Capítulo 1

Probabilidade

Objetivo: Definir um modelo estatístico que seja adequado à descrição e interpretação de fenômenos aleatórios.

Experimentos ou fenômenos aleatórios (ε) : são os acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza, sob condições idênticas.

Exemplos :

- Lançamento de um dado.
- Lançamento de uma moeda
- Tempo de vida útil de um componente eletrônico.

Espaço Amostral (Ω) : refere-se ao conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

Exemplos :

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
$\Omega_2 = \{c, k\}$ Aonde k é cara e c é coroa.
$\Omega_3 = [0, \infty\}$

Evento : qualquer subconjunto do espaço amostral Ω do experimento aleatório ε.

Notação: $A, B, C, D, \ldots, A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, \ldots$
Notamos que como A é um evento, então $A \subset \Omega$.

1.0.1 Tipos de Eventos

Evento Simples ou Elementar : é o evento formado por um único ponto do espaço amostral.

Exemplo : $A = \{W\}$.

Evento Composto : é o evento formado por dois ou mais pontos do espaço amostral.

Exemplo : $A = \{w_1, w_2, w_3\}$

Evento Certo : é o evento formado por todos os pontos amostrais.

Exemplo : $A = \Omega$

Evento Impossível : É o evento que não possuí elementos de Ω, isto é, evento vazio.

Notação : $A = \{\}$ ou $A = \emptyset$

Alguns Exemplos :

$A =$ Face do dado maior que 5
$A = \{6\}$
$B =$ Face do dado sem par
$B = \{2, 4, 6\}$
$C =$ Face do dado maior que 1
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
$D =$ Face do dado maior que 6.
$D = \{\}$ ou $D = \emptyset$

1.0.2 Operação com Eventos

Para ilustrar graficamente eventos, é costume utilizar-se os mesmos diagramas de Venn utilizados na teoria de conjuntos.

Considere eventos definidos em um espaço amostral Ω de um experimento aleatório ε.

União de eventos ($A \cup B$) : é o evento formado por todos os elementos que pertencem a A, ou B, ou ambos.

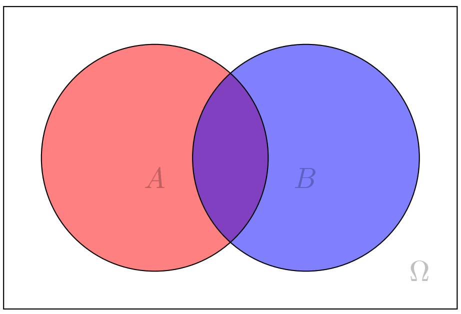

Figura 1.1:

Intersecção de eventos $(A \cap B)$: é o evento formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

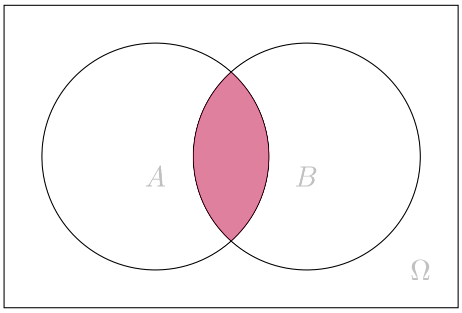

Figura 1.2:

Casos Particulares :

1. Se $B \subset A$, então $A \cap B = B$

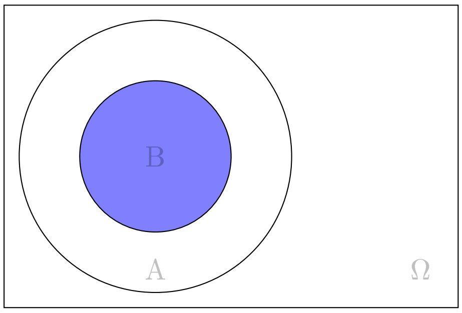

Figura 1.3:

2. Se A e B são eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos (não possui elementos comuns), então $A \cap B = \emptyset$.

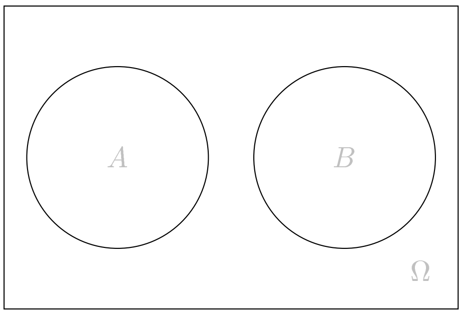

Figura 1.4:

Diferença de eventos $(A - B)$: é o evento formado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B.

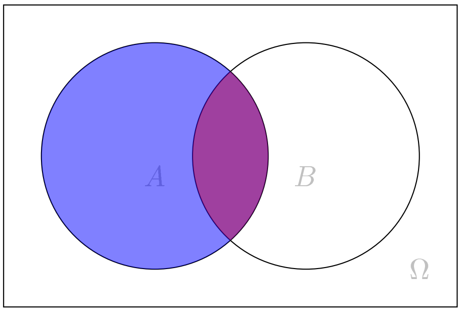

Figura 1.5:

Evento Complementar ($\bar{A}$ ou A^c) : é o evento formado por todos os elementos de Ω que não pertencem a A.

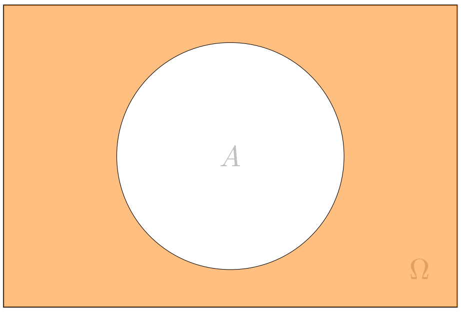

Figura 1.6:

Alguns exemplos de eventos complementares :

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

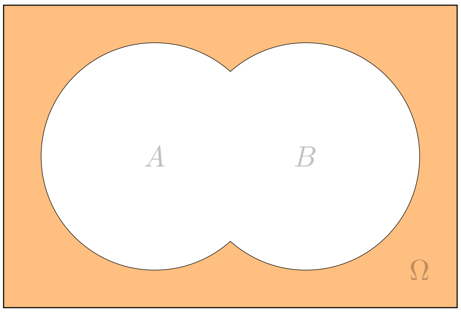

Figura 1.7:

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

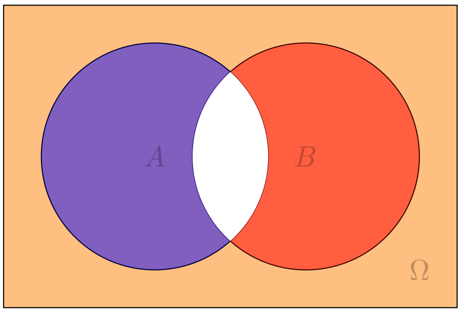

Figura 1.8:

Os itens a e b são conhecidos como Lei de Demorgan.

(c) $A \cup B^c = (A \cap B) \cup B^c = A \cup (A \cap B)^c$

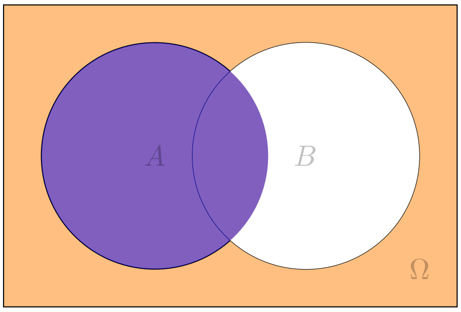

Figura 1.9:

(d) $A \cap B^c = B^c \cap (A \cup B)$

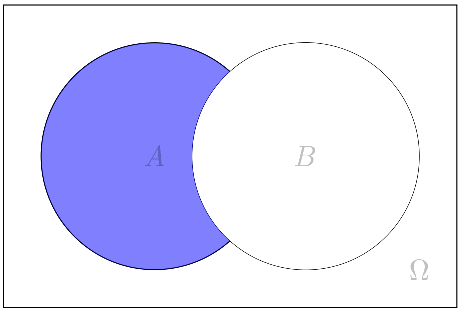

Figura 1.10:

Outras operações :

I. $A \cap \emptyset = \emptyset$

II. $A \cup \emptyset = A$

III. $\emptyset^c = \Omega$

IV. $\Omega^c = \emptyset$
V. $(A^c)^c = A$
VI. $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
VII. $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

Exemplo : Escrever $A \cup B$ como união de eventos disjuntos.

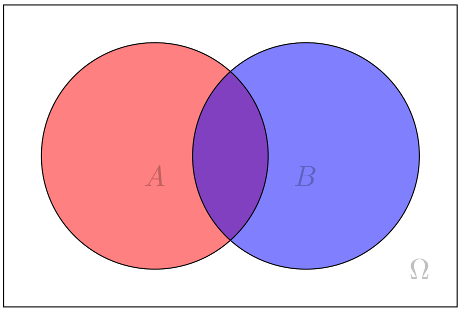

Figura 1.11:

Situação 1:
$A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
Situação 2:
$(A \cup B) = B \cup (B^c \cap A)$
Considerando a situação 1 , vamos verficar se os eventos são disjuntos. Os eventos serão disjuntos se $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$. Vericando, temos:

$$A \cap A^c = \emptyset$$
$$\emptyset \cap B = \emptyset$$

1.1 Definições de Probabilidade

1.1.1 Probabilidade em Espaços Equiprováveis

Se um experimento aleatório tiver n resultados possíveis, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, mutuamente exclusivos e igualmente possíveis e se um evento A tiver n_A desses resultados, então a probabilidade deo evento A, representado por $P(A)$, é dada por:

$$A \subset \Omega$$
$$P(A) = \frac{N_a}{n} \tag{1.1}$$

Sendo que Ω é definido como todo o espaco amostral, n_A o número de casos favoráveis A e n o número de casos possíveis.

Exemplo :

Dado o lançamento de duas moedas honestas, calcule a probabilidade de:

(a) Obter duas faces iguais.

(b) Obter pelo menos uma face diferente de cara

(c) Obter pelo menos uma face diferente.

	c	k
c	(c,c)	(c,k)
k	(k,c)	(k,k)

$\Omega = \{(c,c);(c,k);(k,c);(k,k)\}$

(a) $A =$ Faces iguais

$$A = \{(c,c);(k,k)\}$$
$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

(b) $B =$ Pelo menos uma face diferente de cara.

$$B = \{(c,k);(k,c);(k,k)\}$$
$$P(B) = \frac{3}{4}$$

(c) $C =$ Obter pelo menos uma face diferente

$$C = \{(c,k);(k,c)\}$$
$$P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

1.1.2 Probabilidade Frequentista

Um experimento é realizado n vezes, sendo n um número grande. O evento A ocorre exatamente N_a vezes com: $0 \leq N_a \leq n$. A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é uma forma de aproximar a probabilidade do evento A, ou seja:

$$f_r(A) = \frac{n_a}{n} \tag{1.2}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $f_r(A)$ aproxima-se de $P(A)$.

Exemplo :

Geração de n número inteiros entre 1 e 5, $\{1,2,3,4,5\}$, e o evento de interesse é a ocorrência do número 4.

1.1.3 Probabilidade axiomática

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número $P(A)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

I. $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$

II. $P(\Omega) = 1$

III. Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos $(A_i \cup A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$, então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.3}$$

Propriedades :

(a) $0 \leq P(A) \leq 1$

(b) $P(\emptyset) = 0$

(c) Se $A \subset \omega$ então $P(A) = 1 - P(A^c)$

(d) Se $A \subset B \subset \Omega$, então $P(A) \leq P(B)$

(e) Se $A, B \subset \Omega$, então vale:

$$P(B) = P(B \cup A) + P(B \cup \bar{A}) \tag{1.4}$$

(f) Se $A, B \subset \omega$, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \tag{1.5}$$

(g) Se $A, B, C \subset \omega$, então:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) - P(A \cup C) \\ -P(B \cup C) + P(A \cup B \cup C) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Exemplo :

Mostre a propriedade (g).

Use o fato de que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$:

$$
\begin{aligned}
&P\left(A \cup B \cup C\right) - P\left(A \cup (B \cup C)\right) \\
&= P(A) + P(B \cup C) - P\left(A \cap (B \cup C)\right) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) \cup (A \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) \\
&- \left\{P\left(A \cap B\right) + P\left(A \cap c\right) - P\left((A \cap B) \cap (A \cap C)\right)\right\} \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Exercício :

Considere um experimento aleátorio e os eventos A e B associados, tais que:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{1}{2} \\
P(B) &= \frac{1}{3} \\
P(A \cap B) &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Calcule as probabilidades:

(a) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(b) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Figura 1.12: Name

(a)

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\
&= 1 - \{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\} = \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

Figura 1.13: Name

(b)

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cup B^c) &= P\left((A \cap B)^c\right) \\
&= 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Ou de maneira similar:

$$\begin{aligned}
P(A^c \cup B^c) &= P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) \\
&= (1 - P(A)) + (1 - P(B)) - \frac{5}{12} \\
&= (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{3}) - \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

1.1.4 Probabilidade condicional

Sejam A e B dois eventos definidos em um mesmo espaco amostral Ω. A probabilidade de A dado que ocorre o evento B, denotada por $P(A/B)$ é definida por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.7}$$

Para $P(B) > 0$. Consequentemente, podemos escrever:

Figura 1.14: Name

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) \tag{1.8}$$

Conhecida como regra do produto:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P \cap B}{P(A)} \tag{1.9}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A) \tag{1.10}$$

Exemplo : Suponha que um escritório possua 100 computadores de tipos Desktop (D) e Laptop (L) sendo alguns novos (N) e outro com um certo tempo de uso (U), distribuídos da seguinte forma: Um funcionário escolhe um laptop ao acaso. Qual a probabilidade de que seja novo?

Resolucão :

	D	L	Total
N	40	30	70
U	20	10	30
Total	60	40	100

$$P(N/L) = \frac{P(N \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{3}{4}$$

Obs: $P(A \cap B)$ e $P(A/B)$

Figura 1.15: Um exemplo de uma àrvore de probabilidades

1.2 Àrvore de Probabilidades

Sejam $A, B \subset \Omega$. Uma representação bastante útil é a àrvore de probabilidades.

Exemplo : No exemplo anterior, qual a probabilidade de um funcionário selecionar um desktop usado?

Figura 1.16: Name

$$P(D \cap U) = P(D/U)P(U)$$

Ou:

$$P(D \cap U) = P(U/D)P(D) = \frac{20}{60} \times \frac{60}{100} = 0,2$$

Algumas propriedades :

(a) $P(\emptyset/B) = 0$

(b) Se $A \subset \Omega$, entao $P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$

(c) Se $A, C \subset \Omega$, então:

$$P(A \cup C/B) = P(A/B) + P(C/B) - P(A \cap C/B) \quad (1.11)$$

1.3 Independência de Eventos

Definição : Dois eventos A e B definidos em Ω são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A. Isto é:

$$P(A/B) = P(A) \quad (1.12)$$

$$P(B) > 0 \quad (1.13)$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Observação :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Exemplo : Um estudante se inscreve em dois processos seletivos com probabilidade 30% de ser aprovado na empresa I e 50% de ser aprovado na empresa II. Se as aprovações são independentes, qual a probabilidade de que ele seja aprovado em pelo menos uma?

Definindo os eventos:

A: O estudante ser aprovado na empresa I

B: O esutdanbte ser aprovado na empresa II

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.30 \\ P(B) &= 0.50 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= 0.3 + 0.5 - 0,3 \times 0,5 \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

1.3.1 Independência de três eventos

Definição: Os eventos A,B,C em Ω são independentes se e somente se:

(a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(b) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

(c) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

(d) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Resultado : Se A,B são eventos independentes em Ω, então:

I. A e B^c são independentes

II. A^c e B são independetes

III. A^c e B^c são independentes.

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \times P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) \times P(\bar{B}) \end{aligned}$$

Observação : Não confundir eventos mutuamente exclusivos com eventos independentes. Ou seja, não confunda $P(A \cap B) = 0$ com $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemplo : Um atirador acerta 80% dos disparos e outro acerta, nas mesmas condições acerta 70%.

(a) Qual a probabilidade de o alvo ser acertado se ambos os atiradores disparam simultanemaente?

(b) Qual a probabilidade do alvo ser acertado se ambos os atiradores disparam simultanemaente?

A: Atirador 1 acerta o alvo

B: Atirador 2 acerta o alvo

(a) A intersecção de dois eventos independentes é dada pela multiplicação de suas probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &= 0.8 \times 0.7 = 0.56 \end{aligned}$$

(b) É dado pela a união dos dois eventos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B - P(A) \times P(B) \\ &= 0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7 \\ &= 0.94 \end{aligned}$$

1.4 O Teorema de Bayes

1.4.1 Partições do espaco amostral

Definição : Uma coleção de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω se:

I. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, com $i, j = 1, \ldots, k$

II. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$

1.4.2 Lema da probabilidade total

Definição Se $A_1, \ldots, A_k$ é uma partição de Ω, então para qualquer evento B de Ω, vale:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{k} B(B \cap A_i) \qquad (1.14) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

$$B = \cup_{i=1}^{k} A_i \cap B) \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= \cup_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) \\ &= \cup_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Figura 1.17: $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap) \cup \ldots (A_k \cap B)$

1.4.3 Fórmula de Bayes

Definição Se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formam uma partição de Ω e $B \subset \Omega$ com $P(B) > 0$, então:

$$\begin{aligned} P(A_i/B) &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B/A_j)P(A_j)} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Exemplo 1 :

Uma montadora trabalha com dois fornecedores A e B de uma determinada peça. Sabe-se que 10% e 5% das peças provenientes dos fornecedores A e B respectivamente, estão fora de especificação. A montadora recebe 30% das peças do fornecedor A e 70% do fornecedor B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhido ao acaso, calcule:

1. A probabilidade que ela esteja fora de especificação.
2. Se uma peça é escolhida ao acaso está fora de especificação, qual é a ṕrobabilidade de que tenha sido fornecido por A?

A: A peça é do fornecedor A.

B: A peça é do fornecedor B.

C: A peça está fora de especificação.

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.3 \\ P(B) &= 0.7 \\ P(C/A) &= 0.10 \\ P(C/B) &= 0.05 \end{aligned}$$

Figura 1.18: Name

(a) $P(C) =?$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) \cup P(B) \\ P(C) &= P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ &= P(C/A)P(A) + P(C/B)P(B) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0.05 \times 0.7 \\ &= 0.065 \end{aligned}$$

(b) $P(A/C) =?$

$$\begin{aligned} P(A/C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C/A)P(A)}{P(C/A)P(A) + P(C/B)P(B)} \\ &= \frac{0.1 \times 0.3}{0.065} = 0.4615 \end{aligned}$$

Exemplo 2: Estudos reveleram que 40% dos estudantes universitários já experimentaram algum tipo de droga ilícita. Uma universidade resolve aplicar um teste com detector de mentira para descobrir se seus estudantes já usaram algum tipo de droga ilícita. Sabemos que se o estudante já usou algum tipo de droga o detector vai dar positivo com certeza. Porém, sabemos que o detector erra, ou seja, apresenta um falso positivo em 5% quando aplicado em estudantes que nunca usaram drogas.
Se um estudante é selecionado aleatoriamente e o teste aplicado nele deu positivo, qual a probabilidade de ele já ter usado algum tipo de droga?

A: O estudante já usou droga.

B: O detector deu positivo.

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.4 \\ P(B/A)& \\ P(B/A^c) &= 0.05 \\ P(A/B)& \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(A/B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)\times P(A)+P(B/A^c)\times P(A^c)} \\
&= \frac{1\times 0.4}{1\times 0.4+0.05\times 0.6} \\
&= 0.93
\end{aligned}
$$

Exercício : Para selecionar seus funcionários uma empresa oferece aos candidatos um curso de treinamento durante uma semana. No final do curso, eles são classificados em uma prova; 25% são classificados como bons (B), 50% como médios (M) e os 25% restantes como fracos (F). A empresa pretende substituir o treinamento por um teste contendo questões de conhecimentos gerais. Para isso gostaria de conhecer qual a probabilidade de um indíviduo aprovado no teste ser considerado fraco (F), se fizesse o curso. Assim, antes do início do curso, os candidatos do curso, foram submetidos ao teste e receberam o conceito aprovado (A) ou reprovado (R). No final do curso, obtiveram-se as seguintes probabilidades condicionais:

$$
\begin{aligned}
P(A/B) &= 0,8 \\
P(A/M) &= 0,5 \\
P(A/F) &= 0,2
\end{aligned}
$$

Resposta : 0.1

1.5 Variáveis Aleatórias

Definição : Seja um experimento aleatório e Ω o espaço amostral associado a esse experimento. Uma função $X(\omega)$ que associa cada elemento $\omega \in \Omega$ a um número real $x = x(\omega)$ é denominada variável aleatória (v.a.).

Observação : $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Exemplo : Lançamento de uma moeda duas vezes. A v.a. x, é o n^o de caras.

	c	k
c	(c,c)	(c,k)
k	(k,c)	(k,k)

$\Omega = \{(c,c);(c,k);(k,c);(k,k)\}$

$$\Omega : \{\underbrace{cc}_{\omega_1};\underbrace{kc}_{\omega_2};\underbrace{kc}_{\omega_3};\underbrace{kk}_{\omega_4}\}$$
$$X : \quad n^o \text{ de caras}$$
$$X(\omega_1) = X((c,c)) = X(\omega_1) = 2$$
$$X(\omega_2) = X((k,c)) = X(\omega_2) = 1$$
$$X(\omega_3) = X((c,k)) = X(\omega_3) = 1$$
$$X(\omega_4) = X((k,k)) = X(\omega_4) = 0$$
$$R_x : \{0,1,2\}$$
$$P(x=0) =?$$
$$P(x=1) =?$$
$$P(x=2) =?$$
$$x = \begin{cases} 0, & \text{se ocorrer } kk \\ 1, & \text{se ocorrer } ck \text{ ou } kc \\ 2, & \text{se ocorrer } cc \end{cases}$$

Exemplo : Em uma linha de produção, peças são classificadas em defeituosas ou não defeituosas. Podemos definir a v.a. X como:

$$\begin{cases} x = 1, & \text{se a peça é defeituosa} \\ 0, & \text{a peça não é defeituosa} \end{cases}$$

Observação : Uma v.a. X desse tipo é chamada de v.a. de Bernoulli. Nesse caso, $\Omega = \{$peça defeituosa, peça não defeituosa$\}$

1.5.1 Classificação de Variáveis Aleatórias

Definição : Se a v.a. x assume valores em um conjunto finito ou infinito e numerável é chamado de variável aleatória discreta. Se x assume valores, em um conjunto infinito não-enumerável, é chamada de v.a. contínua.

Exemplos :

(a) x indica o n^o de residentes em um domicílio. X pode assumir valores em ♮ e assim é chamada de v.a. discreta.

(b) Y indica o tempo de vida (em horas) de um equipamento eletrônico. Y pode assumir valores em $\mathbb{R}^+$ e assim é chamado de v.a. contínua.

1.5.2 Funcao Massa de Probabilidade

Definição : Seja x uma v.a. discreta que assume valores em $R_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. A cada possível x_i, associamos um número,

$$P_i = p(x_i) = P(X = x_i) = P(X(\omega_i) = x_i),$$
$$\omega_i \in \Omega \quad \text{e } x_i \in R_x$$

Dito probabilidade de x_i. A função $p(x)$ é definida como função massa de probabilidade (f.m.p) de X.

As probabilidades $p(x_i)$ devem satisfazer as seguintes condições:

1. $p(x_i) > 0, \forall x_i \in R_x$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Interpretação da f.m.p :

Seja x uma v.a.
discreta com $R_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ e $p(x_i) = p_i$.

Figura 1.19:

Exemplo: Lançamento de uma moeda duas vezes e x é o número de caras.

$$\Omega = \{\underbrace{cc}_{2}; \underbrace{ck}_{1}; \underbrace{kc}_{1}; \underbrace{kk}_{0}\}$$
$$R_x = \{0, 1, 2\}$$

A f.m.p de x é dada por:

x	0	1	2
$P(x) = P(X = x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

$$p(0) = P(x = 0) = P(X(\omega) \in kk) = \frac{1}{4}$$
$$p(1) = P(x = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$p(2) = P(x = 2) = \frac{1}{4} P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se sair } kk \text{ ou } cc \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{se sair } ck \text{ ou } kk \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Exemplo: Um carregamento de 8 computadores contem 3 defeituosos. Se uma empresa de uma compra aleatória de dois computadores, apresente a f.m.p para o numero de computadores com defeitos adquiridos.

$$X : \text{numero de computadores defeituoso}$$
$$R_x = \{0, 1, 2\}$$
$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}$$

Observação:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = 15/28$$
$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = 3/28$$

Exemplo: A demanda diária de um item é uma v.a. discreta com f.m.p. dada por:

$$P(D = d) = \frac{2^d k}{d!}, d = 1, 2, 3, 4 \tag{1.18}$$

(a) Determine a constante k

(b) Calcule $P(D > 2)$

(a) Sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1, \forall x_i \in R_x$$
$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$$
$$\frac{2^1 k}{1!} + \frac{2^2 k}{2!} + \frac{2^3 k}{3} + \frac{2^4 k}{4} = 1$$
$$2K + 2K + \frac{4K}{3} + \frac{2K}{3} = 1$$
$$4K + \frac{6K}{3} = 1$$
$$6K = 1$$
$$K = \frac{1}{6}$$

Então o f.m.p de x é:

$$P(D = d) = \frac{2^d}{6d!}, d = 1, 2, 3, 4$$

(b)

$$\begin{aligned}
P(D > 2) &= P(D \geq 3) \\
&= P(D = 3) + P(D = 4) \\
&= \frac{2^3}{6 \times 3!} + \frac{2^4}{6 \times 4!} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
P(D > 2) &= 1 - P(D \leq 2) \\
&= 1 - \{P(D = 1) + P(D = 2)\} \\
&= 1 - P(D = 1) - P(D = 2)
\end{aligned}$$

Obs: $R_x : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P(X > 1) = P(x = 2) + P(x = 3) + \cdots + P(x = 5)$$

ou

$$\begin{aligned}
P(x > 1) &= 1 - P(x \leq 1) \\
&= 1 - \{P(x = 0) + P(x = 1)\} \\
&= P(x > 1) + P(x \leq 1) = 1
\end{aligned}$$

1.5.3 Densidade de Probabilidade

Definição: Seja x uma v.a.
contínua que assume valores em $R_x, R_x \in \mathbb{R}$. A função f(x) é a função densidade de probabilidade (f.d.p) para x, se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in R_x$
2. $\int_R x f(x) dx = 1 (\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1)$
3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$

Uma ilustração de f.d.p:

Figura 1.20:

Obs: Se x é uma v.a. contínua assumindo valores em R_x, então para toda $a \in R_x$, temos:

(a) $P(x = a) = 0$

(b) $P(x > a) = P(x \leq a)$

(c) $P(x < a) = P(x \leq a)$

(d) $P(x > a) = 1 - P(x \leq a)$
$= 1 - P(x < a)$

(e) $P(x < a) = 1 - P(x \geq a)$
$1 - P(x > a)$ Outros exemplos:

$$P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) \tag{1.19}$$

$$= P(a < x \leq b) = P(a < x < b) \tag{1.20}$$

Obs : Só vale para v.a. contínua.

Exemplo: O tempo de produção de um componente (em minutos) é uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{4}, & \text{se } 2 < x < 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.21}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma f.d.p

(b) Calcule a probabilidade de que o tempo de produção de um componente seja menor do que 3 minutos.

(a) Devemos verificar:

I. $f(x) \geq 0, \forall x \in R_x$

II. $\int_{R_x} f(x)dx = 1$

i. $f(x) \geq 0, \forall x \in 2 < x < 4$

ii.

$$\int_2^4 \frac{5-x}{4} dx = 1$$

$$\int_2^4 5dx - \int_2^4 xdx$$

$$= \frac{1}{4}\{5x|_2^4 - \frac{x^2}{2}|_2^4\}$$

$$= \frac{1}{4}\{5(4-2) - \frac{1}{2}(16-4)\}$$

$$= 1$$

Portanto, $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade

(b)

$$P(X < 3) = \int_{-\infty}^3 f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^2 0dx + \int_2^3 \frac{5-x}{4}dx$$

$$P(X<3)=\int_2^3 \frac{5-x}{4}dx =$$
$$\frac{1}{4}\{\int_2^3 5dx - \int_2^3 xdx\}$$
$$\frac{1}{4}\{5\times 1-\frac{1}{2}\times 5\}=\frac{5}{8}$$
$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Exemplo: Seja x uma v.a. contínua com f.d.p dada por:

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0\leq x<1\\ 0, \text{Caso contrário}\end{cases}$$

(a) Verifique se f(x) é uma f.d.p

(b) $P(x\leq \frac{1}{2})$

(c) $P(X\leq \frac{1}{2}/\frac{1}{3}\leq x\leq \frac{2}{3})$

(a) Devemos verificar:

I. $f(x)\geq 0, \forall x\in R_x$

II. $\int_{R_x} f(x)dx=1$

i. $f(x)\geq 0, \forall x\in 0<x<1$

ii.

$$\int_{R_x} 2xdx$$
$$=\int_0^1 2xdx$$
$$=\frac{2x^2}{2}|_0^1\}$$
$$=1$$

III.

$$P(X\leq 1/2)=\int -\infty^{\frac{1}{2}} f_x(x)dx$$
$$=\int -\infty^0 0dx+\int 0^{\frac{1}{2}} 2xdx$$
$$=x^2|_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=1/4$$

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Figura 1.21: F.m.p do lançamento de uma moeda

IV. Probabilidade Condicional

$$
\begin{aligned}
P(A/B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\
\frac{P(\{X \leq \frac{1}{2}\} \cap \{\frac{1}{3} \leq X \geq \frac{2}{3}\}}{P(\frac{1}{3} \leq X \geq \frac{2}{3})} & \\
&= \frac{P(\frac{1}{3} \leq X \geq \frac{1}{2})}{P(\frac{1}{3} \leq X \geq \frac{2}{3})} \\
&= \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2x dx}{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2x dx} \\
&= \frac{x^2|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}}{x^2|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

1.5.4 Funcao distribuição acumulada discreta

Definição: Seja x uma v.a. discreta que assume valores em R_x e com f.m.p. $p(x) = P(X = x)$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a função de distribuição acumulada(f.d.a) de x, denotada por $\mathbb{F}_x(x)$, é definida como:

$$
\mathbb{F}_x(x) = P(X \geq x) = \sum_{x_i \in R_x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \in R_x} p(x_i) \quad (1.22)
$$
$$
\forall x_i \leq x
$$

De forma mais clara, temos como exemplo:

$$
\begin{aligned}
R_x &= \{0,1,2,3,4\} \\
F_x(2,3) &= P(X \leq 2,3) \\
&= P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Conidere o lançamento de uma moeda duas vezes e x é o número de caras. Já sabemos que a f.m.p de x é dada por:

$$
R_x = \{0,1,2\}
$$

Ou, de forma equibalente podemos escrever:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se} \quad x = 0, 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A f.d.a de x é dada por:

$$F_x = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

1.5.5 Funcao distribuicao acumulada contínua

Definição: Seja x uma v.a. contínua que assume valores em R_x e com f.d.p $f(x)$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a f.d.p de x, denotada por $\mathbb{F}_x(x)$ é definida como:

$$\mathbb{F}_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{1.23}$$

Observação: $\mathbb{F}_x(x) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt, \quad a \in \mathbb{R}$

Como consequência imediata podemos escrever dois resultados:

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{1.24}$$

$$= \mathbb{F}_x(b) - \mathbb{F}_x(a) \tag{1.25}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\mathbb{F}_x(x), \quad \text{se a derivada existir} \tag{1.26}$$

Exemplo: Considere a f.d.p dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine $\mathbb{F}_x(x)$ e use-a para avaliar $P(0 \leq x < 1)$.

A f.d.a de x é dada por:

$$\begin{aligned} F_x(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{t^2}{3}dt, \quad -1 < t < 2 \\ \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}dt &= \frac{1}{9}t^3|_{-1}^{x} \\ F_x(x) &= \frac{1}{9}(x^3+1) \end{aligned}$$

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, x < -1 \\ \frac{1}{9}(x^3+1), -1 \leq x < 2 \\ 1, x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(0 \leq x < 1) &= ? \\ P(0 \leq x < 1) &= \mathbb{F}_x(1) - \mathbb{F}_x(0) \\ P(x \leq 1) - P(x \leq 0) &= \frac{1}{9}(1^3+1) - \frac{1}{9}(0^3+1) \\ P(0 \leq x < 1) &= \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Ou

$$P(0 \leq X < 1) = \int_0^1 \frac{x^2dx}{3}$$

1.5.6 Propriedades de f.d.a

(a) $\mathbb{F}_x(x)$ é uma função contínua

(b) $\mathbb{F}_x(x)$ é uma função monótona não decrescente.

(c) $0 \leq \mathbb{F}_x(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \mathbb{F}_x(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{F}_x(x) = 1$

(e) $P(x \leq a) = \mathbb{F}_x(a)$

(f) $P(x > a) = 1 - P(x \leq a) = 1 - \mathbb{F}_x(a)$

(g) $P(a < x \leq b) = \mathbb{F}_x(b) - \mathbb{F}_x(a)$

Exemplo: Seja x uma v.a. contínua com f.d.p dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} kx^2, 0 < x < 1 \\ 0, \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Achar k.

(b) Determine $\mathbb{F}_x(x)$.

(c) $P(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2})$

(a)

$$\int_{R_x} f(x)dx = 1$$
$$l\int_0^1 x^2 dx = 1$$
$$\frac{k}{3}x^3|_0^1 = 1$$
$$\frac{k}{3} = 1 \to k = 3$$

Logo, a f.d.p de x e:

$$f_x(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(b) $\mathbb{F}_x(x) = ?$

$$\mathbb{F}_x = P(X \leq x) = \int_{-\infty} x f_x(t)dt$$
$$= \int_0^x 3t^2 dt$$
$$= t^3|_0^x = x^3$$

Assim, a f.d.a. e dada por:

$$\mathbb{F}_x(x) = \begin{cases} 0, & x < 0x^3, \quad 0 < x < 1 \\ 1, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(c)

$$P(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}) = \mathbb{F}_x(\frac{1}{2}) - \mathbb{F}_x(\frac{1}{3})$$
$$= (\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{3}^3$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{27}$$
$$= \frac{19}{216}$$

Ou

$$P(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx = \frac{19}{216}$$

Exemplo:

Seja F_x dada por:

$$F_x = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{8}, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Determine:

(a) $P(1 < x \leq 3)$

(b) $P(x > 2)$

(c) Encontre a $P(x)$

(a)

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= \mathbb{F}_x(3) - \mathbb{F}_x(1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - \mathbb{F}_x(2) \\ &= 1 - \mathbb{F}_x(2) = 1 - \frac{5}{8} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_x(0) = P(X \leq 0) &= \frac{1}{8} \\
P(X = 0) &= \frac{1}{8} \\
\mathbb{F}_x(1) = P(X \leq 1) &= \frac{1}{2} \\
P(X = 0) + P(X = 1) &= \frac{1}{2} \\
P(X = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} &= \frac{3}{8} \\
\mathbb{F}_x(2) = P(X \leq 1) &= \frac{5}{8} \\
P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) &= \frac{5}{8} \\
\mathbb{F}_x(1) + P(X \leq 2) &= \frac{5}{8} \\
P(X = 2) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{8} \\
\mathbb{F}_x(3) = P(X \leq 3) &= 1 \\
\underbrace{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)}_{\mathbb{F}_x(2)} + P(X = 3) &= 1 \\
P(X = 3) = 1 - \frac{5}{8} &= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

1.6 Esperança Matemática de uma Variável Aleatória

Definição: Seja X uma v.a. com f.m.p. $p_x(x)$ (no caso discreto) ou f.d.p $f_x(x)$ (no caso contínuo). Chamamos de esperança matemática ou valor médio de X ao valor:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x \in R_x} x p_x(x), \quad \text{no caso discreto} \tag{1.27}$$

$$\mu_x = E(X) = \int_{x \in R_x} x f_x(x) dx, \quad \text{no caso contínuo} \tag{1.28}$$

Considerando $a, b \in \mathbb{R}$, constantes, temos algumas propriedades:

(a)

$$E(aX) = aE(x) \tag{1.29}$$

(b) Se $X = a$,

$$E(X) = E(a) = a \tag{1.30}$$

(c)

$$E(E(X)) = E(X) \tag{1.31}$$

(d)

$$E(\mp a) = E(X) \mp a \tag{1.32}$$

(e)

$$E(ax \mp by) = aE(X) \mp bE(Y) \tag{1.33}$$

Exemplo: Considere a v.a. x com f.d.p dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcular o $E(X)$.

$$E(X) = \int_{R_x} x f_x(x) dx$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \times 2x dx \\ &= 2\int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}x^3|_0^1 = \frac{2}{3} = 0,67 \end{aligned}$$

Resultado: Seja x uma v.a. com f.m.p $p_x(x)$ ou f.d.p $f_x(x)$. Uma função de x, dita $g(x)$, é também uma v.a. e:

$$\mu = E(g(x)) = \sum_{x \in R_x} g(x) p_x(x) \tag{1.34}$$

$$= \sum_{x \in R_x} g(x) P(X = x), \quad \text{no caso discreto}$$

$$E(g(x)) = \int_{R_x} g(x) f_x(x) dx, \quad \text{no caso contínuo} \tag{1.35}$$

1.7 Variancia

Definição: Seja x uma v.a. com f.m.p $p_x(x)$ ou f.d.p $f_x(x)$, com média $\mu_x = E(x)$. Chamamos de variância da v.a. X o valor:

$$\sigma^2 = var(x) = E[(X - E(X))^2] \tag{1.36}$$

$$= E[(x - \mu)^2], \tag{1.37}$$

Ou seja,

$$\sigma^2 = var(x) = \sum_{x \in R_x} (x - \mu_x)^2 P(X = x) \quad \text{no caso discreto} \tag{1.38}$$

$$\sigma^2 = var(x) = \int_{R_x} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx \quad \text{no caso contínuo} \tag{1.39}$$

A raíz quadrada de variáveis ($\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{var(x)}$) é o desvio padrão, denotado por σ.

Resultado: Podemos escrever a variância v.a. x por:

$$\sigma^2 = var(x) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \tag{1.40}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \{\mu_x\}^2 \tag{1.41}$$

Demonstração:

$$var(x) = E(x^2 - 2\mu_x x + \mu_x^2) \tag{1.42}$$

$$= E(x^2) - 2\mu_x E(x) + \mu_x^2 \tag{1.43}$$

$$= E(x^2) - 2\mu_x \mu_x + \mu_x^2 \tag{1.44}$$

$$= E(x^2) - \mu_x \tag{1.45}$$

$$= E(x^2) - \{E(x)\}^2 \tag{1.46}$$

Obs: $E(x^2) \neq \{E(x)\}^2$

1.7.1 Distribuição Binominal

Considere M ensaios de Bernoulli independentes, todos com a mesma probabilidade de sucesso p. A v.a. que conta o número de sucessos nos M ensaios de Bernoulli é denominada v.a. binomial com parâmetro M e p.

Definição: A v.a. discreta x, correspondente ao n^o de sucesso em M ensaios independentes de Bernoulli, tem distribuição binomial se, e somente se, sua f.m.p. é definida por:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}, & x = 0, 1, \ldots, M \quad \text{e } 0 < p < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.47}$$

Notação:$xBin(M, p)$

Obs: $\binom{M}{x} = \frac{M!}{x!(M-x)!}$

Temos que:

$$\mu_x = E(X) = Mp \text{a média de} x e \tag{1.48}$$

$$\sigma^2 = var(x) = Mp(1-p), \text{a variância de x} \tag{1.49}$$

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

Exemplo: Considere uma linha de produção, onde 3 peças são selecionadas aleatoriamente e são classificadas como defeituosas (D) ou não-defeituosas(N). X_1, X_2, X_3 são variáveis aleatórias que assumem 1 se a peça for não-defeituosa e 0 caso contrário. A probabilidade da peça ser não-defeituosa é p e , consequentemente, a probabilidade da peça ser defeituosa é $1-p$. Estamos interessados na distribuição de:

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{se a peca e nao deituosa} \\ 0, & \text{se a peca e deituosa} \end{cases}$$

	X_1	X_2	X_3	$Y = X_1 + X_2 + X_3$	$P(Y = y)$
DNN	0	1	1	2	$p^2(1-p)$
DND	0	1	0	1	$p(1-p)^2$
DDN	0	0	1	1	$p(1-p)^2$
DDD	0	0	0	0	$(1-p)^3$
NNN	1	1	1	3	p^3
NND	1	1	0	2	$p^2(1-p)$
NDN	1	0	1	2	$p^2(1-p)$
NDD	1	0	0	1	$p(1-p)^2$

Abaixo estão os possíveis resultados do experimento:

Ou seja,

$$p(y) = P(Y = y) = \begin{cases} \binom{3}{y} p^y (1-p)^{3-y}, & y = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo: Uma rede varejista compra certo tipo de equipamento eletrônico. O fabricante indica que a taxa de quipamentos em perfeito estado é 97%.

(a) Seleciona-se ao acaso 20 itens. Qual a probabilidade de haver pelo menos um item defeituoso nesses 20?

(b) Seleciona-se aleatoriamente 20 itens em cada 10 carregamentos, qual a probabilidade de haver 3 carregamentos com pelo menos um item defeituoso?

p taxa de equipamentos em perfeito estado

$$p = 0,97$$

y: n^o de equipamentos em perfeito estado.

$$ybin(20; 0,97)$$

Resolucão:

(a) $M = 20$ itens
p:Probabilidade de pelo menos um item defeituoso.
$p = 0,03$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o equipamente e defeituoso} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

$$xbin(20 : 0,03)\text{quad}x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_20$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y < 1) \\ &= 1 - P(Y = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 0) = 2000,03^0(1 - 0,03)^{20-0} \\ = 0,5438 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - 0,5438 \\ &= 0,4562 \end{aligned}$$

Ou, resolvendo pela v.a. Y, temos:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{Se o equipamento for perfeito} \\ 0, & \text{se o equipamente for defeituoso} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(Y \leq 19) &= 1 - P(Y > 19) \\ &= 1 - P(Y = 20) \end{aligned}$$

$$P(y=20) = \binom{20}{20} 0,97^{20}(1-0,97)^{20-20}$$
$$= 0,5438$$

$$P(y \leq 19) = 1 - 0,5339$$
$$= 0,4562$$

(b) 10 carregamentos: 20 itens são selecionados
Y: n^o de carregamento com pelo menos um item defeituoso
$M = 10$
$Y = 0, 1, 2, \ldots, 10$
p : porporcao de ter pelo menos um item defeituoso em um carregamento

$$p = 0,4562$$

$$YB(10 : 0,4562)$$

$$P(Y=3) = \binom{10}{3} (0,4562)^3 (1-0,4562)^{10-3}$$
$$= 0,1602$$

1.7.2 Distribuição Geométrica

Considere uma sequência de ensaios Bernoulli independentes em probabilidade de sucesso p $(0 < p < 1)$. Seja a v.a. x o n^o de fracassos até a ocorrência do 1^o sucesso. Similarmente, a v.a. x pode ser vista como o n^o de ensaios que precedem o primeiro sucesso.

Definição: A v.a. x tem distribuição geométrica se, e somente se, sua f.m.p. é definida por:

$$p_x(x) = P(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & x = 0, 1, 2, \ldots \quad 0 < p < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.50}$$

Notação: $XGeo(p)$

Temos que:

$$\mu_x = E(x) = \frac{1-p}{p} \quad \text{e a} \tag{1.51}$$

$$\sigma^2 = var(x) = \frac{1-p}{p^2} \tag{1.52}$$

Similarmente, a variável aleatória Y pode ser vista como o n^o de ensaios que precedem o primeiro sucesso assim, Y tem a distribuição geométrica com f.m.p. dada por:

$$p_y(y) = P(Y > y) = \begin{cases} (1-p)^{y-1} & p, y = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases} \tag{1.53}$$

Neste caso, a v.a. Y pode ser vista como $Y = X + 1$ e, consequentemente, o valor esperado de y eh:

$$mu_y = E(Y) = E(X+1) = E(X) = E(X) + 1 = \frac{1}{p} \tag{1.54}$$

E a variância de Y e:

$$\sigma_y^2 = var(Y) = var(X+1) = var(X) = \frac{1-p^2}{p} \tag{1.55}$$

Exemplo: Um pesquisador está realizando um experimentos químicos independetes e sabe que a probabilidade de que cada cada experimento apresnete uma reação positiva é $0,3$. QUal é a probabilidade de que menos de 3 reações negativas ocorram antes da primeira positiva?

x:n^o de ocorrência positiva

$$x = \begin{cases} 1, & \text{se a reação positiva} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$P(x = 1) = p = 0,3$$

X : n^o de reações negativas até a ocorrência de uma positiva

$$YGeo(0,3)$$

$$\begin{aligned} P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ P(X = 0) = (1 - 0,3)^0 \times 0,3 = 0,3 \\ P(X = 1) = (1 - 0,3)^1 \times 0,3 = 0,21 \\ P(X = 2) = (1 - 0,3)^2 \times 0,3 = 0,147 \\ P(X < 3) = 0,3 + 0,21 + 0147 = 0,657 \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} Y : n^o \quad \text{de ensaios até a ocorrência de reação positiva} \\ R_y = \{1, 2, 3, \ldots\} \\ P(Y < 4) = P(Y \leq 3) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) \\ P(Y = y) = p(1-p)^{y-1} \quad y = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

1.7.3 Distribuição Binomial Negativa

Considere ensaios independetes de Bernoulli (p) e definimos X como o n^o de fracassos anteriores ao r-ésimos sucesso.

Definição: A v.a. x tem distribuição Binomial negativa se, e somente se, sua f.m.p. é definida por:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{r-1} p^r (1-p)^x, & \text{x=0,1,2,...} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.56}$$

Notação: $X \sim BN(r, p)$

Temos que:

$$\mu_x = E(x) = \frac{r(1-p)}{p} \tag{1.57}$$

$$\sigma^2 = var(x) = \frac{1-p}{p^2} \tag{1.58}$$

Observações:

1. Note que se $r = 1$, temos o modelo geométrico.
2. $$\binom{x+r-1}{r-1} = \binom{x+r-1}{x}$$

A Binomial Negativa pode ser definida como o n^o de ensaios necessários para a obtenção do r-ésimo sucesso. Formando $y = x + r$ temos a quantidade desejada e seus valores variam de r em diante. Assim sendo Y o n^o de ensaios até a obtenção de r sucessos, temos:

$$p(y) = p(Y = y) = \begin{cases} \binom{y-1}{m-1} p^m (1-p)^{y-m}, & y = m, m+1, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.59}$$

Exemplo: Em uma serie do campeonato de basquete, o time que ganhar quatro em sete jogos sera o vencedor. Suponha que o time A tenha probabilidade de 55% de ganhar de B e que A e B se enfrentarao em uma serie de sete jogos. Qual a probabilidade de que A venca a serie em 6 jogos?

$$X : \text{O numero de derrotas de } A \text{ até que } A \text{ ganhe 4 partidas}$$
$$X \sim BN(r = 4, p = 0,55)$$

$$P(X = 2) = \binom{2+4-1}{4-1} 0,55^4 \times 0,45^2 = 0,1853$$

Ou, de maniera similar, temos:

$$Y : n^o departidasat\acute{e}que \mathrm{A} vencaocampeonato$$

$$P(Y = 6) = \binom{6-1}{4-1} 0,55^4 \times 0,45^{6-4} = 0,1853$$

1.7.4 Distribuição Hipergeometrica

Considere um conjunto de n objetos dos quais m são do tipo I e $(n - m)$ são do tipo II. Para um sorteio de r objetos $(r < n)$, feitos ao acaso e sem repeticao, defina X como o número de objetos do tipo I selecionados.

Definição: A v.a. X tem distribuicao Hipergeometrica se sua f.m.p. eh dada por:

$$P_x(x) = P(X = x) = \frac{\binom{m}{xs}\binom{n-m}{r-x}}{\binom{n}{r}}$$

Em que x (inteiro) eh tal que:

$$max\{0, r - (n - m)\} \leq x \leq min\{r, m\}$$

Observação: Os limites de x garantem que situaçoes absurdas ocorram.

Temos que:

$$E(X) = r\frac{m}{n}$$
$$Var(x) = \frac{r \times m(n-m)(n-r)}{n^2(n-1)}$$

Notacao: $X \sim Hgeo(m, n, r)$

Exemplo: Considere que em um lote de 20 peças, existam 4 defeituosas. Seleciona-se 5 dessas peças, sem resposicao, qual seria a probabilidade de duas defeituosas terem sido escolgidas?

$$X : N^o \text{ de peças defeituosas em 5 retiradas}$$
$$P(x = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{3}}{\binom{20}{5}}$$
$$R_x : \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

1.7.5 Distribuicao de Poisson

Eh largamente empregada quando se deseja contar o número de eventos de certo tipo que ocorrem em um certo periodo de tempo ou superficie ou volume.

Definicao Uma v.a. tem Distribuição Poisson com parâmetro λ, $\lambda > 0$,se sua f.m.p. eh dada por:

$$P_x(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.60}$$

Notacao: $X \sim Poi(\lambda)$

Temos que:

$$E(X) = \lambda \tag{1.61}$$
$$Var(x) = \lambda \tag{1.62}$$

Exemplo: Uma central telefonica recebe, em media, 5 chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, obtenha a probabilidade de que a central receba no maximo 2 chamadas durante um intervalo de um minuto.

X : n^ode chamadas recebidas em 1 minuto em uma central telefonica

$E(X) = \lambda = 5$ chamadas/minuto

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5}5^0}{0!} = 0,0067$$
$$P(X = 1) = \frac{e^{-5}5^1}{1!} = 0,0334$$
$$P(X = 2) = \frac{e^{-5}5^2}{2!} = 0,0842$$

Logo,

$$P(X \leq 2) = 0,0067 + 0,0334 + 0,0842 = 0,1243$$

O processo de Poisson

Suponha que μ seja a média de ocorrência do evento de interesse em t unidades de medida(por exemplo, tempo). Denotamos por λ, a taxa média de ocorrência em uma unidade de medida, como $\mu = \lambda t$. Podemos reescrever a f.m.p. por:

$$p_x = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Exemplo: Considere o exemplo anterior e calcule a probabilidade de que a central telefonica receba no maximo duas chamadas em 4 minutos.

$$P(X \leq 2t = 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{e^{-5\times 4}(5\times 4)^0}{0!} = 2,06 \times 10^{-9} \\ P(X = 1) &= \frac{e^{-5\times 4}(5\times 4)^1}{1!} = 4,12 \times 10^{-8} \\ P(X = 2) &= \frac{e^{-5\times 4}(5\times 4)^2}{2!} = 4,12 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

$$P(X \leq 2t = 4) = 2,06 \times 10^{-9} + 4,12 \times 10^{-8} + 4,12 \times 10^{-7} = 4,56 \times 10^{-7} \approx 0$$