

# Capítulo 1

## Probabilidade

**Objetivo:** Definir um modelo estatístico que seja adequado à descrição e interpretação de fenômenos aleatórios.

**Experimentos ou fenômenos aleatórios ( $\varepsilon$ ) :** são os acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza, sob condições idênticas.

**Exemplos :**

- Lançamento de um dado.
- Lançamento de uma moeda
- Tempo de vida útil de um componente eletrônico.

**Espaço Amostral ( $\Omega$ ) :** refere-se ao conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

**Exemplos :**

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{1, 2, 3, 5, 6\} \\ \Omega_2 &= \{c, k\} \text{ Aonde } k \text{ é cara e } c \text{ é coroa.} \\ \Omega_3 &= [0, \infty)\end{aligned}$$

**Evento :** qualquer subconjunto do espaço amostral  $\Omega$  do experimento aleatório  $\varepsilon$ .

**Notação:**  $A, B, C, D, \dots, A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, \dots$

Notamos que como  $A$  é um evento, então  $A \subset \Omega$ .

### 1.0.1 Tipos de Eventos

**Evento Simples ou Elementar :** é o evento formado por um único ponto do espaço amostral.

**Exemplo** :  $A = \{W\}$ .

**Evento Composto** : é o evento formado por dois ou mais pontos do espaço amostral.

**Exemplo** :  $A = \{w_1, w_2, w_3\}$

**Evento Certo** : é o evento formado por todos os pontos amostrais.

**Exemplo** :  $A = \Omega$

**Evento Impossível** : É o evento que não possui elementos de  $\Omega$ , isto é, evento vazio.

**Notação** :  $A = \{\}$  ou  $A = \emptyset$

**Alguns Exemplos** :

$A$  = Face do dado maior que 5

$A = \{6\}$

$B$  = Face do dado sem par

$B = \{2, 4, 6\}$

$C$  = Face do dado maior que 1

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

$D$  = Face do dado maior que 6.

$D = \{\}$  ou  $D = \emptyset$

### 1.0.2 Operação com Eventos

Para ilustrar graficamente eventos, é costume utilizar-se os mesmos diagramas de Venn utilizados na teoria de conjuntos.

Considere eventos definidos em um espaço amostral  $\Omega$  de um experimento aleatório  $\varepsilon$ .

**União de eventos** ( $A \cup B$ ) : é o evento formado por todos os elementos que pertencem a  $A$ , ou  $B$ , ou ambos.

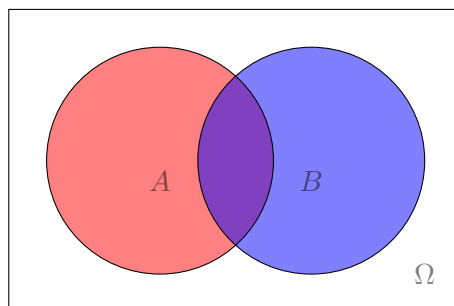


Figura 1.1:

**Intersecção de eventos ( $A \cap B$ ) :** é o evento formado pelos elementos que pertencem a  $A$  e a  $B$ .

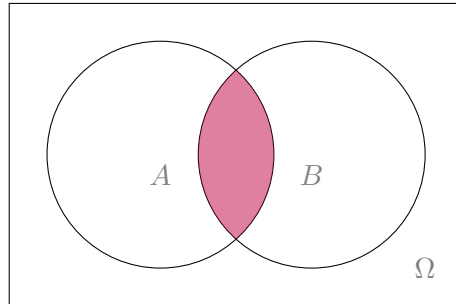


Figura 1.2:

**Casos Particulares :**

1. Se  $B \subset A$ , então  $A \cap B = B$

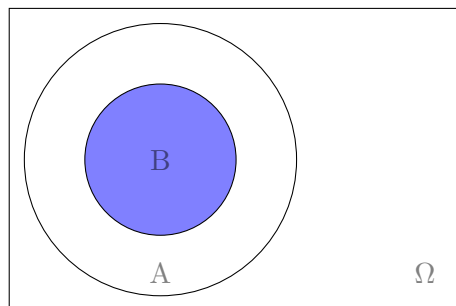


Figura 1.3:

2. Se  $A$  e  $B$  são eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos (não possui elementos comuns), então  $A \cap B = \emptyset$ .

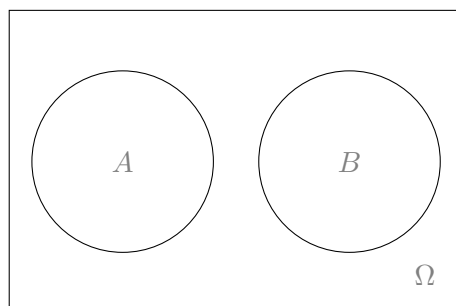


Figura 1.4:

**Diferença de eventos ( $A - B$ ) :** é o evento formado pelos elementos que

pertencem a  $A$  mas não pertencem a  $B$ .

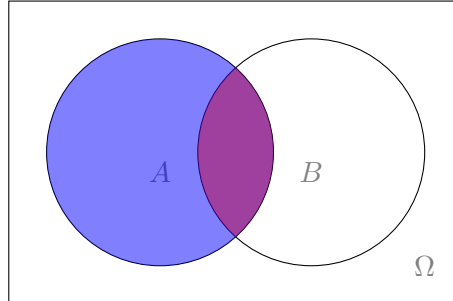


Figura 1.5:

**Evento Complementar ( $\bar{A}$  ou  $A^c$ ) :** é o evento formado por todos os elementos de  $\Omega$  que não pertencem a  $A$ .

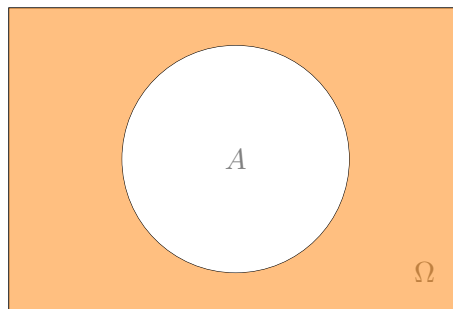


Figura 1.6:

**Alguns exemplos de eventos complementares :**

(a)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

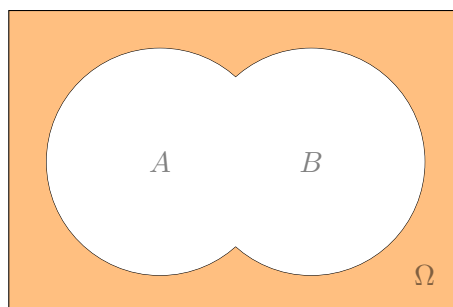


Figura 1.7:

(b)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

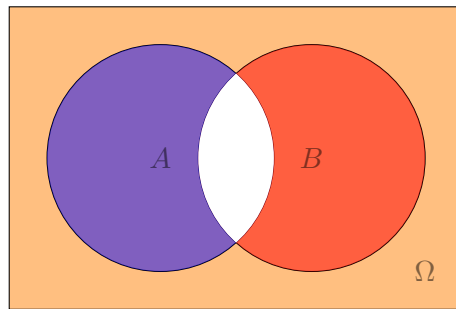


Figura 1.8:

Os itens  $a$  e  $b$  são conhecidos como Lei de Demorgan.

(c)  $A \cup B^c = (A \cap B) \cup B^c = A \cup (A \cap B)^c$

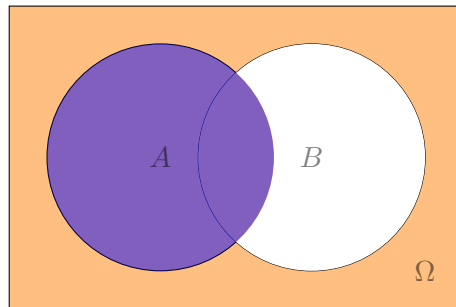


Figura 1.9:

(d)  $A \cap B^c = B^c \cap (A \cup B)$

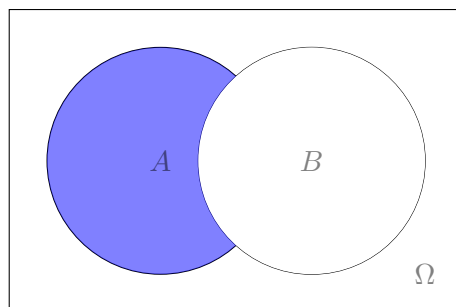


Figura 1.10:

**Outras operações :**

- I.  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- II.  $A \cup \emptyset = A$
- III.  $\emptyset^c = \Omega$

- IV.  $\Omega^c = \emptyset$
- V.  $(A^c)^c = A$
- VI.  $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- VII.  $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

**Exemplo :** Escrever  $A \cup B$  como união de eventos disjuntos.

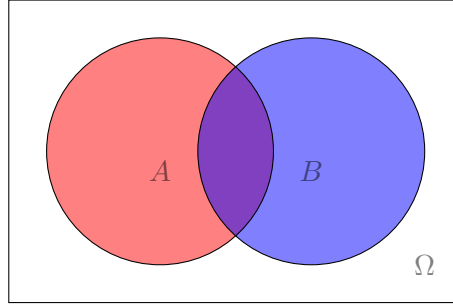


Figura 1.11:

Situação 1:

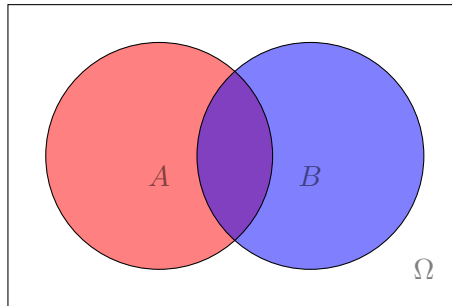


Figura 1.12:

$$A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$$

Situação 2:

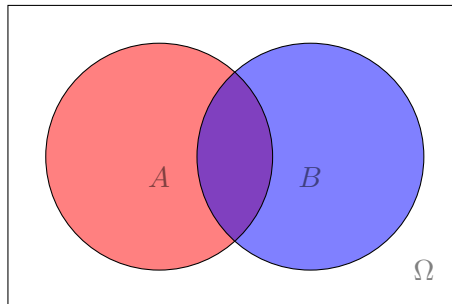


Figura 1.13:

Tabela 1.1:

$$(A \cup B) = B \cup (B^c \cap A)$$

Considerando a situação 1, vamos verificar se os eventos são disjuntos. Os eventos serão disjuntos se  $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$ . Verificando, temos:

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$\emptyset \cap B = \emptyset$$

## 1.1 Definições de Probabilidade

### 1.1.1 Probabilidade em Espaços Equiprováveis

Se um experimento aleatório tiver  $n$  resultados possíveis,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , mutuamente exclusivos e igualmente possíveis e se um evento  $A$  tiver  $n_A$  desses resultados, então a probabilidade do evento  $A$ , representado por  $P(A)$ , é dada por:

$$A \subset \Omega$$

$$P(A) = \frac{N_A}{n} \quad (1.1)$$

Sendo que  $\Omega$  é definido como todo o espaço amostral,  $n_A$  o número de casos favoráveis  $A$  e  $n$  o número de casos possíveis.

#### Exemplo :

Dado o lançamento de duas moedas honestas, calcule a probabilidade de:

- (a) Obter duas faces iguais.
- (b) Obter pelo menos uma face diferente de cara
- (c) Obter pelo menos uma face diferente.

$$\Omega = \{(c, c); (c, k); (k, c); (k, k)\}$$

- (a)  $A =$  Faces iguais

$$A = \{(c, c); (k, k)\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

- (b)  $B =$  Pelo menos uma face diferente de cara.

$$B = \{(c, k); (k, c); (k, k)\}$$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

(c)  $C$  = Obter pelo menos uma face diferente

$$P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

### 1.1.2 Probabilidade Frequentista

Um experimento é realizado  $n$  vezes, sendo  $n$  um número grande. O evento  $A$  ocorre exatamente  $N_a$  vezes com:  $0 \leq N_a \leq n$ . A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento  $A$  é uma forma de aproximar a probabilidade do evento  $A$ , ou seja:

$$f_r(A) = \frac{n_a}{n} \quad (1.2)$$

Quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $f_r(A)$  aproxima-se de  $P(A)$ .

**Exemplo :**

Geração de  $n$  número inteiros entre 1 e 5,  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , e o evento de interesse é a ocorrência do número 4.

### 1.1.3 Probabilidade axiomática

A probabilidade de um evento  $A$  é definida como sendo um número  $P(A)$  que satisfaz os seguintes axiomas:

- I.  $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$
- II.  $P(\Omega) = 1$
- III. Se  $A_1, A_2, \dots$  são eventos mutuamente exclusivos ( $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ ), então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (1.3)$$

**Propriedades** (a)  $0 \leq P(A) \leq 1$

(b)  $P(\emptyset) = 0$

(c) Se  $A \subset \omega$  então  $P(A) = 1 - P(A^c)$



(d) Se  $A \subset B \subset \Omega$ , então  $P(A) \leq P(B)$

(e) Se  $A, B \subset \Omega$ , então vale:

$$P(B) = P(B \cup A) + P(B \cup \bar{A}) \quad (1.4)$$

(f) Se  $A, B \subset \omega$ , então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1.5)$$

(g) Se  $A, B, C \subset \omega$ , então:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (1.6)$$

**Exemplo :**

Mostre a propriedade (g).

Use o fato de que  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$ :

$$\begin{aligned} &P(A \cup B \cup C) - P(A \cup (B \cup C)) \\ &= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

**Exercício :**

Considere um experimento aleatório e os eventos  $A$  e  $B$  associados, tais que:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{2} \\ P(B) &= \frac{1}{3} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Calcule as probabilidades:

(a)  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(b)  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Figura 1.15: Name

(a)

$$\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\
&= 1 - \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right\} = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

(b)

$$= 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ou de maneira similar:

$$\begin{aligned}
P(A^c \cup B^c) &= P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) \\
&= (1 - P(A)) + (1 - P(B)) - \frac{5}{12} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

#### 1.1.4 Probabilidade condicional

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos definidos em um mesmo espaço amostral  $\Omega$ . A probabilidade de  $A$  dado que ocorre o evento  $B$ , denotada por  $P(A/B)$  é definida por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1.7)$$

para  $P(B) > 0$ . Consequentemente, podemos escrever:

Figura 1.16: Name

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad (1.8)$$

Conhecida como regra do produto:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P \cap B}{P(A)} \quad (1.9)$$

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) \quad (1.10)$$

	D	L	Total
N	40	30	70
U	20	10	30
Total	60	40	100

Figura 1.17: Distribuição de probabilidade dos computadores de um dado escritório

Figura 1.18: Um exemplo de uma árvore de probabilidades

**Exemplo :** Suponha que um escritório possua 100 computadores de tipos Desktop (D) e Laptop (L) sendo alguns novos (N) e outro com um certo tempo de uso (U), distribuídos da seguinte forma: Um funcionário escolhe um laptop ao acaso. Qual a probabilidade de que seja novo?

**Resolução :**

$$P(N/L) = \frac{P(N \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{3}{4}$$

Obs:  $P(A \cap B)$  e  $P(A/B)$

## 1.2 Àrvore de Probabilidades

Sejam  $A, B \subset \Omega$ . Uma representação bastante útil é a árvore de probabilidades.

**Exemplo :** No exemplo anterior, qual a probabilidade de um funcionário selecionar um desktop usado?

Figura 1.19: Name

$$P(D \cap U) = P(D/U)P(U)$$

Ou:

$$P(D \cap U) = P(U/D)P(D) = \frac{20}{60} \times \frac{60}{100} = 0,2$$

**Algumas propriedades :**

- (a)  $P(\emptyset/B) = 0$
- (b) Se  $A \subset \Omega$ , então  $P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$

(c) Se  $A, C \subset \Omega$ , então:

$$P(A \cup C/B) = P(A/B) + P(C/B) - P(A \cap C/B) \quad (1.11)$$

### 1.3 Independência de Eventos

**Definicao** : Dois eventos  $A$  e  $B$  definidos em  $\Omega$  são independentes se a informação da ocorrência ou não de  $B$  não altera a probabilidade de ocorrência de  $A$ . Isto é:

$$P(A/B) = P(A) \quad (1.12)$$

$$P(B) > 0 \quad (1.13)$$

Logo, dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se, e somente se,  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

**Observacao** :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

**Exemplo** : Um estudante se inscreve em dois processos seletivos com probabilidade 30% de ser aprovado na empresa  $I$  e 50% de ser aprovado na empresa  $II$ . Se as aprovações são independentes, qual a probabilidade de que ele seja aprovado em pelo menos uma?

Definindo os eventos:

A: O estudante ser aprovado na empresa  $I$

B: O esutdanbte ser aprovado na empresa  $II$

$$P(A) = 0,30$$

$$P(B) = 0,50$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= 0,3 + 0,5 - 0,3 \times 0,5 \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

#### 1.3.1 Independência de tres eventos

Os eventos  $A, B, C$  em  $\Omega$  são independentes se e somente se:

$$(a) \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$(b) \quad P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$(c) \quad P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

$$(d) \ P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

**Resultado** : Se A,B são eventos independentes em  $\Omega$ , então:

- I.  $A$  e  $B^c$  são independentes
- II.  $A^c$  e  $B$  são independentes
- III.  $A^c$  e  $B^c$  são independentes.

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \times P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) \times P(\bar{B}) \end{aligned}$$

**Obs** : Não confundir eventos mutuamente exclusivos com eventos independentes. Ou seja, não confunda  $P(A \cap B) = 0$  com  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

## 1.4 O Teorema de Bayes

### 1.4.1 Partições do espaço amostral

**Definição** : Uma coleção de eventos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  formam uma partição do espaço amostral  $\Omega$  se:

- I.  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , com  $i, j = 1, \dots, k$
- II.  $\cup_{i=1}^k A_i = \Omega$

### 1.4.2 Lema da probabilidade total

**Definicao** Se  $A_1, \dots, A_k$  é uma partição de  $\Omega$ , então para qualquer evento  $B$  de  $\Omega$ , vale:

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(B \cap A_i) \quad (1.14)$$

$$= \sum_{i=1}^k P(B/A_i)P(A_i) \quad (1.15)$$

$$(1.16)$$

$$B = \cup_{i=1}^k A_i \cap B \quad (1.17)$$

$$P(B) = \cup_{i=1}^k P(A_i \cap B) \quad (1.18)$$

$$= \cup_{i=1}^k P(B/A_i)P(A_i) \quad (1.19)$$

Figura 1.20:  $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_k \cap B)$

### 1.4.3 Fórmula de Bayes

**Definicao** Se  $A_1, A_2, \dots, A_k$  formam uma partição de  $\Omega$  e  $B \subset \Omega$  com  $P(B) > 0$ , então:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \quad (1.20)$$

$$= \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^k P(B/A_j)P(A_j)} \quad (1.21)$$