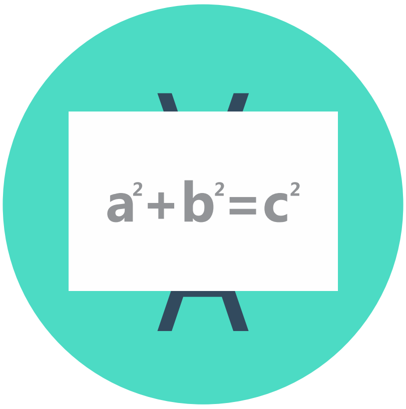


Chapitre I – Les suites

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Généralités

1. Définition

On appelle **suite** une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: cette fonction va prendre des éléments de l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ et va les amener dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$.

À RETENIR

Définition

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

— **Par récurrence :** On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang $n+1$.

— **Par son terme général :** On donne le n-ième terme de la suite en fonction de n.

Attention ! Bien que ces deux modes de génération soient les principaux, il en existe d'autres : algorithme, motifs géométriques, ...

À LIRE

Exemple

On définit les suites (u_n) et (v_n) ainsi :

— $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ((u_n) est définie par son terme général).

— $(v_n) = \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$ ((v_n) est définie par récurrence).

On remarque que bien que définies différemment, (u_n) et (v_n) sont égales.

À LIRE

À ne pas confondre :

— (u_n) qui est la **suite** (u_n).

— u_n qui est le n**-ième terme** de la suite (u_n).

Ce ne sont pas les mêmes objets : le premier est une suite, le second est un réel.

2. Suites arithmétiques

À RETENIR

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si elle est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

À RETENIR

Raison

Le réel r est la **raison** de la suite (si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante, si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante et si $r = 0$, (u_n) est constante).

Il est possible de trouver le terme général d'une suite arithmétique :

À RETENIR

Terme général

On note p le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie). Alors, pour tout $n \geq p$:

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Et si (u_n) est définie à partir du rang 0 (on a $p = 0$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + (n - 0) \times r = u_0 + n \times r$$

DÉMONSTRATION

Terme général

On a $u_{p+1} = u_p + r$. Puis, $u_{p+2} = u_{p+1} + r = u_p + r + r = u_p + 2 \times r$. De même, $u_{p+3} = u_{p+2} + r = u_p + 3 \times r$ et caetera.
En fait, pour tout k entier plus grand que p, on a $u_{p+k} = u_p + k \times r$.
Donc si on pose $n = p + k$, alors $u_n = u_p + (n - p) \times r$.

À RETENIR

Somme des termes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

DÉMONSTRATION

Somme des termes

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. On a également $S_n = n + (n-1) + \cdots + 1$ (en écrivant la somme à l'envers).
D'où $S_n + S_n = 2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ fois}} = n \times (n+1)$. Et ainsi $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

À LIRE

Exemple

On souhaite calculer $S = 24 + 25 + \cdots + 104$.

En fait, $S = 1 + 2 + \cdots + 23 + 24 + 25 + \cdots + 104 - (1 + 2 + \cdots + 23)$. Calculons les deux sommes séparément :

— $1 + 2 + \cdots + 23 = \frac{23 \times 24}{2} = 276$

— $1 + 2 + \cdots + 104 = \frac{104 \times 105}{2} = 5460$

D'où $S = 5460 - 276 = 5184$.

3. Suites géométriques

À RETENIR

Définition

Une suite (v_n) est dite **géométrique** si elle est de la forme $v_{n+1} = v_n \times q$ avec $q \in \mathbb{R}$.

À RETENIR

Raison

Le réel q est la **raison** de la suite (si $q > 1$, (v_n) est strictement croissante, si $0 < q < 1$, (v_n) est strictement décroissante et si $q = 1$ ou 0, (v_n) est constante).

Il est possible de trouver le terme général d'une suite géométrique :

À RETENIR

Terme général

On note p le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie). Alors, pour tout $n \geq p$:

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Et si (u_n) est définie à partir du rang 0 (on a $p = 0$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^{n-0} = v_0 \times q^n$$

DÉMONSTRATION

Terme général

On a $v_{p+1} = v_p \times q$. Puis, $v_{p+2} = v_{p+1} \times q = v_p \times q \times q = v_p \times q^2$. De même, $v_{p+3} = v_{p+2} \times q = v_p \times q^3$ et caetera.
En fait, pour tout k entier plus grand que p, on a $v_{p+k} = v_p \times q^k$.
Donc si on pose $n = p + k$, alors $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

À RETENIR

Somme des termes

Soit $n \neq 0$ un entier et q un réel, alors :

— Si $q \neq 1$, alors $1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

— Si $q = 1$, alors $1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n$.

DÉMONSTRATION

Somme des termes

Le cas $q = 1$ étant donné juste au-dessus, on supposera $q \neq 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n$.

On a : $qS_n = q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}$, puis : $S_n - qS_n = 1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n - q^1 - q^2 - q^3 - \cdots - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$.

Donc on a en factorisant par S_n : $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1} \iff S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

À LIRE

Exemple

On souhaite calculer $S = 3^5 + 3^6 + \cdots + 3^{10}$.

En fait, $S = 1 + 3 + \cdots + 3^4 + 3^5 + 3^6 + \cdots + 3^{10} - (1 + \cdots + 3^4)$. Calculons les deux sommes séparément :

— $1 + 3 + \cdots + 3^4 = \frac{1-3^5}{1-3} = 121$

— $1 + 3 + \cdots + 3^{10} = \frac{1-3^{11}}{1-3} = 88573$

D'où $S = 88573 - 121 = 88452$.

II - Étude des suites

1. Sens de variation

À RETENIR

Définition

Soit (u_n) une suite.

— (u_n) est **croissante** si on a $u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \geq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— (u_n) est **décroissante** si on a $u_{n+1} \leq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— (u_n) est dite **constante** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

2. Introduction aux limites

Quand on souhaite s'intéresser à la limite d'une suite (u_n), on étudie le comportement de ses termes quand"n devient très grand". On préfère dire alors que n **tend vers** $+\infty$.

À RETENIR

Définition

Soit (u_n) une suite.

— Si (u_n) tend vers un réel quand n tend vers $+\infty$, on dit qu'elle **converge**.
— Si (u_n) tend vers une limite infinie quand n tend vers $+\infty$, on dit qu'elle **diverge**.

À LIRE

Exemple

On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n}$. On souhaite trouver la limite possible de cette suite en $+\infty$.
Pour cela, regardons les valeurs que prend cette suite pour des valeurs de n très grandes :

100	$0,01$
1000	$0,001$
100000	$0,00001$
1000000000	$0,000000001$

Il semble que cette suite converge vers 0.

À savoir que si une suite a une limite, alors cette limite est **unique**. Mais il est également possible pour une suite de ne pas admettre de limite.

À LIRE

Exemple

On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. On souhaite trouver la limite possible de cette suite en $+\infty$.

100	1
101	-1
1000000	1
1000001	-1

En fait, si n est pair cette suite vaut 1 et si n est impair elle vaut -1. Cette suite n'admet donc pas de limite : elle diverge.

3. Représentation graphique

Il est possible de représenter graphiquement une suite. Cela peut aider, par exemple dans le but de chercher sa limite.

À RETENIR

Méthode pour une suite définie par récurrence

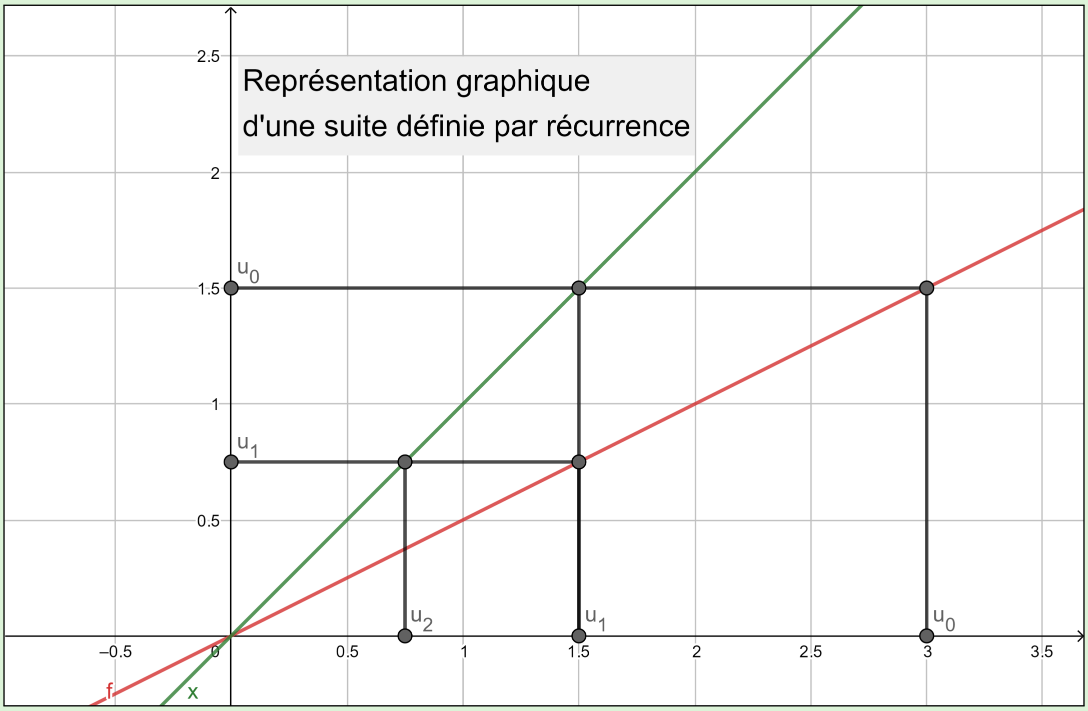
Soit (u_n) une suite définie par récurrence. Pour représenter (u_n) dans un graphique :

1. On trace la droite d'équation $y = x$.
2. Comme cette suite est définie par récurrence, pour tout entier n on a une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Il s'agit de tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
3. On place le point A de coordonnées $(u_0; 0)$
4. On trace une droite verticale passant par A, son intersection avec $\mathscr{C}_f$ donne un point $B = (u_0; u_1)$.
5. À l'aide du point B, on place le point $C = (0; u_1)$.
6. On trace une droite horizontale passant par C, son intersection avec la droite $y = x$ donne un point $D = (u_1; u_1)$.
7. Une fois le point D obtenu, on place le point $(u_1; 0)$.
8. On recommence l'opération en remplaçant u_0 par u_1 et u_1 par u_2, puis on recommence, etc.

À LIRE

Exemple

Représentation des trois premiers termes de la suite $(u_n) = \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$.



Il est cependant plus facile de représenter graphiquement une suite dont on connaît le terme général.

À RETENIR

Méthode pour une suite définie par son terme général

Soit (v_n) une suite définie par son terme général. Pour représenter (v_n) dans un graphique :

1. On place le point de coordonnées $(0; v_0)$.
2. On place le point de coordonnées $(1; v_1)$.
3. On place le point de coordonnées $(2; v_2)$. Etc.

À LIRE

Exemple

Représentation des trois premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2^n$.