1 Linhas de Transmissão

1.1 Modelagem da Linha de Transmissão

Para modelarmos uma linha de transmissão, podemos representá-la com um modelo simples utilizando modelos concentrados, em que representam a linha como uma junção de vários circuitos em série em um comprimento ΔZ, assim como mostra a figura Figura 1.

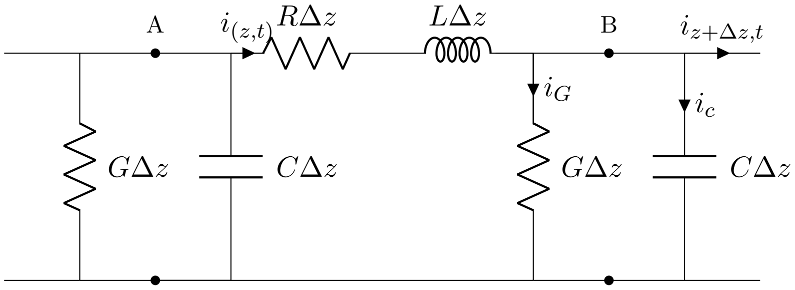

Figura 1: Circuito equivalente a linha de transmissão no pedaço de linha de comprimento Δz com $R\Delta z$ representado as perdas do condutor em Ohms, a condutância $G\Delta z$ representado as perdas do dielétrico em siemens, a indutância $L\Delta z$ do condutor em henrys e a capacitância $C\Delta z$ em farads.

Aplicando a lei de kirchoff das tensões no trecho Δz, obteremos:

$$v(z,t) = i(z,t)R\Delta Z + \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}L\Delta z + v(z+\Delta z, t)$$

Dividino por Δz e rearrajando:

$$-\frac{v(z+\Delta,t) - v(z,t)}{\Delta z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

Mas sabemos que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(z+\Delta,t) - v(z,t)}{\Delta z} = \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}$$

Logo:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \qquad (1)$$

Vamos agora determinar a outra equação equivalente a Equação 1, fazendo uso da equação de Kirchhoff nos nós da ponto B.

$$i(z,t) = i_G(z+\Delta z,t) + i_C(z+\Delta z,t) + i(z+\Delta z,t)$$

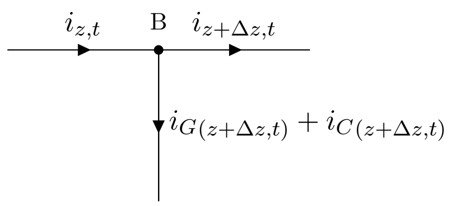

Figura 2: Correntes entrando e saindo o nó B

Mas sabemos que:

$$i_G(z+\Delta Z,t) = v(z+\Delta z,t)G\Delta Z$$
$$i_C(z+\Delta z,t) = \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}C\Delta z$$

Que substituindo resulta em:

$$i(z,t) = v(z+\Delta z,t)G\Delta z + \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}C\Delta z + i(z+\Delta z,t)$$

Reescrevendo e divindo por Δz,

$$-\frac{i(z+\Delta z,t)-i(z,t)}{\Delta z} = v(z+\Delta z,t)G + \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}C$$

Observar que:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{i(z+\Delta z,t)-i(z,t)}{\Delta z}\right] = \frac{\partial i(z,t)}{\partial z}$$

Se temos que,

$$v(z+\Delta z) = v(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial z}\Delta z$$

Podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\frac{i(z+\Delta z,t)-i(z,t)}{\Delta z} &= v(z+\Delta z,t)G + \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}C \\ &= G\left[v(z,t)+\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\Delta z\right] + C\left[\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t\partial z}\Delta z\right] \\ &= \left(G + C\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[v(z,t)+\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\Delta z\right]\end{aligned}$$

Que para $\Delta z \to 0$ se torna:

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \tag{2}$$

Dessa forma obtivemos as duas equações fundamentais da linha de transmissão:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{1}$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \tag{2}$$

Se derivamarmos (1) em relação a z e (2) em relação a t,

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + L\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} \tag{3}$$

$$-\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} = G\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + C\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3):

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} - LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Substituindo a equação (2) acima:

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\left[-Gv(z,t) - C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right] - LG\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Assim temos a equação de onda sem perdas para a tensão:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

E de forma análoga ao procedimento anterior, obtemos a equação de onda para a corrente:

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Para linhas sem perdas, temos $R = G = 0$ o que nos traz:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

1.2 Soluções para a Equação de Onda

Nossa onda eletromagnética propaga em ambos os sentidos, logo, a função da tensão deve ser composta por duas funções, uma que caminha na direção positiva de z e outra em sua direção negativa:

$$v(z,t) = v^+\left[t - \frac{z}{v_f}\right] + v^-\left[t + \frac{z}{v_f}\right]$$

Onde:

$v^{+}\left[t-\frac{z}{v_f}\right]$ representa a onda propagando na direção positiva de z

$v^{-}\left[t+\frac{z}{v_f}\right]$ representa a onda propagando na direção negativa de z

$v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ representa a velocidade de propagação da onda (a velocidade de fase)

Assim é possível mostrar que as soluções abaixo são soluções das equações de onda para tensão, em linhas de transmissão sem perdas:

$$v(z,t) = V_0^{+}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v_f}\right)+\phi^{+}\right] + V_0^{-}\cos\left[\omega\left(t+\frac{z}{v_f}\right)+\phi^{+}\right]$$

Se adotarmos uma constante de propagação, k_z, como $k_z = \frac{\omega}{v_f}$, obteremos:

$$v(z,t) = V_0^{+}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v_f}\right)+\phi^{+}\right] + V_0^{-}\cos\left[\omega\left(t+\frac{z}{v_f}\right)+\phi^{+}\right]$$

Como sabemos que a frequência angular e amplitude são invariantes no domínio do tempo, podemos lembrar da fórmula de Euler:

$$e^{j\zeta} = \cos(\zeta) + j\sin(\zeta)$$

E escrever:

$$A\cos(\omega t+\phi) = Re\left\{Ae^{[j(\omega t+\phi)]}\right\} Re\left\{Ae^{j\phi}e^{j\omega t}\right\}$$

Onde,

$$Ae^{(j\phi)}e^{(j\omega t)} : \text{a função complexa instantanêa}$$
$$Ae^{(j\phi)} : \text{a função fasorial}$$

Assim, podemos nos recordamos do conceito de fasor, usado em circuitos elétricos, com o exemplo abaixo:

$$v(t) = V_0 cos(\omega t)$$
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

Pela lei de Ohm podemos equacionar:

$$v(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t) = (R_1+R_2)i(t)$$

$$V_0\cos(\omega t) = (R_1+R_2)i(t)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R_1R_2}\cos(\omega t)$$

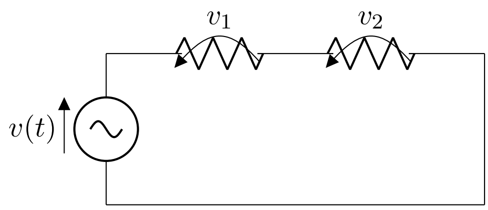

Figura 3: Circuito Exemplo

$$I = \frac{V_0}{R_1 + R_2}\textbf{fasor}$$

Como temos:

$$\begin{aligned}
v^+(z,t) &= V_0^+ \cos(\omega t - kz + \phi^+) \\
v^+(z,t) &= Re\left\{V_0^+ \left[\cos(\omega t - kz + \phi^+) + j\sin(wt - kz + \phi^+)\right]\right\} \\
v^+(z,t) &= Re\left\{V_o^+ e^{\left[j\left(\omega - kz + \phi^+\right)\right]}\right\} \\
v^+(z,t) &= Re\left\{V_o^+ e^{\phi^+} e^{-jkz} e^{j\omega t}\right\}
\end{aligned}$$

Temos a tensão instantanêa real como:

$$\mathcal{V}(z,t) = V_0 \cos(\omega t - kz + \phi)$$

Tensão complexa instantanêa:

$$V(z,t) = V_0 e^{j\phi} e^{-jkz} e^{jwt}$$

E a tensão fasorial:

$$V(z) = V_0 e^{j\phi} e^{-jkz}$$

Lembremos então da equação de onda e excitação senoidal:

$$\begin{aligned}
v^+ = (z,t) &= Re\left\{Ae^{[j(\omega t + \phi)]}\right\} Re\left\{Ae^{j\phi} e^{j\omega t}\right\} \\
&= Re\left\{V^+(z) e^{j\omega t}\right\}
\end{aligned}$$

A derivada temporal se tornará então:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t} = jwe^{j\omega t}$$

E a derivada espacial:

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{-jk_z z} = -jk_z e^{-jk_z z}$$

Ou seja, uma derivada temporal no domínio da frequência equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega$$

E uma derivada espacial equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \Leftrightarrow -jk_z$$

Com esse conhecimento, podemos transformar nossa equação de onda para a tensão:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Em:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega(RC + LG)\right] V(Z) \tag{5}$$

E analogamente, a de corrente:

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Em:

$$\frac{\partial^2 I(Z)}{\partial z^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega(RC + LG)\right] I(z) \tag{6}$$

1.3 Impedância e Admitância

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} &= RGv(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \qquad \text{Tensão} \\ \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} &= RGi(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} \quad \text{Corrente} \end{aligned}$$

Se temos:

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L \quad \text{Impedância } (\Omega/m \text{ - Ohms}/m) \\ Y &= G + j\omega C \quad \text{Admitância } (S/m \text{ - Siemens}/m) \end{aligned}$$

Então,

$$ZY = (RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)$$

Onde:

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L \quad \text{Impedância (por u.c.)} \\ Y &= G + j\omega C \quad \text{Admitância (por u.c.)} \end{aligned}$$

1.4 Constante de Propagação

A constante de propagação é dada por:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta$$

Em que,

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow &\quad \text{constante de atenuação; neper/unidade de comprimento} \\ \beta \rightarrow &\quad \text{constante de fase; radiano/unidade de comprimento} \end{aligned}$$

Em uma linha sem perdas, temos:

$$\begin{gathered} ZY = -\omega^2 LC \\ \gamma = \sqrt{ZY} = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \\ \alpha = 0 \end{gathered}$$

Podemos então relacionar,

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{ZY} \\ \gamma^2 &= ZY \\ ZY = (RG - \omega^2 LC) &+ j\omega(RC + LG) \end{aligned}$$

E substituir em:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \left[(RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)\right] V(z)$$

Transformando em:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 V(z)$$

E de forma análoga para a corrente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} &= \left[(RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)\right] I(z) \\ \frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} &= \gamma^2 I(z) \end{aligned}$$

Podemos ainda relacionar a impedância com as equações (5) e (6),

$$\begin{cases} -\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Sabemos que $\frac{\partial}{\partial t}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$:

$$\begin{cases} -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = RI(z) + j\omega LI(z) = (R + j\omega L)I(Z) \\ -\frac{\partial I(z)}{\partial z} = GC(z) + j\omega CV(z) = (G + j\omega C)V(z) \end{cases}$$

O que nos dá:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -ZI(z)$$
$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -YV(z)$$

1.5 Resumo das equações fundamentais dee uma L.T

	V(z)	I(z)
$\frac{\partial}{\partial z}$	$-YV(z)$	$-ZI(z)$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\gamma^2 V(z)$	$\gamma^2 I(z)$

Tabela 1: Resumo das equações fundamentais

Em que:

$$Z = R + j\omega L$$
$$Y = G + j\omega C$$
$$ZY = (RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)$$
$$\gamma^2 = ZY$$

1.6 Soluções das equações de onda

Assim definimos que a solução de onda para a tensão:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 V(z) = 0$$

É da forma:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z}$$

Em que V^+ e V^- são constantes a serem determinadas.

Se lembrarmos que:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -ZI(z)$$

Podemos escrever:

$$I(z) = \frac{\gamma}{Z}(V^+e^{-\gamma z} - V^-e^{-\gamma z})$$

Em que $I^+ = \frac{\gamma}{Z}V^+$ e $I^- = \frac{\gamma}{Z}V^-$ também são constantes a determinadas, pela equação da corrente ou através das constantes V^+ e V^-. Ainda podemos fazer uma análise dimensional em:

$$\frac{\gamma}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{ZY}{Z^2}} = \sqrt{\frac{Y}{Z}}$$

O que nos dá:

$$\left[\frac{\gamma}{Z}\right] = \mathrm{ohm}^{-1}$$

Que é o que esperamos pela Lei de Ohm.

Em resumo temos:

$$\begin{aligned} V(z) &= V^+e^{-\gamma z} + V^-e^{\gamma z} \\ I(z) &= I^+e^{-\gamma z} - I^-e^{\gamma z} \end{aligned}$$