



# Chapitre IV – Les fonctions trigonométriques

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Sinus et cosinus</b>	<b>1</b>
1. Définition	1
2. Périodicité	1
3. Formules de trigonométrie	2
4. Résolution d'équations	3
5. Fonctions réciproques	4
<b>II - Étude des fonctions trigonométriques</b>	<b>5</b>
1. Dérivée	5
2. Signe et variations	5
3. Limite	6
4. Valeurs remarquables	7
5. Représentation graphique	7

# I - Sinus et cosinus

## 1. Définition

Dans tout le cours, le plan sera muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ . Il sera également muni d'un cercle  $\mathcal{C}$  appelé **cercle trigonométrique** de centre  $O$  et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est le **sens direct**) :



### À RETENIR

#### Cosinus et sinus

Soit  $M$  un point quelconque situé sur le cercle  $\mathcal{C}$  faisant un angle  $x$  avec l'axe des abscisses. Les coordonnées de  $M$  sont :

- L'abscisse de  $M$  appelée **cosinus** est notée  $\cos(x)$ .
- L'ordonnée de  $M$  appelée **sinus** est notée  $\sin(x)$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ .

## 2. Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

## À RETENIR

## Périodicité

Ainsi pour tout  $x$  réel et  $k$  entier relatif :

$$\text{— } \cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\text{— } \sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

## À LIRE

Concrètement, cela signifie que  $\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + 2k\pi)$  et idem pour  $\sin(x)$ .

### 3. Formules de trigonométrie

## À RETENIR

## Formules

On a les relations suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\text{— } \cos(-x) = \cos(x) \text{ (la fonction cosinus est **paire**)}$$

$$\text{— } \sin(-x) = -\sin(x) \text{ (la fonction sinus est **impaire**)}$$

$$\text{— } \cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\text{— } \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\text{— } \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\text{— } \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\text{— } \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\text{— } \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\text{— } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\text{— } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\text{— } \cos(x + y) = \cos(x) \times \cos(y) - \sin(x) \times \sin(y)$$

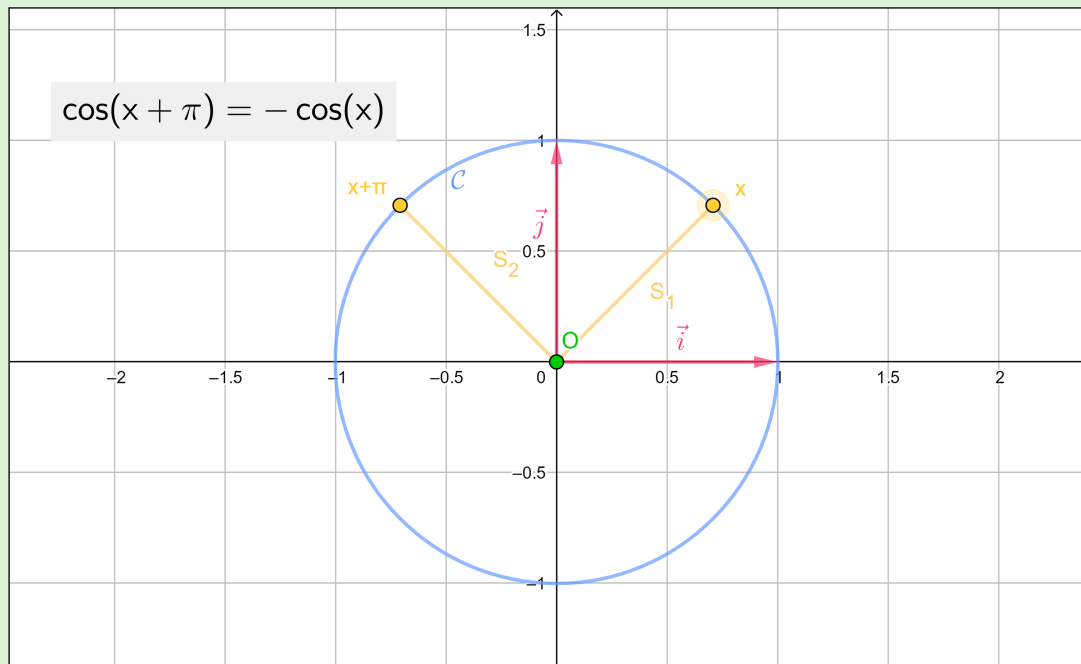
$$\text{— } \sin(x + y) = \sin(x) \times \cos(y) + \cos(x) \times \sin(y)$$

$$\text{— } \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

À LIRE

### Retrouver les formules

Il n'est aucunement demandé de mémoriser ces formules (sauf les trois dernières). Cependant, il doit être possible de les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique. Ainsi, prenons l'exemple de  $\cos(x + \pi)$  :



On remarque que l'ordonnée reste la même (le sinus est le même). Cependant, on a bien une abscisse opposée. On a retrouvé la formule  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ .

## 4. Résolution d'équations

Il est possible de résoudre des équations incluant des sinus et des cosinus.

À RETENIR

### Résolution d'équations

Soient  $x$  et  $y$  deux réels. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{— } \cos(x) = \cos(y) &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = -x + 2k\pi \end{cases} \\ \text{— } \sin(x) = \sin(y) &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Comme précédemment, ces formules peuvent se retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

## 5. Fonctions réciproques

### À RETENIR

#### Définition

Soient  $x$  et  $y \in \mathbb{R}$ , on admettra qu'il existe une **fonction réciproque** à cos (notée arccos) et une **fonction réciproque** à sin (notée arcsin). On a les relations suivantes pour tout  $x \in [0; 2\pi]$  et  $y \in [-1; 1]$  :

- $\cos(x) = y \iff x = \arccos(y)$
- $\sin(x) = y \iff x = \arcsin(y)$

Cela signifie qu'à tout  $x \in [0; 2\pi]$ , la fonction arccos y associe son **antécédent** y par rapport à cos (pareil pour arcsin avec sin).

### À LIRE

#### Exemple

$\cos(0) = 1$ ,  $\arccos(1) = 0$  et  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ ,  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ .

Ces fonctions (accessibles depuis la calculatrice) peuvent également être utilisées pour résoudre certains types d'équations.

## II - Étude des fonctions trigonométriques

### 1. Dérivée

À RETENIR

#### Dérivée d'une composée

Soit une fonction  $u$  dérivable sur un intervalle  $I$ , on a pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle :

- $\cos'(u(x)) = -u'(x) \sin(u(x))$
- $\sin'(u(x)) = u'(x) \cos(u(x))$

À RETENIR

#### Dérivée

Ainsi, si pour tout  $x \in I$  on a  $u(x) = x$ , on trouve :

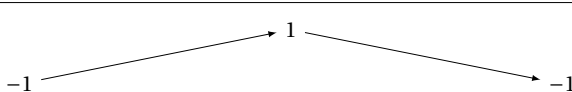
- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$

### 2. Signe et variations

L'étude du signe des dérivées des fonctions trigonométriques permet d'obtenir les variations de celles-ci. Nous allons donc voir le signe et les variations de ces fonctions.

À RETENIR

#### Signe et variation de la fonction cosinus

$x$	$-\pi$		$0$		$\pi$
$x \mapsto \cos'(x)$	0	+	0	-	0
$x \mapsto \cos(x)$					

Veuillez noter que ce tableau est périodique de période  $2\pi$ .

## À RETENIR

## Signe et variation de la fonction sinus

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$x \mapsto \sin'(x)$	–	0	+	–
$x \mapsto \sin(x)$	0	–1	1	0

Ce tableau est également périodique de période  $2\pi$ .

### 3. Limite

Les fonctions trigonométriques ont pour particularité de **ne pas admettre de limite** en  $\pm\infty$ . Ceci provenant du fait que ces fonctions sont périodiques et que leur valeur oscille entre  $-1$  et  $1$ .

## 4. Valeurs remarquables

### À RETENIR

#### Valeurs remarquables

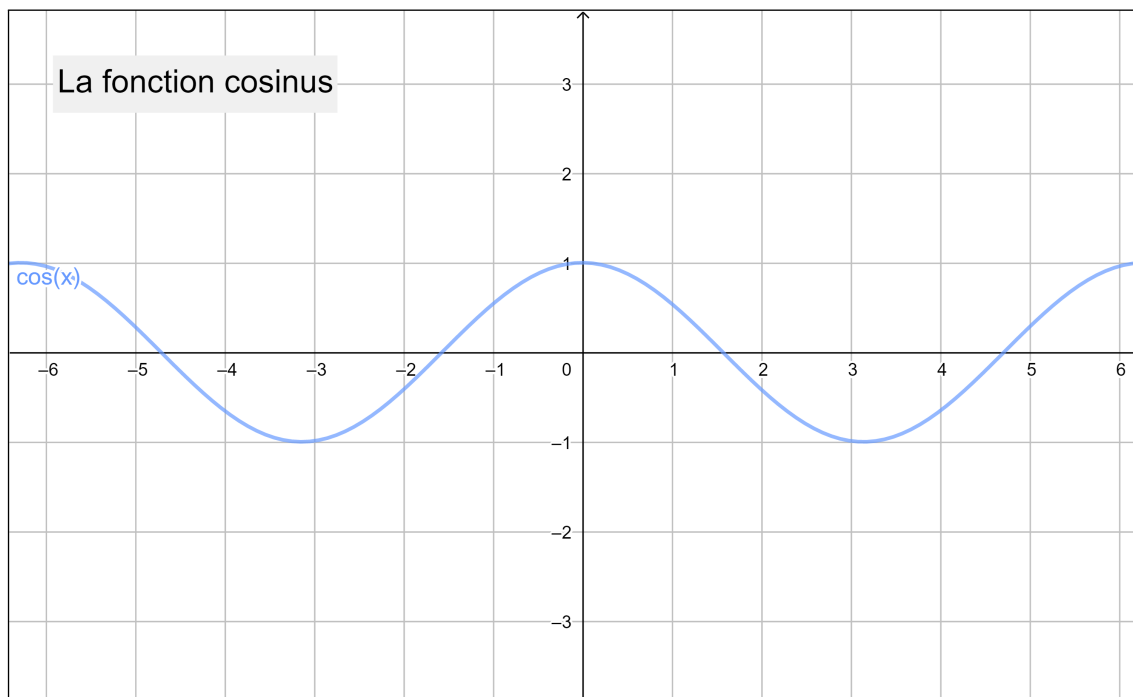
Voici un tableau regroupant quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus :

Valeur de $x$ (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$ )	Valeur de $\cos(x)$	Valeur de $\sin(x)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\pi$	-1	0

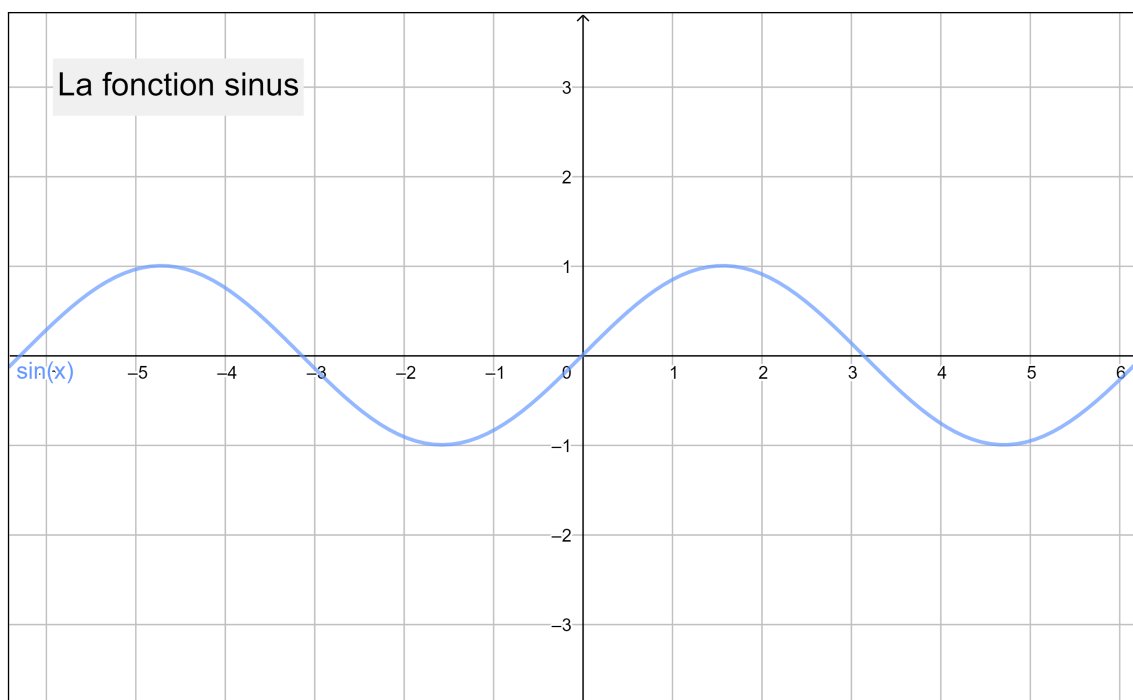
## 5. Représentation graphique

À l'aide de toutes les informations et valeurs données précédemment, il est possible d'établir une représentation graphique de la fonction cosinus :





De même pour la fonction sinus :



On remarque sur ces graphiques plusieurs propriétés données : parité, signe, périodicité, etc.