1 Linhas de Transmissão

1.1 Modelagem da Linha de Transmissão

Para modelarmos uma linha de transmissão, podemos representá-la com um modelo simples utilizando modelos concentrados, em que representam a linha como uma junção de vários circuitos em série em um comprimento ΔZ, assim como mostra a figura Figura 1.

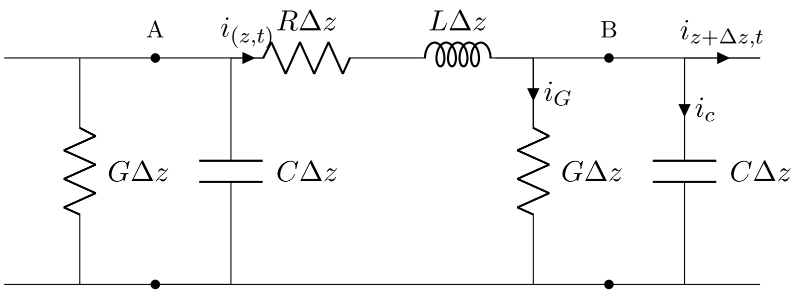


Figura 1: Circuito equivalente a linha de transmissão no pedaço de linha de comprimento Δz com $R\Delta z$ representado as perdas do condutor em Ohms, a condutância $G\Delta z$ representado as perdas do dielétrico em siemens, a indutância $L\Delta z$ do condutor em henrys e a capacitância $C\Delta z$ em farads.

Aplicando a lei de kirchoff das tensões no trecho Δz, obteremos:

$$v(z,t) = i(z,t)R\Delta Z + \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}L\Delta z + v(z+\Delta z,t)$$

Dividino por Δz e rearrajando:

$$-\frac{v(z+\Delta,t) - v(z,t)}{\Delta z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

Mas sabemos que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(z+\Delta,t) - v(z,t)}{\Delta z} = \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}$$

Logo:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{1}$$

Vamos agora determinar a outra equação equivalente a Equação 1, fazendo uso da equação de Kirchhoff nos nós da ponto B.

$$i(z,t) = i_G(z+\Delta z,t) + i_C(z+\Delta z,t) + i(z+\Delta z,t)$$

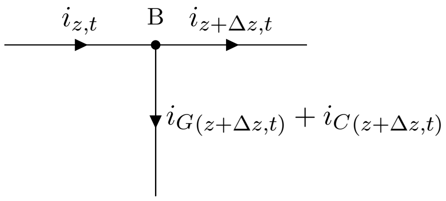


Figura 2: Correntes entrando e saindo o nó B

Mas sabemos que:

$$i_G(z + \Delta Z, t) = v(z + \Delta z, t)G\Delta Z$$
$$i_C(z + \Delta z, t) = \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} C\Delta z$$

Que substituindo resulta em:

$$i(z, t) = v(z + \Delta z, t)G\Delta z + \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} C\Delta z + i(z + \Delta z, t)$$

Reescrevendo e divindo por Δz,

$$-\frac{i(z + \Delta z, t) - i(z, t)}{\Delta z} = v(z + \Delta z, t)G + \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} C$$

Observar que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{i(z + \Delta z, t) - i(z, t)}{\Delta z} \right] = \frac{\partial i(z, t)}{\partial z}$$

Se temos que,

$$v(z + \Delta z) = v(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial z} \Delta z$$

Podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\frac{i(z + \Delta z, t) - i(z, t)}{\Delta z} &= v(z + \Delta z, t)G + \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} C \\
&= G \left[v(z, t) + \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \Delta z \right] + C \left[\frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t \partial z} \Delta z \right] \\
&= \left(G + C \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[v(z, t) + \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \Delta z \right]
\end{aligned}$$

Que para $\Delta z \to 0$ se torna:

$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = Gv(z, t) + C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \tag{2}$$

Dessa forma obtivemos as duas equações fundamentais da linha de transmissão:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{1}$$
$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \tag{2}$$

Se derivamarmos (1) em relação a z e (2) em relação a t,

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + L\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} \tag{3}$$
$$-\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} = G\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + C\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3):

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} - LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Substituindo a equação (2) acima:

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\left[-Gv(z,t) - C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right] - LG\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Assim temos a equação de onda sem perdas para a tensão:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

E de forma análoga ao procedimento anterior, obtemos a equação de onda para a corrente:

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Para linhas sem perdas, temos $R = G = 0$ o que nos traz:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

1.2 Soluções para a Equação de Onda

Nossa onda eletromagnética propaga em ambos os sentidos, logo, a função da tensão deve ser composta por duas funções, uma que caminha na direção positiva de z e outra em sua direção negativa:

$$v(z,t) = v^{+}\left[t - \frac{z}{v_f}\right] + v^{-}\left[t + \frac{z}{v_f}\right]$$

Onde:

$v^{+}\left[t - \dfrac{z}{v_f}\right]$ representa a onda propagando na direção positiva de z

$v^{-}\left[t + \dfrac{z}{v_f}\right]$ representa a onda propagando na direção negativa de z

$v_f = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ representa a velocidade de propagação da onda (a velocidade de fase)

Assim é possível mostrar que as soluções abaixo são soluções das equações de onda para tensão, em linhas de transmissão sem perdas:

$$v(z,t) = V_0^{+} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_f}\right) + \phi^{+}\right] + V_0^{-} \cos\left[\omega\left(t + \frac{z}{v_f}\right) + \phi^{+}\right]$$

Se adotarmos uma constante de propagação, k_z, como $k_z = \frac{\omega}{v_f}$, obteremos:

$$v(z,t) = V_0^{+} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_f}\right) + \phi^{+}\right] + V_0^{-} \cos\left[\omega\left(t + \frac{z}{v_f}\right) + \phi^{+}\right]$$

Como sabemos que a frequência angular e amplitude são invariantes no domínio do tempo, podemos lembrar da fórmula de Euler:

$$e^{j\zeta} = \cos(\zeta) + j\sin(\zeta)$$

E escrever:

$$A\cos(\omega t + \phi) = Re\left\{Ae^{[j(\omega t+\phi)]}\right\} Re\left\{Ae^{j\phi}e^{j\omega t}\right\}$$

Onde,

$$Ae^{(j\phi)}e^{(j\omega t)} : \text{a função complexa instantanêa}$$
$$Ae^{(j\phi)} : \text{a função fasorial}$$

Assim, podemos nos recordamos do conceito de fasor, usado em circuitos elétricos, com o exemplo abaixo:

$$v(t) = V_0 cos(\omega t)$$
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

Pela lei de Ohm podemos equacionar:

$$v(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t) = (R_1 + R_2) i(t)$$

$$V_0 \cos(\omega t) = (R_1 + R_2) i(t)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R_1 R_2} \cos(\omega t)$$

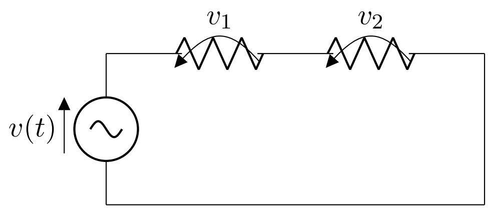


Figura 3: Circuito Exemplo

$$I = \frac{V_0}{R_1 + R_2}\textbf{fasor}$$

Como temos:

$$\begin{aligned}
v^+(z,t) &= V_0^+ \cos(\omega t - kz + \phi^+) \\
v^+(z,t) &= Re\left\{V_0^+ \left[\cos(\omega t - kz + \phi^+) + j\sin(wt - kz + \phi^+)\right]\right\} \\
v^+(z,t) &= Re\left\{V_o^+ e^{\left[j\left(\omega - kz + \phi^+\right)\right]}\right\} \\
v^+(z,t) &= Re\left\{V_o^+ e^{\phi^+} e^{-jkz} e^{j\omega t}\right\}
\end{aligned}$$

Temos a tensão instantanêa real como:

$$\mathcal{V}(z,t) = V_0 \cos(\omega t - kz + \phi)$$

Tensão complexa instantanêa:

$$V(z,t) = V_0 e^{j\phi} e^{-jkz} e^{jwt}$$

E a tensão fasorial:

$$V(z) = V_0 e^{j\phi} e^{-jkz}$$

Lembremos então da equação de onda e excitação senoidal:

$$\begin{aligned}
v^+ = (z,t) &= Re\left\{Ae^{[j(\omega t + \phi)]}\right\} Re\left\{Ae^{j\phi} e^{j\omega t}\right\} \\
&= Re\left\{V^+(z) e^{j\omega t}\right\}
\end{aligned}$$

A derivada temporal se tornará então:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t} = jwe^{j\omega t}$$

E a derivada espacial:

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{-jk_z z} = -jk_z e^{-jk_z z}$$

Ou seja, uma derivada temporal no domínio da frequência equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega$$

E uma derivada espacial equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \Leftrightarrow -jk_z$$

Com esse conhecimento, podemos transformar nossa equação de onda para a tensão:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Em:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega(RC + LG)\right] V(Z) \tag{5}$$

E analogamente, a de corrente:

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Em:

$$\frac{\partial^2 I(Z)}{\partial z^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega(RC + LG)\right] I(z) \tag{6}$$

1.3 Impedância e Admitância

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} &= RGv(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \qquad \text{Tensão} \\
\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} &= RGi(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} \quad \text{Corrente}
\end{aligned}$$

Se temos:

$$\begin{aligned}
Z &= R + j\omega L \quad \text{Impedância } (\Omega/m \text{ - Ohms}/m) \\
Y &= G + j\omega C \quad \text{Admitância } (S/m \text{ - Siemens}/m)
\end{aligned}$$

Então,

$$ZY = (RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
Z &= R + j\omega L \quad \text{Impedância (por u.c.)} \\
Y &= G + j\omega C \quad \text{Admitância (por u.c.)}
\end{aligned}$$

1.4 Constante de Propagação

A constante de propagação é dada por:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta$$

Em que,

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow \quad & \text{constante de atenuação; neper/unidade de comprimento} \\ \beta \rightarrow \quad & \text{constante de fase; radiano/unidade de comprimento} \end{aligned}$$

Em uma linha sem perdas, temos:

$$ZY = -\omega^2 LC$$
$$\gamma = \sqrt{ZY} = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$
$$\alpha = 0$$

Podemos então relacionar,

$$\gamma = \sqrt{ZY}$$
$$\gamma^2 = ZY$$
$$ZY = (RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)$$

E substituir em:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \left[(RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)\right] V(z)$$

Transformando em:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 V(z)$$

E de forma análoga para a corrente:

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = \left[(RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)\right] I(z)$$
$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 I(z)$$

Podemos ainda relacionar a impedância com as equações (5) e (6),

$$\begin{cases} -\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Sabemos que $\frac{\partial}{\partial t}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$:

$$\begin{cases} -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = RI(z) + j\omega LI(z) = (R + j\omega L)I(Z) \\ -\frac{\partial I(z)}{\partial z} = GC(z) + j\omega CV(z) = (G + j\omega C)V(z) \end{cases}$$

O que nos dá:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -ZI(z)$$
$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -YV(z)$$

1.5 Resumo das equações fundamentais dee uma L.T

	V(z)	I(z)
$\frac{\partial}{\partial z}$	$-YV(z)$	$-ZI(z)$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\gamma^2 V(z)$	$\gamma^2 I(z)$

Tabela 1: Resumo das equações fundamentais

Em que:

$$Z = R + j\omega L$$
$$Y = G + j\omega C$$
$$ZY = (RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)$$
$$\gamma^2 = ZY$$

1.6 Soluções das equações de onda

Assim definimos que a solução de onda para a tensão:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 V(z) = 0$$

É da forma:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z}$$

Em que V^+ e V^- são constantes a serem determinadas.

Se lembrarmos que:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -ZI(z)$$

Podemos escrever:

$$I(z) = \frac{\gamma}{Z}(V^+e^{-\gamma z} - V^-e^{-\gamma z})$$

Em que $I^+ = \frac{\gamma}{Z}V^+$ e $I^- = \frac{\gamma}{Z}V^-$ também são constantes a determinadas, pela equação da corrente ou através das constantes V^+ e V^-. Ainda podemos fazer uma análise dimensional em:

$$\frac{\gamma}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{ZY}{Z^2}} = \sqrt{\frac{Y}{Z}}$$

O que nos dá:

$$\left[\frac{\gamma}{Z}\right] = \text{ohm}^{-1}$$

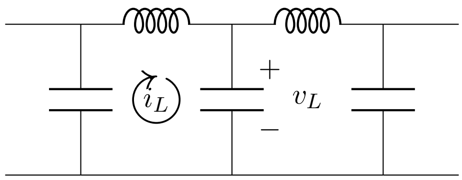
Que é o que esperamos pela Lei de Ohm.

Em resumo temos:

$$V(z) = V^+e^{-\gamma z} + V^-e^{\gamma z}$$
$$I(z) = I^+e^{-\gamma z} - I^-e^{\gamma z}$$

1.7 Conceito de Perturbação

- Uma perturbação move-se a partir de uma fonte ao longo do tmepo
- O meio pode não apresentar movimento na direção de propagação
- Propagação de onda eletromagnética
  - Não é necessário meio físico
  - Há propagação no vácuo
- Tipos de ondas
  - Ondas Mecânicas
  - Ondas Eletromagnêticas



O que se move com velocidade v?

- À medida que o tempo passa, a corrente no primeiro indutor carrega o capitor seguinte
- A variação da tensão no capacitor provoca a variação da corrente no indutor seguinte
- Resultado:
  - A perturbação elétrica se propaga com velocidade v_f ao longo da linha de transmissão

O que acontece quando andamos um comprimento de onda na linha de transmissão?

$$v^+(z,t) = V^+\cos(\omega t - \beta z) = V^+\cos(\beta z - wt)$$
$$v^+(z+\lambda,t) = V^+\cos(\beta z + \beta\lambda - \omega t) = V^+\cos(\beta z - \omega t + 2\pi) = V^+\cos(\beta z - \omega t)$$

Assim temos:

$$\beta\lambda = 2\pi$$
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Onde β é a constante de fase dada em [rad/unid.comprimento] ou [unid.comprimento]$^{-1}$.

1.8 Constante de propagação e atenuação

Se temos uma linha com perdas, existe uma atenuanção da tensão/corrente ao longo do eixo z;

$$V^+(z) = V^+e^{-\gamma z} = V^+e^{-(\alpha+j\beta)z}$$
$$V^+(z) = V^+e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$
$$v^+(z,t) = V^+e^{-\alpha z}cos(wt - \beta z)$$

Onde:

α: constante de atenuanção: [neper/metro] ou [dB/metro]
β: constante de fase :[rad/metro] ou m^-1
$V^+e^{-\alpha z}$: indica uma amplitude decrescendo exponencialmente

1.9 Linha de transmissão sem perdas

Se lembrarmos que $\gamma = ZY$, podemos dizer:

$$\frac{\gamma}{Z} = \sqrt{\frac{Y}{Z}} = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} = \sqrt{\frac{j\omega C}{j\omega L}} = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Invertendo a equação anterior, encontramos a impedância característica, Z_0 da linha:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} [\text{ohm}]$$

De γ:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Em uma linha sem perdas, $R = G = 0$:

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = \sqrt{-\omega^2 LC} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta$$
$$\beta = \omega\sqrt{LC} = \frac{\omega}{V_{fase}} \quad [m^{-1}]$$

Então em uma linha de transmissão sem perdas temos:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z}$$
$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{+j\beta z}$$

Podemos aproximar linhas, que operam em frequências maiores que $100kHz$, em que $\omega L \gg R$ e $\omega C \gg G$ como linhas sem perdas em que $Z_{0,af} \equiv Z_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}}$. E linhas operando em frequências de aproximadente 1 kHz em que $\omega L \ll R$ e $\omega C \ll G$ como puramente resistivas, assim temos $z_{0,bf} \simeq \sqrt{\frac{R}{G}}$.