



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SEL0611- FUNDAMENTOS DE CONTROLE

Lista de Exercícios No.1

Pedro Morello Abbud

Número USP 8058718

Disciplina ministrada por
Professor Doutor B.J.Mass

16 de Março de 2017

Exercícios

1. Um sistema cujo comportamento é definido ou especificado por uma equação diferencial ordinária é chamado “sistema dinâmico”. Um sistema dinâmico com uma entrada $u(t)$ e uma saída $y(t)$ pode ser representado graficamente por um diagrama de blocos, caso nos interessemos apenas pelo comportamento da entrada, da saída, e da relação entre as mesmas.

- (a) Verifique se a figura acima contém informações relevantes.
- (b) O que poderia ser introduzido no lugar da Figura 1, no lugar da sigla E.D.O?

Resolução:

- (a) A figura 1 nos mostra que em sistemas dinâmicos podemos correlacionar a entrada e a saída de um sistema dinâmico através de uma Equação Diferencial Ordinária. A fim de facilitar a visualização do dessa correlação, podemos usar a ferramenta gráfica chamada Diagrama de Blocos.
 - (b) Podemos introduzir no lugar da sigla Equação Diferencial Ordinária, uma função de transferência, pois relaciona um conjunto de dados ou informações de entrada e os modifica em um novo conjunto de dados na saída. Quando temos sistemas casuais e lineares invariantes no tempo, a função de transferência relaciona a entrada e a saída através da transformada de Laplace.
2. Comprove que um sistema com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, cujo comportamento dinâmico é descrito por uma equação diferencial da forma:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} = u(t) \quad (1)$$

tem uma função de transferência na forma:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (2)$$

Obs: Uma função de transferência só é definida para condições iniciais nulas, i.e. para:

$$y^{(0)}(0) = y^{(1)}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (3)$$

Resolução

Se sabemos que as transformadas de Laplace abaixo são verdadeiras:

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) \quad (4)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y^{(n)}\} &= s^n\mathcal{L}\{y\} - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \\ &= s^n\mathcal{L}\{y\} - \sum_{k=0}^{n-1} (s^{(n-1-k)}y^{(k)}(0)) \end{aligned} \quad (6)$$

E que a transformada de Laplace é linear como descrito abaixo:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad (7)$$

É fácil inferir que:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0\right\} = \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (8)$$

$$Y(s)\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{d}{dt} + a_0\right\} = U(s) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &s^n - \sum_{k=0}^{n-1} (s^{(n-1-k)}y^{(k)}(0)) + \dots \\ &+ a_2(s^2 - sy(0) - y'(0)) + a_1(s - y(0)) + a_0 = \frac{U(s)}{Y(s)} \end{aligned} \quad (10)$$

Considerando todas as condições iniciais zero, e tomando o inverso de cada lado, temos novamente a equação (2):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

como queríamos demonstrar.

3. Para o sistema do exercício anterior verifique que a razão $Y(s)/U(s)$ não será independente de $U(s)$ quando as condições iniciais não forem todas nulas.

Tal observação pode ser notada ao observar a propriedade básica que relaciona a derivada de uma função no tempo com seu equivalente em frequência, mostrados na equação 4, enxergamos ali que se a condição inicial não for nula, não poderemos manipular o termo $Y(s)$ de forma independente, pois qualquer constante não-nula dada pela condição inicial não é de fato multiplicada por esse termo.

4. Escreva um trecho de *MATLAB* que declare os polinômios do numerador e do denominador, e que determine e retorne a função de transferência abaixo.

Escolha nomes que lhe convier e empregue o comando “tf ” discutido em sala-de-aula.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 1} \quad (11)$$

Resolução

Listing 1: Código em *MATLAB* para a função de transferência $g_1(s)$ associada a equação 11

1	num=1
2	denom= [1 0.2 5]
3	g1=tf (num,denom)

5. Dada a equação diferencial ordinária (EDO):

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 10x(t) \quad (12)$$

onde $y(t)$ e $x(t)$ são respectivamente a saída e a entrada de um circuito; determine a função de transferência correspondente.

Resolução

Aplicando a transformando de Laplace em ambos os lados, obtemos:

$$\mathcal{L}\{y''(t) + 2y'(t) + 5y(t)\} = \mathcal{L}\{10x(t)\} \quad (13)$$

$$= s^2Y(S) + 2sY(S) + 5Y(S) = 10X(S) \quad (14)$$

$$= \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \quad (15)$$

Que é a função de transferência correspondente do circuito.

6. Escolha nomes apropriados (letra minúscula é melhor) e escreva um trecho de *MATLAB* para declarar os polinômios do numerador e do denominador, e produzir a função de transferência associada a equação (11).

Resolução

Listing 2: Código em MATLAB para a função de transferência $g_1(s)$ associada a equação 11

```
1      g1=tf(1,[1 0.2 1])
```