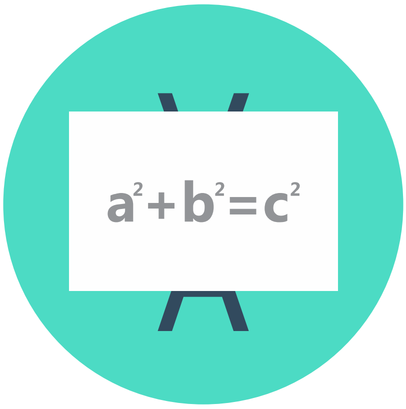

Chapitre I – Les suites

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Définitions

1. Suites numériques

Pour rappel, on appelle **suite** une fonction (et plus précisément application) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: cette fonction va prendre des éléments de l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ et va les amener dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$.

À RETENIR

Définition

Il y a plusieurs manières de définir une suite :
- **Par récurrence :** On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang $n+1$.
- **Par son terme général :** On donne le n-ième terme de la suite en fonction de n.

Attention ! Bien que ces deux modes de génération soient les principaux, il en existe d'autres : algorithme, motifs géométriques, ...

À LIRE

Exemple

On définit les suites (u_n) et (v_n) ainsi :
- $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ((u_n) est définie par son terme général).
- $(v_n) = \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$ ((v_n) est définie par récurrence).

On remarque que bien que définies différemment, (u_n) et (v_n) sont égales.

2. Sens de variation

À RETENIR

Définition

Soit (u_n) une suite.
- (u_n) est **croissante** si on a $u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \geq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **décroissante** si on a $u_{n+1} \leq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est dite **constante** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

3. Convergence et divergence

À RETENIR

Convergence

On dit qu'une suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ si :

Pour tout $\epsilon > 0$, l'intervalle ouvert $]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On note alors : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

À LIRE

Cette définition est un peu abstraite mais elle signifie simplement que u_n se rapproche autant que l'on veut de ℓ pourvu que n soit assez grand.

Attention ! Il est tout à fait possible que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ mais ne soit jamais égal à ℓ.

À RETENIR

Divergence vers $+\infty$

On dit qu'une suite (v_n) **diverge** vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si :

Pour tout $A > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $v_n > A$. On note alors : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Il existe une définition similaire pour la divergence vers $-\infty$.

À LIRE

Divergence vers $-\infty$

Dire que (v_n) **diverge** vers $-\infty$ signifie que :

Pour tout $A > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $v_n < -A$. On note alors : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

À LIRE

À noter que l'on n'étudie les limites des **suites** que quand n tend vers $+\infty$, et qu'il est possible qu'une suite n'admette pas de limite. On dit alors que cette suite **diverge**. Par contre, si une suite converge vers une limite, alors cette limite est **unique**.

II - Calcul de limites

1. Limites de suites de référence

Nous allons donner quelques suites “classiques” avec leur limite en $+\infty$:

À RETENIR

Limites de suites usuelles

Suite	**Limite quand n tend vers $+\infty$**
$(\sqrt{n})$	$+\infty$
(n)	$+\infty$
(n^k), pour $k \in \mathbb{N}^*$	$+\infty$
$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	0
$\left(\frac{1}{n}\right)$	0
$\left(\frac{1}{n^k}\right)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$	0

Nous allons désormais donner la limite d’une catégorie de suite très importante en mathématiques : celle des **suites géométriques**. Ainsi :

À RETENIR

Limite de suites géométriques

Soit (v_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = q^n$ (où q est un nombre réel). Alors, on peut donner la limite de la suite (v_n) en fonction de q :

Limite d’une suite géométrique				
Si on a...	$-1 < q < 1$	$1 < q$	$q \leq -1$	$q = 1$
Alors la suite (v_n) a pour limite...	0	$+\infty$	Pas de limite	1

À LIRE

Le réel q est la **raison** de la suite : si $q > 1$, (v_n) est strictement croissante, si $0 < q < 1$, (v_n) est strictement décroissante et si $q = 1$ ou 0, (v_n) est constante.

2. Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, (u_n) et (v_n) sont deux suites. Ces tableaux sont à connaître et sont requis pour pouvoir travailler sur les limites.

À RETENIR

Limite d'une somme

Limite d'une somme						
Si la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est...	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est...	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors la limite de (u_n+v_n) quand n tend vers $+\infty$ est...	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

À RETENIR

Limite d'un produit

Limite d'un produit									
Si la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est...	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est...	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors la limite de $(u_n \times v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

À RETENIR

Limite d'un quotient

Limite d'un quotient									
Si la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est...	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	ℓ	0
Et la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est...	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$	0^+_-	0
Alors la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$ est...	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	$\pm\infty$	**?**

À LIRE

Formes indéterminées

À noter qu'il n'existe que 4 formes indéterminées : "$+\infty - \infty$", "$0 \times \pm\infty$", "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".

3. Majoration, minoration et bornes

À RETENIR

Définition

Soient une suite (u_n) et deux réels m et M :
- On dit que m est un **minorant** de (u_n) si pour tout n : $u_n > m$.
- On dit que M est un **majorant** de (u_n) si pour tout n : $u_n < M$.
- On dit que (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

À RETENIR

Théorème

- Si (u_n) est croissante et est majorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas majorée, (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et est minorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas minorée, (u_n) diverge vers $-\infty$.

DÉMONSTRATION

Il faut savoir montrer que toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$. C'est ce que nous allons faire ici. Soit donc (u_n) une telle suite. Soit $A > 0$, on cherche un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$.

Or, comme (u_n) est non majorée, il existe N tel que $u_N > A$. De plus, comme (u_n) est croissante, alors $A < u_N \leq u_{N+1} \leq u_{N+2} \leq \ldots$

Donc on a bien trouvé notre rang N vérifiant la définition de la divergence vers $+\infty$.

À LIRE

Toute suite convergente est également bornée.

4. Comparaisons et encadrements

À RETENIR

Théorèmes de comparaison

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang N. On a :

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell'$ alors $\ell < \ell'$.

DÉMONSTRATION

Il peut être utile de savoir démontrer le premier point dans le cas $N = 0$ (les autres points se démontrent de manière semblable). Supposons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Soit $A > 0$, on cherche un rang p tel que pour tout $n \geq p$, $v_n > A$.

Comme u_n diverge vers $+\infty$, il existe un rang q tel que pour tout $n \geq q$, $u_n > A$. Donc on a : $A < u_q < v_q$, mais aussi $A < u_{q+1} < v_{q+1}$, etc.

Donc il suffit de poser $p = q$ et on a bien notre rang vérifiant la définition de la divergence vers $+\infty$.

À RETENIR

Théorème des gendarmes

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On suppose que $u_n < v_n < w_n$ à partir d'un certain rang et que (u_n) et (w_n) convergent vers le réel ℓ.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

III - Raisonnement par récurrence

Si on souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir d'un certain rang p, il est possible d'utiliser un type de raisonnement appelé **raisonnement par récurrence**.

À RETENIR 💡

Raisonnement par récurrence

Initialisation : On teste la propriété au rang p. Si elle est vérifiée, on passe à l'étape suivante.

Hérédité : On suppose la propriété vraie à un rang $n \geq p$. Puis on montre qu'elle reste vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On explique que l'on vient de démontrer la propriété au rang $n+1$ et que comme celle-ci est initialisée et héréditaire, alors elle est vraie à partir du rang p.

À LIRE

Exemple

Soit une suite (u_n) définie par $(u_n) = \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} \end{cases}$. On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4 \leq u_n \leq 5$.

On note $\mathscr{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathscr{P}_n : 4 \leq u_n \leq 5$.

On constate que $u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} = \frac{4(u_n+4)+1}{u_n+4} = 4 + \frac{1}{u_n+4}$.

Initialisation : On teste la propriété au rang 0 : $4 \leq u_0 \leq 5 \iff 4 \leq 4 \leq 5$. C'est vrai : la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ et vérifions qu'elle est vraie au rang $n+1$.

D'après $\mathscr{P}_n$: $4 \leq u_n \leq 5$. Donc on a :

$$\begin{aligned} 4 \leq u_n \leq 5 &\iff 4+4 \leq u_n + 4 \leq 5+4 \\ &\iff \frac{1}{9} \leq \frac{1}{u_n+4} \leq \frac{1}{8} \\ &\iff 4 + \frac{1}{9} \leq 4 + \frac{1}{u_n+4} \leq 4 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Or $4 + \frac{1}{9} \approx 4,111 > 4$ et $4 + \frac{1}{8} = 4,125 < 5$. On a donc bien :

$$4 \leq u_{n+1} \leq 5$$

Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Ainsi, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le raisonnement par récurrence est très utilisé en mathématiques et ne se limite pas qu'à l'étude des suites. On peut par exemple l'utiliser pour montrer l'**inégalité de Bernoulli**.

À RETENIR

Inégalité de Bernoulli

$(1+x)^n > 1 + nx$ pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

DÉMONSTRATION

Inégalité de Bernoulli

Soit $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$. On note $\mathscr{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \geq 2$ par $\mathscr{P}_n$: $(1+x)^n > 1+nx$. Montrons $\mathscr{P}_n$ par récurrence.

Initialisation : On teste la propriété au rang 2 : $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$ (car $x^2 > 0$). La propriété $\mathscr{P}_2$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 2$ et vérifions qu'elle est vraie au rang $n+1$.

En multipliant les deux membres de l'inégalité de l'hypothèse de récurrence par $1+x \geq 0$ (qui ne change donc pas le sens de l'inégalité), on obtient :

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \iff (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$$

Conclusion :

La propriété est initialisée au rang 2 et est héréditaire. Ainsi, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 2$.