



# Chapitre VII – Probabilités

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Probabilités conditionnelles</b>	<b>1</b>
1. Définition	1
2. Arbre de probabilité	1
3. Formule des probabilités totales	3
<b>II - Variables aléatoires</b>	<b>4</b>
1. Définition	4
2. Loi de probabilité	4
3. Espérance, variance et écart-type	5

# I - Probabilités conditionnelles

## 1. Définition

À RETENIR 🔔

### Définition

Soient  $A$  et  $B$  deux événements avec  $A$  de probabilité non nulle. Alors **la probabilité conditionnelle de  $B$  sachant que  $A$  est réalisé** (notée  $P_A(B)$ ) est  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .

À LIRE 🔗

### Rappel

On rappelle que  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ .

À LIRE 🔗

### Différence entre conditionnelle et intersection

**Il faut faire attention**, à bien faire la distinction entre une probabilité conditionnelle (“**Sachant qu’on a  $A$** , quelle est la probabilité d’avoir  $B$ ?”) et une intersection (“Quelle est la probabilité d’avoir  $A$  **et  $B$  à la fois**?”).

À RETENIR 🔔

### Indépendance

Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits **indépendants** si la réalisation de l’un n’a aucune incidence sur la réalisation de l’autre et réciproquement. C’est-à-dire si  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

À RETENIR 🔔

### Propriétés

Pour deux événements indépendants  $A$  et  $B$ , on a les relations suivantes :

- $P_A(B) = P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$

## 2. Arbre de probabilité

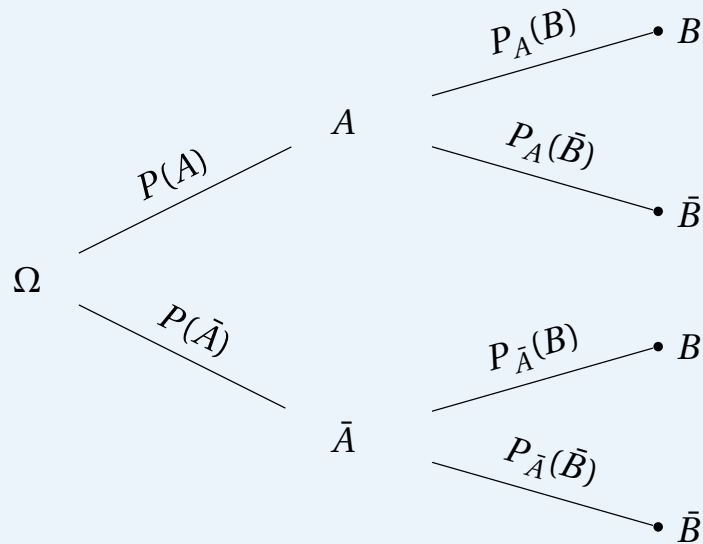
Au lycée, pour représenter visuellement des probabilités on utilise très souvent un **arbre de probabilité**. Nous nous limiterons ici au cas de deux événements, mais il est possible d’en rajouter encore d’autres.

Ainsi :

À RETENIR

### Définition

Soient  $A$  et  $B$  deux événements. L'arbre de probabilité décrivant la situation est le suivant :



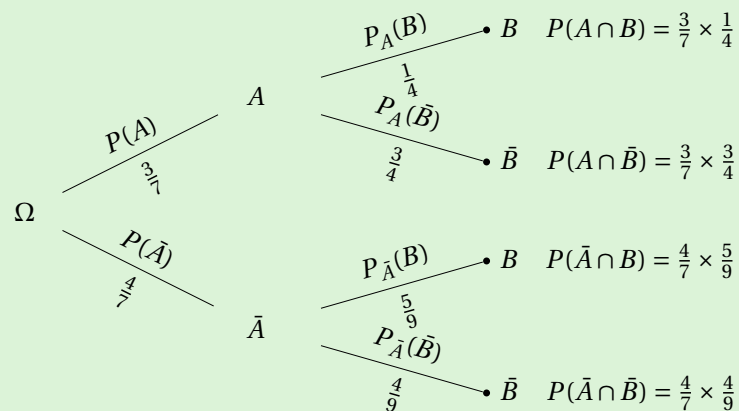
La somme (dans le sens vertical) des probabilités de chacune des branches ayant une “racine” commune doit toujours faire 1.

À LIRE

### Exemple

Soit  $A$  et  $B$  deux événements non-indépendants tels que  $P(A) = \frac{4}{7}$ ,  $P_A(B) = \frac{1}{4}$  et  $P_{\bar{A}}(B) = \frac{5}{9}$ .

Alors l'arbre permettant de modéliser la situation est le suivant :



### 3. Formule des probabilités totales

Voici maintenant l'énoncé de la **formule des probabilités totales**, qui peut être très utile pour calculer des probabilités que l'on ne connaît pas (ou qui ne sont pas données dans un énoncé d'exercice) :

À RETENIR

#### Formule des probabilités totales

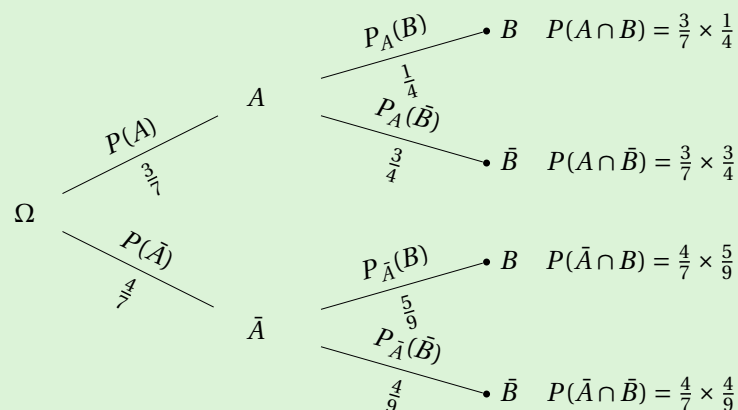
Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements qui partitionnent (qui recouvrent) l'univers  $\Omega$ , alors pour tout événement  $B$  :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

À LIRE

#### Exemple

En reprenant l'arbre précédent, comme  $A$  et  $\bar{A}$  recouvrent notre univers (en effet, soit on tombe sur  $A$ , soit on tombe sur  $\bar{A}$  : pas d'autre issue possible), calculons  $P(B)$  :



D'après la formule des probabilités totales,  $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{107}{252}$ .

## II - Variables aléatoires

### 1. Définition

À RETENIR

#### Définition

Une **variable aléatoire**  $X$  est une fonction qui, à chaque événement élémentaire de l'univers  $\Omega$  y associe un nombre réel. C'est-à-dire :  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'ensemble des valeurs prises par  $X$  est noté  $X(\Omega)$ .

À LIRE

Les variables aléatoires sont très utiles notamment pour modéliser des situations de gains ou de pertes (à un jeu d'argent par exemple).

### 2. Loi de probabilité

À RETENIR

#### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire. La **loi de probabilité** de  $X$  attribue à chaque valeur  $x_i$  la probabilité  $p_i = P(X = x_i)$  de l'événement  $X = x_i$  constitué de tous les événements élémentaires dont l'image par  $X$  est  $x_i$ .

On représente généralement les lois de probabilité par un tableau.

À RETENIR

#### Représentation d'une loi de probabilité par un tableau

Soit  $X$  une variable aléatoire. On peut représenter sa loi de probabilité par le tableau ci-contre :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_i$ $= P(X = x_i)$	$p_1$ $= P(X = x_1)$	$p_2$ $= P(X = x_2)$	...	$p_n$ $= P(X = x_n)$

On a  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

## À LIRE

Cette définition peut sembler un peu compliquée mais elle signifie juste qu'une loi de probabilité assigne une probabilité à chaque valeur prise par notre variable aléatoire.

### 3. Espérance, variance et écart-type

## À RETENIR

#### Espérance

L'**espérance**  $E(X)$  d'une variable aléatoire  $X$  est le réel :

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n$$

## À RETENIR

#### Variance et écart-type

La **variance**  $V(X)$  et l'**écart-type**  $\sigma(X)$  d'une variable aléatoire  $X$  sont les réels positifs suivants :

$$\begin{aligned} - & V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\ - & \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \end{aligned}$$

## À LIRE

#### Exemple

Calcul de l'espérance, de la variance et de l'écart-type. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de probabilité donnée par le tableau ci-dessous :

$x_i$	-1	0	2	6
$p_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

On a :

$$\begin{aligned} - & E(X) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \\ - & V(X) = ((-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 6^2 \times \frac{1}{8}) - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{75}{16} \\ - & \sigma(X) = \sqrt{\frac{75}{16}} \approx 2.165 \end{aligned}$$

Chacun de ces paramètres a une utilité bien précise. En effet :

## À RETENIR

## Signification des paramètres

- L'espérance est la **valeur moyenne** prise par  $X$ .
- La variance et l'écart-type mesurent la **dispersion** des valeurs prises par  $X$ . Plus ces valeurs sont grandes, plus les valeurs sont dispersées autour de l'espérance.