Capítulo 1

Probabilidade

Objetivo: Definir um modelo estatístico que seja adequado à descrição e interpretação de fenômenos aleatórios.

1.0.1 Conceitos básicos

Experimentos ou fenômenos aleatórios (ε) : são os acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza, sob condições idênticas.

Exemplos :

- Lançamento de um dado.
- Lançamento de uma moeda.
- Tempo de vida útil de um componente eletrônico.

Espaço Amostral (Ω)**:** refere-se ao conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

Exemplos :

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

$\Omega_2 = \{c, k\}$ Sendo k cara, c coroa.

$\Omega_3 = [0, \infty\}$

Evento: qualquer subconjunto do espaço amostral Ω do experimento aleatório ε.

Notação: $A, B, C, D, \ldots, A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, \ldots$

Notamos que, como A é um evento então $A \subset \Omega$.

1.0.2 Tipos de Eventos

Evento Simples ou Elementar: é o evento formado por um único ponto do espaço amostral.

Exemplo: $A = \{w\}$.

Evento Composto: é o evento formado por dois ou mais pontos do espaço amostral.

Exemplo: $A = \{w_1, w_2, w_3\}$

Evento Certo: é o evento formado por todos os pontos amostrais.

Exemplo : $A = \Omega$

Evento Impossível : É o evento que não possuí elementos de Ω, isto é, evento vazio.

Notação : $A = \{\}$ ou $A = \emptyset$

Alguns Exemplos :

$A =$ Face do dado maior que 5.
$A = \{6\}$

$B =$ Face do dado ser par.
$B = \{2, 4, 6\}$

$C =$ Face do dado maior ou igual a 1.
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

$D =$ Face do dado maior que 6.
$D = \{\}$ ou $D = \emptyset$

1.0.3 Operação com Eventos

Para ilustrar graficamente eventos é costume utilizar-se dos mesmos diagramas de Venn utilizados na teoria de conjuntos.

Considere eventos definidos em um espaço amostral Ω de um experimento aleatório ε.

União de eventos $(A \cup B)$: é o evento formado por todos os elementos que pertencem a A, ou B, ou ambos.

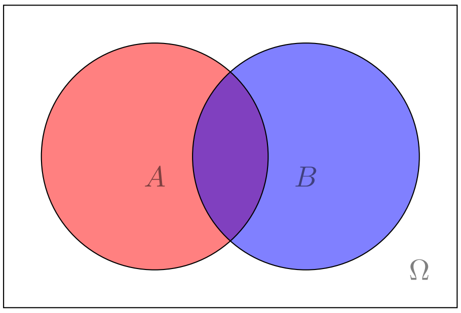


Figura 1.1:

Intersecção de eventos $(A \cap B)$: é o evento formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

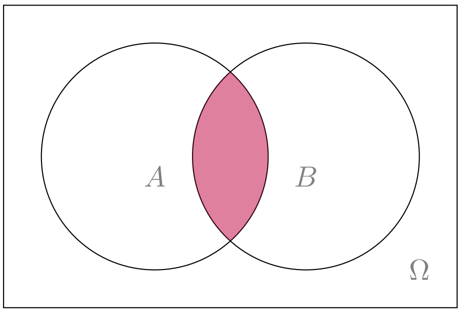


Figura 1.2:

Casos Particulares :

1. Se $B \subset A$, então $A \cap B = B$

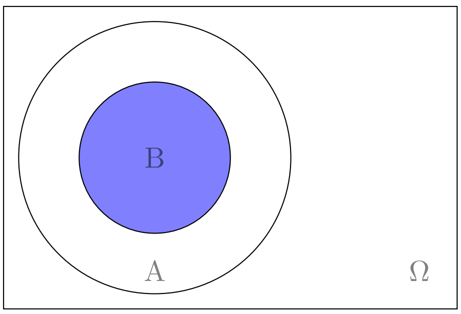


Figura 1.3:

2. Se A e B são eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos (não possui elementos comuns), então $A \cap B = \emptyset$.

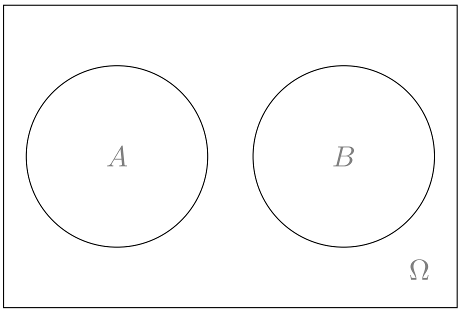


Figura 1.4:

Diferença de eventos ($A - B$) : é o evento formado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B.

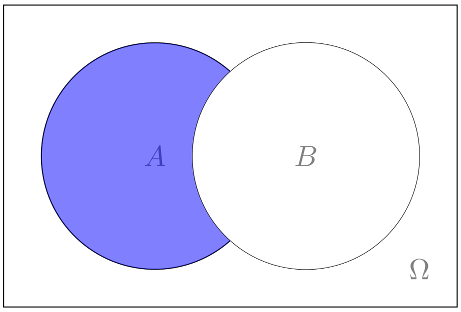


Figura 1.5:

Evento Complementar ($\bar{A}$ ou A^c) : é o evento formado por todos os elementos de Ω que não pertencem a A.

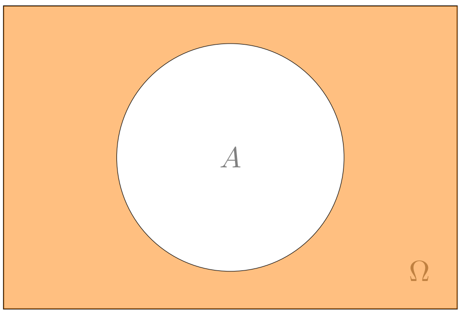


Figura 1.6:

Alguns exemplos de eventos complementares :

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

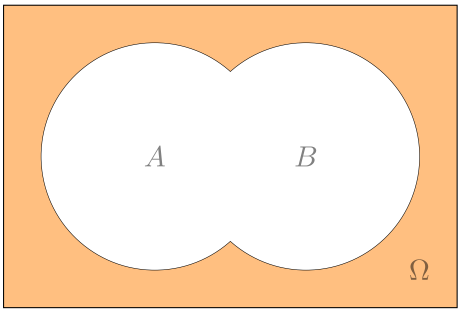


Figura 1.7:

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

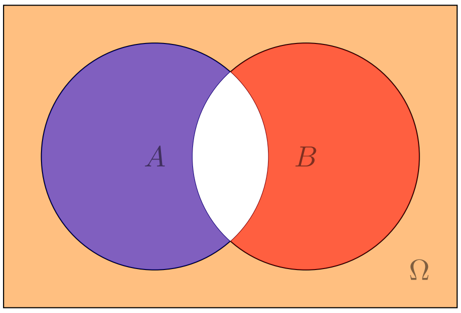


Figura 1.8:

Os itens (a) e (b) são conhecidos como Lei de Demorgan.

(c) $A \cup B^c = (A \cap B) \cup B^c = A \cup (A \cup B)^c$

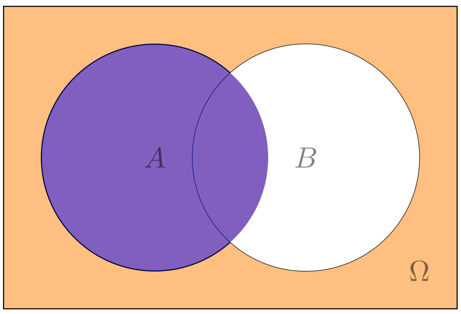


Figura 1.9:

(d) $A \cap B^c = B^c \cap (A \cup B)$

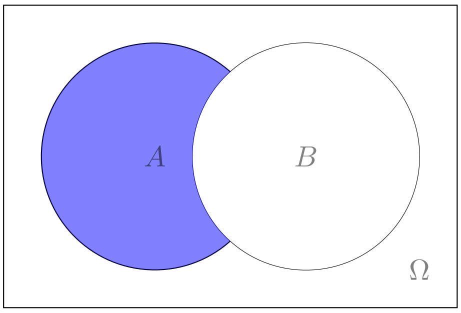


Figura 1.10:

Outras operações :

I. $A \cap \emptyset = \emptyset$
II. $A \cup \emptyset = A$
III. $\emptyset^c = \Omega$
IV. $\Omega^c = \emptyset$
V. $(A^c)^c = A$
VI. $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
VII. $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

Exemplo : Escrever $A \cup B$ como união de eventos disjuntos.

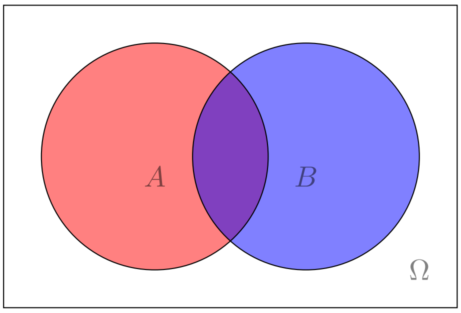


Figura 1.11:

Situação 1: $(A \cup B) = A \cup (A^c \cap B)$
Situação 2: $A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$

Considerando a Situação 1 , vamos verificar se os eventos são disjuntos. Os eventos serão disjuntos se $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$. Vericando, temos:

$$(A \cap A^c) \cap B = \emptyset$$
$$\emptyset \cap B = \emptyset$$

1.1 Definições de Probabilidade

1.1.1 Probabilidade em Espaços Equiprováveis

Se um experimento aleatório tiver n resultados possíveis, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, mutuamente exclusivos e igualmente possíveis e se um evento A tiver n_A desses resultados, então a probabilidade do evento A, representado por $P(A)$, é dada por:

$$P(A) = \frac{N_a}{n}, \quad A \subset \Omega \tag{1.1}$$

Sendo que Ω é definido como todo o espaco amostral, n_A o número de casos favoráveis A e n o número de casos possíveis.

Exemplo: Dado o lançamento de duas moedas honestas, calcule a probabilidade de:

(a) Obter duas faces iguais.
(b) Obter pelo menos uma face diferente de cara
(c) Obter pelo menos uma face diferente.

	c	k
c	(c,c)	(c,k)
k	(k,c)	(k,k)

$$\Omega = \{(c,c); (c,k); (k,c); (k,k)\}$$

(a) $A =$ Faces iguais

$$A = \{(c,c); (k,k)\}$$
$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

(b) $B =$ Pelo menos uma face diferente de cara.

$$B = \{(c,k); (k,c); (k,k)\}$$
$$P(B) = \frac{3}{4}$$

(c) $C =$ Obter pelo menos uma face diferente

$$C = \{(c,k); (k,c)\}$$
$$P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

1.1.2 Probabilidade Frequentista

Um experimento é realizado n vezes, sendo n um número grande. O evento A ocorre exatamente N_a vezes com: $0 \leq N_a \leq n$. A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é uma forma de aproximar a probabilidade do evento A, ou seja:

$$f_r(A) = \frac{n_a}{n} \tag{1.2}$$

Quando $n \to \infty$, $f_r(A)$ aproxima-se de $P(A)$.

Exemplo :

Geração de n número inteiros entre 1 e 5, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, e o evento de interesse é a ocorrência do número 4.

1.1.3 Probabilidade axiomática

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número $P(A)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

I. $P(A) > 0, \forall A \subset \Omega$

II. $P(\Omega) = 1$

III. Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$, então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.3}$$

Propriedades :

(a) $0 \leq P(A) \leq 1$

(b) $P(\emptyset) = 0$

(c) Se $A \subset \Omega$ então $P(A) = 1 - P(A^c)$

(d) Se $A \subset B \subset \Omega$, então $P(A) \leq P(B)$

(e) Se $A, B \subset \Omega$, então vale:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cup \bar{A}) \tag{1.4}$$

(f) Se $A, B \subset \omega$, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.5}$$

(g) Se $A, B, C \subset \omega$, então:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ -P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Exemplo: Mostre a propriedade (g).

Use o fato de que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

$$\begin{aligned} & P\left(A \cup B \cup C\right) \\ & = P\left(A \cup (B \cup C)\right) \\ & = P(A) + P(B \cup C) - P\left(A \cap (B \cup C)\right) \\ & = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right) \\ & = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ & - \left(P\left(A \cap B\right) + P\left(A \cap C\right) - P\left((A \cap B) \cap (A \cap C)\right)\right) \\ & = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Exercício: Considere um experimento aleátorio e os eventos A e B associados, tais que:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{2} \\ P(B) &= \frac{1}{3} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Calcule as probabilidades:

(a) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(b) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(a)

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - \{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(A^c \cup B^c) &= P\left((A \cap B)^c\right) \\ &= 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ou de maneira similar:

$$\begin{aligned}
P(A^c \cup B^c) &= P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) \\
&= (1 - P(A)) + (1 - P(B)) - \frac{5}{12} \\
&= (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{3}) - \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

1.1.4 Probabilidade Condicional

Sejam A e B dois eventos definidos em um mesmo espaco amostral Ω. A probabilidade de A dado que ocorre o evento B, denotada por $P(A/B)$ é definida por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \tag{1.7}$$

Consequentemente, podemos escrever:

Figura 1.12: Name

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) \tag{1.8}$$

Conhecida como regra do produto.

Observação

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P\,(A \cap B)}{P(A)} \tag{1.9}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) \tag{1.10}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(B/A) \times P(A) && (1.11) \\
&= P(A/B) \times P(B) && (1.12)
\end{aligned}$$

Exemplo : Suponha que um escritório possua 100 computadores de tipos Desktop (D) e Laptop (L) sendo alguns novos (N) e outro com um certo tempo de uso (U), distribuídos da seguinte forma:

	D	L	Total
N	40	30	70
U	20	10	30
Total	60	40	100

Um funcionário escolhe um laptop ao acaso. Qual a probabilidade de que seja novo?

Resolução:

$$P(N/L) = \frac{P(N \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{3}{4}$$

Obs: $P(A \cap B)$ e $P(A/B)$

1.2 Arvore de Probabilidades

Sejam $A, B \subset \Omega$. Uma representação bastante útil é a àrvore de probabilidades.

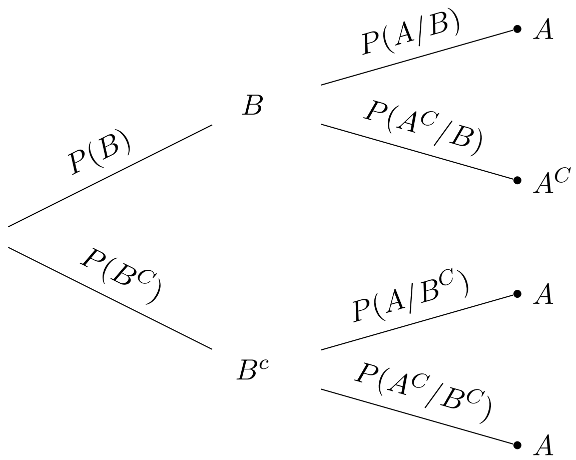


Figura 1.13: Um exemplo de uma àrvore de probabilidades

Exemplo : No exemplo anterior, qual a probabilidade de um funcionário selecionar um desktop usado?

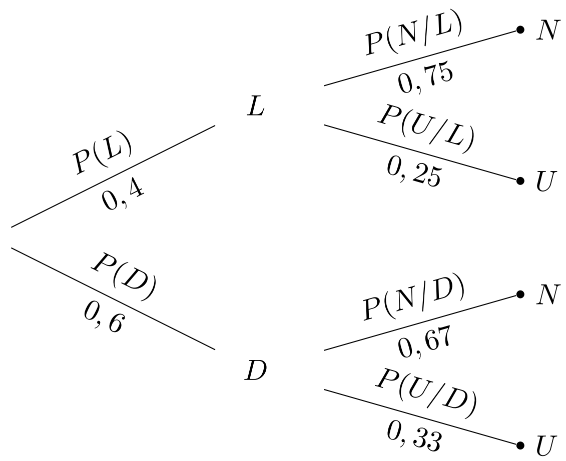


Figura 1.14: Arvore de probabilidade Desktop/Laptop/Usado/Novo

$$P(D \cap U) = P(D/U)P(U)$$

Ou:

$$P(D \cap U) = P(U/D)P(D) = \frac{20}{60} \times \frac{60}{100} = 0,2$$

Algumas propriedades :

(a) $P(\emptyset/B) = 0$

(b) Se $A \subset \Omega$, entao $P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$

(c) Se $A, C \subset \Omega$, então:

$$P(A \cup C/B) = P(A/B) + P(C/B) - P(A \cap C/B) \quad (1.13)$$

1.3 Independência de Eventos

Definição : Dois eventos A e B definidos em Ω são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A. Isto é:

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B) > 0. \quad (1.14)$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Observação :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Exemplo : Um estudante se inscreve em dois processos seletivos com probabilidade 30% de ser aprovado na empresa I e 50% de ser aprovado na empresa II. Se as aprovações são independentes, qual a probabilidade de que ele seja aprovado em pelo menos uma?

Definindo os eventos:

A: O estudante ser aprovado na empresa I.

B: O esutdante ser aprovado na empresa II.

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.30 \\ P(B) &= 0.50 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= 0.3 + 0.5 - 0,3 \times 0,5 \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

1.3.1 Independência de três eventos

Definição: Os eventos A,B,C em Ω são independentes se e somente se:

(a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

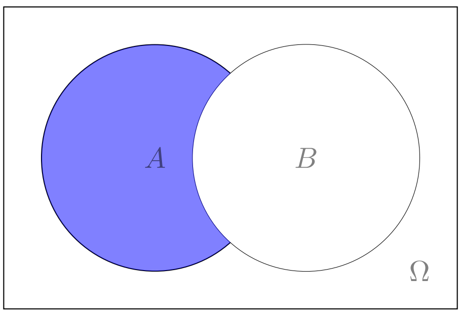
(b) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

(c) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

(d) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Resultado : Se A,B são eventos independentes em Ω, então:

1. A e B^c são independentes.
2. A^c e B são independetes.
3. A^c e B^c são independentes.



Prova: Resultado 1

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \times P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) \times P(B^c) \end{aligned}$$

Observação : Não confundir eventos mutuamente exclusivos com eventos independentes. Ou seja, não confunda $P(A \cap B) = 0$ com $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemplo : Um atirador acerta 80% dos disparos e outro acerta, nas mesmas condições acerta 70%. Qual a probabilidade de o alvo ser acertado se ambos os atiradores disparam simultaneamente?

A: Atirador 1 acerta o alvo

B: Atirador 2 acerta o alvo

Resolução : A intersecção de dois eventos independentes é dada pela multiplicação de suas probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &= 0.8 \times 0.7 = 0.56 \end{aligned}$$

Logo a probabilidade de interesse é dada pela a união de dois eventos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B - P(A) \times P(B) \\ &= 0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7 = 0.94 \end{aligned}$$

1.4 O Teorema de Bayes

1.4.1 Partições do espaco amostral

Definição : Uma coleção de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω se:

I. $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$, com $i, j = 1, \ldots, k$

II. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = \Omega$

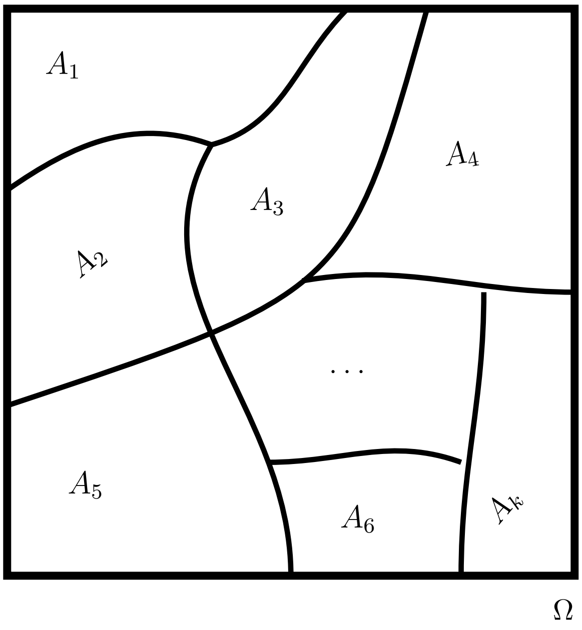


Figura 1.15: Espaco amostral com k partições.

1.4.2 Lema da probabilidade total

Definição: Se $A_1, \dots, A_k$ é uma partição de Ω, então para qualquer evento B de Ω, vale:

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} (B \cap A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Vejamos:

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap B) \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap B)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i) \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.4.3 Fórmula de Bayes

Definição Se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formam uma partição de Ω e $B \subset \Omega$ com $P(B) > 0$, então:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} P(B/A_j)P(A_j)} \tag{1.18}$$

Exemplo 1 :

Uma montadora trabalha com dois fornecedores A e B de uma determinada peça. Sabe-se que 10% e 5% das peças provenientes dos fornecedores A e B respectivamente, estão fora de especificação. A montadora recebe 30% das peças do fornecedor A e 70% do fornecedor B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhido ao acaso, calcule:

(a) A probabilidade que ela esteja fora de especificação.

(b) Se uma peça é escolhida ao acaso está fora de especificação, qual é a ṕrobabilidade de que tenha sido fornecido por A?

A: Peça é do fornecedor A.

B: Peça é do fornecedor B.

C: Peça está fora de especificação.

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.3 \\ P(B) &= 0.7 \\ P(C/A) &= 0.10 \\ P(C/B) &= 0.05 \end{aligned}$$

(a) $P(C) = ?$

Usando o lema da probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(C) &= P\left[(A \cap C) \cup (B \cap C)\right] \\ P(C) &= P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ &= P(C/A)P(A) + P(C/B)P(B) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0.05 \times 0.7 \\ &= 0.065 \end{aligned}$$

(b) $P(A/C) = ?$

$$\begin{aligned}P(A/C) &= \frac{P(A\cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C/A)P(A)}{P(C/A)P(A)+P(C/B)P(B)} \\ &= \frac{0.1\times 0.3}{0.065} = 0.4615\end{aligned}$$

Exemplo 2: Estudos reveleram que 40% dos estudantes universitários já experimentaram algum tipo de droga ilícita. Uma universidade resolve aplicar um teste com detector de mentira para descobrir se seus estudantes já usaram algum tipo de droga ilícita. Sabemos que se o estudante já usou algum tipo de droga o detector vai dar positivo com certeza. Porém, sabemos que o detector erra, ou seja, apresenta um falso positivo em 5% quando aplicado em estudantes que nunca usaram drogas.
Se um estudante é selecionado aleatoriamente e o teste aplicado nele deu positivo, qual a probabilidade de ele já ter usado algum tipo de droga?

A: O estudante já usou droga.

B: O detector deu positivo.

$$\begin{aligned}P(A) &= 0.4 \\ P(B/A) &= 1 \\ P(B/A^c) &= 0.05 \\ P(A/B) &= ?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A/B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)\times P(A)+P(B/A^c)\times P(A^c)} \\ &= \frac{1\times 0.4}{1\times 0.4+0.05\times 0.6} \\ &= 0.93\end{aligned}$$

Exercício

Para selecionar seus funcionários uma empresa oferece aos candidatos um curso de treinamento durante uma semana. No final do curso, eles são classificados em uma prova; 25% são classificados como bons (B), 50% como médios (M) e os 25% restantes como fracos (F). A empresa pretende substituir o treinamento por um teste contendo questões de conhecimentos gerais. Para isso gostaria de conhecer qual a probabilidade de um indíviduo aprovado no teste ser considerado fraco (F), se fizesse o curso. Assim, antes do início do curso, os candidatos do curso, foram submetidos ao teste e receberam o conceito aprovado (A) ou reprovado (R). No final do curso, obtiveram-se as seguintes probabilidades condicionais:

$$P(A/B) = 0,8$$
$$P(A/M) = 0,5$$
$$P(A/F) = 0,2$$

Resposta: 0.1

1.5 Variáveis Aleatórias

Definição : Seja um experimento aleatório e Ω o espaço amostral associado a esse experimento. Uma função $X(\omega)$ que associa cada elemento $\omega \in \Omega$ a um número real $x = x(\omega)$ é denominada variável aleatória (v.a.).

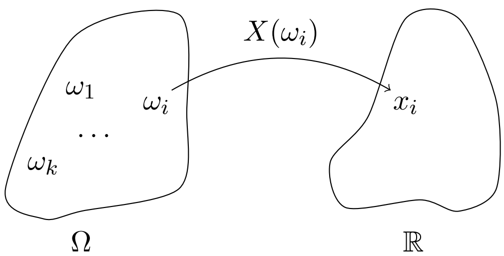


Figura 1.16: Representação da variável aleatória que associa ω_i a um x_i

Notação : $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Exemplo : Lançamento de uma moeda duas vezes. A v.a. , X, é o n^o de caras.

	c	k
c	(c,c)	(c,k)
k	(k,c)	(k,k)

$$\Omega : \{\underbrace{cc}_{\omega_1};\underbrace{kc}_{\omega_2};\underbrace{kc}_{\omega_3};\underbrace{kk}_{\omega_4}\}$$

$$X : \quad n^o \text{ de caras}$$

$$X(\omega_1) = X((c,c)) = x(\omega_1) = 2$$
$$X(\omega_2) = X((k,c)) = x(\omega_2) = 1$$
$$X(\omega_3) = X((c,k)) = x(\omega_3) = 1$$
$$X(\omega_4) = X((k,k)) = x(\omega_4) = 0$$
$$R_x : \{0,1,2\}$$
$$P(x=0) = ?$$
$$P(x=1) = ?$$
$$P(x=2) = ?$$

$$X = \begin{cases} 0, & \text{se ocorrer } (k,k) \\ 1, & \text{se ocorrer } (c,k) \text{ ou } (k,c) \\ 2, & \text{se ocorrer } (c,c) \end{cases}$$

Exemplo : Em uma linha de produção, peças são classificadas em defeituosas ou não defeituosas. Podemos definir a v.a. X como:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se a peça é defeituosa} \\ 0, & \text{a peça não é defeituosa} \end{cases}$$

Observação : Uma v.a. X desse tipo é chamada de v.a. de Bernoulli. Nesse caso, $\Omega = \{$peça defeituosa, peça não defeituosa$\}$

1.5.1 Classificação de Variáveis Aleatórias

Definição : Se a v.a. X assume valores em um conjunto finito ou infinito e numerável é chamado de variável aleatória discreta. Se X assume valores em um conjunto infinito não-enumerável é chamada de v.a. contínua.

Exemplos :

(a) X indica o n^o de residentes em um domicílio. X pode assumir valores em $\mathbb{N}$ e assim é chamada de v.a. discreta.

(b) Y indica o tempo de vida (em horas) de um equipamento eletrônico. Y pode assumir valores em $\mathbb{R}^+$ e assim é chamado de v.a. contínua.

1.5.2 Função Massa de Probabilidade

Definição : Seja X uma v.a. discreta que assume valores em $R_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. A cada possível x_i, associamos um número,

$$p_i = p(x_i) = P(X = x_i) = P(X(\omega_i) = x_i),$$
$$\omega_i \in \Omega \quad , x_i \in R_x$$

dito probabilidade de x_i. A função $p(x)$ é definida como função massa de probabilidade (f.m.p) de X.

As probabilidades $p(x_i)$ devem satisfazer as seguintes condições:

(i) $p(x_i) > 0, \forall x_i \in R_x$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Interpretação da f.m.p. :

Seja X uma v.a. discreta com $R_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ e $p(x_i) = p_i$.

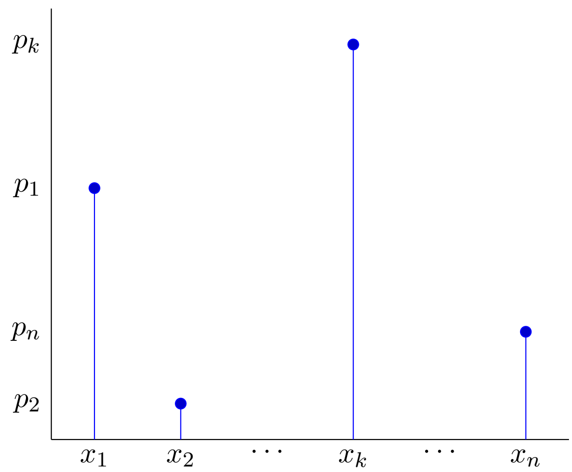


Figura 1.17: Exemplo de uma função massa probabilidade

Exemplo: Lançamento de uma moeda duas vezes e x é o número de caras.

$$\Omega = \{\underbrace{cc}_{2}; \underbrace{ck}_{1}; \underbrace{kc}_{1}; \underbrace{kk}_{0}\}$$
$$R_x = \{0, 1, 2\}$$

A f.m.p de X é dada por:

x	0	1	2
$P(x) = P(X = x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

$$p(0) = P(X = 0) = P((k,k)) = \frac{1}{4}$$
$$p(1) = P(X = 1) = P((c,k)) + P((k,c)) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$p(2) = P(X = 2) = P((c,c)) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = x) = \begin{cases} 1/4, & \text{se sair } kk \text{ ou } cc \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 2 \\ 1/2, & \text{se sair } ck \text{ ou } kk \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Exemplo: Um carregamento de 8 computadores contém 3 defeituosos. Se uma empresa faz uma compra aleatória de dois computadores, apresente a f.m.p para o número de computadores com defeitos adquiridos.

$$X : \text{número de computadores defeituosos}$$
$$R_x = \{0, 1, 2\}$$
$$p(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = 5/14$$

Obs:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = 15/28$$
$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = 3/28$$

Então a f.m.p. é:

x	0	1	2	Total
$P(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

Exemplo: A demanda diária de um item é uma v.a. discreta com f.m.p. dada por:

$$P(D = d) = \frac{2^d k}{d!}, \quad d = 1, 2, 3, 4 \tag{1.19}$$

(a) Determine a constante k

(b) Calcule $P(D > 2)$

(a) Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p(x_i) &= 1, \forall x_i \in R_x \\
P(D=1) + P(D=2) + P(D=3) + P(D=4) &= 1 \\
\frac{2^1 k}{1!} + \frac{2^2 k}{2!} + \frac{2^3 k}{3!} + \frac{2^4 k}{4!} &= 1 \\
2k + 2k + \frac{4k}{3} + \frac{2k}{3} &= 1 \\
4k + \frac{6k}{3} &= 1 \\
6k &= 1 \\
k &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Então o f.m.p de X é:

$$P(D = d) = \frac{2^d}{6d!}, \quad d = 1, 2, 3, 4$$

(b)

$$\begin{aligned}
P(D > 2) &= P(D \geq 3) \\
&= P(D = 3) + P(D = 4) \\
&= \frac{2^3}{6 \times 3!} + \frac{2^4}{6 \times 4!} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
P(D > 2) &= 1 - P(D \leq 2) \\
&= 1 - \{P(D = 1) + P(D = 2)\} \\
&= 1 - P(D = 1) - P(D = 2)
\end{aligned}$$

Obs: $R_x : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots + P(X = 5)$$

ou

$$\begin{aligned}
P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\
&= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}
\end{aligned}$$

1.5.3 Densidade de Probabilidade

Definição: Seja X uma v.a. contínua que assume valores em $R_x, R_x \subset \mathbb{R}$. A função $f(x)$ é a função densidade de probabilidade (f.d.p) para x, se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $f(x) \geq 0, \forall x \in R_x$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{R_x} f(x)\mathrm{d}x = 1$

(iii) $\displaystyle P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

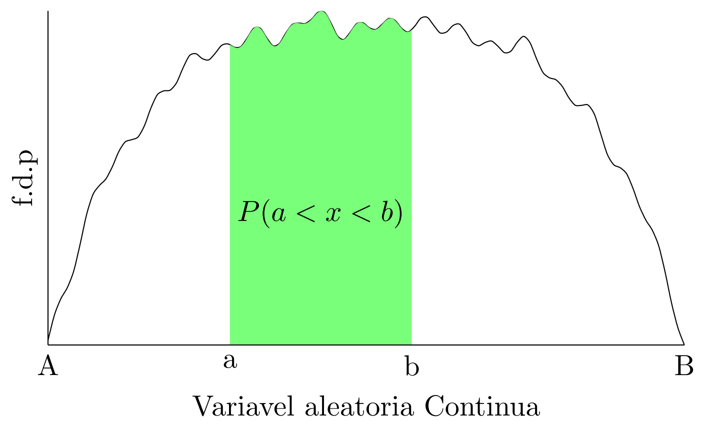


Figura 1.18: Ilustração da f.d.p. de uma v.a. X.

Obs: Se X é uma v.a. contínua assumindo valores em R_x, então para toda $a \in R_x$, temos:

(a) $P(x = a) = 0$

(b) $P(x > a) = P(x \geq a)$

(c) $P(x < a) = P(x \leq a)$

(d) $P(x > a) = 1 - P(x \leq a)$
$= 1 - P(x < a)$

(e) $P(x < a) = 1 - P(x \geq a)$
$= 1 - P(x > a)$

Outros exemplos:

$$P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b)$$
$$= P(a < x \leq b) = P(a < x < b)$$

Obs: Só vale para v.a. contínua.

Exemplo: O tempo de produção de um componente (em minutos) é uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{4}, & \text{se } 2 < x < 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.20}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma f.d.p

(b) Calcule a probabilidade de que o tempo de produção de um componente seja menor do que 3 minutos.

(a) Devemos verificar:

i. $f(x) \geq 0, \forall x \in R_x$

ii. $\int_{R_x} f(x)\mathrm{d}x = 1$

Verificando:

i. $f(x) \geq 0, \forall x \in 2 < x < 4$

ii.

$$\int_2^4 \frac{5-x}{4}\mathrm{d}x = 1$$
$$\int_2^4 5\mathrm{d}x - \int_2^4 x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\left(5x|_4^2 - \frac{x^2}{2}\bigg|_4^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(5(4-2) - \frac{1}{2}(16-4)\right) = 1$$

Portanto, $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade

(b)

$$P(X < 3) = \int_{-\infty}^3 f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^2 0\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{5-x}{4}\mathrm{d}x$$

$$P(X < 3) = \int_2^3 \frac{5-x}{4}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\left(\int_2^3 5\mathrm{d}x - \int_2^3 x\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 \times 1 - \frac{1}{2} \times 5\right) = \frac{5}{8}$$

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Verifique se $f(x)$ é uma f.d.p

(b) $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$

(c) $P\left(X \leq \frac{1}{2} / \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$

(a) Devemos verificar:

i. $f(x) \geq 0, \forall x \in R_x$

ii. $\int\limits_{R_x} f(x)\mathrm{d}x = 1$

Verificando:

i.

$$f(x) \geq 0, \forall x \in 0 \leq x \leq 1$$

ii.

$$\int\limits_{R_x} 2x\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2x^2}{2}\bigg|_1^0 = 1$$

Portanto, $f(x)$ é uma f.d.p.

(b)

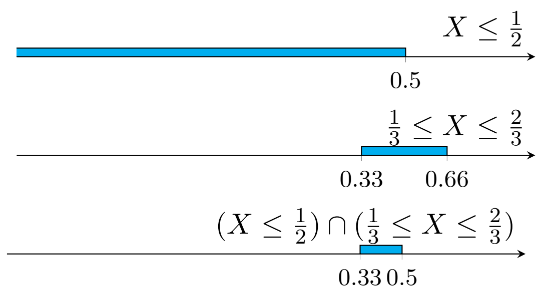
$$P(X \leq 1/2) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_x(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\mathrm{d}x$$

$$= x^2\big|_{1/2}^{0}$$

$$= \frac{1}{4}$$

(c) Probabilidade Condicional



$$
\begin{aligned}
P(A/B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\left[P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)\cap\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)\right]}{P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)} \\
&= \frac{P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2})}{P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})} = \frac{\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2x\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2x\,\mathrm{d}x} = \frac{x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}}{x^2\Big|_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}}} = \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

1.5.4 Função distribuição acumulada discreta

Definição: Seja X uma v.a. discreta que assume valores em R_x e com f.m.p. $p(x) = P(X = x)$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a função de distribuição acumulada(f.d.a.) de X, denotada por $F_X(x)$, é definida como:

$$
F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{x_i \in R_x \\ \forall x_i \leq x}} P(X = x_i) = \sum_{\substack{x_i \in R_x \\ \forall x_i \leq x}} p(x_i) \tag{1.21}
$$

De forma mais clara, temos como exemplo:

$$
\begin{aligned}
R_x &= \{0,1,2,3,4\} \\
F_X(2,3) &= P(X \leq 2,3) \\
&= P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Conidere o lançamento de uma moeda duas vezes e X é o número de caras. Já sabemos que a f.m.p. de X é dada por:

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

com $R_x = \{0, 1, 2\}$.
De forma equivalente podemos escrever:

$$
p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se} \quad x = 0,2 \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

A f.d.a. de X é dada por:

$$
F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}
$$

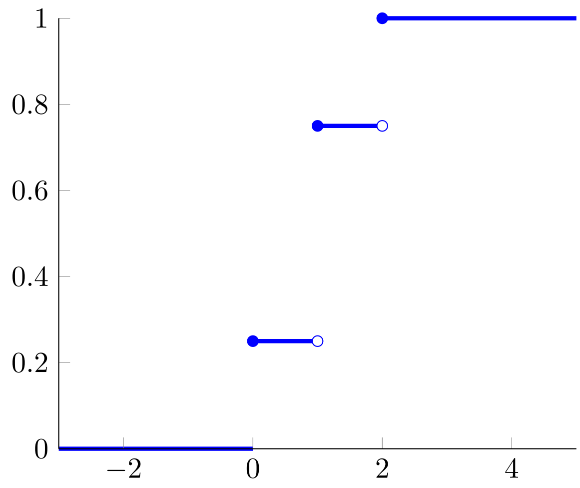


Figura 1.19: Representação gráfica da Função distribuição acumulada discreta, $F_X(x)$

1.5.5 Função distribuição acumulada contínua

Definição: Seja X uma v.a. contínua que assume valores em R_x e com f.d.p. $f(x)$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a f.d.a. de X, denotada por $F_X(x)$ é definida como:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.22}$$

Observação: $F_X(x) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a \in \mathbb{R}$

Como consequência imediata podemos escrever dois resultados:

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F_X(b) - F_X(a) \tag{1.23}$$

e

$$f(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}, \quad \text{se a derivada existir} \tag{1.24}$$

Exemplo: Considere a f.d.p dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < X < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine $F_X(x)$ e use-a para avaliar $P(0 \leq x < 1)$.

A f.d.a. de X é dada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{t^2}{3}\,\mathrm{d}t, \quad -1 < t < 2$$
$$\int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}dt = \frac{1}{9}\, t^3\Big|_{-1}^{x} \;\therefore\; F_X(x) = \frac{1}{9}\left(x^3+1\right)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{9}(x^3+1), & -1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$P(0 \leq X < 1) = ?$$
$$P(0 \leq X < 1) = F_X(1) - F_X(0)$$
$$P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = \frac{1}{9}(1^3+1) - \frac{1}{9}(0^3+1)$$
$$P(0 \leq X < 1) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Ou

$$P(0 \leq X < 1) = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{3}\mathrm{d}x$$

1.5.6 Propriedades de f.d.a

(a) $F_X(x)$ é uma função contínua.

(b) $F_X(x)$ é uma função monótona não decrescente.

(c) $0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

(e) $P(X \leq a) = F_X(a)$

(f) $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$

(g) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua com f.d.p dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2, 0 < x < 1 \\ 0, \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Achar k.

(b) Determine $F_X(x)$.

(c) $P(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2})$

(a)

$$\int\limits_{R_x} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$k\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{k}{3}\,x^3\Big|_0^1 = 1$$

$$\frac{k}{3} = 1 \therefore k = 3$$

Logo, a f.d.p de X é:

$$f_x(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(b) $F_X(x) =?$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{X} f_x(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x 3t^2\mathrm{d}t = t^3\Big|_x^0 = x^3$$

Assim, a f.d.a. é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{27} = \frac{19}{216}$$

Ou

$$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 3x^2\mathrm{d}x = \frac{19}{216}$$

Exemplo:

Seja F_X dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & 1 \leq x < 2 \\ 5/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Determine:

(a) $P(1 < X \leq 3)$
(b) $P(X > 2)$
(c) Encontre a $p(x)$

(a)

$$P(1 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1) = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - F_X(2) \\ = 1 - F_X(2) &= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} F_X(0) = P(X \leq 0) &= \frac{1}{8} \\ P(X = 0) &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X(1) = P(X \leq 1) &= \frac{1}{2} \\ P(X = 0) + P(X = 1) &= \frac{1}{2} \\ P(X = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X(2) = P(X \leq 2) &= \frac{5}{8} \\ P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) &= \frac{5}{8} \\ F_2(1) + P(X = 2) &= \frac{5}{8} \\ P(X = 2) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$F_X(3) = P(X \leq 3) = 1$$
$$\underbrace{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)}_{F_X(2)} + P(X = 3) = 1$$
$$P(X = 3) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Assim temos:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

1.6 Esperança Matemática de uma Variável Aleatória

Definição: Seja X uma v.a. com f.m.p. $p_x(x)$ (no caso discreto) ou f.d.p $f_x(x)$ (no caso contínuo). Chamamos de esperança matemática ou valor médio de X ao valor:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x \in R_x} x p_x(x), \quad \text{no caso discreto} \tag{1.25}$$

$$\mu_x = E(X) = \int_{x \in R_x} x f_x(x) \mathrm{d}x, \quad \text{no caso contínuo} \tag{1.26}$$

Considerando $a, b \in \mathbb{R}$, constantes, temos algumas propriedades:

(a)

$$E(aX) = aE(x) \tag{1.27}$$

(b) Se $X = a$,

$$E(X) = E(a) = a \tag{1.28}$$

(c)

$$E\left(E\left(X\right)\right) = E(X) \tag{1.29}$$

(d)

$$E(X \pm a) = E(X) \pm a \tag{1.30}$$

(e)

$$E(aX + b) = aE(X) + b \tag{1.31}$$

(f)

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \tag{1.32}$$

Exemplo: Considere a v.a. X com f.d.p dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcular o $E(X)$:

$$E(X) = \int_{R_x} x f_X(x) \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \times 2x \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\, x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Resultado: Seja X uma v.a. com f.m.p $p_X(x)$ ou f.d.p $f_X(x)$. Uma função de X, dita $g(X)$, é também uma v.a. e:

$$\begin{aligned} \mu = E\left(g(X)\right) &= \sum_{x \in R_x} g(x) p_x(x) = \sum_{x \in R_x} g(x) P(X = x), \quad \text{no caso discreto e} \\ \mu = E\left(g\left(x\right)\right) &= \int_{R_x} g(x) f_x(x) \mathrm{d}x, \quad \text{no caso contínuo.} \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.7 Variância

Definição: Seja x. uma v.a. com f.m.p $p_X(x)$ ou f.d.p $f_X(x)$, com média $\mu_x = \mathrm{E}(X)$. Chamamos de variância da v.a. X o valor:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}\left(X\right)\right)^2\right) \tag{1.34}$$

$$= \mathrm{E}\left((X - \mu)^2\right), \tag{1.35}$$

Ou seja,

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{x \in R_x} (x - \mu_x)^2 P(X = x) \quad \text{no caso discreto)} \tag{1.36}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \int_{R_x} (x - \mu_x)^2 f_x(x) \mathrm{d}x \quad \text{no caso contínuo} \tag{1.37}$$

A raíz quadrada da variância($\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$) é o desvio padrão, denotado por σ.

Resultado: Podemos escrever a variância v.a. X por:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \tag{1.38}$$
$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - (\mu_x)^2 \tag{1.39}$$

Demonstração:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2 - 2\mu_x X + \mu_x^2) \tag{1.40}$$
$$= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu_x \mathrm{E}(X) + \mu_x^2 \tag{1.41}$$
$$= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu_x\mu_x + \mu_x^2 \tag{1.42}$$
$$= \mathrm{E}(X^2) - \mu_x^2 \tag{1.43}$$
$$= \mathrm{E}(X^2) - (E(X))^2 \tag{1.44}$$

Obs: $\mathrm{E}(X^2) \neq (\mathrm{E}(X))^2$

Propriedades Considerando $a, b \in \mathbb{R}$, constantes:

(a)

$$\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$$

Obs: $\mathrm{Var}(-X) = \mathrm{Var}(X)$

(b) Se $X = a$, então:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(a) = 0$$

(c)

$$\mathrm{Var}(X \pm a) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(a) = \mathrm{Var}(X)$$

(d) Se a, b são constantes,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX \pm b) &= a^2 \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(b) \\ &= a^2 \mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

(e) Se X e Y são duas v.a.'s independetes, então:

$$\mathrm{Var}(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$$

Exemplo: Seja X uma v.a. com f.d.p dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.45}$$

Encontre :

(a) $\mathrm{E}(X)$
(b) $\mathrm{Var}(X)$
(c) $\mathrm{E}(4X+3)$
(d) $\mathrm{Var}(4X+3)$

Resolução :

(a)

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_{-1}^{2} \frac{x \times x^2}{3} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{12} \left. x^4 \right|_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{12}(16-1) = \frac{15}{12} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}\,(X))^2 \\ \mathrm{E}(X^2) &= \int_{-1}^{2} x^2 \times \frac{x^2}{3} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} x^4 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{15} \left. x^5 \right|_{-1}^{2} = \frac{1}{15}(32+1) = \frac{33}{15} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{33}{15} - \left(\frac{15}{12}\right)^2 = 0{,}6375. \end{aligned}$$

(c)

$$\mathrm{E}(4X+3) = 4\,\mathrm{E}(X) + 3 = 8$$

Obs: $\mathrm{E}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

(d)

$$\mathrm{Var}(4X+3) = 16\,\mathrm{Var}(X) = \frac{51}{80} \times 16 = 10{,}2.$$