



Chapitre V – La fonction logarithme népérien

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----------|
| I – Propriétés du logarithme népérien | 1 |
| 1. Définition | 1 |
| 2. Relations algébriques | 1 |
| 3. Représentation graphique | 2 |
| II – Étude de la fonction | 4 |
| 1. Limites | 4 |
| 2. Dérivée | 5 |
| 3. Variations | 5 |

I – Propriétés du logarithme népérien

1. Définition

À RETENIR

Définition

Le **logarithme népérien** est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \ln(x)$.

À RETENIR

On a la relation fondamentale suivante pour tout $x > 0$ et y réels :

$$\ln(x) = y \iff x = e^y.$$

Ainsi, à tout réel **strictement positif** x , la fonction logarithme népérien y associe **son unique antécédent** y par rapport à la fonction exponentielle. De même pour la fonction exponentielle.

On dit que ces fonctions sont des **fonctions réciproques** (à la manière de \sin et \arcsin ou \cos et \arccos).

À LIRE

Exemple

Cette relation peut sembler compliquer à assimiler mais il n'en est rien ! Prenons $x = 0$, on a :

$e^0 = 1$ (tout réel mis à la puissance zéro vaut un), la relation précédente nous donne $\ln(1) = 0$.

Si on prend maintenant $x = 1$, on a :

$e^1 = e$, on a donc $\ln(e) = 1$.

Les relations suivantes sont par conséquent disponibles :

À RETENIR

Relations entre fonctions réciproques

Pour tout réel x **strictement positif**, on a $e^{\ln(x)} = x$.

Et pour tout réel x , on a $\ln(e^x) = x$.

2. Relations algébriques

Le logarithme népérien a plusieurs propriétés intéressantes qu'il faut connaître.

À RETENIR

Formules

Pour tous réels x et y **strictement positifs** :

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
- $\ln(\sqrt[p]{x}) = \frac{1}{p} \times \ln(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$

Certaines de ces propriétés peuvent se déduire les unes des autres.

3. Représentation graphique

Voici une représentation graphique de la fonction logarithme népérien :



On voit sur ce graphique plusieurs propriétés données précédemment : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ par exemple. On trace maintenant le graphe de la fonction logarithme népérien, avec celui de la fonction exponentielle. On trace également la droite d'équation $y = x$:



On remarque plusieurs choses : le graphe de la fonction logarithme népérien est le symétrique de celui de la fonction exponentielle par rapport à la droite $y = x$ et on voit que la fonction logarithme népérien croît moins vite que la fonction puissance qui elle-même croît moins vite que la fonction exponentielle. Cette propriété est importante : c'est la **croissance comparée**.

II – Étude de la fonction

1. Limites

À RETENIR

Limites

Les limites de la fonction logarithme népérien aux bornes de son ensemble de définition sont :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Il faut aussi savoir que la fonction puissance “l’emporte” sur le logarithme népérien (voir la partie “Représentation graphique”).

À RETENIR

Croissances comparées

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0.$

DÉMONSTRATION

Croissances comparées

Nous allons démontrer le second point en utilisant le premier (qui n’est pas éligible à une démonstration au lycée) dans le cas $n = 1$. Pour tout $x > 0$, posons $y = \frac{1}{x}$.

On a donc pour tout, $x \ln(x) = \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(y)}{y}.$

Or, quand x tend vers 0^+ , y tend vers $+\infty$. Par le premier point :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0 \iff \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

Et en remplaçant y par $\frac{1}{x}$ dans le résultat ci-dessus, on a bien ce que l’on cherchait.

Pour finir, on donne une limite qu’il peut être utile de savoir redémontrer.

À RETENIR

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

DÉMONSTRATION

La fonction logarithme népérien est dérivable en 1 (voir sous-section suivante), on peut donc écrire :

$$\ln'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1}$$

Ce qui est équivalent à (car on a $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$) :

$$1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

On pose $y = x - 1$ ce qui nous donne finalement :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y + 1)}{y} = 1$$

2. Dérivée

À RETENIR

Dérivée d'une composée

Soit une fonction u dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I , on a pour tout x appartenant à cet intervalle :

$$\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

À RETENIR

Dérivée

Ainsi, si pour tout $x \in I$ on a $u(x) = x$, on trouve :

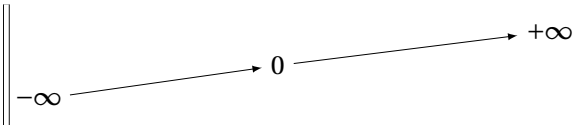
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Variations

Avec la dérivée donnée précédemment ainsi que les limites données, il est désormais possible d'obtenir les variations de la fonction logarithme népérien.

À RETENIR

Signe et variations

| | | | |
|---------------------|--|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $x \mapsto \ln'(x)$ | | + | |
| $x \mapsto \ln(x)$ |  | | |

On remarque qu'avec le tableau de variation, il est possible d'obtenir le signe de la fonction (avec le théorème des valeurs intermédiaires).

Ainsi, sur $]0; 1[$, \ln est **strictement négative** et sur $]1; +\infty[$, $\ln(x)$ est **strictement positive** et, comme vu précédemment, $\ln(1) = 0$.

On observe également les variations de la fonction : strictement croissante sur son ensemble de définition.