1 Linhas de Transmissão

1.1 Modelagem da Linha de Transmissão

Para modelarmos uma linha de transmissão, podemos representá-la com um modelo simples utilizando modelos concentrados, em que representam a linha como uma junção de vários circuitos em série em um comprimento ΔZ, assim como mostra a figura Figura 1.

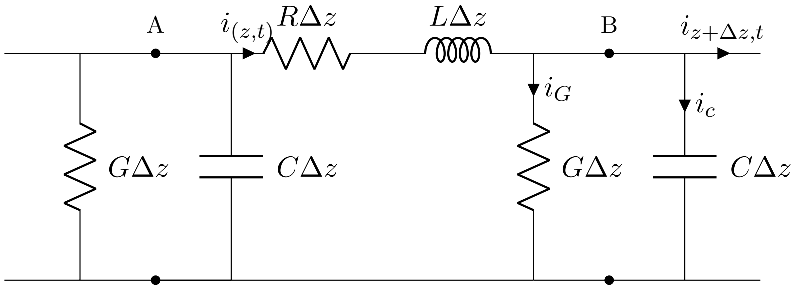


Figura 1: Circuito equivalente a linha de transmissão no pedaço de linha de comprimento Δz com $R\Delta z$ representado as perdas do condutor em Ohms, a condutância $G\Delta z$ representado as perdas do dielétrico em siemens, a indutância $L\Delta z$ do condutor em henrys e a capacitância $C\Delta z$ em farads.

Aplicando a lei de kirchoff das tensões no trecho Δz, obteremos:

$$v(z,t) = i(z,t)R\Delta Z + \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}L\Delta z + v(z+\Delta z,t)$$

Dividino por Δz e rearrajando:

$$-\frac{v(z+\Delta,t) - v(z,t)}{\Delta z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

Mas sabemos que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(z+\Delta,t) - v(z,t)}{\Delta z} = \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}$$

Logo:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{1}$$

Vamos agora determinar a outra equação equivalente a Equação 1, fazendo uso da equação de Kirchhoff nos nós da ponto B.

$$i(z,t) = i_G(z+\Delta z,t) + i_C(z+\Delta z,t) + i(z+\Delta z,t)$$

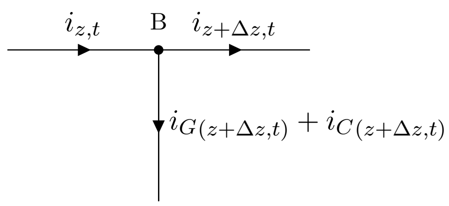


Figura 2: Correntes entrando e saindo o nó B

Mas sabemos que:

$$\begin{aligned} i_G(z+\Delta Z,t) &= v(z+\Delta z,t)G\Delta Z \\ i_C(z+\Delta z,t) &= \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}C\Delta z \end{aligned}$$

Que substituindo resulta em:

$$i(z,t) = v(z+\Delta z,t)G\Delta z + \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}C\Delta z + i(z+\Delta z,t)$$

Reescrevendo e divindo por Δz,

$$-\frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z} = v(z+\Delta z,t)G + \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}C$$

Observar que:

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z}\right] = \frac{\partial i(z,t)}{\partial z}$$

Se temos que,

$$v(z+\Delta z) = v(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial z}\Delta z$$

Podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z} &= v(z+\Delta z,t)G + \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}C \\ &= G\left[v(z,t) + \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\Delta z\right] + C\left[\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t \partial z}\Delta z\right] \\ &= \left(G + C\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[v(z,t) + \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\Delta z\right] \end{aligned}$$

Que para $\Delta z \to 0$ se torna:

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \tag{2}$$

Dessa forma obtivemos as duas equações fundamentais da linha de transmissão:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (1)$$
$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \quad (2)$$

Se derivamarmos (1) em relação a z e (2) em relação a t,

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + L\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} \quad (3)$$
$$-\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} = G\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + C\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} - LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Substituindo a equação (2) acima:

$$-\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = R\left[-Gv(z,t) - C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right] - LG\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Assim temos a equação de onda sem perdas para a tensão:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + (RC+LG)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

E de forma análoga ao procedimento anterior, obtemos a equação de onda para a corrente:

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + (RC+LG)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Para linhas sem perdas, temos $R = G = 0$ o que nos traz:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

1.2 Soluções para a Equação de Onda

Nossa onda eletromagnética propaga em ambos os sentidos, logo, a função da tensão deve ser composta por duas funções, uma que caminha na direção positiva de z e outra em sua direção negativa:

$$v(z,t) = v^+\left[t - \frac{z}{v_f}\right] + v^-\left[t + \frac{z}{v_f}\right]$$

Onde:

$v^{+}\left[t-\dfrac{z}{v_f}\right]$ representa a onda propagando na direção positiva de z

$v^{-}\left[t+\dfrac{z}{v_f}\right]$ representa a onda propagando na direção negativa de z

$v_f=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ representa a velocidade de propagação da onda (a velocidade de fase)

Assim é possível mostrar que as soluções abaixo são soluções das equações de onda para tensão, em linhas de transmissão sem perdas:

$$v(z,t)=V_0^{+}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v_f}\right)+\phi^{+}\right]+V_0^{-}\cos\left[\omega\left(t+\frac{z}{v_f}\right)+\phi^{+}\right]$$

Se adotarmos uma constante de propagação, k_z, como $k_z=\frac{\omega}{v_f}$, obteremos:

$$v(z,t)=V_0^{+}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v_f}\right)+\phi^{+}\right]+V_0^{-}\cos\left[\omega\left(t+\frac{z}{v_f}\right)+\phi^{+}\right]$$

Como sabemos que a frequência angular e amplitude são invariantes no domínio do tempo, podemos lembrar da fórmula de Euler:

$$e^{j\zeta}=\cos(\zeta)+j\sin(\zeta)$$

E escrever:

$$A\cos(\omega t+\phi)=Re\left\{Ae^{[j(\omega t+\phi)]}\right\}Re\left\{Ae^{j\phi}e^{j\omega t}\right\}$$

Onde,

$$Ae^{(j\phi)}e^{(j\omega t)}:\text{ a função complexa instantanêa}$$
$$Ae^{(j\phi)}:\text{ a função fasorial}$$

Assim, podemos nos recordamos do conceito de fasor, usado em circuitos elétricos, com o exemplo abaixo:

$$v(t)=V_0cos(\omega t)$$
$$v(t)=v_1(t)+v_2(t)$$

Pela lei de Ohm podemos equacionar:

$$v(t)=R_1i(t)+R_2i(t)=(R_1+R_2)i(t)$$

$$V_0\cos(\omega t)=(R_1+R_2)i(t)$$

$$i(t)=\frac{V_0}{R_1R_2}\cos(\omega t)$$

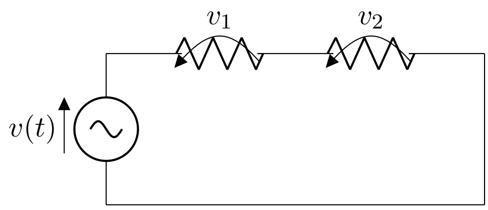


Figura 3: Circuito Exemplo

$$I = \frac{V_0}{R_1 + R_2}\textbf{fasor}$$

Como temos:

$$\begin{aligned}
v^+(z,t) &= V_0^+ \cos(\omega t - kz + \phi^+) \\
v^+(z,t) &= Re\left\{V_0^+ \left[\cos(\omega t - kz + \phi^+) + j\sin(wt - kz + \phi^+)\right]\right\} \\
v^+(z,t) &= Re\left\{V_o^+ e^{\left[j\left(\omega - kz + \phi^+\right)\right]}\right\} \\
v^+(z,t) &= Re\left\{V_o^+ e^{\phi^+} e^{-jkz} e^{j\omega t}\right\}
\end{aligned}$$

Temos a tensão instantanêa real como:

$$\mathcal{V}(z,t) = V_0 \cos(\omega t - kz + \phi)$$

Tensão complexa instantanêa:

$$V(z,t) = V_0 e^{j\phi} e^{-jkz} e^{jwt}$$

E a tensão fasorial:

$$V(z) = V_0 e^{j\phi} e^{-jkz}$$

Lembremos então da equação de onda e excitação senoidal:

$$\begin{aligned}
v^+ = (z,t) &= Re\left\{Ae^{[j(\omega t + \phi)]}\right\} Re\left\{Ae^{j\phi} e^{j\omega t}\right\} \\
&= Re\left\{V^+(z) e^{j\omega t}\right\}
\end{aligned}$$

A derivada temporal se tornará então:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t} = jwe^{j\omega t}$$

E a derivada espacial:

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{-jk_z z} = -jk_z e^{-jk_z z}$$

Ou seja, uma derivada temporal no domínio da frequência equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega$$

E uma derivada espacial equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \Leftrightarrow -jk_z$$

Com esse conhecimento, podemos transformar nossa equação de onda para a tensão:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = RGv(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Em:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega(RC + LG)\right] V(Z) \tag{5}$$

E analogamente, a de corrente:

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = RGi(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}$$

Em:

$$\frac{\partial^2 I(Z)}{\partial z^2} = \left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\omega(RC + LG)\right] I(z) \tag{6}$$

1.3 Impedância e Admitância

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} &= RGv(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} \quad \text{Tensão} \\ \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} &= RGi(z,t) + (RC + LG)\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} \quad \text{Corrente} \end{aligned}$$

Se temos:

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L \quad \text{Impedância } (\Omega/m \text{ - Ohms}/m) \\ Y &= G + j\omega C \quad \text{Admitância } (S/m \text{ - Siemens}/m) \end{aligned}$$

Então,

$$ZY = (RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)$$

Onde:

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L \quad \text{Impedância (por u.c.)} \\ Y &= G + j\omega C \quad \text{Admitância (por u.c.)} \end{aligned}$$

1.4 Constante de Propagação

A constante de propagação é dada por:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta$$

Em que,

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow &\quad \text{constante de atenuação; neper/unidade de comprimento} \\ \beta \rightarrow &\quad \text{constante de fase; radiano/unidade de comprimento} \end{aligned}$$

Em uma linha sem perdas, temos:

$$\begin{aligned} ZY &= -\omega^2 LC \\ \gamma = \sqrt{ZY} &= j\beta = j\omega\sqrt{LC} \\ \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Podemos então relacionar,

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{ZY} \\ \gamma^2 &= ZY \\ ZY = (RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG) & \end{aligned}$$

E substituir em:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \left[(RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)\right] V(z)$$

Transformando em:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 V(z)$$

E de forma análoga para a corrente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} &= \left[(RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)\right] I(z) \\ \frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} &= \gamma^2 I(z) \end{aligned}$$

Podemos ainda relacionar a impedância com as equações (5) e (6),

$$\begin{cases} -\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Sabemos que $\frac{\partial}{\partial t}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$:

$$\begin{cases} -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = RI(z) + j\omega LI(z) = (R + j\omega L)I(Z) \\ -\frac{\partial I(z)}{\partial z} = GC(z) + j\omega CV(z) = (G + j\omega C)V(z) \end{cases}$$

O que nos dá:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -ZI(z)$$
$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -YV(z)$$

1.5 Resumo das equações fundamentais dee uma L.T

	V(z)	I(z)
$\frac{\partial}{\partial z}$	$-YV(z)$	$-ZI(z)$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\gamma^2 V(z)$	$\gamma^2 I(z)$

Tabela 1: Resumo das equações fundamentais

Em que:

$$Z = R + j\omega L$$
$$Y = G + j\omega C$$
$$ZY = (RG - \omega^2 LC) + j\omega(RC + LG)$$
$$\gamma^2 = ZY$$

1.6 Soluções das equações de onda

Assim definimos que a solução de onda para a tensão:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 V(z) = 0$$

É da forma:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z}$$

Em que V^+ e V^- são constantes a serem determinadas.

Se lembrarmos que:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -ZI(z)$$

Podemos escrever:

$$I(z) = \frac{\gamma}{Z}(V^+e^{-\gamma z} - V^-e^{-\gamma z})$$

Em que $I^+ = \frac{\gamma}{Z}V^+$ e $I^- = \frac{\gamma}{Z}V^-$ também são constantes a determinadas, pela equação da corrente ou através das constantes V^+ e V^-. Ainda podemos fazer uma análise dimensional em:

$$\frac{\gamma}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{ZY}{Z^2}} = \sqrt{\frac{Y}{Z}}$$

O que nos dá:

$$\left[\frac{\gamma}{Z}\right] = \text{ohm}^{-1}$$

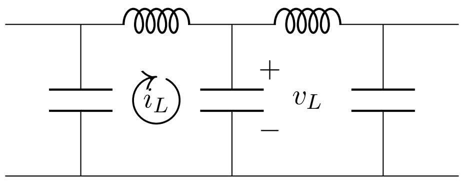
Que é o que esperamos pela Lei de Ohm.

Em resumo temos:

$$V(z) = V^+e^{-\gamma z} + V^-e^{\gamma z}$$
$$I(z) = I^+e^{-\gamma z} - I^-e^{\gamma z}$$

1.7 Conceito de Perturbação

- Uma perturbação move-se a partir de uma fonte ao longo do tmepo
- O meio pode não apresentar movimento na direção de propagação
- Propagação de onda eletromagnética
  - Não é necessário meio físico
  - Há propagação no vácuo
- Tipos de ondas
  - Ondas Mecânicas
  - Ondas Eletromagnêticas



O que se move com velocidade v?

- À medida que o tempo passa, a corrente no primeiro indutor carrega o capitor seguinte
- A variação da tensão no capacitor provoca a variação da corrente no indutor seguinte
- Resultado:
  - A perturbação elétrica se propaga com velocidade v_f ao longo da linha de transmissão

O que acontece quando andamos um comprimento de onda na linha de transmissão?

$$v^+(z,t) = V^+\cos(\omega t - \beta z) = V^+\cos(\beta z - wt)$$
$$v^+(z+\lambda,t) = V^+\cos(\beta z + \beta\lambda - \omega t) = V^+\cos(\beta z - \omega t + 2\pi) = V^+\cos(\beta z - \omega t)$$

Assim temos:

$$\beta\lambda = 2\pi$$
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Onde β é a constante de fase dada em [rad/unid.comprimento] ou [unid.comprimento]$^{-1}$.

1.8 Constante de propagação e atenuação

Se temos uma linha com perdas, existe uma atenuanção da tensão/corrente ao longo do eixo z;

$$V^+(z) = V^+e^{-\gamma z} = V^+e^{-(\alpha+j\beta)z}$$
$$V^+(z) = V^+e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$
$$v^+(z,t) = V^+e^{-\alpha z}cos(wt - \beta z)$$

Onde:

α: constante de atenuanção: [neper/metro] ou [dB/metro]

β: constante de fase :[rad/metro] ou m^-1

$V^+e^{-\alpha z}$: indica uma amplitude decrescendo exponencialmente

1.9 Linha de transmissão sem perdas

Se lembrarmos que $\gamma = ZY$, podemos dizer:

$$\frac{\gamma}{Z} = \sqrt{\frac{Y}{Z}} = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} = \sqrt{\frac{j\omega C}{j\omega L}} = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Invertendo a equação anterior, encontramos a impedância característica, Z_0 da linha:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}[\text{ohm}]$$

De γ:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Em uma linha sem perdas, $R = G = 0$:

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = \sqrt{-\omega^2 LC} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta$$
$$\beta = \omega\sqrt{LC} = \frac{\omega}{V_{fase}} \quad [m^{-1}]$$

Então em uma linha de transmissão sem perdas temos:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z}$$
$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{+j\beta z}$$

Podemos aproximar linhas, que operam em frequências maiores que $100kHz$, em que $\omega L \gg R$ e $\omega C \gg G$ como linhas sem perdas em que $Z_{0,af} \equiv Z_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}}$. E linhas operando em frequências de aproximadente 1 kHz em que $\omega L \ll R$ e $\omega C \ll G$ como puramente resistivas, assim temos $z_{0,bf} \simeq \sqrt{\frac{R}{G}}$.

1.10 Coeficiente de Reflexão

$$\tau(z) = \frac{V^-(z)}{v^+(z)} = (\frac{V^-}{V^+})\frac{e^{\gamma z}}{e^{-\gamma z}} = \Gamma_0 \frac{e^{\gamma z}}{e^{-\gamma z}} = \Gamma_0 e^{2\gamma z}$$

Coeficiente de reflexão na carga, em $z = 0$ ($z < 0$ em direção ao gerador):

$$\tau(z = 0) = \frac{V^-}{V^+} \equiv \Gamma_0 = |\Gamma_0| e^{j\phi_r}$$
$$\tau(z) = |\Gamma_0| e^{2\gamma z + j\phi_r}$$

Para o caso sem perdas, isto é, $R = G = 0$, $\gamma = j\beta$:

$$\tau(z) = |\Gamma_0| e^{[j(2\beta z + \phi_r)]}$$

1.11 Impedância ao Longo de Linha sem perdas

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+(z) + V^-(z)}{I^+(z) - I^-(z)} = Z_0 \frac{V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z}}$$

$$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-j\beta z} + (V^-/V^+) e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - (V^-/V^+) e^{j\beta z}} = Z_0 \frac{e^- j\beta z - (V^-/V^+) e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - (V^-/V^+) e^{j\beta z}} = Z_0 \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma_0 e^{+j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma_0 e^{j\beta z}}$$

$$Z(z) = Z_0 \frac{(\cos\beta z - j\sin\beta z) + \Gamma_0(\cos\beta z + \sin\beta z)}{(\cos\beta z - j\sin\beta z) - \Gamma_0(\cos\beta z + j\sin\beta z)}$$

Dividindo por $\cos(\beta z)$ em ambos os lados:

$$Z(z) = Z_0 \frac{(1 - j\tan\beta z) + \Gamma_0(1 + j\tan\beta z)}{(1 - j\tan\beta z) - \Gamma_0(1 + j\tan\beta)} = Z_0 \frac{(1 + \Gamma_0) + tau_0(1 + j\tan\beta z)}{(1 - j\tan\beta z) - \Gamma_0(1 + j\tan\beta z)}$$

Dividindo por $(1 - \Gamma_0)/(1 + /tau_0)$,

$$Z(z) = Z_0 \frac{[(1 + \Gamma_0)/(1 - \Gamma_0)] - j\tan(\beta z)}{1 - j\,[(1 + \Gamma_0)/(1 - \Gamma_0)]\tan(\beta z)}$$

A expressão acima deve ser igual a impedância de carga em $z = 0$, i.e.

$$Z(z = 0) = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0}{1 - \Gamma_0} = Z_L$$

De onde obtemos o coeficiente de reflexão na carga:

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Mas,

$$\Gamma_0 = \frac{Z_l - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

E

$$\frac{1 + \Gamma_0}{1 - \Gamma_0} = \frac{Z_L}{Z_0}$$

Então:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_l - jZ_0\tan(\beta z)}{Z_0 - jZ_L\tan(\beta z)} \quad z \leq 0$$

1.12 Funções Hiperbólicas: Algumas relações

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$\tanh(jx) = j\tan x$$

$$\tan(jx) = j\tanh x$$

1.13 Impedância ao Longo da linha com Perdas

$$Z(z) = \frac{V^+(z) + V^-(z)}{I^+(z) + I^-(z)} = Z_0 \frac{e^{-\gamma z} + \Gamma_0 e^{\gamma z}}{e^- \gamma z - \Gamma_0 e^{\gamma z}}$$

Como $\sinh x = \frac{e^x - e^-x}{2}$ e $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, então, $e^{\pm kz} = \cosh(kz) \pm \sinh(kz)$, temos:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - Z_0 \tanh(\gamma z)}{Z_0 - Z_L \tanh(\gamma z)} \quad z \leq 0$$

Com $\gamma = \alpha + j\beta$

1.14 Potência e Potência média na Linha de Transmissão

A potência instantanêa em qualquer ponto da linha de transmissão é dada por:

$$p(z,t) = v(z,t)i(z,t) \quad W$$

A potência instantanêa transportada pela onda incidente é:

$$p^+(z,t) = v^+(z,t)i^+(z,t) \quad W$$

A potência transportada pela onda incidente é, portanto,

$$p_m^+ = \frac{1}{2} Re \left\{ V^+(z) \left[I^+(z) \right] * \right\}$$

$$p_m^+ = \frac{1}{2} Re \left\{ \left| V^+(z) \right|^2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{\left| V^+ \right|^2}{z_0} \quad W$$

Se a LT não possui perdas, a potência média entregue ao gerador, na entrada da linha, deve ser a mesma entregue pela linha à carga:

$$(p_m)_i = (p_m)_L \to \frac{1}{2} Re \left\{ V(-l) I^*(-l) \right\} = \frac{1}{2} Re \left\{ V(0) I^*(0) \right\}$$

1.15 Impedância ao longo da linha

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - jZ_0 tan(\beta z)}{Z_0 - jZ_L \tan(\beta z)} \quad z \leq 0$$

Ou, com $\gamma = \alpha + j\beta$

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - Z_0 \tanh(\gamma z)}{Z_0 - Z_L \tanh(\gamma z)} \quad z \leq 0$$

1.16 Terminação: Curto-circuito

Nesse caso, $Z_L = 0$.

$$Z(z=-l) = Z_0 \frac{0 + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j(0)\tan \beta l} = jZ_0 \tan(\beta L)$$
$$Z(z=-l) = jZ_0 \tan(\beta l)$$

Normalizando:

$$Z(z=-l)/(Z_0) = j\tan(\beta l) = jX$$

1.17 Terminação: Circuito Aberto

Nesse caso, $Z_L \to \infty$

$$Z(z=-l) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tan(\beta l)}{Z_0 + j\tan(\beta l)} = Z_0 \frac{1 + j(Z_0/Z_l)\tan(\beta l)}{(Z_0/Z_L) + j\tan(\beta l)} = -jZ_0 \cot(\beta l)$$

Normalizando:

$$\frac{Z(z=-l)}{Z_0} = -j\cot(\beta l) = -jX$$

1.18 Onda Estacionária: Módulo

Lembremos a solução para a equação de onda:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}$$

Usando o valor do coeficiente de reflexão, $\Gamma_0 = \frac{V^-}{V^+}$, podemos escrever:

$$V(z) = V^+(e^{-j\beta z} + \Gamma_0 e^{j\beta z})$$

Assim podemos escrever:

$$\begin{aligned}
|V(z)|^2 &= V(z)V(z)^* \\
&= \left[V^+ \left(e^{-j\beta z} + \Gamma_0 e^{j\beta z}\right)\right]\left[\left(V^+\right)^* \left(e^{j\beta z} + \tau_0^* e^{-j\beta z}\right)\right] \\
&= V^+ \left(V^+\right)^* \left(e^{-j\beta z} + \Gamma_0 e^{j\beta z}\right)\left(e^{j\beta z} + \Gamma_0^* e^{-j\beta z}\right) \\
&= \left|V^+\right|^2 \left(1 + \Gamma_0^* e^{-2j\beta z} + \Gamma_0 e^{j2\beta z} + \Gamma_0 \Gamma_0^*\right) \\
&= \left|V^+\right|^2 \left(1 + \Gamma_0^* e^{-j2\beta z} + \Gamma_0 e^{j2\beta z} + |\Gamma_0|^2\right)
\end{aligned}$$

Mas sabemos que:

$$\Gamma_0 = |\Gamma_0|\, e^{j\phi_r}$$

E consequentemente:

$$\Gamma_0^* e^{-j2\beta z} + \Gamma_0 e^{j2\beta z} = |\Gamma_0| \, e^{-j\phi_r} e^{-j2\beta z} + |\Gamma_0| \, e^{j\phi_r} e^{j\beta z} =$$
$$|\Gamma_0| \left[e^{-j(2\beta z + \phi_r)} + e^{j(2\beta z + \phi_r)} \right] = 2 \, |\Gamma_0| \cos\left(2\beta z + \phi_r\right)$$

Assim concluímos que:

$$|V(z)|^2 = \left|V^+\right|^2 \left[1 + |\Gamma_0|^2 + 2 \, |\Gamma_0| \cos\left(2\beta z + \phi_r\right)\right]$$

Máximo ocorre para $\cos(2\beta z + \phi_r) = 1$:

$$2\beta z_m ax + \phi_r = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$
$$|V(z)|^2_{max} = \left|V^+\right|^2 \left(1 + (\Gamma_0)^2 + 2 \, |\Gamma_0|\right) = \left|V^+\right|^2 \left(1 + |\Gamma_0|^2\right)$$

Finalmente, obtemos:

$$|V(z)|_{max} \equiv V_{max} = \left|V^+\right| (1 + |\Gamma_0|)$$

De forma análoga, o mínimo ocorre para $\cos\left(2\beta z + \phi_r\right) = -1$:

$$2\beta z_{min} + \phi_r = (2n + 1)\,\pi \quad , n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$
$$|V(z)|^2_{min} = \left|V^+\right|^2 \left(1 + |\Gamma_0|^2 - 2 \, |\Gamma_0|\right) = \left|V^+\right|^2 \left(1 - |\Gamma_0|^2\right)$$

Assim obtemos:

$$|V(z)|_{min} =\equiv V_{min} = \left|V^+\right| (1 - |\Gamma_0|)$$

1.19 Relação da Onda Estacionária (ROE)

$$ROE = \frac{|V(z)_{max}|}{|V(z)_{min}|} = \frac{|V^+| \, (1 + |\Gamma_0|)}{|V^+| \, (1 - |\Gamma_0|)} = \frac{(1 + |\Gamma_0|)}{(1 - |\Gamma_0|)}$$

$$ROE = \frac{|I(z)_{max}|}{|I(z)_{min}|} = \frac{|I^+| \, (1 + |\Gamma_0|)}{|I^+| \, (1 - |\Gamma_0|)} = \frac{(1 + |\Gamma_0|)}{1 - |\Gamma_0|}$$

Se $|\Gamma_0| = 0$ temos $ROE = 1$, o que significa um casamento de impedância. Caso $|\Gamma_0 = 1|$ temos $ROE \to \infty$ o que significa reflexão total. E sempre temos $ROE \geq 1$.