

# Chapitre VII – Calcul intégral

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

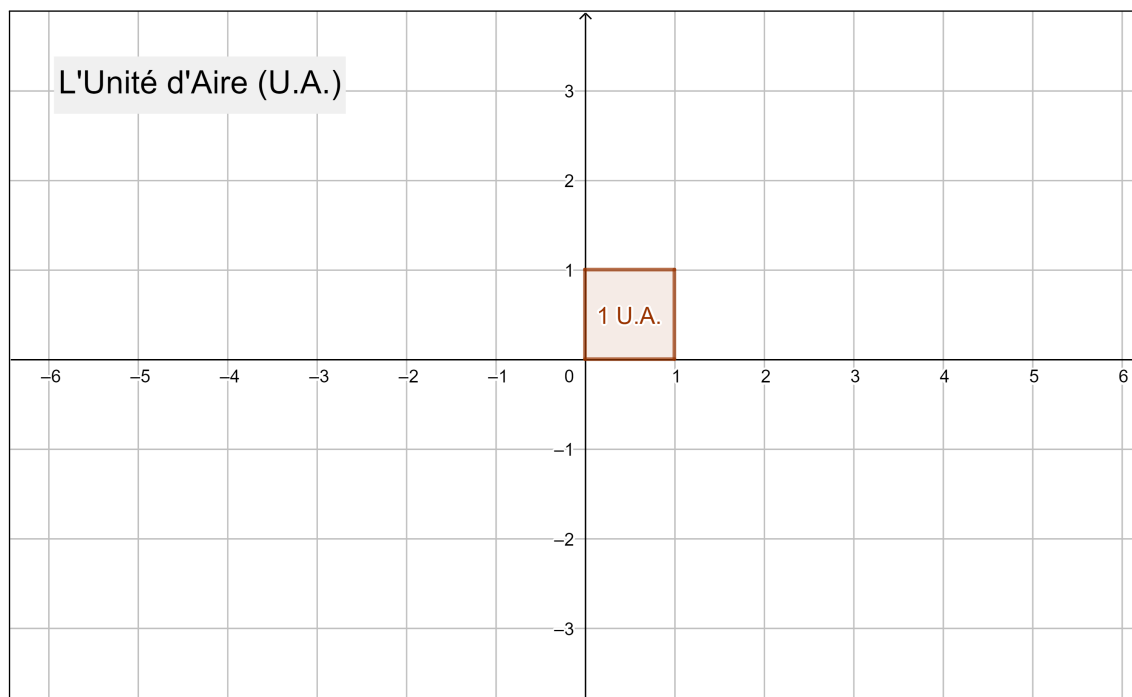
## TABLE DES MATIÈRES

<b>I – Calcul d'aire</b>	<b>1</b>
1. Aires et intégrales	1
2. Théorème fondamental de l'analyse	2
3. Signe de l'intégrale	3
<b>II – Propriétés de l'intégrale</b>	<b>5</b>
1. Propriétés algébriques	5
2. Linéarité	5
3. Relation de Chasles	5
<b>III – Calculs d'intégrale</b>	<b>7</b>
1. Intégration par parties	7
2. Intégrales de fonctions paires et impaires	8
3. Intégrales de fonctions périodiques	9
4. Valeur moyenne d'une fonction	10
5. Aire entre deux courbes	10
6. Primitive s'annulant en $a$	10

# I – Calcul d'aire

## 1. Aires et intégrales

Dans un repère orthogonal  $(O; I; J)$ , on prend un point  $A = (1; 1)$  et on appelle **Unité d'Aire** (U.A.) l'aire du rectangle formé par les points  $O$ ,  $I$ ,  $A$  et  $J$ .



Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a \leq b$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ . L'**intégrale** de la fonction  $f$  sur  $[a; b]$  notée  $\int_a^b f(x) dx$  représente l'aire entre la courbe de  $f$  et l'axe des abscisses délimitée par les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$  et est exprimée en **U.A.**.



On dit que les réels  $a$  et  $b$  sont les **bornes** de l'intégrale.

## 2. Théorème fondamental de l'analyse

Pour calculer l'intégrale d'une fonction, il faut d'abord trouver la primitive de celle-ci (voir le cours sur les primitives).

### À RETENIR

#### Théorème fondamental de l'analyse

Soient une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et deux réels  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$ .

Alors  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$  où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

### À LIRE

#### Exemple

On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 1$ , et l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[1; 4]$  :

**1<sup>re</sup> étape :** On cherche une primitive de  $f$ . On trouve  $F(x) = x^2 + x = x(x + 1)$ .

**2<sup>e</sup> étape :** On calcule l'intégrale. On a  $\int_1^4 2x + 1 dx = [x(x + 1)]_1^4 = 4(4 + 1) - 1(1 + 1) = 20 - 2 = 18$  U.A.

## À LIRE ∞

## Autre exemple

On veut calculer l'aire entre la courbe d'une fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = x$ , et l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[-2; 2]$  :

**1<sup>re</sup> étape :** On cherche une primitive de  $f$ . On trouve pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{x^2}{2}$ .

**2<sup>e</sup> étape :** On calcule l'intégrale. On a  $\int_{-2}^2 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0$  U.A.

Ce résultat est logique car l'aire au-dessus de la courbe de la fonction  $f$  sur  $[-2; 0]$  est égale à l'aire sous la courbe de  $f$  sur  $[0; 2]$  (voir les propriétés sur les intégrales des fonctions impaires).

### 3. Signe de l'intégrale

De manière générale, le signe de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle dépend du signe de cette fonction sur cet intervalle.

## À RETENIR ♦

## Relation signe de l'intégrale - signe de la fonction

Soient une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I = [a; b]$ .

- Si  $f > 0$  sur  $I$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx > 0$ .
- Si  $f < 0$  sur  $I$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx < 0$ .
- Si  $f$  change de signe sur  $I$ , on ne connaît pas directement le signe de l'intégrale. Le signe dépend de la partie de l'aire qui est la plus "grande".
- Soit  $g$  une fonction définie sur  $I$  avec  $f > g$  sur  $I$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx > \int_a^b g(x) \, dx$ .

Ainsi, cette intégrale sera positive :



Et cette intégrale sera négative :



## II – Propriétés de l'intégrale

### 1. Propriétés algébriques

À RETENIR

#### Propriétés

Soient une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et deux réels  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$ .

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) \, dx &= - \int_b^a f(x) \, dx \\ - \int_a^a f(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

### 2. Linéarité

À RETENIR

#### Linéarité de l'intégrale

Soient une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et deux réels  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$ . Soit  $\lambda$  un réel quelconque.

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \\ - \int_a^b \lambda f(x) \, dx &= \lambda \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

### 3. Relation de Chasles

À RETENIR

#### Relation de Chasles

Soient une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et deux réels  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$ . Pour tout  $c \in I$ , on a  $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$ .

À LIRE ∞

### Exemple

On veut calculer  $I = \int_{-2}^4 f(x) dx$  où  $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ .

**1<sup>re</sup> étape :** On sépare l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles :

$$I = \int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^4 x dx.$$

**2<sup>e</sup> étape :** On calcule l'intégrale :

$$I = \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^4 x dx = \left[ -\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 0 - \left( -\frac{2^2}{2} \right) + \left( \frac{4^2}{2} - 0 \right) = 10 \text{ U.A.}$$

## III – Calculs d'intégrale

### 1. Intégration par parties

Il peut arriver que vous ayez à intégrer un produit de fonctions. En classe de Terminale, il est possible de faire appel à une technique appelée **intégration par parties** pour en venir à bout.

#### À RETENIR

#### Intégration par parties

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et soient  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$ .

$$\text{Alors } \int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

#### DÉMONSTRATION

#### Intégration par parties

Comme  $(u \times v)' = u'v + uv'$ , la fonction  $u \times v$  est une primitive de la fonction  $u'v + uv'$  sur  $I$ . Or, par la relation de Chasles :

$$\int_a^b u'(x) v(x) + u(x) v'(x) dx = \int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Donc, avec ce que l'on a fait au tout début, on a bien :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b$$

C'est-à-dire :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

#### À LIRE

#### Exemple

En utilisant cette technique, calculons  $I = \int_0^1 x e^x dx$ . Nous souhaitons faire disparaître le “ $x$ ”, on va donc poser  $u'(x) = e^x$  et  $v(x) = x$  (afin de dériver  $x$ ).

Donc par la formule d'intégration par parties :

$$I = \left[ \underbrace{e^x}_{=u} \underbrace{x}_{=v} \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{=u} \times \underbrace{1}_{=v'} dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

Il vous faudra un peu de pratique pour savoir quelle fonction il faut dériver et quelle fonction il faut primitiver.



## 2. Intégrales de fonctions paires et impaires

À RETENIR

### Intégrale d'une fonction paire

Soit  $f$  une **fonction paire** continue sur un intervalle  $I$  (comme  $x \mapsto x^2$ ).

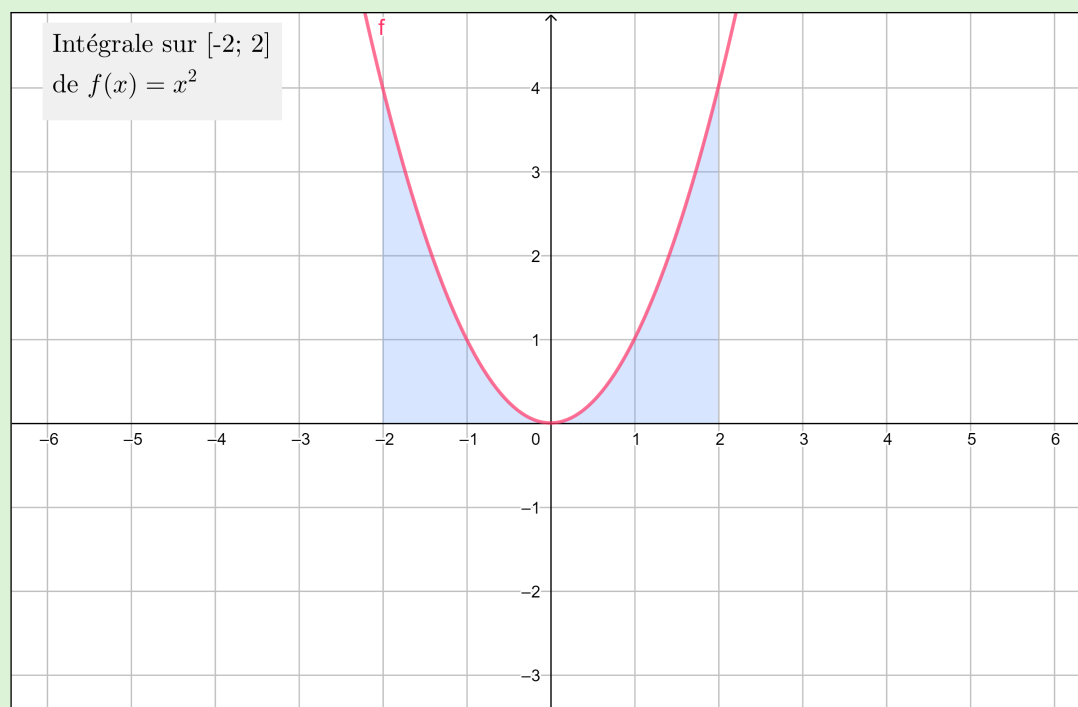
On a la relation suivante pour tout  $a \in I$  ( $-a$  doit aussi être dans  $I$ ) :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \times \int_0^a f(x) dx = 2 \times \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

À LIRE

### Exemple

Cette relation peut se retrouver visuellement, l'aire du côté gauche par rapport à  $(Oy)$  est égale à l'aire de l'autre côté de  $(Oy)$ , et les deux sont positives; on peut donc les additionner pour retrouver l'aire totale :



À RETENIR

### Intégrale d'une fonction impaire

Soit  $f$  une **fonction impaire** continue sur un intervalle  $I$  (comme  $x \mapsto x^3$ ).

On a la relation suivante pour tout  $a \in I$  ( $-a$  doit aussi être dans  $I$ ) :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

À LIRE ∞

## Exemple

De même, on peut retrouver cette relation visuellement, l'aire du côté gauche par rapport à  $(Oy)$  est négative et égale à l'aire de l'autre côté de  $(Oy)$  qui est positive, les deux s'annulent donc :



## 3. Intégrales de fonctions périodiques

À RETENIR ♦

## Intégrale d'une fonction périodique

Soit  $f$  une **fonction périodique** de période  $T$  (comme  $\cos$  avec  $T = 2\pi$ ) continue sur chacune de ses périodes, on a la relation suivante pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx$$

## 4. Valeur moyenne d'une fonction

### À RETENIR

#### Valeur moyenne

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ . La valeur moyenne  $M$  de  $f$  sur  $[a; b]$  est donnée par  $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

## 5. Aire entre deux courbes

### À RETENIR

#### Différence d'aires

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a; b]$ . Si on a  $f \geq g$  sur cet intervalle, alors l'aire entre les deux courbes est donnée par  $\int_a^b f(x) - g(x) dx$ .

## 6. Primitive s'annulant en $a$

### À RETENIR

#### Existence d'une primitive s'annulant en un point

Soient une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et un réel  $a \in I$ . La primitive de  $f$  sur  $I$  qui vaut 0 en  $a$  (notée  $F_a$ ) est donnée par  $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ .

### DÉMONSTRATION

#### Existence d'une primitive

Soit  $F$  une autre primitive de  $f$ . Alors on a pour tout  $x \in I$ ,  $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$  par le théorème fondamental de l'analyse.

Donc pour tout  $x \in I$ ,  $F'_a(x) = F'(x) - 0 = f(x)$ , donc  $F_a$  est bien une primitive de  $f$ .

De plus,  $F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ .

Enfin, comme les primitives d'une fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante près, on a bien l'unicité de  $F_a$ .