



## Chapitre III – Dérivation

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

### TABLE DES MATIÈRES

|  |          |
|--|----------|
| <b>I – Qu'est-ce-qu'une dérivée?</b>             | <b>1</b> |
| 1. Nombre dérivé                                 | 1        |
| 2. La tangente                                   | 1        |
| 3. Fonction dérivée                              | 2        |
| <b>II – Tables de dérivation</b>                 | <b>3</b> |
| 1. Dérivées usuelles                             | 3        |
| 2. Opérations sur les dérivées                   | 3        |
| 3. Dérivées de composées                         | 4        |
| <b>III – Étude des variations d'une fonction</b> | <b>6</b> |
| 1. Lien dérivée - variations d'une fonction      | 6        |
| 2. Extrema                                       | 7        |

# I – Qu'est-ce-qu'une dérivée?

## 1. Nombre dérivé

### À RETENIR

#### Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et deux réels  $a \in I$  et  $h \neq 0$  tels que  $(a + h) \in I$ .

La fonction  $f$  est **dérivable** en  $a$  si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou en posant  $x = a + h$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$ .

### À LIRE

#### Limite d'une fonction

La notation  $\lim_{h \rightarrow 0}$  veut simplement dire que l'on rend  $h$  aussi proche de 0 que possible (sans pour autant que  $h$  soit égal à 0). On dit que l'on "fait tendre  $h$  vers 0" et on appelle cela **une limite**.

**Attention!** Il arrive que cette limite n'existe pas ou ne soit pas finie. Dans ce cas-là,  $f'(a)$  n'existe pas et on dit que  $f$  n'est pas dérivable en  $a$ .

## 2. La tangente

### À RETENIR

#### Équation de la tangente

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et un réel  $a \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors la courbe représentative de  $f$  admet une tangente  $\mathcal{T}$  au point de coordonnées  $(a; f(a))$ .

De plus,  $f'(a)$  est le coefficient directeur de  $\mathcal{T}$ , et une équation de  $\mathcal{T}$  est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .



## DÉMONSTRATION

## Équation de la tangente

La tangente  $\mathcal{T}$  en un point d'une courbe est une droite. Une équation de droite est de la forme  $y = mx + p$  avec  $m$  le coefficient directeur et  $p$  l'ordonnée à l'origine.

On a déjà le coefficient directeur de  $\mathcal{T}$  par la propriété précédente :  $m = f'(a)$ .

De plus, on sait que  $\mathcal{T}$  passe par le point  $(a, f(a))$  (car c'est la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$ ).

Donc l'équation de droite vérifie  $f(a) = f'(a)a + p$ . Ce qui donne  $p = f(a) - af'(a)$ . Au final notre équation est la suivante :  $y = xf'(a) + f(a) - af'(a) \iff y = f(a) + (x - a)f'(a)$ .

## 3. Fonction dérivée

## À RETENIR

## Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On appelle fonction dérivée (ou plus simplement **dérivée**) de  $f$  la fonction  $g$  qui à tout réel  $x$  de  $I$ , associe le nombre dérivé  $f'(x)$  (i.e.  $g(x) = f'(x)$ ).

Très souvent, la fonction  $g$  sera notée  $f'$ .

## II – Tables de dérivation

### 1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

À RETENIR

Soit  $\lambda$  une constante réelle.

| Fonction                        | Dérivée               | Domaine de dérivabilité |
|---------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| $\lambda$                       | 0                     | $\mathbb{R}$            |
| $x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ | $nx^{n-1}$            | $\mathbb{R}$            |
| $\frac{1}{x}$                   | $-\frac{1}{x^2}$      | $\mathbb{R}^*$          |
| $\sqrt{x}$                      | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_*^+$        |
| $e^x$                           | $e^x$                 | $\mathbb{R}$            |
| $\sin(x)$                       | $\cos(x)$             | $\mathbb{R}$            |
| $\cos(x)$                       | $-\sin(x)$            | $\mathbb{R}$            |

### 2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur certaines fonctions :

## À RETENIR

Soient deux fonctions  $u$  et  $v$  et soit  $\lambda$  une constante réelle.

| Fonction           | Dérivée                                 | Domaine de dérivabilité                                    |
|--------------------|---|--|
| $\lambda \times u$ | $\lambda \times u'$                     | En tout point où $u$ est dérivable.                        |
| $u + v$            | $u' + v'$                               | En tout point où $u$ et $v$ sont dérivables.               |
| $u \times v$       | $u' \times v + u \times v'$             | En tout point où $u$ et $v$ sont dérivables.               |
| $\frac{1}{v}$      | $-\frac{v'}{v^2}$                       | En tout point où $v$ est dérivable et non nulle.           |
| $\frac{u}{v}$      | $\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ | En tout point où $u$ et $v$ sont dérivables et non nulles. |

### 3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles (i.e. “ $f$  de  $g$  de  $x$ ”) :

## À RETENIR

Soit  $u$  une fonction.

| Fonction                        | Dérivée                | Domaine de dérivabilité                                     |
|---------------------------------|------------------------|---|
| $u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ | $nu'u^{n-1}$           | En tout point où $u$ est dérivable.                         |
| $\frac{1}{u}$                   | $-\frac{u'}{u^2}$      | En tout point où $u$ est dérivable et non nulle.            |
| $\sqrt{u}$                      | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | En tout point où $u$ est dérivable et strictement positive. |
| $e^u$                           | $u'e^u$                | En tout point où $u$ est dérivable.                         |
| $\sin(u)$                       | $u' \cos(u)$           | En tout point où $u$ est dérivable.                         |
| $\cos(u)$                       | $-u' \sin(u)$          | En tout point où $u$ est dérivable.                         |

Il est cependant possible de donner une formule plus générale.

## À RETENIR

## Dérivée d'une composée

Soient  $f$  dérivable sur  $I$  et  $g$  dérivable sur l'ensemble des valeurs prises par  $f$  sur  $I$ . On a alors  $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$ .

## À LIRE

## Fonction composée

On rappelle que la fonction  $g \circ f$  est la fonction définie pour tout  $x$  par  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

## III – Étude des variations d'une fonction

### 1. Lien dérivée - variations d'une fonction

Avec le signe de la dérivée d'une fonction, il est possible d'obtenir le sens de variation de cette fonction.

#### À RETENIR

#### Variations d'une fonction

Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f' > 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f' < 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si  $f' = 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .



## 2. Extrema

### À RETENIR

#### Étude des extrema

Soient  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ , et  $a \in I$  :

- Si  $f$  admet un extremum local en  $a$ , alors on a  $f'(a) = 0$ .
- Si  $f'(a) = 0$  et que le signe de  $f'$  est différent avant et après  $a$ , alors  $f'(a)$  est un extremum local de  $f$ .
- Si  $f'(a) = 0$  et qu'on est négatif avant  $a$  et positif après, cet extremum local est un minimum local.
- Si  $f'(a) = 0$  et qu'on est positif avant  $a$  et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

### À LIRE

Avec ceci, il est possible de retrouver la plupart des formules que nous avons vues sur les fonctions du second degré (sens de variation, sommet de la parabole, ...).