Chapter 1

Probabilidade

Objetivo: Definir um modelo estatistico que seja adequado à descrição e interpretação de fenômenos aleatórios.

A princípio iremos definir alguns conceitos básicos:

- Experimentos ou fenômenos aleatórios (ε): são os acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza, sob condições idênticas.

  Exemplos:

  - Lançamento de um dado.
  - Lançamento de uma moeda
  - Tempo de vida útil de um componente eletrônico.

- Espaço Amostral (Ω): refere-se ao conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

  Exemplos:

  - $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
  - $\Omega_2 = \{c, k\}$ Aonde k é cara e c é coroa.
  - $\Omega_3 = [0, \infty\}$

- Evento: qualquer subconjunto do espaço amostral Ω do experimento aleatório ε.

  Notação: $A, B, C, D, \ldots, A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, \ldots$

  Notamos que A é um evento, então $A\Omega$.

1.0.1 Tipos de Eventos

- Evento simples ou elementar: é o evento formado por um único ponto do espaço amostral.

  Exemplo: $A = \{W\}$.

[width=]

Figure 1.1:

- Evento composto: é o evento formado por dois ou mais pontos do espaço amostral.

  Exemplo:$A = \{w_1, w_2, w_3\}$

- Evento certo: é o evento formado por todos os pontos amostrais.

  Exemplo: $A = \Omega$

- Evento impossível: É o evento que não possuí elementos de Ω, isto é, evento vazio.

  Exemplo: $A = \{\}$ ou $A =$

Alguns Exemplos:
$A =$ Face do dado maior que 5
$A = \{6\}$
$B =$ Face do dado sem par
$B = \{2, 4, 6\}$
$C =$ Face do dado maior que 1
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
$D =$ Face do dado maior que 6.
$D = \{\}$ ou $D =$

1.0.2 Operação com Eventos

Para ilustrar graficamente eventos, é costume utilizar-se os mesmos diagramas de Venn utilizados na teoria de conjuntos.

Considere eventos definidos em um espaço amostral Ω de um experimento aleatório ε.

- União de eventos ($A \cup B$): é o evento formado por todos os elementos que pertencem a A, ou B, ou ambos.

- Intersecção de eventos ($A \cap B$): é o evento formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

Casos Particulares

- Se BA, então $A \cap B = B$

- Se A e B são eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos (não possui elementos comuns), então $A \cap B =$.

[width=]

Figure 1.2:

[width=]

Figure 1.3:

Diferença de eventos $(A-B)$:é o evento formado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B. Evento Complementar ($\bar{A}$ ou A^c): é o evento formado por todos os elementos de Ω que não pertencem a A.

Alguns exemplos de eventos complementares:

- $(A \cup B)^c = A^{cc}$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

  Os itens a e b são conhecidos como Lei de Demorgan.
- $A \cup B^c = (A \cap B) \cup B^c = A \cup (A \cap B)^c$

- $A \cap B^c = B^c \cap (A \cup B)$

Outras operações:

$$A \cap \ = \tag{1.1}$$
$$A \cup \ = A \tag{1.2}$$
$$^c = \Omega \tag{1.3}$$
$$\Omega^c = \tag{1.4}$$
$$(A^c)^c = A \tag{1.5}$$
$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \tag{1.6}$$
$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \tag{1.7}$$

Exemplo: Escrever $A \cup B$ como união de eventos disjuntos. Situação 1: $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ Situação 2: $(A \cup B) = B \cup (B^c \cap A)$

Considerando a situação 1 , vamos verficair se os eventos são disjuntos. Os eventos serão disjuntos se $A \cap (A^c \cap B) = \ $. Vericando, temos:

$$\tag{1.8}$$
$$\cap B = \tag{1.9}$$

[width=]

Figure 1.4:

[width=]

Figure 1.5:

[width=]

Figure 1.6:

1.1 Definições de probabilidade

(a) Definicão de probabilidade em espaços equiprováveis

Se um experimento aleatório tiver n resultados possíveis, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, mutuamente exclusivos e igualmente possíveis e se um evento A tiver n_A desses resultados, então a probabilidade deo evento A, representado por $P(A)$, é dada por:

$$A \subset \Omega$$
$$P(A) = \frac{N_a}{n} \tag{1.10}$$

Sendo que Ω é definido como todo o espaco amostral, n_A o número de casos favoráveis A e n o número de casos possíveis.

Exemplo:

Lançamento de duas moedas honestas. Calcular a probabilidade de:

(a) Obter duas faces iguais.
(b) Obter pelo menos uma face diferente de cara
(c) Obter pelo menos uma face diferente.

$\Omega = \{(c,c); (c,k); (k,c); (k,k)\}$

(a) A= Faces iguais

$$A = \{(c,c); (k,k)\}$$
$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

(b) B = Pelo menos uma face diferente de cara.

$$B = \{(c,k); (k,c); (k,k)\} \tag{1.11}$$
$$P(B) = \frac{3}{4} \tag{1.12}$$

[width=]

Figure 1.7:

[width=]

Figure 1.9:

[width=]

Figure 1.10:

(c) C = Obter pelo menos uma face diferente

(b) Definição de probabilidade frequentista

Um experimento é realizado n vezes, sendo n um número grande. O evento A ocorre exatamente N_a vezes com: $0 \leq N_a \leq n$. A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é uma forma de aproximar a probabilidade do evento A, ou seja:

$$f_r(A) = \frac{n_a}{n} \tag{1.13}$$

Quando $n \to \infty$, $f_r(A)$ aproxima-se de $P(A)$.

Exemplo: Geração de n número inteiros entre 1 e 5, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, e o evento de interesse é a ocorrência do número 4.

(c) Definição de probabilidade axiomática

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número $P(A)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(a) $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos ($A_i \cup A_j = \phi, \forall i \neq j$), então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.14}$$

[width=]

Figure 1.11:

[width=]

Figure 1.12:

Table 1.1:

1.1.1 Propriedades

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\phi) = 0$
- Se $A \subset \omega$ então $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- Se $A, B \subset \Omega$, então $P(A) \leq P(B)$
- Se $A, B \subset \Omega$, então vale:

$$P(B) = P(B \cup A) + P(B \cup \bar{A}) \tag{1.15}$$

- Se $A, B \subset \omega$, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \tag{1.16}$$

- Se $A, B, C \subset \omega$, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) - P(A \cup C) - P(B \cup C) + P(A \cup B \cup \tag{1.17}$$

Exemplo:

Mostre a propriedade (g).

Use o fato de que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$:

$$P(A \cup B \cup C) - P(A \cup (B \cup C \tag{1.18}$$

$$= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C \tag{1.19}$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) \cup (A \cap \tag{1.20}$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - \{P(A \cap B) + P(A \cap c) - P(A \cap B \cap A \cap C \tag{1.21}$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap \tag{1.22}$$

Exercício: Considere um experimento aleátorio e os eventos A e B associados, tais que:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$
$$P(B) = \frac{1}{3}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Calcule as probabildiades:

- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

1.2 Probabilidade condicional

Definição: Sejam A e B dois eventos definidos em um mesmo espaco amostral Ω. A probabilidade de A dado que ocorre o evento B, denotada por $P(A/B)$ é definida por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)} \tag{1.23}$$

para $P(B) > 0$. Consequentemente, podemos escrever:

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) \tag{1.24}$$

Conhecida como regra do produto:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P \cap B}{P(A)} \tag{1.25}$$
$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A) \tag{1.26}$$

Exemplo: Suponha que um escritório possua 100 computadores de tipos Desktop (D) e Laptop (L) sendo alguns novos (N) e outro com um certo tempo de uso (U), distribuídos da seguinte forma: Um funcionário escolhe um laptop ao acaso. Qual a probabilidade de que seja novo?

Resolucão:

$$P(N/L) = \frac{P(N \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{3}{4} \tag{1.27}$$

Obs: $P(A \cap B)$ e $P(A/B)$

	D	L	Total
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

Figure 1.13: Distribuição de probabilidade dos computadores de um dado escritório

Figure 1.14: Um exemplo de uma àrvore de probabilidades

1.3 Àrvore de Probabilidades

Sejam $A, B \subset \Omega$. Uma representação bastante útil é a àrvore de probabilidades

Exemplo: No exemplo anterior, qual a probabilidade de um funcionário selecionar um desktop usado?

$$P(D \cap U) = P(D/U)P(U) \tag{1.28}$$

Ou:

$$P(D \cap U) = P(U/D)P(D) = \frac{20}{60} \times \frac{60}{100} = 0,2 \tag{1.29}$$

Algumas propriedades:

- $P(\phi/B) = 0$
- Se $A \subset \omega$, entao $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$
- Se $A, C \subset \omega$, então:

$$P(A \cup C/B) = P(A/B) + P(C/B) - P(A \cap C/B) \tag{1.30}$$

1.4 Independência de eventos

Definicao: Dois eventos A e B definidos em Ω são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A. Isto é:

$$P(A/B) = P(A) \tag{1.31}$$

$$P(B) > 0 \tag{1.32}$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Exemplo: Um estudante se inscreve em dois processos seletivos com probabilidade 30% de ser aprovado na empresa I e 50% de ser aprovado na empresa II. Se as aprovações são independentes, qual a probabilidade de que ele seja aprovado em pelo menos uma?

Definindo os eventos:

- A: O estudante ser aprovado na empresa I
- B: O esutdanbte ser aprovado na empresa II

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,30 \quad (1.33) \\ p(B) &= 0,50 \quad (1.34) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1.35) \\ &= P(A) + P(B) - P(A).P(B) \quad (1.36) \\ &= 0,3 + 0,5 - 0,3.0,5 \quad (1.37) \\ &= 0,65 \quad (1.38) \end{aligned}$$

1.5 Independência de 3 eventos

OS eventos A,B,C em Ω são independentes se, somente se:

- $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A).P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B).P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$

Resultado: Se A,B são eventos independentes em Ω, então:

1. A e $\bar{B}$ são independentes
2. $\bar{A}$ e B são independetes
3. $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são independentes.

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \quad (1.39) \\ &= P(A) - P(A).P(B) \quad (1.40) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \quad (1.41) \\ &= P(A).P(\bar{B}) \quad (1.42) \end{aligned}$$

Obs: Não confundir eventos mutuamente exclusivos com eventos independentes.

Exemplo: Um atirador acerta 80% dos disparos e outro acerta, nas mesmas condições acerta 70%.

(a) Qual a probabilidade de o alvo ser acertado se ambos os atiradores disparam simultanemaente?

(b) Qual a probabilidade do alvo ser acertado se ambos os atiradores disparam simultanemaente?

- A: O atirador 1 acerta o alvo
- B: O atirador 2 acerta o alvo

(a) A intersecção de dois eventos independentes é dada pela multiplicação de suas probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{1.43}$$
$$= 0.8 \times 0.7 = 0.56 \tag{1.44}$$

(b) É dado pela a união dos dois eventos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.45}$$
$$= P(A) + P(B - P(A).P(B) \tag{1.46}$$
$$= 0,8 + 0,7 - 0.8 \times 0,7 \tag{1.47}$$
$$= 0,94 \tag{1.48}$$

1.6 O teorema de Bayes

(a) Partição do espaço amostral:

Definição: Uma coleção de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω se:

(a) $A_i \cap A_j = , \forall i \neq j$, com $i, j = 1, \ldots, k$

(b) $\cup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$

(b) Lema da probabilidade total

Se $A_1, \ldots, A_k$ é uma partição de Ω, então para qualquer evento B de Ω, vale:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} B(B \cap A_i) \tag{1.49}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i) \tag{1.50}$$
$$\tag{1.51}$$

$$B = \cup_{i=1}^{k} A_i \cap B) \tag{1.52}$$

$$P(B) = \cup_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) \tag{1.53}$$
$$= \cup_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i) \tag{1.54}$$

Fórmula de Bayes: Se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formam uma partição de Ω e $B \subset \Omega$ com $P(B) > 0$, então:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \tag{1.55}$$
$$= \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B/A_j)P(A_j)} \tag{1.56}$$

Exemplo: Uma montadora traalha com dois fornecedores A e B de uma determinada peça. Sabe-se que 10% e 5% das peças provenientes dos fornecedores A e B respectivamente, estão fora de especificação. A montadora recebe 30% das peças do fornecedor A e 70% do fornecedor B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhido ao acaso, calcule:

(a) a probabilidade que ela esteja fora de especificação.

(b) Se uma peça é escolhida ao acaso está fora de especificação, qual é a ṕrobabilidade de que tenha sido fornecido por A?,

- Evento A: A peça é do fornecedor A.
- Evento B: A peça é do fornecedor B.
- Evento C: A peça está fora de especificação.

$$P(A) = 0,3$$
$$P(B) = 0,7$$
$$P(C/A) = 0,10$$
$$P(C/B) = 0,05$$

(a) $P(C) =?$

$$
\begin{aligned}
C &= (A \cap C) \cup (B) \\
P(C) &= P(A \cap C) + P(B \cap C) \\
&= P(C/A)P(A) + P(C/B)P(B) \\
&= 0,1 \times 0,3 + 0.05 \times 0.7 \\
&= 0.065
\end{aligned}
$$

(b) $P(A/C) =?$

$$
\begin{aligned}
P(A/C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(C/A)P(A)}{P(C/A)P(A) + P(C/B)P(B)} \\
&= \frac{0,1 \times 0,3}{0,065} = 0.4615
\end{aligned}
$$

Exercício para entregar:

Estudos reveleram que 40% dos estudantes universitários já experimentaram algum tipo de droga ilícita. Uma universidade resolve aplicar um teste com detector de mentira para descobrir se seus estudantes já usaram algum tipo de droga ilícita. Sabemos que se o estudante já usou algum tipo de droga o detector vai dar positivo com certeza. Porém, sabemos que o detector erra, ou seja, apresenta um falso positivo em 5% quando aplicado em estudantes que nunca usaram drogas. Se um estudante é selecionado aleatoriamente e o teste aplicado nele deu positivo, qual a probabilidade de ele já ter usado algum tipo de droga?

Exercício: Para selecionar seus funcionários uma empresa oferece aos candidatos um curso de treinamento durante uma semana. No final do curso, eles são classificados em uma prova; 25% são classificados como bons (B), 50% como médios (M) e os 25% restantes como fracos (F). A empresa pretende substituir o treinamento por um teste contendo questões de conhecimentos gerais. Para isso gostaria de conhecer qual a probabilidade de um indívíduo aprovado no teste ser considerado fraco (F), se fizesse o curso. Assim, antes do início do curso, os candidatos do curso, foram submetidos ao teste e receberam o conceito aprovado (A) ou reprovado (R). No final do curso, obtiveram-se as seguintes probabilidades condicionais:

$$
\begin{aligned}
P(A/B) &= 0,8 \\
P(A/M) &= 0,5 \\
P(A/F) &= 0,2
\end{aligned}
$$

1.7 Variáveis Aleatórias

Definição: Seja um experimento aleatório e Ω o espaço amostral associado a esse experimento. Uma função $X(\omega)$ que associa cada elemento $\omega \in \Omega$ a um número real $x = x(\omega)$ é denominada variável aleatória (v.a.). Obs: $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Exemplo: Lançamento de uma moeda duas vezes. A v.a. é o n^o de caras.

$$\begin{aligned} \Omega &: \{cc; kc; kc; kk\} \\ X &: \quad n^o \text{ de caras} \\ & R_x : \{0, 1, 2\} \\ & P(x = 0) = ? \\ & P(x = 1) = ? \\ & P(x = 2) = ? \end{aligned}$$

$$x = \begin{cases} 0, & \text{se ocorrer } kk \\ 1, & \text{se ocorrer } ck \text{ ou } kc \\ 2, & \text{se ocorrer } cc \end{cases}$$

Exemplo: Em uma linha de produção, peças são classificadas em defeituosas ou não defeituosas. Podemos definir a v.a. X como:

$$\begin{cases} x = 1, & \text{se a peça é defeituosa} \\ 0, & \text{a peça não é defeituosa} \end{cases}$$

Obs: Uma v.a. X desse tipo é chamada de v.a. de Bernoulli. Nesse caso, $\Omega = \{\text{peça defeituosa, peça não defeituosa}\}$ e x assume um cojjunto de valores finitos.

1.7.1 Classificação de Variáveis Aleatórias

Se a v.a. x assume valores em um conjunto finito ou infinito e numerável é chamado de variável aleatória discreta. Se x assume valores em um conjunto infinito não-numerável, é chamada de v.a. contínua.

Exemplos:

(a) x indica o n^o de residentes em um domicílio. X pode assumir valores em $\natural$ e assim é chamada de v.a.
discreta.

(b) Y indica o tempo de vida (em horas) de um equipamento eletrônico. Y pode assumir valores em $\mathbb{R}^+$ e assim é chamado de v.a.

contínua. Definição: Seja x uma v.a.
discreta que assume valores em R_x, $R_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. A cada possível x_i, associamos um número,

$$P_i = p(x_i) = P(X = x_i) = P(X(\omega_i) = x_i),$$
$$\omega_i \in \Omega \quad \text{e } x_i \in R_x$$

Dito probabilidade de x_i. A função $p(x)$ é definida como função massa de probabilidade (f.m.p) de X.

As probabilidades $p(x_i)$ devem satisfazer as seguintes condições:

(a) $p(x_i) > 0, \forall x_i \in R_x$

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Interpretação da f.m.p:

Seja x uma v.a.
discreta com $R_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ e $p(x_i) = p_i$.

Exemplo: Lançamento de uma moeda duas vezes e x é o número de caras.

$$\Omega = \{cc; ck; kc; kk\} \tag{1.57}$$
$$R_x = \{0, 1, 2\} \tag{1.58}$$

A f.m.p de x é dada por:

$$p(0) = P(x = 0) = P(X(\omega) \in kk) = \frac{1}{4} \tag{1.59}$$
$$p(1) = P(x = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{1.60}$$
$$p(2) = P(x = 2) = \frac{1}{4} P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se sair } kk \text{ ou } cc \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{se sair } ck \text{ ou } kk \text{ ou } x = 1 \end{cases} \tag{1.61}$$

Exemplo: A demanda diária de um item é uma v.a.
discreta com f.m.p. dada por:

$$P(D = d) = \frac{2^d k}{d!}, d = 1, 2, 3, 4 \tag{1.62}$$

(a) Determine a constante k

(b) Calcule $P(D > 2)$

(a) Sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1, \forall x_i \in R_x \tag{1.63}$$

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1 \tag{1.64}$$

$$\frac{2^1 k}{1!}+\frac{2^2 k}{2!}+\frac{2^3 k}{3}+\frac{2^4 k}{4}=1 \tag{1.65}$$

$$2K+2K+\frac{4K}{3}+\frac{2K}{3}=1 \tag{1.66}$$

$$4K+\frac{6K}{3}=1 \tag{1.67}$$

$$6K=1 \tag{1.68}$$

$$K=\frac{1}{6} \tag{1.69}$$

Então o f.m.p de x é:

$$P(D=d)=\frac{2^d}{6d!}, d=1,2,3,4 \tag{1.70}$$

(b)

$$P(D>2)=P(D=3)+P(D=4) \tag{1.71}$$

$$=\frac{2^3}{6\times 3!}+\frac{2^4}{6\times 4!} \tag{1.72}$$

$$=\frac{1}{3} \tag{1.73}$$

ou

$$P(D>2)=1-P(D\leq 2) \tag{1.74}$$

$$=1-\{P(D=1)+P(D=2)\} \tag{1.75}$$

$$=1-P(D=1)-P(D=2) \tag{1.76}$$

Obs: $R_x : \{0,1,2,3,4,5\}$

$$P(X>1)=P(x=2)+P(x=3)+\cdots+P(x=5) \tag{1.77}$$

ou

$$P(x>1)=1-P(x\leq 1) \tag{1.78}$$

$$=1-\{P(x=0)+P(x=1)\} \tag{1.79}$$

$$=P(x>1)+P(x\leq 1)=1 \tag{1.80}$$

Definição: Seja x uma v.a.
contínua que assume valores em $R_x, R_x \in \mathbb{R}$. A função f(x) é a função densidade de probabilidade (f.d.p) para x, se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in R_x$
2. $\int_R xf(x)dx = 1 (\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1)$
3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$

Uma ilustração de f.d.p: Obs: Se x é uma v.a. contínua assumindo valores em R_x, então para toda $a \in R_x$, temos:

(a) $P(x = a) = 0$

(b) $P(x > a) = P(x \leq a)$

(c) $P(x < a) = P(x \leq a)$

(d) $P(x > a) = 1 - P(x \leq a)$
$= 1 - P(x < a)$

(e) $P(x < a) = 1 - P(x \geq a)$
$1 - P(x > a)$ Outros exemplos:

$$P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) \tag{1.81}$$

$$= P(a < x \leq b) = P(a < x < b) \tag{1.82}$$

Obs: Só vale para v.a. contínua.

Exemplo: O tempo de produção de um componente (em minutos) é uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{4}, & \text{se } 2 < x < 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.83}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma f.d.p

(b) Calcule a probabilidade de que o tempo de produção de um componente seja menor do que 3 minutos.

(a) (a) $f(x) \geq 0, \forall x \in R_x$
(b) $\int_{R_x} f(x)dx = 1$

(a) $f(x) \geq 0, \forall 2 < x < 4$
(b)

$$\int_2^4 \frac{5-x}{4} dx = 1$$

$$\int_2^4 5dx - \int_2^4 xdx -$$

$$= \frac{1}{4}\{5x|_2^4 - \frac{x^2}{2}|4_2\}$$

$$= \frac{1}{4}\{5(4-2) - \frac{1}{2}(16-4)\}$$

Portanto, f(x) é uma função densidade de probabilidade

(b)

$$P(X < 3) = \int_{-infty}^{3} f(x)dx \tag{1.84}$$

$$\int_{-infty}^{2} 0dx + \int_{2}^{3} \frac{5-x}{4}dx \tag{1.85}$$

$$P(X < 3) = \int_{2}^{3} \frac{5-x}{4}dx = \tag{1.86}$$

$$\frac{1}{4}\{\int_{2}^{3} 5dx - \int_{2}^{3} xdx\} \tag{1.87}$$

$$\frac{1}{4}\{5 \times 1 - \frac{1}{2} \times 5\} = \frac{5}{8} \tag{1.88}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.89}$$

Exercício: Seja x uma v.a. contínua com f.d.p dada portugues:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leq x < 1 \\ 0, \text{Caso contrário} \end{cases} \tag{1.90}$$

(a) Verifique se f(x) é uma f.d.p

(b) $P(x \leq \frac{1}{2})$

(c) $P(X \leq \frac{1}{2}/\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3})$

Definição: Seja x uma v.a. discreta que assume valores em R_x e com f.m.p $p(x) = P(X = x)$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a função de distribuição acumulada(f.d.a) de x, denotada por $\mathbb{F}_x(x)$, é definida por:

$$\mathbb{F}_{\frown}(x) = P(X \geq x) = \sum b_{x_i \in R_x} P(X = x_i) = \sum b_{x_i \in R_x} p(x_i) \tag{1.91}$$
$$\forall x_i \leq x$$

De forma mais clara, temos como exemplo:

$$R_x = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$F_x(2,3) = P(X \leq 2,3)$$
$$= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

Exemplo: Conidere o lançamento de uma moeda duas vezes e x é o número de caras. Já sabemos que a f.m.p de x é dada por:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Figure 1.15: F.m.p do lançamento de uma moeda

$$R_x = \{0, 1, 2\}$$

Ou, de forma equibalente podemos escrever:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se} x = 0, 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{se} x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A f.d.a de x é dada por:

$$F_x = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{4}, 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, 1 \leq x < 2 \\ 1, x \geq 2 \end{cases}$$

A representação gráfica é: Definição: Seja x uma v.a. contínua que assume valores em R_x e com f.d.p $f(x)$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a f.d.p de x, denotada por $\mathbb{F}_{\frown}(\frown)$ é definida por:

$$\mathbb{F}_{\frown}(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{1.92}$$

Obs: $\mathbb{F}_{\frown}(x) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt, a \in \mathbb{R}$ Como consequência imediata podemos escrever dois resultados:

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{1.93}$$

$$= \mathbb{F}_{\frown}(b) - \mathbb{F}_{\frown}(a) \tag{1.94}$$

E:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\mathbb{F}_{\frown}(x), \quad \text{se a derivada existir} \tag{1.95}$$

Exemplo: Para a f.d.p dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, -1 < x < 2 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine $F_x(x)$ e use-a para avaliar $P(0 \leq x < 1)$.

A f.d.a de x é dada por:

$$
\begin{aligned}
F_x(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt \\
&= \int_{-infty}^{x} \frac{t^2}{3} dt, -1 < t < 2 \\
\int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3} dt &= \frac{1}{9} t^3 |_{-1}^{x} \\
F_x(x) &= \frac{1}{9}(x^3 + 1)
\end{aligned}
$$

$$
F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, x < -1 \\ \frac{1}{9}(x^3+1), -1 \leq x < 2 \\ 1, x \geq 2 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
P(0 \leq x < 1) &= ? \\
P(0 \leq x < 1) &= \mathbb{F}_{\not\models} - \frown(0) \\
\downarrow P(x \leq 1) - P(x \leq 0) &= \frac{1}{9}(1^3 + 1) - \frac{1}{9}(0^3 + 1) \\
P(0 \leq x < 1) &= \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

O comportamento gráfico de $\mathbb{F}_{\frown}(x)$ é:

1.7.2 Propriedades de f.d.a

(a) $\mathbb{F}_{\frown}(x)$ é uma função contínua

(b) $\mathbb{F}_{\frown}(x)$ é uma função monótona não decrescente.

(c) $0 \leq \mathbb{F}_{\frown}(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $\lim_{x \to -\infty} \mathbb{F}_{\frown}(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} \mathbb{F}_{\frown}(x) = 1$

(e) $P(x \leq a) = \mathbb{F}_{\frown}(a)$

(f) $P(x > a) = 1 - P(x \leq a) = 1 - \mathbb{F}_{\frown}(a)$

(g) $P(a < x \leq b) = \mathbb{F}_{\frown}(b) - \mathbb{F}_{\frown}(a)$

Obs: Se x é uma v.a. contínua, então $P(x = a) = 0, \forall a$ com isso vale:

$$P(x < a) = \mathbb{F}_{\frown}(a) \tag{1.96}$$

$$P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) \tag{1.97}$$

$$= P(a \leq x \leq b) = \mathbb{F}_{\frown}(b) - \mathbb{F}_{\frown}(a) \tag{1.98}$$

Exercício para entregar:

1. Seja F_x dada por:

$$F_x = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{8}, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

   Determine:

   (a) $P(1 < x \leq 3)$
   (b) $P(x > 2)$
   (c) Encontre a $P(x)$

2. Seja x uma v.a. contínua com f.d.p dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Achar k
   (b) Determine $F_x(x)$
   (c) $P(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2})$

1.8 Esperança Matemática de uma Variável Aleatória

Definição: Seja X uma v.a.
com f.m.p $p_x(x)$ (no caso discreto) ou f.d.p $f_x(x)$ (no caso contínuo). Chamamos de esperança matemática ou valor médio de X ao valor:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x \in R_x} x p_x(x) \tag{1.99}$$

$$= \sum_{x \in R_x} x p_x(X = x), \quad \text{no caso discreto} \tag{1.100}$$

$$\mu_x = E(X) = \int_{x \in R_x} x f_x(x) dx, \quad \text{no caso contínuo} \tag{1.101}$$

Algumas propriedades: -Considere $a, b \in \mathbb{R}$, constantes.

(a) Se a é constante, então:

$$E(aX) = aE(x) \tag{1.102}$$

(b) Se $X = a$ (constante), então:

$$E(X) = E(a) = a \tag{1.103}$$

(c)

$$E(E(X)) = E(X) \tag{1.104}$$

(d) Se a é uma constante, então

$$E(\mp a) = E(X) \mp a \tag{1.105}$$

(e) Se a, b são constantes, então:

$$E(ax \mp by) = aE(X) \mp bE(Y) \tag{1.106}$$

Exemplo: Seja X uma v.a. com f.m.p. dada por:

$$p_x(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, x = 0, 1, 2, 3 \tag{1.107}$$

Calcule o $E(X)$.

$$(X) = \sum_{x \in R_x} xP(X = x) \tag{1.108}$$

$$p_{x=0}(x) = \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3-0}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35} \tag{1.109}$$

$$p_{x=1}(x) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{3-1}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35} \tag{1.110}$$

$$p_{x=2}(x) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{3-2}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35} \tag{1.111}$$

$$p_{x=3}(x) = \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{3-3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35} \tag{1.112}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) && (1.113)\\ &= 0\frac{1}{35} + 1\frac{12}{35} + 3\frac{2 \times 18}{35} + 3\frac{4}{35} && (1.114)\\ &= \frac{60}{35} = 1,71 && (1.115) \end{aligned}$$

Exemplo: Considere a v.a. x com f.d.p dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.116}$$

Calcular o $E(X)$.

$$E(X) = \int_{R_x} x f_x(x) dx \tag{1.117}$$

$$E(X) = \int_0^1 x \times 2x dx \tag{1.118}$$
$$= 2\int_0^1 x^2 dx \tag{1.119}$$
$$= \frac{2}{3}x^3|_0^1 = \frac{2}{3} = 0,67 \tag{1.120}$$

Resultado: Seja x uma v.a. com f.m.p $p_x(x)$ ou f.d.p $f_x(x)$. Uma função de x, dita $g(x)$, é também uma v.a. e:

$$E(g(x)) = \sum_{x \in R_x} g(x)P(X = x), \quad \text{no caso discreto} \tag{1.121}$$
$$E(g(x)) = \int_{R_x} g(x) f_x(x) dx, \quad \text{no caso contínuo} \tag{1.122}$$

Exemplo:
Seja X uma v.a. com f.m.p dada por:

$$p_x = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 1, 2 \\ \frac{1}{2}, & 0 \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{1.123}$$

Considere a v.a. $g(x) = (x - a)^2$, $a = 0, \frac{1}{2}, 1$. Calcule:

(a) $E(x)$

(b) $E(g(x))$ para cada a.

(a)

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{2}{4} \tag{1.124}$$
$$= \frac{3}{4} \tag{1.125}$$

(b)

$$E(g(x)) = E((x-a)^2) \tag{1.126}$$
$$= \sum_{x \in R_x} (x-a)^2 P(X = x) \tag{1.127}$$

ou

$$
\begin{aligned}
E(g(x)) &= E(x^2 - 2ax + a^2) && (1.128)\\
&= E(x^2) - 2aE(x) + a^2 && (1.129)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(x^2) &= \sum_{x \in R_x} x^2 P(X = x) && (1.130)\\
&= 0^2 \frac{1}{2} + 1^2 \frac{1}{4} + 2^2 \frac{1}{4} && (1.131)\\
&= \frac{5}{4} && (1.132)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(g(x)) &= \frac{5}{4} - 2a\frac{3}{4} + a^2 && (1.133)\\
&= \frac{5}{4} - \frac{6}{4}a + a^2 && (1.134)
\end{aligned}
$$

Para $a = 0$:

$$
\begin{aligned}
E(g(0)) &= \frac{5}{4} - 2 \times 0\frac{3}{4} + 0^2 && (1.135)\\
&= \frac{5}{4} - \frac{6}{4}0 + 0^2 && (1.136)\\
&= \frac{5}{4} && (1.137)
\end{aligned}
$$

Para $a = \frac{1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
E(g(\frac{1}{2})) &= \frac{5}{4} - 2 \times \frac{1}{2}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}^2 && (1.138)\\
&= \frac{5}{4} - \frac{6}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}^2 && (1.139)\\
&= \frac{1}{4} && (1.140)
\end{aligned}
$$

Para $a = 1$:

$$
\begin{aligned}
E(g(1)) &= \frac{5}{4} - 2 \times 1\frac{3}{4} + 1^2 && (1.141)\\
&= \frac{5}{4} - \frac{6}{4}1 + 1^2 && (1.142)\\
&= \frac{3}{4} && (1.143)
\end{aligned}
$$

Definição: Seja x uma v.a. com f.m.p $p_x(x)$ ou f.d.p $f_x(x)$, com média $\mu_x = E(x)$. Chamamos de variância da v.a. X o valor:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = var(x) &= E[(X - E(X))^2] && (1.144)\\
&= E[(x - \mu)^2], && (1.145)
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$\sigma^2 = var(x) = \sum_{x \in R_x} (x - \mu_x)^2 P(X = x) \quad \text{no caso discreto} \tag{1.146}$$

$$\sigma^2 = var(x) = \int_{R_x} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx \quad \text{no caso contínuo} \tag{1.147}$$

A raíz quadrada de variáveis ($\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{var(x)}$) é o desvio padrão, denotado por σ.

Resultado: Podemos escrever a variância v.a. x por:

$$\sigma^2 = var(x) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \tag{1.148}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \{\mu_x\}^2 \tag{1.149}$$

Demonstração:

$$var(x) = E(x^2 - 2\mu_x x + \mu_x^2) \tag{1.150}$$

$$= E(x^2) - 2\mu_x E(x) + \mu_x^2 \tag{1.151}$$

$$= E(x^2) - 2\mu_x \mu_x + \mu_x^2 \tag{1.152}$$

$$= E(x^2) - \mu_x \tag{1.153}$$

$$= E(x^2) - \{E(x)\}^2 \tag{1.154}$$

Obs: $E(x^2) \neq \{E(x)\}^2$

Algumas Propriedades - Considere $a, b \in \mathbb{R}$, constantes;

(a) $var(ax) = a^2 var(x)$
Obs: $var(-x) = var(x)$

(b) Se $x = a$, então:
$var(x) = var(a) = 0$

(c) $var(x \mp a) = var(x) var(a)$
$= var(x)$

(d) Se a, b são constantes,
$var(ax + \mp + b) = a^2 var(x) + var(b)$
$= a^2 var(x)$

(e) Se x e y são duas v.a. 's independetes, então: $var(ax \pm by) = a^2 var(x) + b^2 var(y)$

Exemplo: Seja x uma v.a. com f.d.p dada por:

$$f_x = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.155}$$

(a) $E(x)$

(b) $var(x)$

(c) $E(4x+3)$

(a)

$$\int_{-1}^{2} \frac{xx^2}{3} dx \tag{1.156}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x^3 dx = \frac{1}{12}x^4|_{-1}^{2} \tag{1.157}$$

$$= \frac{1}{12}(16-1) = \frac{15}{12} \tag{1.158}$$

(b)

$$var(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2 \tag{1.159}$$

$$E(x^2) = \int -12x^2\frac{x^2}{3}dx \tag{1.160}$$

$$E(x^2) = \frac{1}{3}\int -12x^4 dx \tag{1.161}$$

$$= \frac{1}{15}x^5|_{-1}^{2} \tag{1.162}$$

$$= \frac{1}{15}(32+1) = \frac{33}{15} \tag{1.163}$$

$$var(x) = \frac{33}{15} - \{\frac{15}{12}\}^2 = 0,6375 \tag{1.164}$$

(c)

$$E(4x+3) = 4E(x) + 3 \tag{1.165}$$

$$= 8 \tag{1.166}$$

Obs: $E(ax) = a^2 var(x)$

1.9 Principais Modelos Probabilísticos

1.9.1 Modelos Discretos

Distribuição Uniforme

A v.a. assume cada um de seus valores com igual probabilidade.

Definição: A v.a. discreta X, assumindo valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tem distribuição uniforme se, e somente se, sua f.m.p. é definida por:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x = x_1, x_2, \ldots, x_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.167}$$

Notação: $XU_d(k)$ A média e variância de x é:

$$\mu_x = E(x) = \sum_{x \in R_x} x_i P(X = x_i) \tag{1.168}$$

$$= \sum_{x \in R_x} x_i \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{x_i \in R_x} \tag{1.169}$$

$$\text{e} \tag{1.170}$$

$$var(x) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \tag{1.171}$$

$$= \sum_{x_i \in R_x} (x_i - \mu_x)^2 p(X = x_i) \tag{1.172}$$

$$= \frac{1}{k}\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{k})^2}{k}\} \tag{1.173}$$

Exemplo: Seja x uma v.a. que indica o n^o de pontos marcados na face superior de um dado quando ele é lançado. Portanto, temos uma distribuição uniforme discreta, cuja f.m.p. é dada por:

$$p(x) = P(X = x) - \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.174}$$

E o $E(x)$ é:

$$\mu_x = E(x) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \tag{1.175}$$

$$= \frac{1}{6}21 = \frac{7}{2} = 3,5 \tag{1.176}$$

E a $var(x)$ é:

$$E(x^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2) \tag{1.177}$$

$$= \frac{91}{6} = 15,17 \tag{1.178}$$

$$var(x) = \frac{91}{6} - \{\frac{7}{2}\}^2 = \frac{105}{36} = 2,92 \tag{1.179}$$

Distribuição Bernoulli

Considere uma v.a. x que assume apenas dois valores 1, se ocorrer sucesso, 0, se ocorrer fracasso. Indicaremos por "p" a probabilidade de sucesso, Isto

x	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	p

x	0	1
$P(X = x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

é, $P(\text{Sucesso}) = P(x = 1) = p$. Definição: A v.a. discreta x que assume apenas valores 0 ou 1 tem Distribuição Bernoulli se, somente se, sua f.m.p. é definida por:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x(1-p)1-x, & x = 0,1, \quad 0 < p < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.180}$$

Notação: $XBer(p)$

Exemplos:

$$p(x) = (\frac{2}{5})^x(1 - \frac{2}{5})^x, \quad x = 0,1$$

$$p(x) = (\frac{7}{8})^{1-x}(1 - \frac{7}{8})^{1-x}, \quad ,x = 0,1$$

De forma similar, podemos apresentar $p(x)$ por: A média de x é:

$$\mu_x = E(x) = p \tag{1.181}$$

e a variância de x é:

$$\sigma^2 = var(x) = p(1-p) \tag{1.182}$$

Exemplo: Suponha o lançamento de um dado perfeito e o interesse é ocorrer a face 3.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer a face 3} \\ 0, & \text{caso contrário}\{1,2,4,5,6\}] \end{cases}$$

Cuja f.m.p. é dada por:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})^{1-x}, & x = 0,1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.183}$$

$XBer(\frac{1}{6})$ A média de x é:

$$\mu_x = (X) = p = \frac{1}{6}$$

e a variância de x é:

$$\sigma^2 = var(x) = p(1-p) = \frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

Distribuição Binominal

Considere M ensaios de Bernoulli independentes, todos com a mesma probabilidade de sucesso p. A v.a. que conta o número de sucessos nos M ensaios de Bernoulli é denominada v.a. binomial com parâmetro M e p. Definição: A v.a. discreta x, correspondente ao n^o de sucesso em M ensaios independentes de Bernoulli, tem distribuição binomial se, e somente se, sua f.m.p. é definida por:

$$p(x) = P(X=x) = \begin{cases} \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}, & x = 0, 1, \ldots, M \quad \text{e } 0 < p < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.184}$$

Notação:$xBin(M,p)$
Obs: $\binom{M}{x} = \frac{M!}{x!(M-x)!}$
Temos que:

$$\mu_x = E(X) = Mp \text{a média de} x e \tag{1.185}$$

$$\sigma^2 = var(x) = Mp(1-p), \text{a variância de x} \tag{1.186}$$

Exemplo: Considere uma linha de produção, onde 3 peças são selecionadas aleatoriamente e são classificadas como defeituosas(D) ou não-defeituosas(N). X_1, X_2, X_3 são variáveis aleatórias que assumem 1 se a peça for não-defeituosa e 0 caso contrário. A probabilidade da peça ser não-defeituosa é p e , consequentemente, a probabilidade da peça ser defeituosa é $1-p$. Estamos interessados na distribuição de:

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

Abaixo estão os possíveis resultados do experimento:
Ou seja,

$$p(y) = P(Y=y) = \begin{cases} \binom{3}{y} p^y (1-p)^{3-y}, & y = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo: Uma rede varejista compra certo tipo de equipamento eletrônico. O fabricante indica que a taxa de quipamentos em perfeito estado é 97%.

(a) Seleciona-se ao acaso 20 itens. Qual a probabilidade de haver pelo menos um item defeituoso nesses 20?

(b) Seleciona-se aleatoriamente 20 itens em cada 10 carregamentos, qual a probabilidade de haver 3 carregamentos com pelo menos um item defeituoso?

p taxa de equipamentos em perfeito estado

$$p = 0,97$$

y: n^o de equipamentos em perfeito estado.

$$ybin(20; 0,97)$$

Resolucão:

(a) $M = 20$ itens
Probabilidade de pelo menos um item defeituoso.
x: n^o de equipamentos com defeito

$$xbin(20 : 0,03)\text{quad}x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(x < 1) \\ &= 1 - P(x = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 2000,03^0(1 - 0,03)^{20-0} \\ &= 0,5438 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - 0,5438 \\ &= 0,4562 \end{aligned}$$

Ou, resolvendo pela v.a. Y, temos:

$$\begin{aligned} P(y \leq 19) &= 1 - P(Y > 19) \\ &= 1 - P(y = 20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(y = 20) &= \binom{20}{20} 0,97^{20}(1 - 0,97)^{20-20} \\ &= 0,5438 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(y \leq 19) &= 1 - 0,5339 \\ &= 0,4562 \end{aligned}$$

(b) 10 carregamentos: 20 itens são selecionados
Z: n^o de carregamento com pelo menos um item defeituoso

$$p = 0,4562$$

$$zB(10 : 0,4562)$$

$$\begin{aligned} P(Z = 3) &= \binom{10}{3} 0,4562^3 (1 - 0,4562)^{10-3} \\ &= 0,1602 \end{aligned}$$

Exercício: Um fabricante adquire certo tipo de componente de um fornecedor. Segundo este fornecedor, a proporção de componentes defeituoso é de 2%. O fabricante adquire 10 lotes por mês e de cada lote são selecionados 15 componentes para inspeção Qual a probabilidade de que sejam encontrados 3 lotes com mais de um componente defeituoso?

Distribuição Geométrica

Considere uma sequência de ensaios Bernoulli independentes em probabilidade de sucesso p $(0 < p < 1)$. Seja a v.a. x o n^o de fracassos até a ocorrência do 1^o sucesso.

Definição: A v.a. x tem distribuição geométrica se, e somente se, sua f.m.p. é definida por:

$$p_x(x) = P(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & x = 0, 1, 2, \ldots \quad 0 < p < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.187}$$

Notação: $XGeo(p)$

Temos que:

$$\mu_x = E(x) = \frac{1-p}{p} \quad \text{e a} \tag{1.188}$$

$$\sigma^2 = var(x) = \frac{1-p}{p^2} \tag{1.189}$$

Similarmente, a variável aleatória X pode ser vista como o n^o de ensaios que precedem o primeiro sucesso, definida pela v.a. Y, cuja f.m.p. é dada por:

$$p(y) = P(Y = y) = \begin{cases} (1-p)^{y-1} & p, y = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Neste caso, a v.a. Y pode ser vista como $Y = X + 1$ e, consequentemente,

$$\mu_y = E(Y) = E(X+1) = E(X) = E(X) + 1 = \frac{1}{p}$$

e

$$\sigma_y^2 = var(Y) = var(X+1) = var(X) = \frac{1-p^2}{p}$$

Exemplo: Um pesquisador está realizando um experimentos químicos independetes e sabe que a probabilidade de que cada cada experimento apresnete uma reação positiva é $0,3$. QUal é a probabilidade de que menos de 3 reações negativas ocorram antes da primeira positiva?

x:n^o de ocorrência positiva

$$x = \begin{cases} 1, & \text{se a reação positiva} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$P(x=1) = p = 0,3$$

Y : n^o de reações negativas até a ocorrência de uma positiva

$$YGeo(0,3)$$

$$\begin{aligned} P(Y<3) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \\ P(Y=0) = (1-0,3)^0 0,3 = 0,3 \\ P(Y=1) = (1-0,3)^1 0,3 = 0,21 \\ P(Y=2) = (1-0,3)^2 0,3 = 0,147 \\ P(Y<3) = 0,3 + 0,21 + 0147 = 0,657 \end{aligned}$$

Exercício: Pensar no exercício anterior com o n^o de ensaios.

Distribuição Binomial Negativa

Considere ensaios independetes de Bernoulli (p) e definimos X como o n^o de fracassos anteriores ao n-ésimos sucesso.

Definição: A v.a. x tem distribuição Binomial negativa se, e somente se, sua f.m.p. é definida por:

$$p(x) = P(X=x) = \begin{cases} \binom{x+m-1}{m-1} p^m (1-p)^x, & \text{x=0,1,2,...} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.190}$$

Notação: X BN(r,p)

Temos que:

$$\mu_x = E(x) = \frac{r(1-p)}{p} \quad \text{e} \tag{1.191}$$

$$\sigma^2 = var(x) = \frac{1-p}{p^2} \tag{1.192}$$

Observações:

1. Note que se $r = 1$, temos o modelo geométrico.

2. $$\binom{x+m-1}{m-1} = \binom{x+m-1}{x}$$

A Binomial Negativa pode ser definida como o n^o de ensaios necessários para a obtenção do m-ésimo sucesso. Formando $y = x + m$ temos a quantidade desejada e seus valores variam de r em diante. Assim sendo Y o n^o de enasios até a obtenção de m sucessos, temos:

$$p(y) = p(Y = y) = \begin{cases} \binom{y-1}{m-1} p^m (1-p)^{y-m}, & y = m, m+1, \ldots \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.193}$$