i^2 = (8i)^2$ .

**4<sup>e</sup> étape :** On trouve les solutions :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4 - 8i}{2 \times -2} = 1 + 2i \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4 + 8i}{2 \times -2} = 1 - 2i = \bar{z}_1$$

À LIRE

### Relation avec les racines d'un polynôme

Résoudre une équation du type  $az^2 + bz + c = 0$  (où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels et  $a \neq 0$ ) revient à chercher les racines complexes du polynôme  $P$  défini pour tout  $z \in \mathbb{C}$  par  $P(z) = az^2 + bz + c$ .

## 3. Factorisation par $z - a$

À RETENIR

### Factorisation par une racine

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  et soit  $a$  une racine de ce polynôme. Alors il existe un polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z - a)Q(z)$ .



À LIRE ∞

### Exemple

Factorisons le polynôme  $P$  défini pour tout  $z \in \mathbb{C}$  par  $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$ .

On remarque déjà que  $P(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ . Donc 1 est racine de  $P$ , il existe donc un polynôme  $Q$  de degré 2 tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z - 1)Q(z)$ .

Essayons maintenant de déterminer  $Q$ . Posons  $Q(z) = az^2 + bz + c$  et déterminons les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z - 1)Q(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$ .

Il suffit maintenant d'identifier les coefficients (dans la première expression de  $P$ ) :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b = 1 \\ -c = -1 \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Finalement, on a pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $Q(z) = z^2 + 1$ , donc  $P(z) = (z - 1)(z^2 + 1)$ .

Pour terminer la factorisation, il faut également factoriser  $Q$ . Pour cela on calcule son discriminant qui est donc  $\Delta = -4$  : on a deux racines complexes conjuguées qui sont  $z_1 = -i$  et  $z_2 = i$ .

Finalement, comme  $Q$  est de degré 2 (et qu'on a trouvé deux racines), la factorisation est terminée : on a pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $Q(z) = (z - i)(z + i)$  donc  $P(z) = (z - 1)(z - i)(z + i)$ .

Une application possible de cette propriété est que tout polynôme  $P$  de la forme  $P(z) = z^n - a^n$  se factorise en  $P(z) = (z - a)Q(z)$  (où  $Q$  est un polynôme de degré  $n - 1$ ) car  $a$  est une racine de  $P$  et que  $P$  est un polynôme de degré  $n$ .

## III – Géométrie avec les nombres complexes

### 1. Formes trigonométrique et exponentielle

Tout nombre complexe peut s'écrire sous trois formes la **forme algébrique**, la **forme trigonométrique** et la **forme exponentielle**.

À RETENIR

#### Forme trigonométrique

Pour obtenir la forme trigonométrique d'un nombre complexe  $z = x + iy$ , il faut tout d'abord obtenir son module. La **forme trigonométrique** de  $z$  est ensuite donnée par :  $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ .

Avec  $\theta$  l'**argument** de  $z$  (noté  $\arg(z)$ ) qui doit vérifier :

$$\begin{aligned} \text{— } \cos(\theta) &= \frac{x}{|z|} \\ \text{— } \sin(\theta) &= \frac{y}{|z|} \end{aligned}$$

Une fois la forme trigonométrique obtenue, on peut passer à la forme exponentielle.

À RETENIR

#### Forme exponentielle / Formule d'Euler

Soit  $z$  un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique  $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ . Alors  $z = |z|e^{i\theta}$ .

À LIRE

#### Exemple

On veut passer le nombre complexe  $z = 1 + i$  sous forme exponentielle.

**1<sup>re</sup> étape :** On calcule le module :  $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .

**2<sup>e</sup> étape :** On factorise par le module :  $z = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

**3<sup>e</sup> étape :** On calcule l'argument :  $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . On a donc  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (car  $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ).

**4<sup>e</sup> étape :** On passe à la forme exponentielle :  $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

On peut étendre l'égalité entre nombres complexes donnée au début : deux nombres complexes sont égaux s'ils ont le **même module** et le **même argument (modulo  $2\pi$ )**, nous détaillerons ce point-ci plus tard).

## À LIRE ∞

## Formules de Première

Il est possible de retrouver les formules trigonométriques vues en Première à l'aide des nombres complexes. La démonstration suivante n'est pas à apprendre mais peut être utile pour retrouver ces formules.

On a  $e^{i \times (a+b)} = e^{i \times a} \times e^{i \times b}$ .

En passant à la forme trigonométrique, cela donne :  $\cos(a+b) + i \sin(a+b) = (\cos(a) + i \sin(a)) \times (\cos(b) + i \sin(b))$ .

Puis en développant :  $\cos(a+b) + i \sin(a+b) = \cos(a) \cos(b) + i \cos(a) \sin(b) + i \cos(b) \sin(a) - \sin(a) \sin(b)$ .

Il reste à travailler un petit peu l'expression :  $\cos(a+b) + i \sin(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) + i(\cos(a) \sin(b) + \cos(b) \sin(a))$ .

Or deux nombres complexes sont égaux si et seulement si la partie réelle et la partie imaginaire de ces deux nombres sont égales, cela donne :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a+b) = \cos(a) \sin(b) + \cos(b) \sin(a) \end{cases}$$

Les formules vues en Première ont donc bien été retrouvées.

## 2. Propriétés de l'argument

## À RETENIR ♥

## Propriétés

Soit  $z$  un nombre complexe.

- $z$  est un réel si et seulement si  $\arg(z) = k \times \pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$
- $z$  est un imaginaire pur si et seulement si  $\arg(z) = k \times \frac{\pi}{2}$  où  $k \in \mathbb{Z}$

Pour conclure cette partie, nous allons donner quelques formules permettant de calculer des arguments.

## À RETENIR

## Formules

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes.

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \mod 2\pi$
- $\arg(-z) = -\arg(z) + \pi \mod 2\pi$
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \mod 2\pi$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \mod 2\pi$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \mod 2\pi$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z) \mod 2\pi$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

## À LIRE

Le “ $\mod 2\pi$ ” signifie simplement que l’on se place **modulo**  $2\pi$ . Dans cette configuration, on a  $-\pi = \pi \mod 2\pi$ , mais aussi  $-\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \mod 2\pi$ , ou encore  $\pi = 3\pi \mod 2\pi$ .

## 3. Affixe et représentation

Dans tout ce qui suit, le plan sera muni d’un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## À RETENIR

## Affixe d’un point

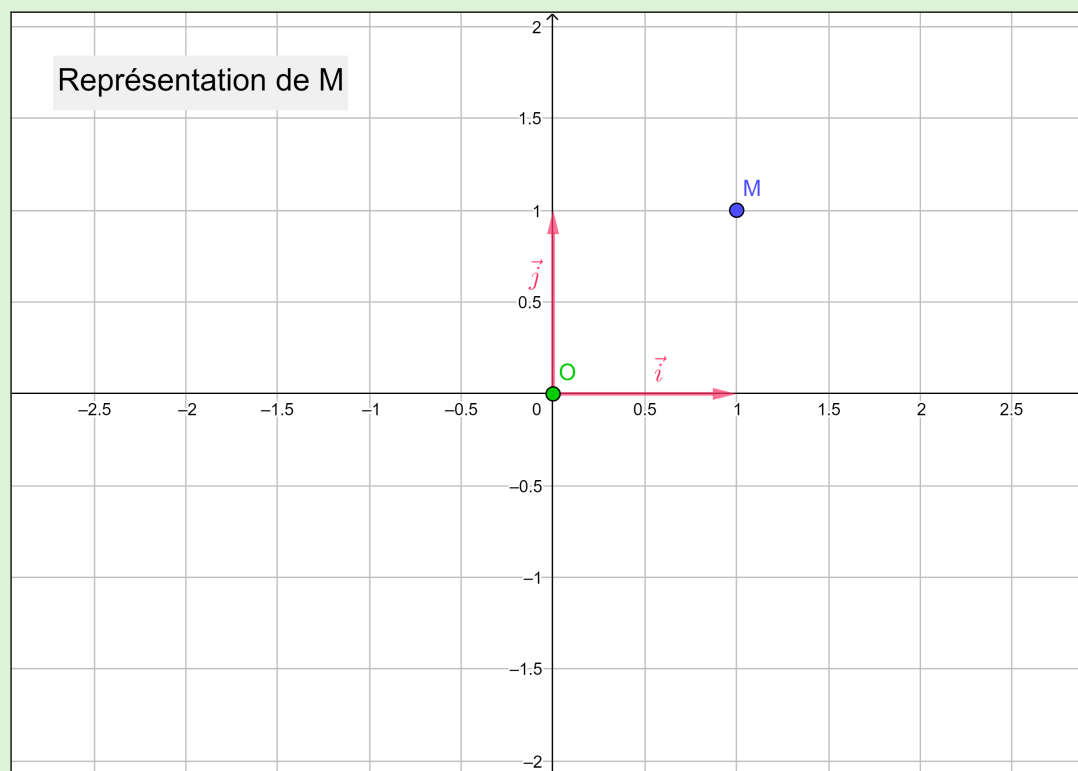
Un nombre complexe  $z = x + iy$  peut être représenté dans le plan par un point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$ .  $z$  est alors appelé **affixe** du point  $M$  (et réciproquement le point  $M$  est l’**image** de  $z$ ).

Un nombre complexe  $z' = |z'|e^{\theta}$  peut être représenté dans le plan par un point  $M'$  situé sur le cercle d’origine  $O$  et de rayon  $|z'|$ . Le point  $M'$  est alors situé à l’angle de  $\theta$  radians sur ce cercle. Le module est donc une **distance** et l’argument est un **angle**.

À LIRE ∞

### Exemple

On souhaite représenter le point  $M$  d'affixe  $z = 1 + i$  dans le plan. On a les coordonnées de  $M$  qui sont  $x = 1$  et  $y = 1$  :



À LIRE ∞

**Exemple**

On souhaite représenter le point  $M'$  d'affixe  $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  dans le plan. On a le module de  $z'$  :  $|z'| = \sqrt{2}$ , et un argument de  $z'$  :  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . On va donc tracer le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{2}$  ainsi qu'un segment passant par  $O$  et intersectant le cercle en faisant un angle de  $\frac{\pi}{4}$  radians avec l'axe des abscisses. Leur intersection sera le point  $M'$  :



On voit à l'aide de ces deux représentations que  $z = z'$  (où  $z$  est le nombre complexe de l'exemple précédent), comme cela a été démontré dans l'exemple de la première partie.

**4. Lien Géométrie - Nombres complexes**

Une propriété remarquable des nombres complexes est qu'il est possible de les utiliser pour faire de la géométrie ! Cela peut sembler surprenant, mais cela repose sur le fait que tout nombre complexe  $z$  s'écrit  $x + iy$  (avec  $x$  la partie réelle de  $z$  et  $y$  sa partie imaginaire), et que, comme dit dans la partie précédente, on peut y associer le point de coordonnées  $(x; y)$ .

Voici, de manière plus formelle, quelques propriétés de géométrie reposant sur l'utilisation des nombres complexes. On rappelle que l'on se place dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## À RETENIR

## Affixe d'un vecteur

Soient  $A$  et  $B$  deux points d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ . Alors on associe au vecteur  $\overrightarrow{AB}$  son **affixe** qui est le complexe  $z_B - z_A$ .

## À LIRE

## Lien avec l'affixe d'un point

En fait, pour faire le lien avec la partie précédente, l'affixe d'un point  $A$  est tout simplement l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{OA}$ .

## À RETENIR

## Propriétés

Soient  $A, B, C$  et  $D$  des points d'affixes respectives  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$ .

- **La longueur  $AB$  est :** le module du complexe  $z_B - z_A$  (i.e.  $|z_B - z_A|$ ). Il s'agit également de la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
- **Le milieu du segment  $[AB]$  est :** le point  $M$  d'affixe  $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$ .
- **L'angle  $(\vec{i}; \overrightarrow{AB})$  est :** l'argument du complexe  $z_B - z_A$  (i.e.  $\arg(z_B - z_A)$ , modulo  $2\pi$ ).
- **L'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$  est :** l'argument du complexe  $\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)$  (i.e.  $\arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)$ , modulo  $2\pi$ ).

5. L'ensemble  $\mathbb{U}$  et les racines  $n$ -ièmes de l'unité

## À RETENIR

L'ensemble  $\mathbb{U}$ 

On note par  $\mathbb{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1.

## À RETENIR

Stabilité de  $\mathbb{U}$ 

Soient  $z, z' \in \mathbb{U}$ . Alors  $z \times z' \in \mathbb{U}$  et  $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ .

En fait, l'ensemble  $\mathbb{U}$  permet de décrire tous les points du cercle trigonométrique. Passons maintenant à l'étude de certains sous-ensembles de  $\mathbb{U}$ .

## À RETENIR

Racines  $n$ -ièmes de l'unité

Soit  $z$  un nombre complexe. On dit que  $z$  est une **racine  $n$ -ième de l'unité** si  $z^n = 1$ .

De plus, en notant par  $\mathbb{U}_n$  l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité, on a

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2i\pi \times 0}{n}}, e^{\frac{2i\pi \times 1}{n}}, e^{\frac{2i\pi \times 2}{n}}, \dots, e^{\frac{2i\pi \times (n-1)}{n}} \right\}.$$

## DÉMONSTRATION

Racines  $n$ -ièmes de l'unité

Soit  $z \in \mathbb{U}_n$ . On a  $z^n = 1$ , donc  $|z^n| = |z|^n = 1$ . Ainsi, on a  $|z| = 1$ . En écrivant  $z$  sous forme exponentielle, il existe  $\theta \in [0; 2\pi[$  tel que  $z = e^{i\theta}$ .

Ainsi,  $z^n = 1 \iff e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$ . Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et le même argument. On doit donc avoir  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $n\theta = 0 + 2k\pi$  i.e.  $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ .

Et comme par le théorème fondamental de l'algèbre, l'équation  $z^n - 1 = 0$  admet au plus  $n$  solutions, on a donc trouvé toutes les solutions.

## À LIRE

L'ensemble  $\mathbb{U}_n$  décrit exactement le polynôme régulier à  $n$  côtés inscrit dans le cercle trigonométrique ayant pour sommet 1.

Par exemple,  $\mathbb{U}_3$  est l'ensemble des sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique (dont un sommet est 1).