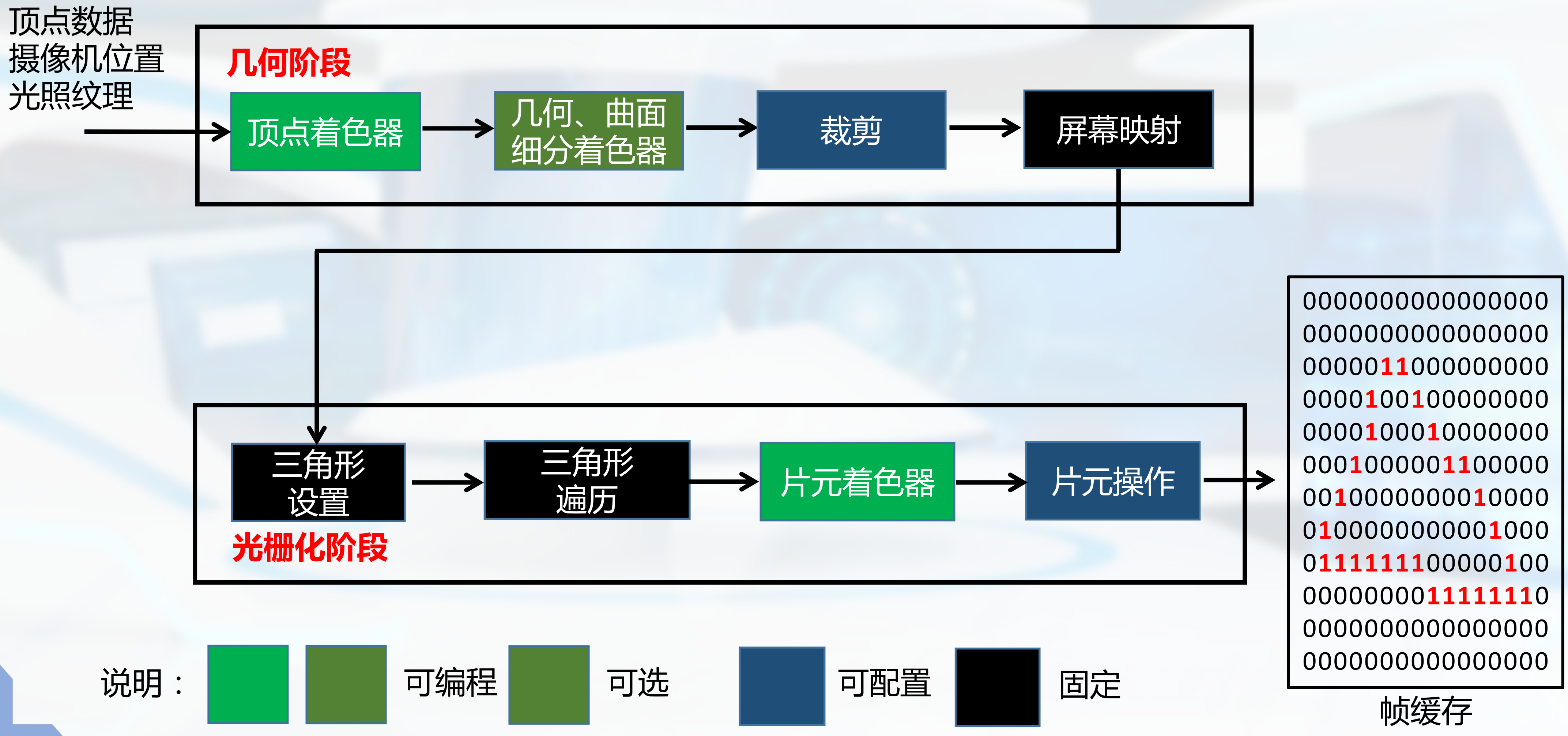
神奇的齐次坐标

华中科技大学软件学院　万琳

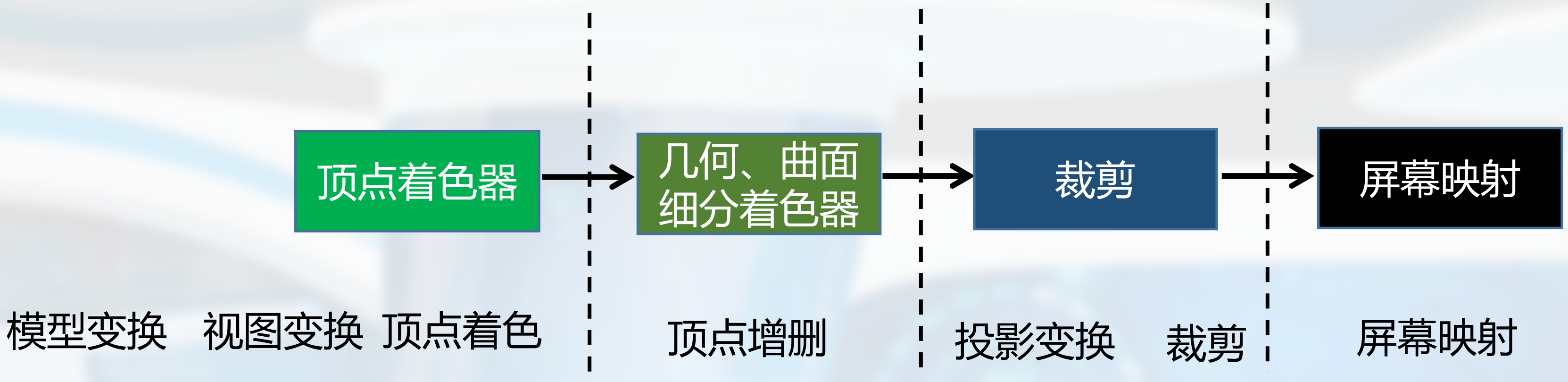
提纲

1. 回顾几何阶段
2. 几何变换
3. 齐次坐标的引入

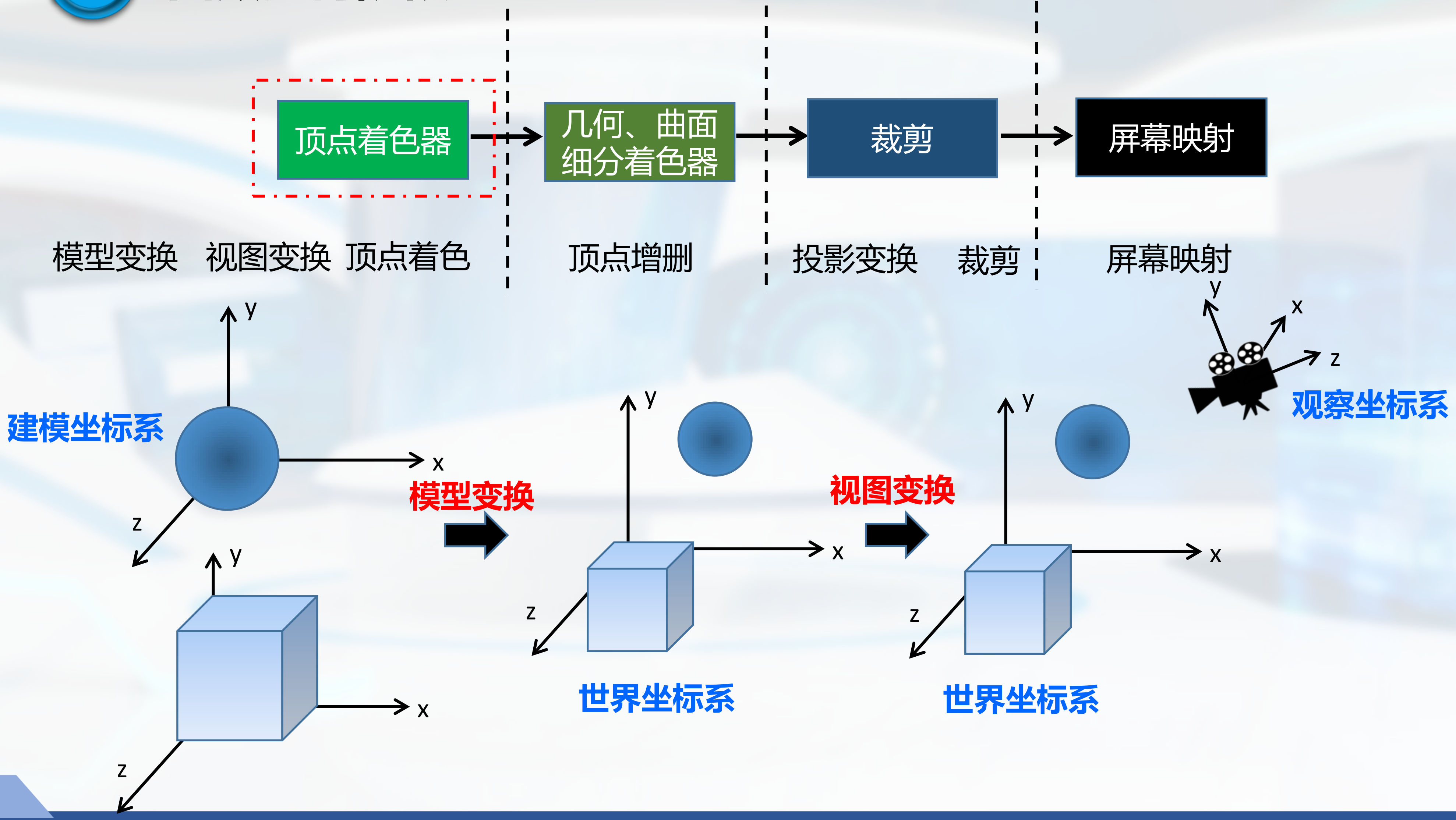
1 回顾几何阶段


顶点数据
摄像机位置
光照纹理
几何阶段
顶点着色器
几何、曲面细分着色器
裁剪
屏幕映射
三角形设置
三角形遍历
片元着色器
片元操作
光栅化阶段
0000000000000000
0000000000000000
0000011000000000
0000100100000000
0000100010000000
0001000001100000
0010000000010000
0100000000001000
0111111100000100
0000000011111110
0000000000000000
0000000000000000
帧缓存
说明：
可编程
可选
可配置
固定

1 回顾几何阶段



1 回顾几何阶段

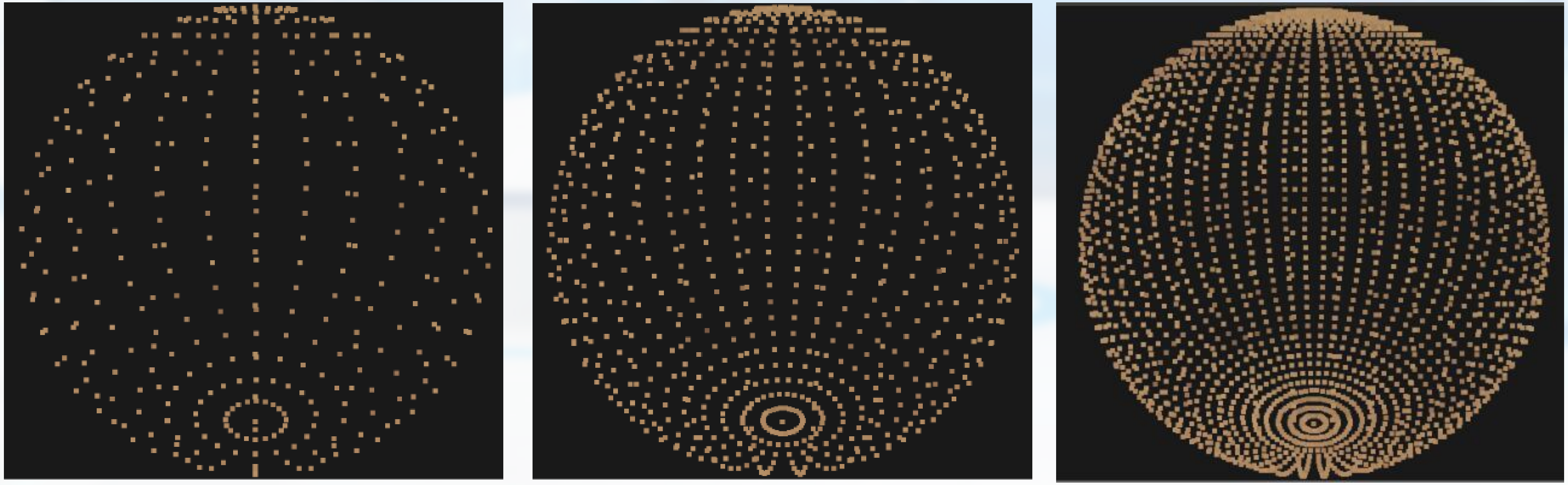


顶点着色器
几何、曲面细分着色器
裁剪
屏幕映射
模型变换
视图变换
顶点着色
顶点增删
投影变换
裁剪
屏幕映射
建模坐标系
模型变换
世界坐标系
视图变换
世界坐标系
观察坐标系
x
y
z

1 几何阶段

顶点着色器 → 几何、曲面细分着色器 → 裁剪 → 屏幕映射

模型变换 视图变换 顶点着色 | 顶点增删 | 规范化 投影变换 裁剪 | 屏幕映射

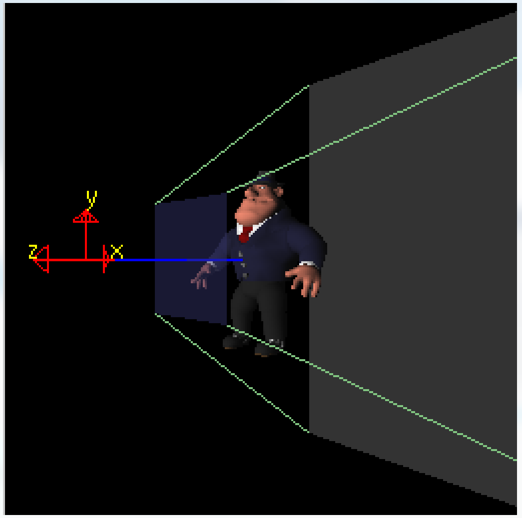


1 回顾几何阶段

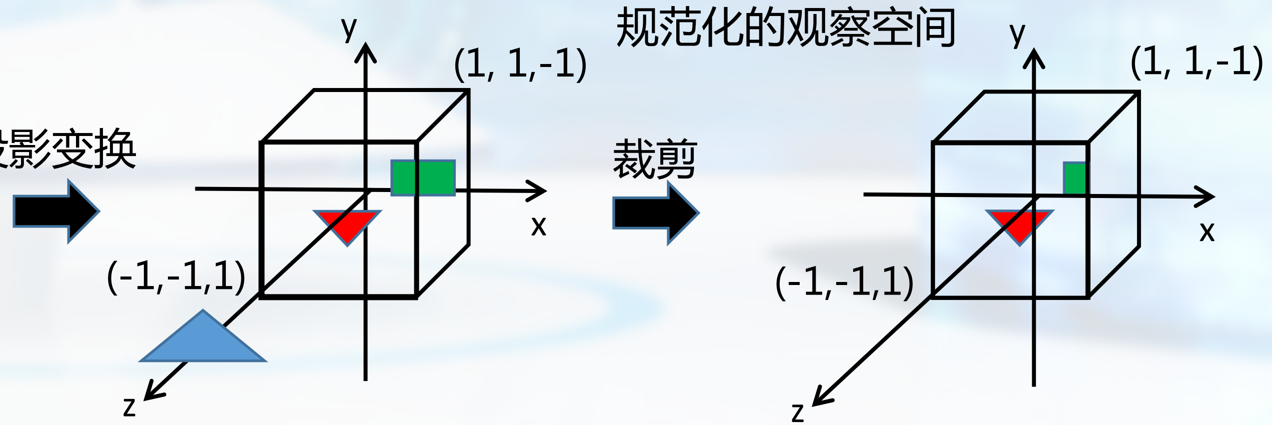
顶点着色器 → 几何、曲面细分着色器 → 裁剪 → 屏幕映射

模型变换　视图变换　顶点着色 | 顶点增删 | 投影变换　裁剪 | 屏幕映射

透视投影的观察空间



规范化的观察空间

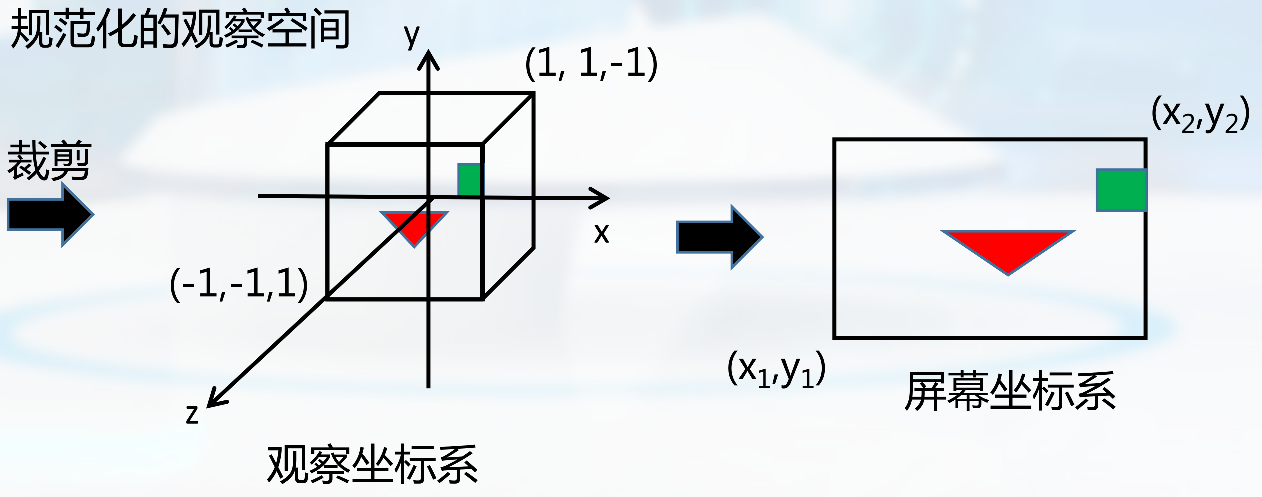


观察坐标系

1 回顾几何阶段

顶点着色器 → 几何、曲面细分着色器 → 裁剪 → 屏幕映射

模型变换　视图变换　顶点着色　|　顶点增删　|　投影变换　裁剪　|　屏幕映射



1 回顾几何阶段

几何阶段的坐标系

顶点着色器 → 几何、曲面细分着色器 → 裁剪 → 屏幕映射

顶点着色器	几何、曲面细分着色器	裁剪	屏幕映射
模型变换 视图变换 顶点着色	顶点增删	投影变换 裁剪	屏幕映射

→ 模型变换 → 视图变换 → 投影变换 → 屏幕映射 →

建模坐标系　**世界坐标系**　**观察坐标系**　**观察坐标系**　**屏幕坐标系**

1

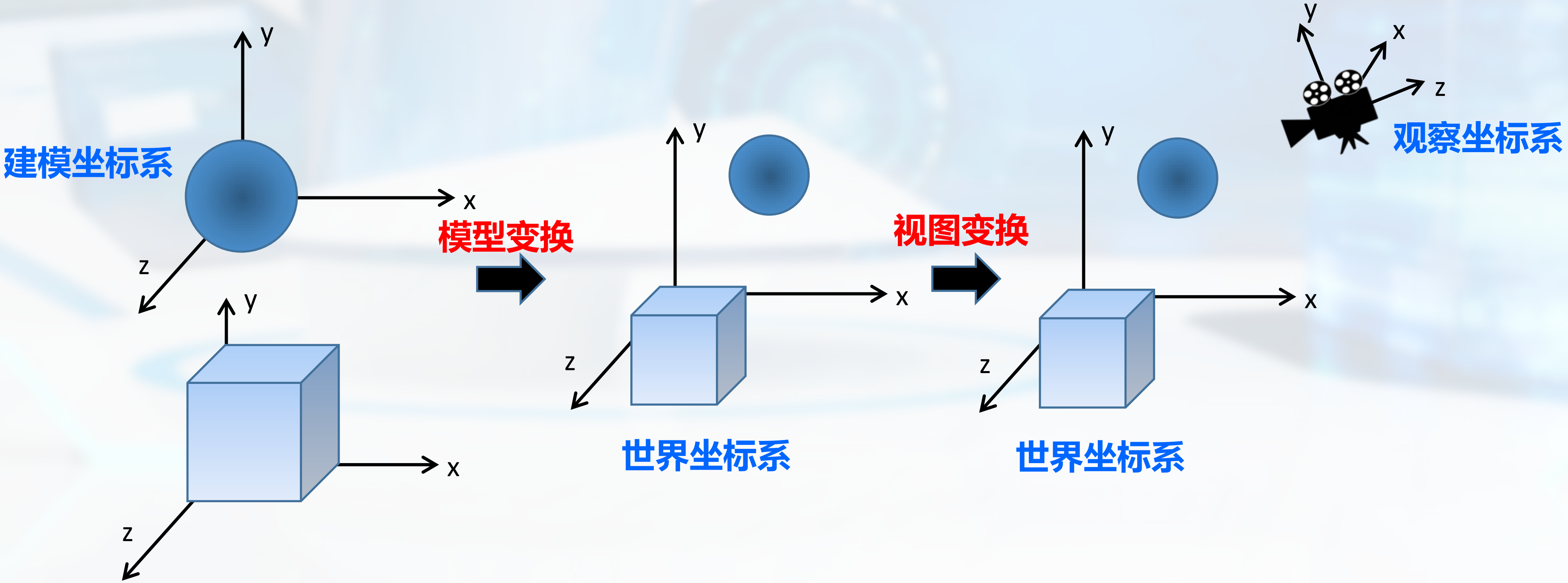
回顾几何阶段

存在变换：

坐标系的变换

模型本身的运动

观察者的运动



1

回顾几何阶段

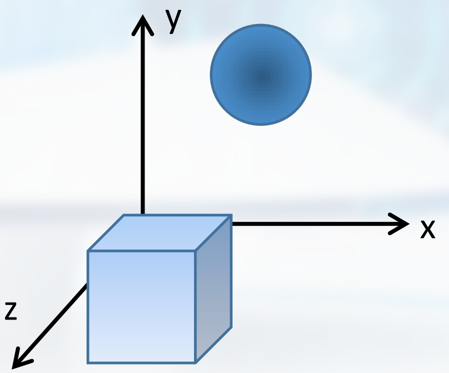
存在变换：

坐标系的变换

模型本身的运动

观察者的运动

世界坐标系



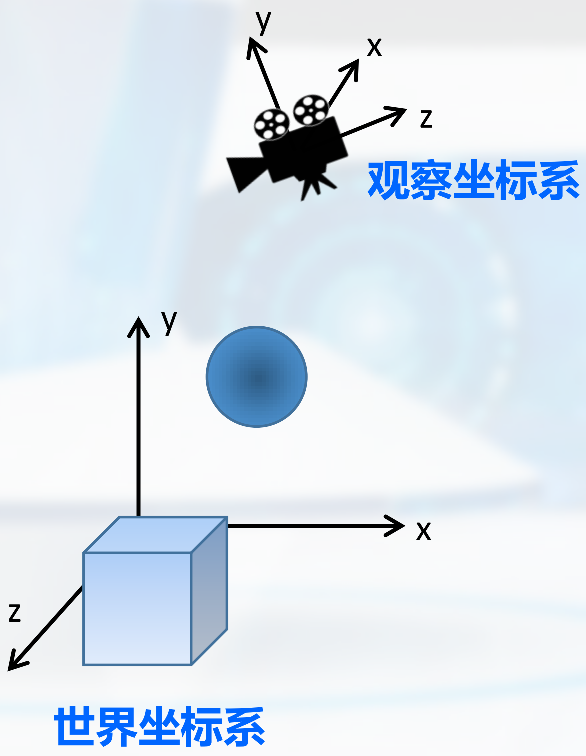
1 回顾几何阶段

存在变换：

坐标系的变换

模型本身的运动

观察者的运动



2 几何变换

以上各种变换都可以通过以下变换的复合来计算：

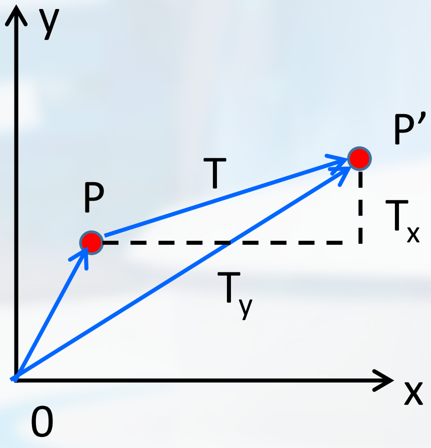
- 平移
- 比例
- 旋转
- 对称
- 错切

图形的**几何变换**是指对图形的几何信息经过平移、比例、旋转等变换后产生新的图形。

2 几何变换

以二维为例：

◆ **平移**：指将p点沿直线路径从一个坐标位置移到另一个坐标位置的重定位过程,是一种不产生变形而移动物体的刚体变换（rigid-body transformation）。



$P(x,y) \Rightarrow P'(x',y')$

$x' = x + T_x$

$y' = y + T_y$

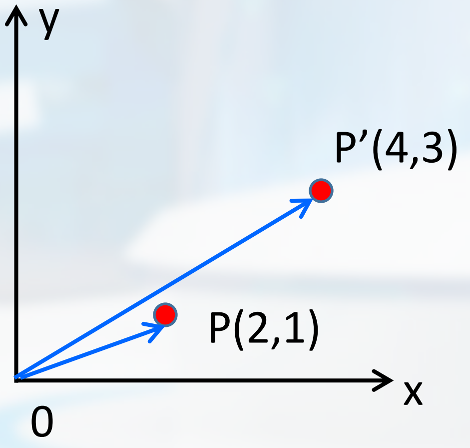
T_x ：x方向的平移矢量

T_y ：y方向的平移矢量

2 几何变换

以二维为例：

◆ **比例**：对p点相对于坐标原点沿x方向放缩S_x倍，沿y方向放缩S_y倍。其中S_x和S_y称为比例系数。



P(x,y) ➡ P’(x’,y’)

$\boxed{x' = x \times S_x}$

$\boxed{y' = y \times S_y}$

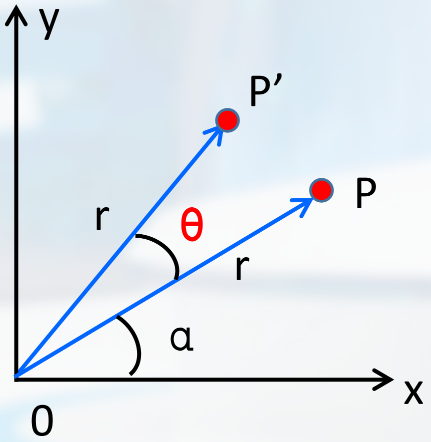
S_x ：x方向的比例系数

S_y ：y方向的比例系数

2 几何变换

以二维为例：

◆ **旋转**：将p点绕坐标原点转动θ角度（逆时针为正，顺时针为负）得到新的点p′的重定位过程。



$P(x,y) \Rightarrow P'(x',y')$

$$x' = r\times\cos(\alpha+\theta) = r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta)$$
$$y' = r\times\sin(\alpha+\theta) = r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)$$

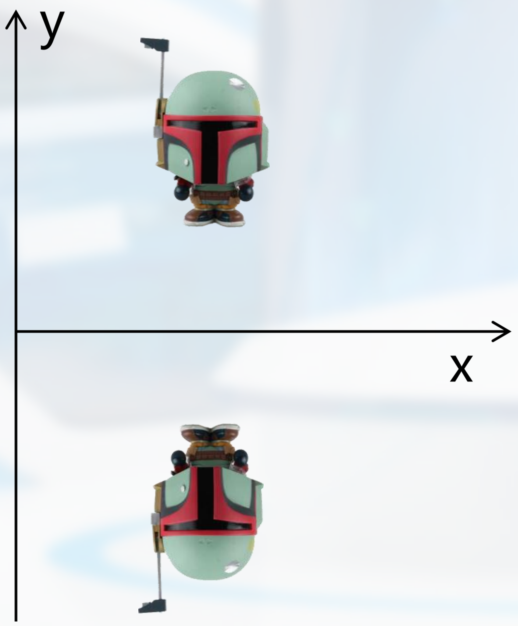
$$x = r\times\cos\alpha$$
$$y = r\times\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

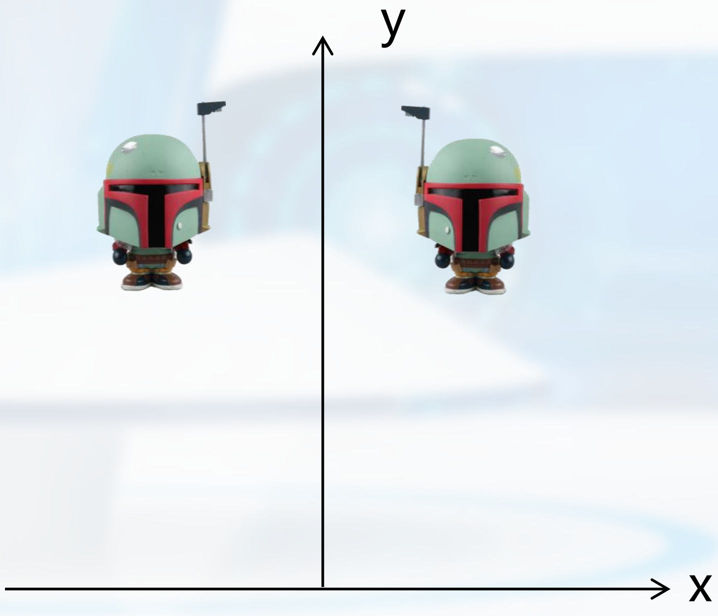
2 几何变换

以二维为例：

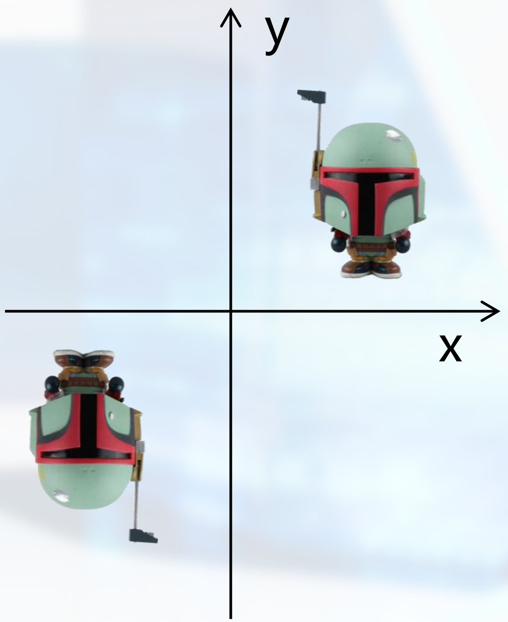
- **对称**：对称变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。



(a)关于x轴对称



(b)关于y轴对称

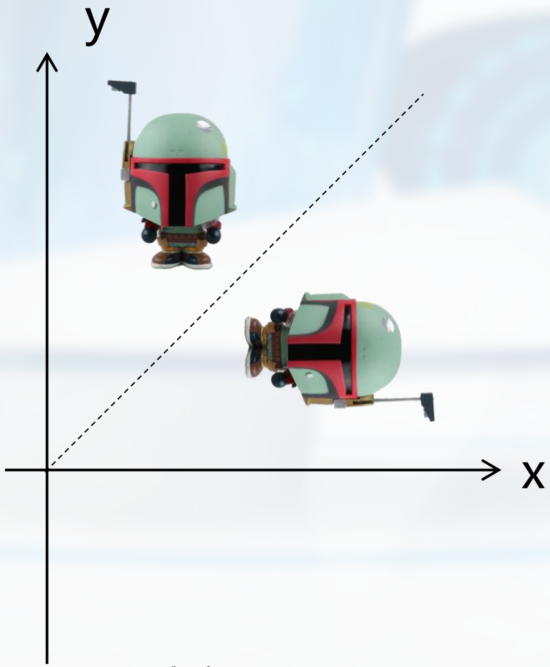


(c)关于原点对称

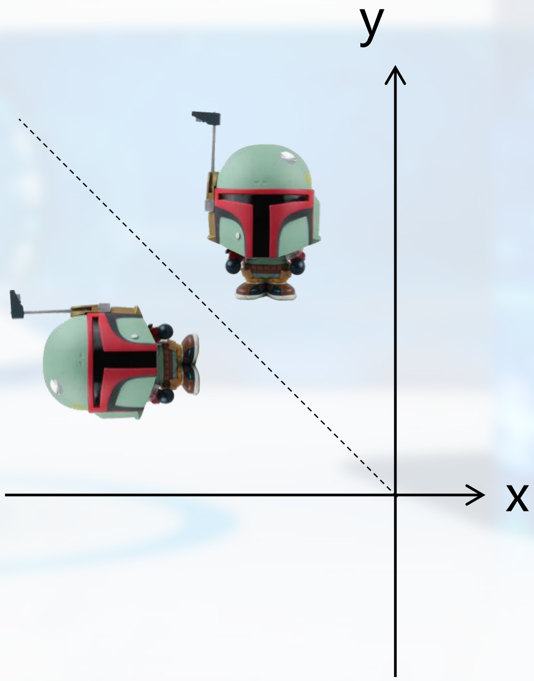
2 几何变换

以二维为例：

- **对称**：对称变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。



(d)关于x=y对称

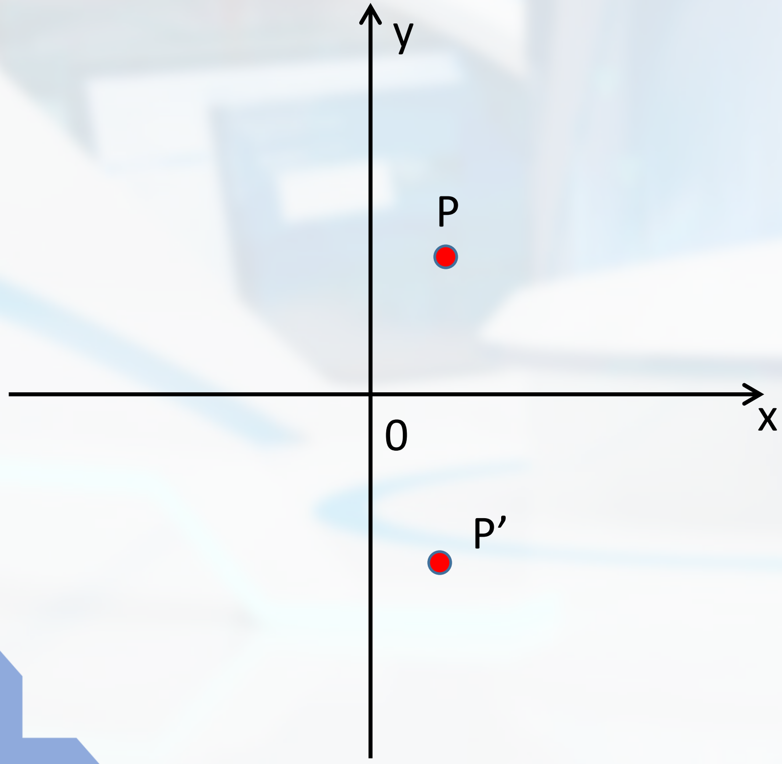


(e)关于x=-y对称

2 几何变换

以二维为例：

◆ **对称**：对称变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。



例如：关于X轴对称

$P(x,y) \Rightarrow P'(x',y')$

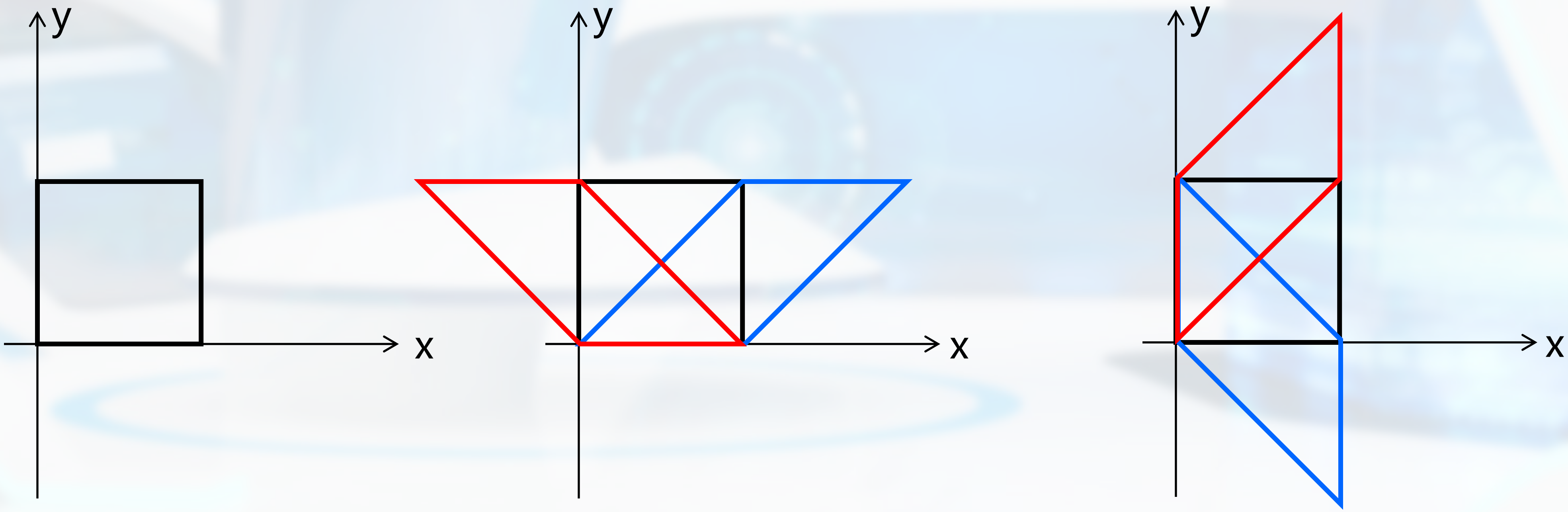
$x'=x$

$y'=-y$

2 几何变换

以二维为例：

- **错切**：也称为剪切、错位变换，用于产生弹性物体的变形处理。

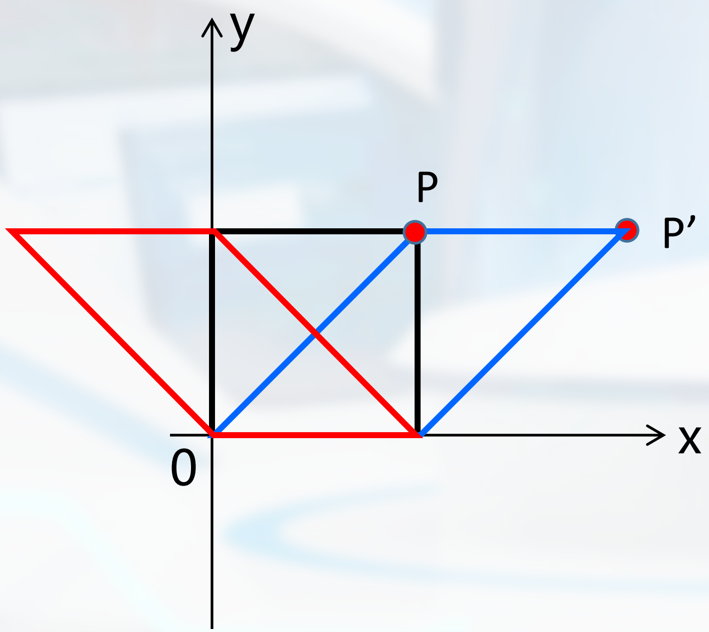


(a)原图 (b)沿x方向错切 (c)沿y方向错切

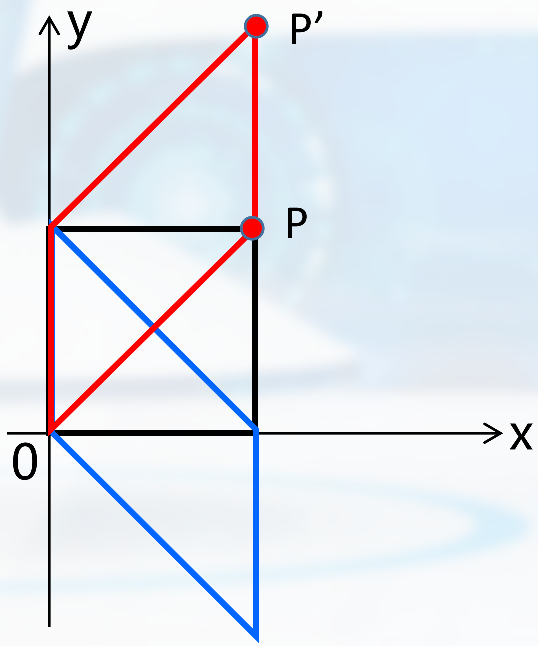
2 几何变换

以二维为例：

- **错切**：也称为剪切、错位变换，用于产生弹性物体的变形处理。



x方向上的错切



y方向上的错切

P(x,y) ➡ P’(x’,y’)

$\boxed{x' = x + cy}$

$\boxed{y' = bx + y}$

c ：x方向的错切因子

b ：y方向的错切因子

2 几何变换

总结一下：

◆平移 $x'=x+T_x$, $y'=y+T_y$

◆对称 $x'=x$, $y'=-y$ （关于X轴对称）

◆比例 $x'=x\times S_x$, $y'=y\times S_y$

◆错切 $x'=x+dy$, $y'=bx+y$

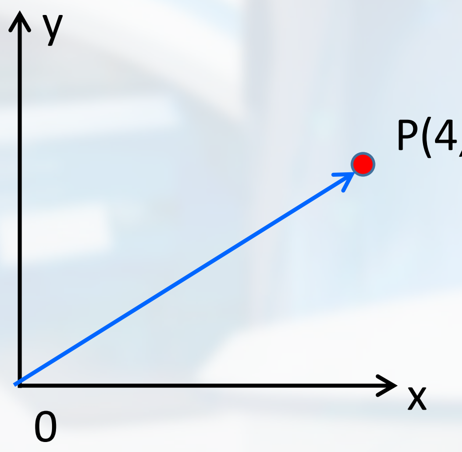
◆旋转 $x'=x\cos\theta-y\sin\theta$, $y'=x\sin\theta+y\cos\theta$

3

齐次坐标的引入

齐次坐标的概念和相关问题：

- 齐次坐标表示就是用n+1维向量表示一个n维向量



以二维坐标系下点p(4,3)为例：

齐次坐标表示为p(hx,hy,hz)

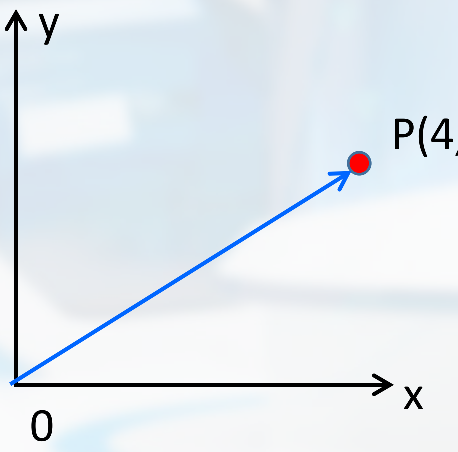
具体可以为P(4,3,1), P(8,6,2)等

齐次坐标的不唯一性

3 齐次坐标的引入

齐次坐标的概念和相关问题：

- 规范化齐次坐标表示就是h=1的齐次坐标表示
- 如何从齐次坐标转换到规范化齐次坐标



以二维坐标系下点p(4,3)为例：

齐次坐标表示为P(4,3,1), P(8,6,2)等；

其中，规范化齐次坐标表示P(4,3,1)；

规范化的方法：将每一维除以h

P(hp1,hp2,……,hpn,h) ➡ P(hp1/h,hp2/h,……,hpn/h,h/h)

如：将P(8,6,2)规范化只需要对每一维除以h即可

即： P(8/2,6/2,2/2)得到P(4,3,1)

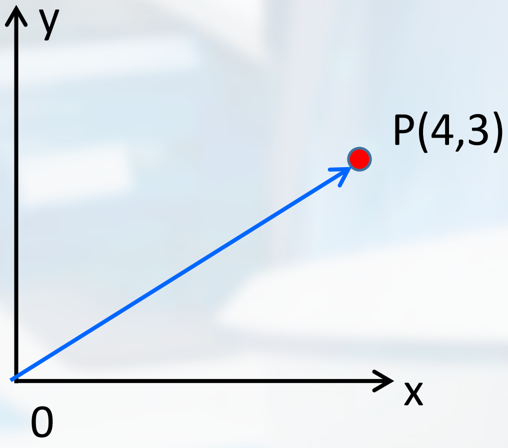
3 齐次坐标的引入

基于齐次坐标的变换：

❖全部统一为矩阵运算

二维坐标系下点p(x,y)变换后为p′（x′，y′）：

则所有的变换可以用矩阵T_{2D}来表示！



$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{2D} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} T_1 \qquad\qquad T_3 \\ \left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline l & m & s \end{array}\right] \\ T_2 \qquad\qquad T_4 \end{array}$$

其中：

T_1是对图形进行比例、旋转、对称、错切等变换；

T_2是对图形进行平移变换；

T_3是对图形作投影变换；

T_4则可以对图形作整体比例变换。

3 齐次坐标的引入

基于齐次坐标的变换会变成怎样呢？

◆平移

$x' = x + T_x$
$y' = y + T_y$

◆对称

$x' = x$
$y' = -y$

（关于x轴对称）

◆比例

$x' = x \times S_x$
$y' = y \times S_y$

◆错切

$x' = x + dy$
$y' = bx + y$

◆旋转

$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$
$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

3 齐次坐标的引入

基于齐次坐标的T_{2D}：$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_{2D} = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$

◆平移

$x' = x + T_x$
$y' = y + T_y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

◆对称

$x' = x$
$y' = -y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（关于x轴对称）

◆比例

$x' = x \times S_x$
$y' = y \times S_y$

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆错切

$x' = x + dy$
$y' = bx + y$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆旋转

$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$
$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 齐次坐标的引入

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_{2D} = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{array}{c} T_1 \qquad\qquad T_3 \\ \left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline l & m & s \end{array}\right] \\ T_2 \qquad\qquad T_4 \end{array}$$

其中：
T_1是对图形进行比例、旋转、对称、错切等变换；
T_2是对图形进行平移变换；
T_3是对图形作投影变换；
T_4则可以对图形作整体比例变换。

整体比例变换T_{2D}：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

这时：

$[x' \quad y' \quad 1]=[x \ \ y \ \ 1]\cdot T_{2D}=[x \ \ y \ \ s]$

规范化齐次坐标$[x/s \ \ y/s \ \ s/s]=\boxed{[x/s \ \ y/s \ \ 1]}$

所以，（x′，y′）=(x/s,y/s）

显然，s<1放大，s>1缩小，s=1不变。

3 齐次坐标的引入

如果有多个点？如果变换多次呢？ $\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot T_{2D} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$

（1）几何变换均可表示成 P′ = P · T 的形式，其中P和P′ 可以有多行（有几个点对应几行）；

P =[x y 1] ➡ $P = \begin{bmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ \cdots\cdots & & \\ xn & yn & 1 \end{bmatrix}$

P′=[x′ y′ 1] ➡ $P' = \begin{bmatrix} x1' & y1' & 1 \\ x2' & y2' & 1 \\ \cdots\cdots & & \\ xn' & yn' & 1 \end{bmatrix}$

（2）如果是多次变换，则T变成多次变换对应矩阵的乘积：

$$P' = P \cdot T = P \cdot \boxed{(T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n)}$$
$$= P \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n \qquad (n > 1)$$

谢谢

软件学院　万琳