Chapitre XIV – Arithmétique (Maths expertes)

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Divisibilité et congruence

1. Divisibilité

Dans toute la suite de cette section, on notera par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs (i.e. $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$) et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels (i.e. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$).

À RETENIR : DÉFINITION

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que b **divise** a (ou que a est **un multiple** de b) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$. On note ceci par $b \mid a$.

À LIRE

Si on a b divise a, alors $-b$ divise a. Par exemple, comme 6 divise 12, alors -6 divise également 12.

À RETENIR : PROPRIÉTÉS

— Tout entier relatif b divise 0 (car $0 = 0 \times b$).

— 1 divise tout entier relatif a (car $a = a \times 1$).

— Si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors $c \mid (au + bv)$ pour tout u, $v \in \mathbb{Z}$.

2. Division euclidienne

La **division euclidienne** est une notion mathématique que l'on aborde très tôt au cours de notre scolarité (dès la classe de CM1). Nous allons tenter de formaliser ceci :

À RETENIR : THÉORÈME DE LA DIVISION EUCLIDIENNE

Soient a, $b \in \mathbb{Z}$. On suppose $b \neq 0$. On appelle **division euclidienne** de a par b, l'opération qui à (a, b), associe le couple d'entiers relatifs (q, r) tel que $a = bq + r$ où $0 \leq r < |b|$. Un tel couple **existe** forcément et est **unique**.

À RETENIR : VOCABULAIRE

En reprenant les notations du théorème, a s'appelle le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne.

À LIRE : EXEMPLE

On souhaite effectuer la division euclidienne de 314 par 7. Posons-la :

$$\begin{array}{r|l} 3\ 1\ 4 & 7 \\ \cline{2-2} 3\ 4 & 4\ 4 \\ 6 & \end{array}$$

— On cherche combien de fois 7 est contenu dans 31 (cela ne sert à rien de commencer par 3 car $3 < 7$). On a $4 \times 7 = 28$ et $5 \times 7 = 35$ donc on écrit 4 sous le diviseur et le reste $31 - 28 = 3$. Puis, on abaisse le chiffre des unités qui est 4.

— On recommence : combien de fois 7 est-il contenu dans 34 ? Comme $4 \times 7 = 28$ et $5 \times 7 = 35$, 7 est contenu 4 fois dans 34 et il reste $34 - 28 = 6$.

— Comme $6 < 7$, la division euclidienne est terminée : on a $314 = 7 \times 44 + 6$.

Donnons enfin une propriété qui nous sera utile dans la section suivante.

À RETENIR : PROPRIÉTÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq 0$. Deux entiers relatifs a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n si et seulement si $a - b$ est un multiple de n.

3. Congruences dans $\mathbb{Z}$

À RETENIR : DÉFINITION

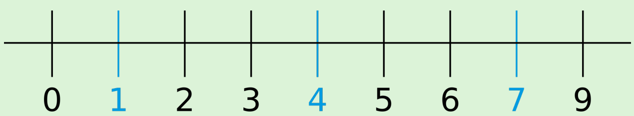
On dit que deux entiers relatifs a et b sont **congrus modulo** n (où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2) si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n. On note alors $a \equiv b \mod n$.

À LIRE

On remarque que a est un multiple de n si et seulement si $a \equiv 0 \mod n$.

À LIRE : EXEMPLE

Par exemple, $1 \equiv 4 \equiv 7 \mod 3$.



On signale que la congruence est une **relation d'équivalence**.

À RETENIR : PROPRIÉTÉS

Soit $n \geq 2$. Pour tout a, b, $c \in \mathbb{Z}$:

— $a \equiv a \mod n$ (**réflexivité**)

— Si $a \equiv b \mod n$, alors $b \equiv a \mod n$ (**symétrie**)

— Si $a \equiv b \mod n$, et si $b \equiv c \mod n$, alors $a \equiv c \mod n$ (**transitivité**)

De plus, la congruence est compatible avec les opérations usuelles sur les entiers relatifs.

À RETENIR : PROPRIÉTÉS

Soit $n \geq 2$. Soient a, b, c et $d \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b \mod n$ et $c \equiv d \mod n$. Alors on a la compatibilité avec :

— L'**addition** : $a + c \equiv b + d \mod n$.

— La **multiplication** : $ac \equiv bd \mod n$.

— Les **puissances** : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv b^k \mod n$.

À LIRE : EXEMPLE

Comme $7 \equiv 3 \mod 4$, et $5 \equiv 1 \mod 4$, on a $35 = 5 \times 7 \equiv 1 \times 5 \mod 4$.

II - PGCD et théorème de Bézout

1. Plus Grand Commun Diviseur

À RETENIR : DÉFINITION

Soient a, $b \in \mathbb{Z}$ non tous nuls. Le **Plus Grand Commun Diviseur** de a et b (noté $\text{PGCD}(a; b)$) est le plus grand entier positif qui les divise simultanément.

Avec cette définition, on peut dégager quelques propriétés.

À RETENIR : PROPRIÉTÉS

Soient a, $b \in \mathbb{Z}$ non tous nuls.

— $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; a)$

— $\text{PGCD}(a; 1) = 1$

— $\text{PGCD}(a; 0) = a$

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{PGCD}(ka; kb) = k\,\text{PGCD}(a; b)$

— Si $b \mid a$, alors $\text{PGCD}(a; b) = |b|$

Il existe une manière de déterminer le PGCD de deux entiers naturels non nuls a et b avec $b < a$ appelée **Algorithme d'Euclide**.

À RETENIR : ALGORITHME D'EUCLIDE

Soient a, $b \in \mathbb{Z}$ non tous nuls. Pour obtenir $\text{PGCD}(a; b)$, on procède comme suit :

1. On fait la division euclidienne de a par b et on appelle r le reste.
2. Si $r = 0$, alors $\text{PGCD}(a; b) = b$.
3. Sinon on recommence l'étape 1 en remplaçant a par b et b par r.

Terminons cette section par une définition.

À RETENIR : NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1.

À LIRE

Petite remarque : si on note d le PGCD de deux nombres a et b, alors on a que $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont deux nombres premiers entre eux.

2. Théorème de Bézout

Un résultat fondamental de l'arithmétique est le **théorème de Bachet-Bézout** (que l'on rencontre parfois sous le nom d'**identité de Bézout**).

À RETENIR : THÉORÈME DE BACHET-BÉZOUT

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On note d leur PGCD. Alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ua + vb = d$.

À RETENIR : THÉORÈME DE BÉZOUT

Une conséquence de ce théorème est que a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ua + vb = 1$.

À LIRE : EXEMPLE

Calculons $\text{PGCD}(250; 150)$ et déduisons-en deux entiers relatifs u et v tels que $50 = 250u + 150v$. Commençons par calculer le PGCD de 250 et 150 par l'algorithme d'Euclide :

La division euclidienne de 250 par 150 donne $250 = 150 \times 1 + 100$.
La division euclidienne de 150 par 100 donne $150 = 100 \times 1 + 50$.
La division euclidienne de 100 par 50 donne $100 = 5 \times 2 + 0$.

On a $\text{PGCD}(250; 150) = 50$. Déterminons u et v :

$250 = 150 \times 1 + 100 \iff 150 = 1 \times 250 - 1 \times 100$
$150 = 1 \times 100 + 50 \iff 50 = 150 - 1 \times 100$

Donc $50 = 1 \times 250 - 1 \times 100 - 1 \times 100 = 1 \times 250 - 2 \times 100$.

On a par conséquent $u = 1$ et $v = -2$. L'algorithme que l'on vient d'utiliser pour trouver u et v s'appelle l'**algorithme d'Euclide étendu**.

À RETENIR : RÉSOLUTION D'UNE CONGRUENCE SIMPLE

Supposons que l'on souhaite résoudre une congruence du type $ax \equiv b \mod n$ d'inconnue x. On pose $d = \text{PGCD}(a; n)$. Alors :

1. Si d ne divise pas b, on cherche deux entiers u et v tels que $au + nv = 1$ (avec l'algorithme d'Euclide étendu par exemple). Les solutions de la congruence sont alors les entiers x vérifiant $x \equiv ub \mod n$.
2. Si $d \mid b$, cela revient à résoudre la congruence $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \mod \frac{n}{d}$, et on se ramène au cas 1 (avec la nouvelle congruence à résoudre).

À LIRE : EXEMPLE

On souhaite résoudre la congruence $6x \equiv 6 \mod 9$. Alors, comme $d = \text{PGCD}(6; 9) = 3$, on a $d \mid 6$. On se ramène donc à résoudre $2x \equiv 2 \mod 3$ (où 2 et 3 sont premiers entre eux).

On écrit l'identité de Bézout appliquée à 2 et 3 : $2 \times 2 + 3 \times -1 = 1$. Donc les solutions à la congruence du début sont les entiers x vérifiant $x \equiv 4 \mod 3 \equiv 1 \mod 3$ (i.e. les x de la forme $x = 3k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$).

3. Lemme de Gauss

À RETENIR : LEMME DE GAUSS

Soient a, b et c trois entiers non nuls. Si $c \mid ab$ et c est premier avec a, alors $c \mid b$.

À RETENIR : COROLLAIRE

Soient a, b et c trois entiers non nuls. Si $b \mid a$, $c \mid a$ et que b et c sont premiers entre eux, alors $bc \mid a$.

4. Équations diophantiennes

À RETENIR : DÉFINITION

Une **équation diophantienne linéaire en deux variables** x et y est une équation de la forme $(E) : ax + by = c$ où les coefficients a, b et c sont des entiers relatifs et où les solutions sont également des entiers relatifs.

À RETENIR : SOLUTIONS DE (E)

En reprenant les notations précédentes, on pose $d = \text{PGCD}(a; b)$. Alors :

— Si $d \mid c$, on cherche une solution particulière à (E) que l'on note $(x_0; y_0)$. Alors les solutions de (E) sont les couples $(x_k; y_k)$ où $x_k = x_0 + k\frac{b}{d}$ et $y_k = y_0 - k\frac{a}{d}$.

— Sinon, (E) n'a pas de solution.

À LIRE : EXEMPLE

On cherche à résoudre l'équation diophantienne $(E) : 25x + 10y = 15$. Commençons par chercher une solution particulière $(x_0; y_0)$.

Comme $d = \text{PGCD}(25; 10) = 5$, on a $d \mid 15$. En divisant les deux côtés de l'égalité par 5, on a $(E) \iff 5x + 2y = 3$.

Cherchons une solution particulière à (E). On écrit l'identité de Bézout appliquée à 5 et 2 : $5 \times 1 + 2 \times -2 = 1$. Ainsi, en multipliant les deux côtés de l'égalité par 3, on obtient : $5 \times 3 + 2 \times -6 = 3$.

On a trouvé une solution particulière à (E) qui est le couple $(x_0; y_0)$ où $x_0 = 3$ et $y_0 = -6$. On pourrait appliquer la formule pour donner la forme générale des solutions de (E), mais essayons de ne pas l'utiliser.

Soit $(x; y)$ une autre solution de (E). On a $3 = 5x + 2y = 5x_0 + 2y_0$. D'où $5(x - x_0) = 2(y_0 - y)$ (en passant les x et x_0 du même côté de l'égalité et en faisant de même pour y et y_0, puis en factorisant).

Ainsi, on a que $5 \mid 2(y_0 - y)$. Or, 5 et 2 sont premiers entre eux, donc par le lemme de Gauss, $5 \mid y_0 - y$. Il existe donc q_1 tel que $5q_1 = y_0 - y$, d'où $y = y_0 - 5q_1$.

De même, $2 \mid 5(x - x_0)$ avec 2 et 5 premiers entre eux, donc par le lemme de Gauss, $2 \mid x - x_0$. Il existe donc q_2 tel que $2q_2 = x - x_0$, d'où $x = x_0 + 2q_2$.

En réinjectant tout ça dans (E), on obtient $5(x_0 + 2q_2) + 2(y_0 + -5q_1) = 3 \iff \underbrace{5x_0 + 2y_0}_{=3} + 10q_2 - 10q_1 = 3 \iff q_1 = q_2$.

Les solutions de (E) sont donc les couples $(x_k; y_k)$ où $x_k = x_0 + 2k$ et $y_k = y_0 - 5k$ (et on a bien les mêmes résultats qu'avec la formule).

III - Nombres premiers

1. Définition

Commençons cette section par définir ce qu'est un **nombre premier**. Il s'agit là d'une notion dont entend parler très tôt au cours de notre scolarité, sans pour autant vraiment rentrer dans le sujet. Détaillons donc un peu tout ceci.

À RETENIR : NOMBRE PREMIER

Un nombre entier $p \geq 2$ est dit **premier** si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même.

À LIRE : EXEMPLE

2, 3, 5, 7, 11 et 13 sont des nombres premiers.

2. Propriétés

Voici quelques propriétés basiques que possèdent les nombres premiers.

À RETENIR : PROPRIÉTÉS

Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, alors on a les propriétés suivantes :

— Si n n'admet aucun diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors n est premier.

— Si n n'est pas premier alors n admet au moins un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

— Si n est premier et n ne divise pas un entier m, alors n et m sont premiers entre eux.

À RETENIR : LEMME D'EUCLIDE

Soit p un nombre premier et a et b deux entiers. Si $p \mid ab$ alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

On donne enfin un résultat fondamental (mais qui reste très simple) sur l'ensemble des nombres premiers.

À RETENIR : INFINITÉ DE NOMBRES PREMIERS

Il existe une infinité de nombres premiers.

DÉMONSTRATION : INFINITÉ DE NOMBRES PREMIERS

Supposons par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers soit un ensemble fini. On note par P cet ensemble et par r sont cardinal. On a donc $P = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ où p_1, p_2, ... , p_r sont premiers.

Soit $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r + 1$. Alors, $N \notin P$ donc N n'est pas premier (et est strictement supérieur à 1). Il existe donc un nombre premier qui divise N.

En d'autres mots, il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $p_i \mid N$. De plus, $p_i \mid p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r$.

Donc $p_i \mid N - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r \iff p_i \mid 1$, donc $p_i = 1$ ou $p_i = 0$: c'est absurde car $p_i \geq 2$.

Pour la petite histoire, c'est Euclide qui a fourni une première version de cette preuve en 300 av. J.-C !

À RETENIR : PETIT THÉORÈME DE FERMAT

Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p. Alors $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

À LIRE

Cela revient au même de dire que si a est un entier quelconque et que p est un nombre premier, alors $a^p \equiv a \mod p$.

3. Décomposition de nombres

Passons maintenant à un résultat fondamental de l'arithmétique : le principe de **décomposition en produit de facteurs premiers** (il s'agit même là d'un théorème qui est sobrement intitulé **théorème fondamental de l'arithmétique**).

À RETENIR : THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE

Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, alors n peut s'écrire de la façon suivante :

$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}$

où p_1, p_2, ... , p_n des nombres premiers tels que $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ et α_1, α_2, ... , α_n des entiers naturels non nuls.

À LIRE : EXEMPLE

Décomposons 200 en produit de facteurs premiers.

— $200 = 2 \times 100$ (2 est le plus petit nombre premier qui divise 200).

— $100 = 2 \times 50$ (2 est le plus petit nombre premier qui divise 100).

— $50 = 2 \times 25$ (2 est le plus petit nombre premier qui divise 50).

— $25 = 5 \times 5$ (5 est le plus petit nombre premier qui divise 25).

— $5 = 5 \times 1$ (5 est un nombre premier, c'est terminé).

On a donc $200 = 2 \times 100 = 2 \times (2 \times 50) = \cdots = 2^3 \times 5^2$.