



# Chapitre I – Les suites

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I – Définitions</b>	<b>1</b>
1. Suites numériques	1
2. Sens de variation	1
3. Convergence et divergence	2
<b>II – Calcul de limites</b>	<b>3</b>
1. Limites de suites de référence	3
2. Opérations sur les limites	4
3. Majoration, minoration et bornes	6
4. Comparaisons et encadrements	7
<b>III – Raisonnement par récurrence</b>	<b>9</b>

# I – Définitions

## 1. Suites numériques

Pour rappel, on appelle **suite** une fonction (et plus précisément application) de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  : cette fonction va prendre des éléments de l'ensemble de départ  $\mathbb{N}$  et va les amener dans l'ensemble d'arrivée  $\mathbb{R}$ .

### À RETENIR

#### Définition

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- **Par récurrence** : On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang  $n + 1$ .
- **Par son terme général** : On donne le  $n$ -ième terme de la suite en fonction de  $n$ .

**Attention!** Bien que ces deux modes de génération soient les principaux, il en existe d'autres : algorithmes, motifs géométriques, ...

### À LIRE

#### Exemple

On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ainsi :

- $u_n = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ( $(u_n)$  est définie par son terme général).
- $(v_n) = \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$  ( $(v_n)$  est définie par récurrence).

On remarque que bien que définies différemment,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont égales.

## 2. Sens de variation

### À RETENIR

#### Définition

Soit  $(u_n)$  une suite.

- $(u_n)$  est **croissante** si on a  $u_{n+1} \geq u_n$  (ou  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(u_n)$  est **décroissante** si on a  $u_{n+1} \leq u_n$  (ou  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(u_n)$  est dite **constante** s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n = c$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

### 3. Convergence et divergence

À RETENIR

#### Convergence

On dit qu'une suite  $(u_n)$  **converge** vers un réel  $\ell$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si :

Pour tout  $\epsilon > 0$ , l'intervalle ouvert  $]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$ , contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang. On note alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

À LIRE

Cette définition est un peu abstraite mais elle signifie simplement que  $u_n$  se rapproche autant que l'on veut de  $\ell$  pourvu que  $n$  soit assez grand.

**Attention!** Il est tout à fait possible que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  mais ne soit jamais égal à  $\ell$ .

À RETENIR

#### Divergence vers $+\infty$

On dit qu'une suite  $(v_n)$  **diverge** vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si :

Pour tout  $A > 0$ , il existe un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $v_n > A$ . On note alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Il existe une définition similaire pour la divergence vers  $-\infty$ .

À LIRE

#### Divergence vers $-\infty$

Dire que  $(v_n)$  **diverge** vers  $-\infty$  signifie que :

Pour tout  $A > 0$ , il existe un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $v_n < -A$ . On note alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

À LIRE

À noter que l'on n'étudie les limites des **suites** que quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et qu'il est possible qu'une suite n'admette pas de limite. On dit alors que cette suite **diverge**. Par contre, si une suite converge vers une limite, alors cette limite est **unique**.

## II – Calcul de limites

### 1. Limites de suites de référence

Nous allons donner quelques suites “classiques” avec leur limite en  $+\infty$  :

À RETENIR

#### Limites de suites usuelles

Suite	Limite quand $n$ tend vers $+\infty$
$(\sqrt{n})$	$+\infty$
$(n)$	$+\infty$
$(n^k)$ , pour $k \in \mathbb{N}^*$	$+\infty$
$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	0
$\left(\frac{1}{n}\right)$	0
$\left(\frac{1}{n^k}\right)$ , pour $k \in \mathbb{N}^*$	0

Nous allons désormais donner la limite d’une catégorie de suite très importante en mathématiques : celle des **suites géométriques**. Ainsi :

À RETENIR

#### Limite de suites géométriques

Soit  $(v_n)$  une suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = q^n$  (où  $q$  est un nombre réel). Alors, on peut donner la limite de la suite  $(v_n)$  en fonction de  $q$  :

Limite d’une suite géométrique				
Si on a...	$-1 < q < 1$	$1 < q$	$q \leq -1$	$q = 1$
Alors la suite $(v_n)$ a pour limite...	0	$+\infty$	Pas de limite	1

## À LIRE ∞

Le réel  $q$  est la **raison** de la suite : si  $q > 1$ ,  $(v_n)$  est strictement croissante, si  $0 < q < 1$ ,  $(v_n)$  est strictement décroissante et si  $q = 1$  ou  $0$ ,  $(v_n)$  est constante.

## 2. Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites. Ces tableaux sont à connaître et sont requis pour pouvoir travailler sur les limites.

## À RETENIR

### Limite d'une somme

Limite d'une somme						
Si la limite de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et la limite de $(v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors la limite de $(u_n + v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

## À RETENIR

## Limite d'un produit

Limite d'un produit									
Si la limite de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et la limite de $(v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors la limite de $(u_n \times v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

## À RETENIR

## Limite d'un quotient

Limite d'un quotient									
Si la limite de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell$	0
Et la limite de $(v_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$	$0^+$ $0^-$	0
Alors la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est...	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$\pm\infty$	?

## À LIRE

## Formes indéterminées

À noter qu'il n'existe que 4 formes indéterminées : " $+\infty - \infty$ ", " $0 \times \pm\infty$ ", " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ ".

## 3. Majoration, minoration et bornes

## À RETENIR

## Définition

Soient une suite  $(u_n)$  et deux réels  $m$  et  $M$  :

- On dit que  $m$  est un **minorant** de  $(u_n)$  si pour tout  $n$  :  $u_n > m$ .
- On dit que  $M$  est un **majorant** de  $(u_n)$  si pour tout  $n$  :  $u_n < M$ .
- On dit que  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

## À RETENIR

## Théorème

- Si  $(u_n)$  est croissante et est majorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas majorée,  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si  $(u_n)$  est décroissante et est minorée, alors elle est convergente. Si elle n'est pas minorée,  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

## DÉMONSTRATION

Il faut savoir montrer que toute suite croissante et non majorée diverge vers  $+\infty$ . C'est ce que nous allons faire ici. Soit donc  $(u_n)$  une telle suite. Soit  $A > 0$ , on cherche un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n > A$ .

Or, comme  $(u_n)$  est non majorée, il existe  $N$  tel que  $u_N > A$ . De plus, comme  $(u_n)$  est croissante, alors  $A < u_N \leq u_{N+1} \leq u_{N+2} \leq \dots$

Donc on a bien trouvé notre rang  $N$  vérifiant la définition de la divergence vers  $+\infty$ .

## À LIRE

Toute suite convergente est également bornée.

## 4. Comparaisons et encadrements

## À RETENIR

## Théorèmes de comparaison

Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $u_n < v_n$  à partir d'un certain rang  $N$ . On a :

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$  alors  $\ell < \ell'$ .

## DÉMONSTRATION

Il peut être utile de savoir démontrer le premier point dans le cas  $N = 0$  (les autres points se démontrent de manière semblable). Supposons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . Soit  $A > 0$ , on cherche un rang  $p$  tel que pour tout  $n \geq p$ ,  $v_n > A$ .

Comme  $u_n$  diverge vers  $+\infty$ , il existe un rang  $q$  tel que pour tout  $n \geq q$ ,  $u_n > A$ . Donc on a :  $A < u_q < v_q$ , mais aussi  $A < u_{q+1} < v_{q+1}$ , etc.

Donc il suffit de poser  $p = q$  et on a bien notre rang vérifiant la définition de la divergence vers  $+\infty$ .



## À RETENIR

## Théorème des gendarmes

Soient trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$ . On suppose que  $u_n < v_n < w_n$  à partir d'un certain rang et que  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers le réel  $\ell$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

## III – Raisonnement par récurrence

Si on souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  à partir d'un certain rang  $p$ , il est possible d'utiliser un type de raisonnement appelé **raisonnement par récurrence**.

À RETENIR

### Raisonnement par récurrence

**Initialisation :** On teste la propriété au rang  $p$ . Si elle est vérifiée, on passe à l'étape suivante.

**Hérédité :** On suppose la propriété vraie à un rang  $n \geq p$ . Puis on montre qu'elle reste vraie au rang  $n + 1$ .

**Conclusion :** On explique que l'on vient de démontrer la propriété au rang  $n + 1$  et que comme celle-ci est initialisée et héréditaire, alors elle est vraie à partir du rang  $p$ .

À LIRE

### Exemple

Soit une suite  $(u_n)$  définie par  $(u_n) = \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} \end{cases}$ . On souhaite montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $4 \leq u_n \leq 5$ .

On note  $\mathcal{P}_n$  la propriété définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $\mathcal{P}_n : 4 \leq u_n \leq 5$ .

On constate que  $u_{n+1} = \frac{4u_n+17}{u_n+4} = \frac{4(u_n+4)+1}{u_n+4} = 4 + \frac{1}{u_n+4}$ .

**Initialisation :** On teste la propriété au rang 0 :

$\mathcal{P}_0 : 4 \leq u_0 \leq 5 \iff 4 \leq 4 \leq 5$ . C'est vrai : la propriété est vraie au rang 0.

**Hérédité :** Supposons la propriété vraie à un rang  $n \in \mathbb{N}$  et vérifions qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ .

D'après  $\mathcal{P}_n : 4 \leq u_n \leq 5$ . Donc on a :

$$\iff 4 \leq u_n \leq 5$$

$$\iff 4 + 4 \leq u_n + 4 \leq 5 + 4$$

$$\iff \frac{1}{9} \leq \frac{1}{u_n+4} \leq \frac{1}{8} \text{ (la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}^+ \text{ donc on change de sens l'inégalité)}$$

$$\iff 4 + \frac{1}{9} \leq 4 + \frac{1}{u_n+4} \leq 4 + \frac{1}{8}$$

Or  $4 + \frac{1}{9} \approx 4.111 > 4$  et  $4 + \frac{1}{8} = 4.125 < 5$ . On a donc bien :

$$4 \leq u_{n+1} \leq 5$$

**Conclusion :** La propriété est initialisée au rang 0 et est héréditaire. Ainsi,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Le raisonnement par récurrence est très utilisé en mathématiques et ne se limite pas qu'à l'étude des suites. On peut par exemple l'utiliser pour montrer l'**inégalité de Bernoulli**.

**À RETENIR****Inégalité de Bernoulli**

$(1+x)^n > 1+nx$  pour tout  $n \geq 2$  et tout  $x \in [-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .

**DÉMONSTRATION****Inégalité de Bernoulli**

Soit  $x \in [-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ . On note  $\mathcal{P}_n$  la propriété définie pour tout  $n \geq 2$  par  $\mathcal{P}_n$  :  $(1+x)^n > 1+nx$ . Montrons  $\mathcal{P}_n$  par récurrence.

**Initialisation :** On teste la propriété au rang 2 :

$$\mathcal{P}_2 : (1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x \text{ (car } x^2 > 0).$$

La propriété est vraie au rang 2.

**Hérédité :** Supposons la propriété vraie à un rang  $n \geq 2$  et vérifions qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

En multipliant les deux membres de l'inégalité de l'hypothèse de récurrence par  $1+x \geq 0$  (qui ne change donc pas le sens de l'inégalité), on obtient :

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x) &\geq (1+nx)(1+x) \\ \iff (1+x)^{n+1} &\geq 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x \end{aligned}$$

**Conclusion :**

La propriété est initialisée au rang 2 et est héréditaire. Ainsi,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 2$ .