Capítulo 1

Probabilidade

Objetivo: Definir um modelo estatístico que seja adequado à descrição e interpretação de fenômenos aleatórios.

Experimentos ou fenômenos aleatórios (ε) : são os acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza, sob condições idênticas.

Exemplos :

- Lançamento de um dado.
- Lançamento de uma moeda
- Tempo de vida útil de um componente eletrônico.

Espaço Amostral (Ω) : refere-se ao conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

Exemplos :

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

$\Omega_2 = \{c, k\}$ Aonde k é cara e c é coroa.

$\Omega_3 = [0, \infty\}$

Evento : qualquer subconjunto do espaço amostral Ω do experimento aleatório ε.

Notação: $A, B, C, D, \ldots, A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, \ldots$

Notamos que como A é um evento, então $A \subset \Omega$.

1.0.1 Tipos de Eventos

Evento Simples ou Elementar : é o evento formado por um único ponto do espaço amostral.

Exemplo : $A = \{W\}$.

Evento Composto : é o evento formado por dois ou mais pontos do espaço amostral.

Exemplo : $A = \{w_1, w_2, w_3\}$

Evento Certo : é o evento formado por todos os pontos amostrais.

Exemplo : $A = \Omega$

Evento Impossível : É o evento que não possuí elementos de Ω, isto é, evento vazio.

Notação : $A = \{\}$ ou $A = \emptyset$

Alguns Exemplos :

$A =$ Face do dado maior que 5
$A = \{6\}$
$B =$ Face do dado sem par
$B = \{2, 4, 6\}$
$C =$ Face do dado maior que 1
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
$D =$ Face do dado maior que 6.
$D = \{\}$ ou $D = \emptyset$

1.0.2 Operação com Eventos

Para ilustrar graficamente eventos, é costume utilizar-se os mesmos diagramas de Venn utilizados na teoria de conjuntos.

Considere eventos definidos em um espaço amostral Ω de um experimento aleatório ε.

União de eventos $(A \cup B)$: é o evento formado por todos os elementos que pertencem a A, ou B, ou ambos.

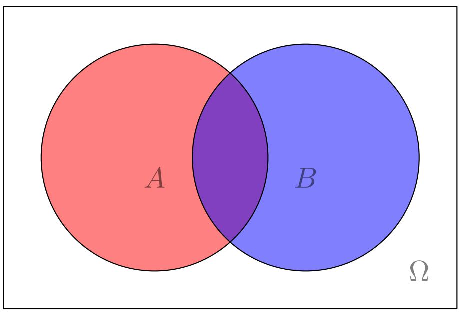


Figura 1.1:

Intersecção de eventos $(A \cap B)$: é o evento formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

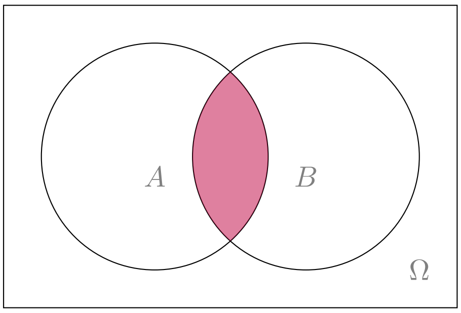


Figura 1.2:

Casos Particulares :

1. Se $B \subset A$, então $A \cap B = B$

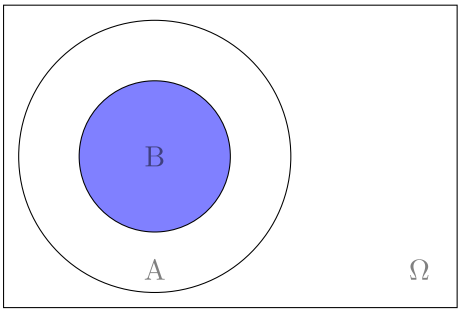


Figura 1.3:

2. Se A e B são eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos (não possui elementos comuns), então $A \cap B = \emptyset$.

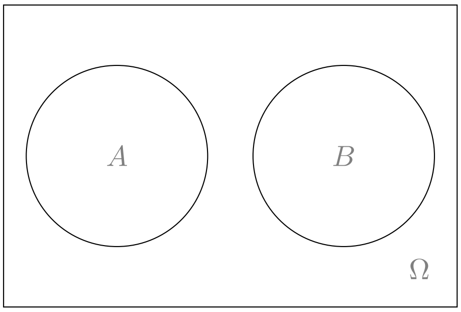


Figura 1.4:

Diferença de eventos $(A - B)$: é o evento formado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B.

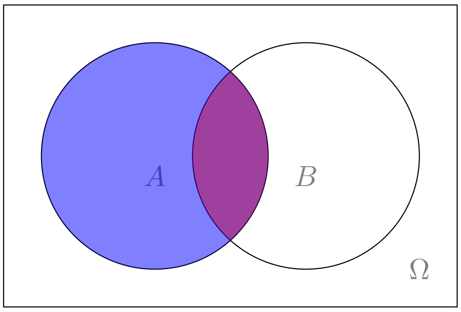


Figura 1.5:

Evento Complementar ($\bar{A}$ ou A^c) : é o evento formado por todos os elementos de Ω que não pertencem a A.

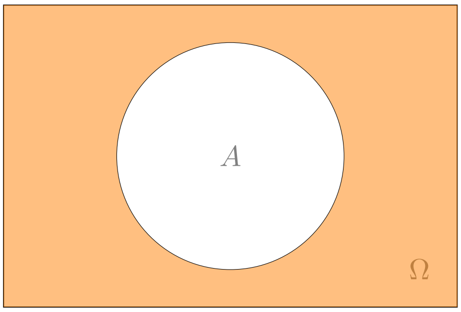


Figura 1.6:

Alguns exemplos de eventos complementares :

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

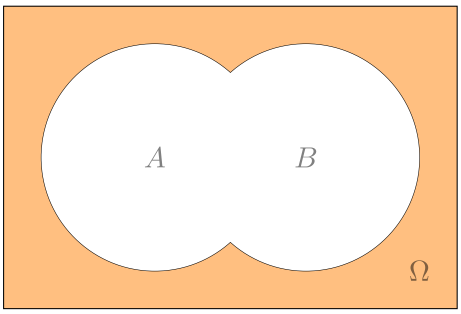


Figura 1.7:

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

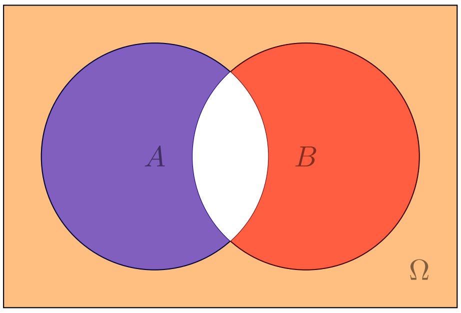


Figura 1.8:

Os itens a e b são conhecidos como Lei de Demorgan.

(c) $A \cup B^c = (A \cap B) \cup B^c = A \cup (A \cap B)^c$

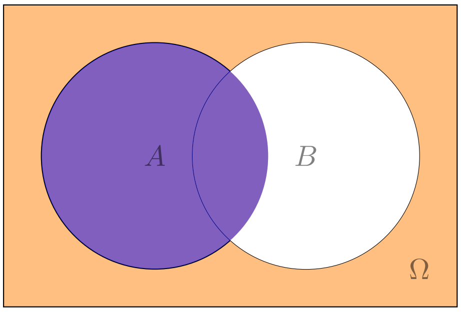


Figura 1.9:

(d) $A \cap B^c = B^c \cap (A \cup B)$

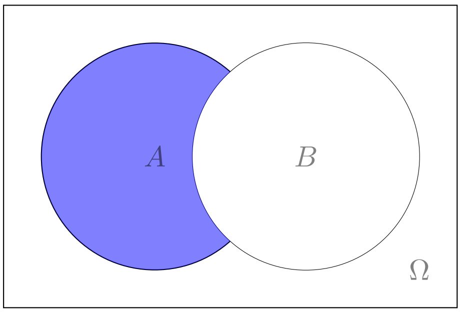


Figura 1.10:

Outras operações :

I. $A \cap \emptyset = \emptyset$

II. $A \cup \emptyset = A$

III. $\emptyset^c = \Omega$

IV. $\Omega^c = \emptyset$

V. $(A^c)^c = A$

VI. $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

VII. $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

Exemplo : Escrever $A \cup B$ como união de eventos disjuntos.

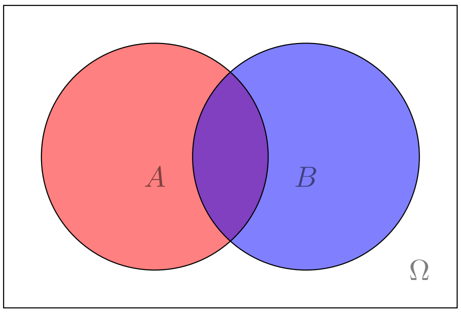


Figura 1.11:

Situação 1:

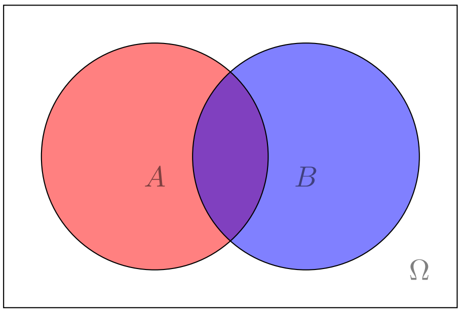
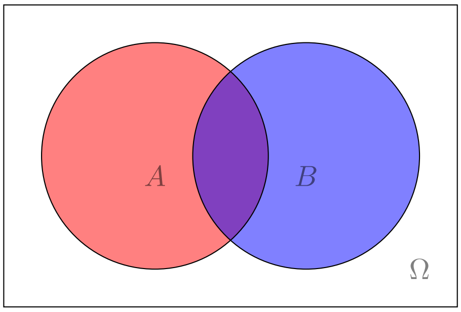


Figura 1.12:

$A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$

Situação 2:



$(A \cup B) = B \cup (B^c \cap A)$
Considerando a situação 1 , vamos verficar se os eventos são disjuntos. Os eventos serão disjuntos se $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$. Vericando, temos:

$$A \cap A^c = \emptyset$$
$$\emptyset \cap B = \emptyset$$

1.1 Definições de Probabilidade

1.1.1 Probabilidade em Espaços Equiprováveis

Se um experimento aleatório tiver n resultados possíveis, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, mutuamente exclusivos e igualmente possíveis e se um evento A tiver n_A desses resultados, então a probabilidade deo evento A, representado por $P(A)$, é dada por:

$$A \subset \Omega$$
$$P(A) = \frac{N_a}{n} \tag{1.1}$$

Sendo que Ω é definido como todo o espaco amostral, n_A o número de casos favoráveis A e n o número de casos possíveis.

Exemplo :

Dado o lançamento de duas moedas honestas, calcule a probabilidade de:

(a) Obter duas faces iguais.

(b) Obter pelo menos uma face diferente de cara

(c) Obter pelo menos uma face diferente.

	c	k
c	(c,c)	(c,k)
k	(k,c)	(k,k)

$\Omega = \{(c, c); (c, k); (k, c); (k, k)\}$

(a) $A =$ Faces iguais

$$A = \{(c, c); (k, k)\}$$
$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

(b) $B =$ Pelo menos uma face diferente de cara.

$$B = \{(c,k);(k,c);(k,k)\}$$
$$P(B) = \frac{3}{4}$$

(c) $C =$ Obter pelo menos uma face diferente

$$C = \{(c,k);(k,c)\}$$
$$P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

1.1.2 Probabilidade Frequentista

Um experimento é realizado n vezes, sendo n um número grande. O evento A ocorre exatamente N_a vezes com: $0 \leq N_a \leq n$. A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é uma forma de aproximar a probabilidade do evento A, ou seja:

$$f_r(A) = \frac{n_a}{n} \tag{1.2}$$

Quando $n \to \infty$, $f_r(A)$ aproxima-se de $P(A)$.

Exemplo :

Geração de n número inteiros entre 1 e 5, $\{1,2,3,4,5\}$, e o evento de interesse é a ocorrência do número 4.

1.1.3 Probabilidade axiomática

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número $P(A)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

I. $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$

II. $P(\Omega) = 1$

III. Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos ($A_i \cup A_j = \emptyset, \forall i \neq j$), então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.3}$$

Propriedades :

(a) $0 \leq P(A) \leq 1$

(b) $P(\emptyset) = 0$

(c) Se $A \subset \omega$ então $P(A) = 1 - P(A^c)$

(d) Se $A \subset B \subset \Omega$, então $P(A) \leq P(B)$

(e) Se $A, B \subset \Omega$, então vale:

$$P(B) = P(B \cup A) + P(B \cup \bar{A}) \tag{1.4}$$

(f) Se $A, B \subset \omega$, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \tag{1.5}$$

(g) Se $A, B, C \subset \omega$, então:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) - P(A \cup C) \\ -P(B \cup C) + P(A \cup B \cup C) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Exemplo :

Mostre a propriedade (g).

Use o fato de que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$:

$$\begin{aligned} P\left(A \cup B \cup C\right) - P\left(A \cup \left(B \cup C\right)\right) \\ = P(A) + P(B \cup C) - P\left(A \cap \left(B \cup C\right)\right) \\ = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) \cup (A \cap C) \\ = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) \\ - \left\{P\left(A \cap B\right) + P\left(A \cap c\right) - P\left(\left(A \cap B\right) \cap \left(A \cap C\right)\right)\right\} \\ = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Exercício :

Considere um experimento aleátorio e os eventos A e B associados, tais que:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{2} \\ P(B) &= \frac{1}{3} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Calcule as probabilidades:

(a) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(b) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Figura 1.13: Name

(a)

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A \cup B) \\
= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\
= 1 - \{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\} &= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

Figura 1.14: Name

(b)

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cup B^c) &= P\left((A \cap B)^c\right) \\
= 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Ou de maneira similar:

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) \\
= (1 - P(A)) + (1 - P(B)) - \frac{5}{12} \\
= (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{3}) - \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

1.1.4 Probabilidade condicional

Sejam A e B dois eventos definidos em um mesmo espaco amostral Ω. A probabilidade de A dado que ocorre o evento B, denotada por $P(A/B)$ é definida por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.7}$$

Para $P(B) > 0$. Consequentemente, podemos escrever:

Figura 1.15: Name

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) \tag{1.8}$$

Conhecida como regra do produto:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P \cap B}{P(A)} \tag{1.9}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A) \tag{1.10}$$

Figura 1.16: Um exemplo de uma àrvore de probabilidades

Exemplo : Suponha que um escritório possua 100 computadores de tipos Desktop (D) e Laptop (L) sendo alguns novos (N) e outro com um certo tempo de uso (U), distribuídos da seguinte forma: Um funcionário escolhe um laptop ao acaso. Qual a probabilidade de que seja novo?

Resolucão :

	D	L	Total
N	40	30	70
U	20	10	30
Total	60	40	100

$$P(N/L) = \frac{P(N \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{3}{4}$$

Obs: $P(A \cap B)$ e $P(A/B)$

1.2 Àrvore de Probabilidades

Sejam $A, B \subset \Omega$. Uma representação bastante útil é a àrvore de probabilidades.

Exemplo : No exemplo anterior, qual a probabilidade de um funcionário selecionar um desktop usado?

Figura 1.17: Name

$$P(D \cap U) = P(D/U)P(U)$$

Ou:

$$P(D \cap U) = P(U/D)P(D) = \frac{20}{60} \times \frac{60}{100} = 0,2$$

Algumas propriedades :

(a) $P(\emptyset/B) = 0$

(b) Se $A \subset \Omega$, entao $P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$

(c) Se $A, C \subset \Omega$, então:

$$P(A \cup C/B) = P(A/B) + P(C/B) - P(A \cap C/B) \quad (1.11)$$

1.3 Independência de Eventos

Definição : Dois eventos A e B definidos em Ω são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A. Isto é:

$$P(A/B) = P(A) \tag{1.12}$$
$$P(B) > 0 \tag{1.13}$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Observação :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Exemplo : Um estudante se inscreve em dois processos seletivos com probabilidade 30% de ser aprovado na empresa I e 50% de ser aprovado na empresa II. Se as aprovações são independentes, qual a probabilidade de que ele seja aprovado em pelo menos uma?

Definindo os eventos:

A: O estudante ser aprovado na empresa I

B: O esutdanbte ser aprovado na empresa II

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.30 \\ P(B) &= 0.50 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= 0.3 + 0.5 - 0,3 \times 0,5 \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

1.3.1 Independência de três eventos

Os eventos A,B,C em Ω são independentes se e somente se:

(a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(b) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

(c) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

(d) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Resultado : Se A,B são eventos independentes em Ω, então:

I. A e B^c são independentes

II. A^c e B são independetes
III. A^c e B^c são independentes.

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \times P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) \times P(\bar{B}) \end{aligned}$$

Observação : Não confundir eventos mutuamente exclusivos com eventos independentes. Ou seja, não confunda $P(A \cap B) = 0$ com $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemplo : Um atirador acerta 80% dos disparos e outro acerta, nas mesmas condições acerta 70%.

(a) Qual a probabilidade de o alvo ser acertado se ambos os atiradores disparam simultanemaente?

(b) Qual a probabilidade do alvo ser acertado se ambos os atiradores disparam simultanemaente?

A: Atirador 1 acerta o alvo

B: Atirador 2 acerta o alvo

(a) A intersecção de dois eventos independentes é dada pela multiplicação de suas probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &= 0.8 \times 0.7 = 0.56 \end{aligned}$$

(b) É dado pela a união dos dois eventos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B - P(A) \times P(B) \\ &= 0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7 \\ &= 0.94 \end{aligned}$$

1.4 O Teorema de Bayes

1.4.1 Partições do espaco amostral

Definição : Uma coleção de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω se:

I. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, com $i, j = 1, \ldots, k$

II. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$

1.4.2 Lema da probabilidade total

Definição Se $A_1, \ldots, A_k$ é uma partição de Ω, então para qualquer evento B de Ω, vale:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{k} B(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i) \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$B = \cup_{i=1}^{k} A_i \cap B) \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= \cup_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) \\ &= \cup_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Figura 1.18: $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap) \cup \ldots (A_k \cap B)$

1.4.3 Fórmula de Bayes

Definição Se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formam uma partição de Ω e $B \subset \Omega$ com $P(B) > 0$, então:

$$\begin{aligned} P(A_i/B) &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B/A_j)P(A_j)} \end{aligned} \tag{1.17}$$