EESC • USP

Universidade de São Paulo

SEL0611- Fundamentos de Controle

Lista de Exercícios No.1

Pedro Morello Abbud

Número USP 8058718

Disciplina minsitrada por
Professor Doutor B.J.Mass

21 de Março de 2016

Exercícios

1. Um sistema cujo comportamento é definido ou especificado por uma equação diferencial ordinária é chamado "sistema dinâmico". Um sistema dinâmico com uma entrada $u(t)$ e uma saída $y(t)$ pode ser representado graficamente por um diagrama de blocos, caso nos interessemos apenas pelo comportamento da entrada, da saída, e da relação entre as mesmas.

   (a) Verifique se a figura acima contém informações relevantes.

   (b) O que poderia ser introduzido no lugar da Figura 1, no lugar da sigla E.D.O?

   Resolução:

   (a) A figura 1 nos mostra que em sistemas dinâmicos podemos correlacionar a entrada e a saída de um sistema dinâmico através de uma Equação Diferencial Ordinária. A fim de facilitar a visualização do dessa correlação, podemos usar a ferramenta gráfica chamada Diagrama de Blocos.

   (b) Podemos introduzir no lugar da sigla Equação Diferencial Ordinária, uma função de transferência, pois relaciona um conjunto de dados ou informações de entrada e os modifica em um novo conjunto de dados na saída. Quando temos sistemas casuais e lineares invariantes no tempo, a função de transferência relaciona a entrada e a saída através da transformada de Laplace.

2. Comprove que um sistema com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, cujo comportamento dinâmico é descrito por uma equação diferencial da forma:

   $$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} = u(t) \tag{1}$$

   tem uma função de transferência na forma:

   $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 s + a_o} \tag{2}$$

   Obs: Uma função de transferência só é definida para condições inicias nulas, i.e. para:

   $$y^{(0)}(0) = y^{(1)}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{3}$$

Resolução

Se sabemos que as transformadas de Laplace abaixo são verdadeiras:

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) \tag{4}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y^{(n)}\right\} &= s^n\mathcal{L}\{y\} - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0) \\ &= s^n\mathcal{L}\{y\} - \sum_{k=0}^{n-1}(s^{(n-1-k)}y^{(k)}(0)) \end{aligned} \tag{6}$$

E que a transformada de Laplace é linear como descrito abaixo:

$$\mathcal{L}\left\{af(t) + bg(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} \tag{7}$$

É fácil inferir que:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0\right\} = \mathcal{L}\left\{u(t)\right\} \tag{8}$$

$$= Y(s)\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dt} + a_0\right\} = U(s) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &= s^n - \sum_{k=0}^{n-1}(s^{(n-1-k)}y^{(k)}(0)) + \cdots \\ &+a_2\left(s^2 - sy(0) - y'(0)\right) + a_1\left(s - y(0)\right) + a_0 = \frac{U(s)}{Y(s)} \end{aligned} \tag{10}$$

Considerando todas as condições inicias zero, e tomando o inverso de cada lado, temos novamente a equação (2):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 s + a_o}$$

como queríamos demonstrar.

3. Para o sistema do exercício anterior verifique que a razão $Y(s)/U(s)$ não será independente de $U(s)$ quando as condições iniciais não forem todas nulas.

   Tal observação pode ser notada ao observar a propriedade básica que relaciona a derivada de uma função no tempo com seu equivalente em frequência, mostrados na equação 4, enxergamos ali que se a condição inicial não for nula, não poderemos manipular o termo $Y(s)$ de forma independente, pois qualquer constante não-nula dada pela condição inicial não é de fato multiplicada por esse termo.

4. Escreva um trecho de *MATLAB* que declare os polinômios do numerador e do denominador, e que determine e retorne a função de transferência abaixo.
   Escolha nomes que lhe convier e empregue o comando "tf " discutido em sala-de-aula.
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 1} \tag{11}$$

   Resolução

   Listing 1: Código em MATLAB para a função de transferência $g_1(s)$ associada a equação 11

```
        num=1
        denom= [1 0.2 5]
        g1=tf(num,denom)
```

5. Dada a equação diferencial ordinária (EDO):
$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 10x(t) \tag{12}$$

   onde $y(t)$ e $x(t)$ são respectivamente a saída e a entrada de um circuito; determine a função de transferência correspondente.

   Resolução

   Aplicando a transformando de Laplace em ambos os lados, obtemos:

$$\mathcal{L}\{y''(t) + 2y'(t) + 5y(t)\} = \mathcal{L}\{10x(t)\} \tag{13}$$
$$= s^2Y(S) + 2sY(S) + 5Y(S) = 10X(S) \tag{14}$$
$$= \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \tag{15}$$

   Que é a função de transferência correspondente do circuito.

6. Escolha nomes apropriados (letra minúscula é melhor) e escreva um trecho de *MATLAB* para declarar os polinômios do numerador e do denominador, e produzir a função de transferência associada a equação (11).

   Resolução

Listing 2: Código em MATLAB para a função de transferência $g_1(s)$ associada a equação 11

```
g1=tf(1,[1 0.2 1])
```