样条的魔力（上）：基本概念

华中科技大学软件学院　万琳

提纲

1. 样条的概念
2. 插值与逼近
3. 连续性条件

1 样条的概念

曲线曲面历史：

在近20年来CAGD在多变量曲线插值、Coons曲面、Bezier曲线曲面、B样条、有理曲线、曲面、多边形曲面片等有了长远发展。

1963年，美国波音(Boeing)飞机公司的弗格森(Ferguson)首先提出了将曲线曲面表示为参数的矢函数方法。他最早引入参数三次曲线，构造了组合曲线和由四角点的位置矢量及两个方向的切矢定义的弗格森双三次曲面片。

1964年，麻省理工学院(MIT)的孔斯(Coons)发表了一个具有一般性的曲面描述方法，给定围成封闭曲线的四条边界就可定义一块曲面片。目前在CAGD中得到广泛应用的是它的特殊形式——孔斯双三次曲面片。它与弗格森双三次曲面片一样，都存在形状控制与连接的问题。

由舍恩伯格(Schoenberg) 1964年提出的样条函数提供了解决连接问题的一种技术。用于自由曲线曲面描述的样条方法是它的参数形式，即参数样条曲线、曲面。样条方法用于解决插值问题，在构造整体达到某种参数连续阶（指可微性）的插值曲线、曲面是很方便的，但不存在局部形状调整的自由度，样条曲线和曲面的形状难以预测。

1 样条的概念

曲线曲面历史：

法国雷诺(Renault)汽车公司的贝齐尔(Bezier) 以逼近为基础研究了曲线曲面的构造，于1971年提出了一种由控制多边形定义曲线的方法。设计者只要移动控制顶点就可方便地修改曲线的形状，而且形状的变化完全在预料之中。Bezier方法简单易用，又漂亮地解决了整体形状控制问题，至今一些著名软件如UGII、UNISURF、DUCT等仍保留着Bezier曲线、曲面。但它也还存在连接问题和局部修改问题。

德布尔(de Boor)1972年给出了关于B样条的一条标准算法。

美国通用汽车公司的Gordon和Riesenfeld1974年将B样条理论应用于自由曲线曲面描述，提出了B样条曲线曲面。B样条克服了Bezier方法的不足之处，较成功地解决了局部控制问题，又轻而易举地在参数连续基础上解决了连接问题。具有局部修改方便、形态控制灵活、直观优良特性，成为构造曲线、曲面的主要工具。

1 样条的概念

在绘图术语中，样条是通过一组指定点集而生成平滑曲线的柔性带。

在计算机图形学中：

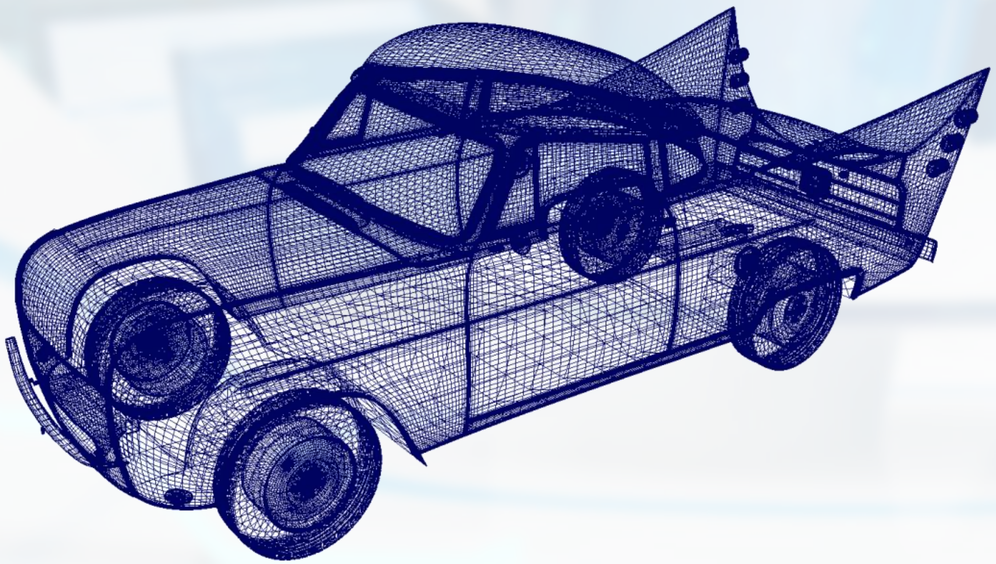
样条曲线（ spline curve ）指由多项式曲线段连接而成的曲线，在每段的边界处满足特定的连续性条件。

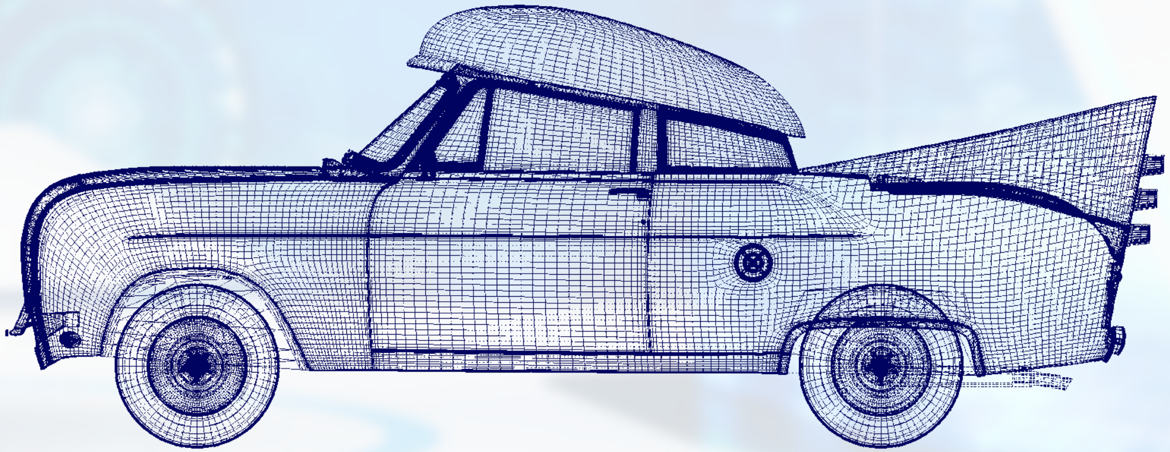
样条曲面（ spline curve ）可以使用两组样条曲线进行描述。在图形学应用中使用几种不同的样条描述。每种描述简单地表示一个带有某种特定边界条件的多项式的特殊类型。

样条用于设计曲线和曲面形状，将绘制的图形数字化及指定场景中对象的动画路径或照相机位置。

1 **样条的概念**

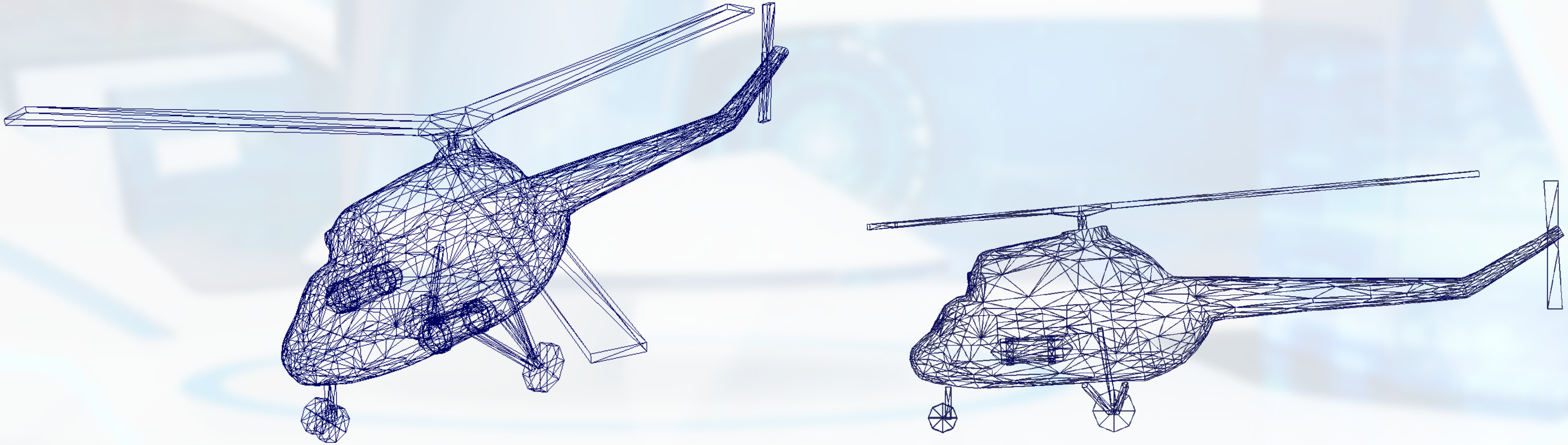
样条的典型计算机辅助设计（CAD）应用包括：汽车车身设计、飞机和航天飞机表面的设计、船体设计及家庭应用。





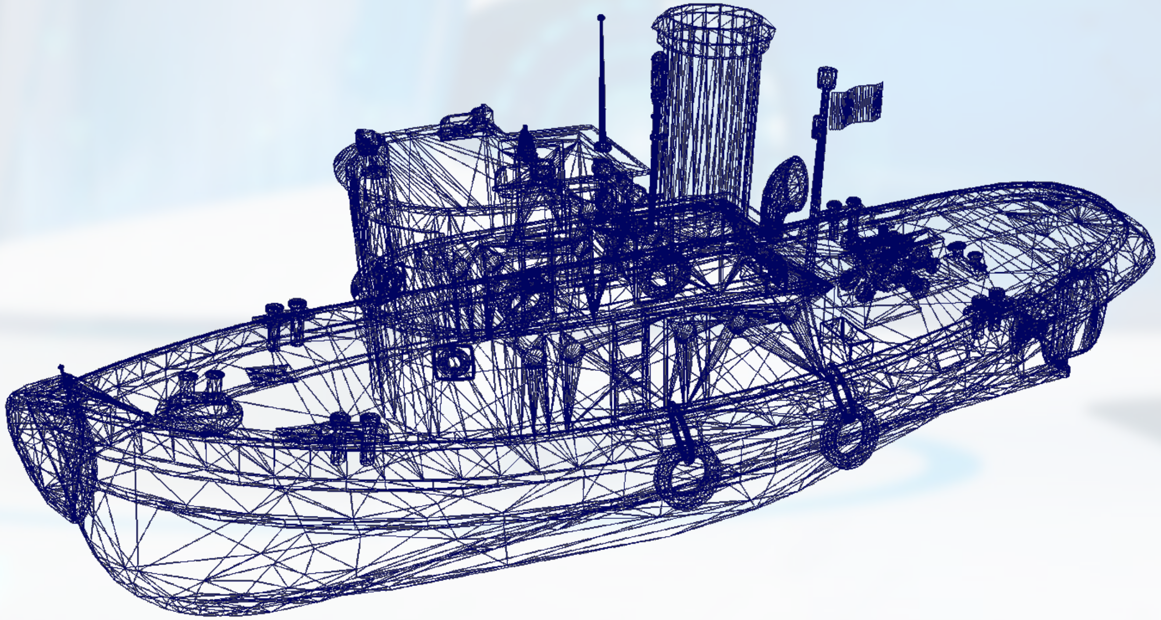
1 样条的概念

样条的典型计算机辅助设计（CAD）应用包括：汽车车身设计、飞机和航天飞机表面的设计、船体设计及家庭应用。



1 样条的概念

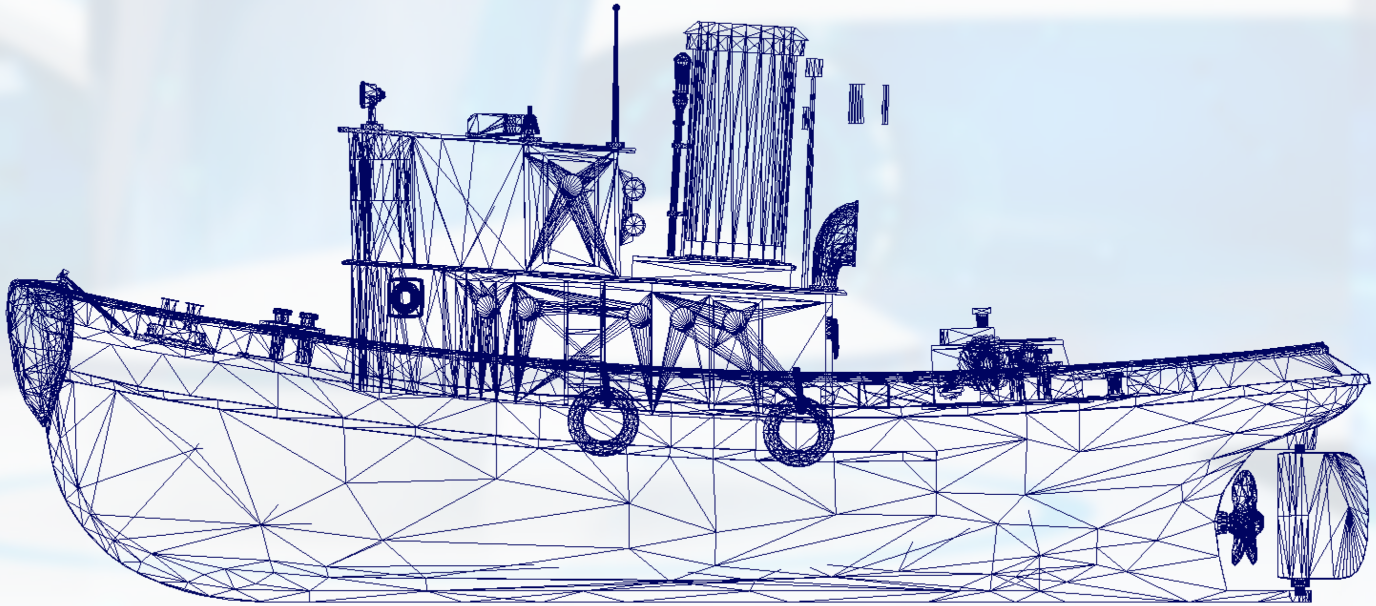
样条的典型计算机辅助设计（CAD）应用包括：汽车车身设计、飞机和航天飞机表面的设计、船体设计及家庭应用。



1

样条的概念

样条的典型计算机辅助设计（CAD）应用包括：汽车车身设计、飞机和航天飞机表面的设计、船体设计及家庭应用。



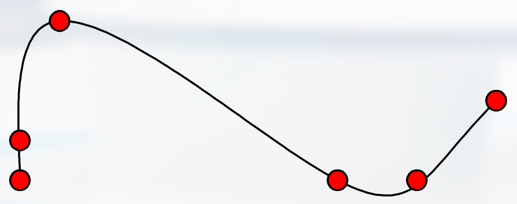
2 插值和逼近样条

给定一组称为控制点（control points)的坐标点，可以得到一条样条曲线，这些点给出了曲线的大致形状。

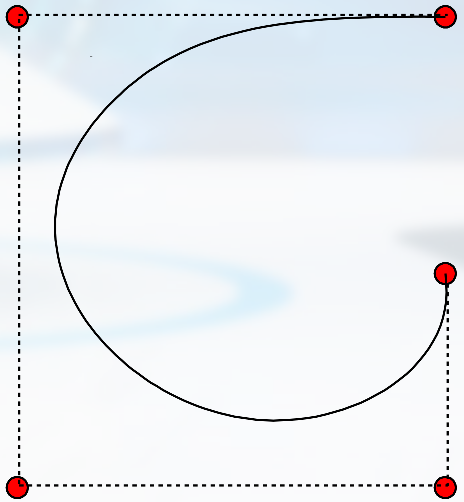
两种方法选取分段连续参数多项式函数：

当选取的多项式使得曲线通过每个控制点，则所得曲线称为这组控制点的插值（interpolate）样条曲线；

当选取的多项式使部分或全部控制点都不在生成的曲线上，所得曲线称为这组控制点的逼近（aproximate）样条曲线。



曲线的拟合



曲线的逼近

2 插值和逼近样条

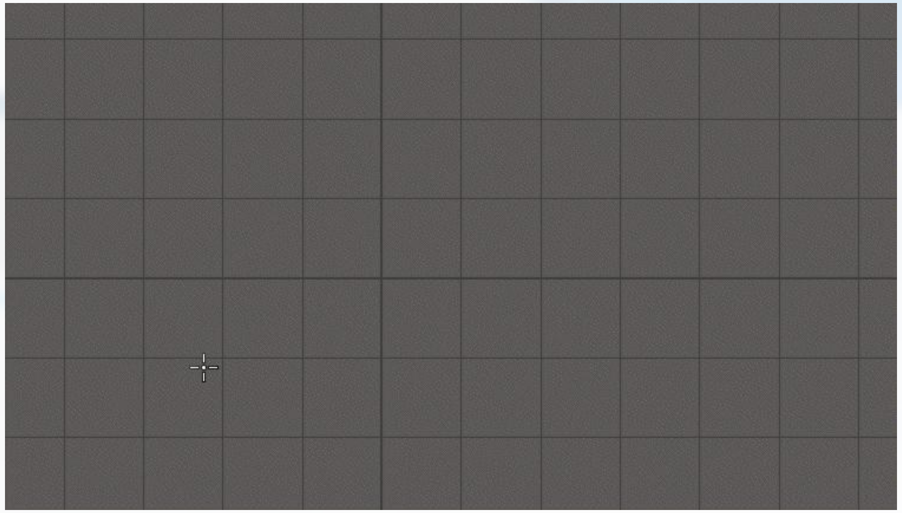
建立和修改曲线的方法：

◆通过交互选择控制点的空间位置，设计者可以建立一条初始曲线。

◆在对一组给定的控制点显示多项式拟合之后，设计者可以重定位部分或全部控制点，以重建曲线的形状。

◆可以插人额外的控制点以帮助设计者调整曲线形状。

◆也可以通过对控制点进行变换，实现曲线对象的变换，比如平移、旋转或缩放等等。

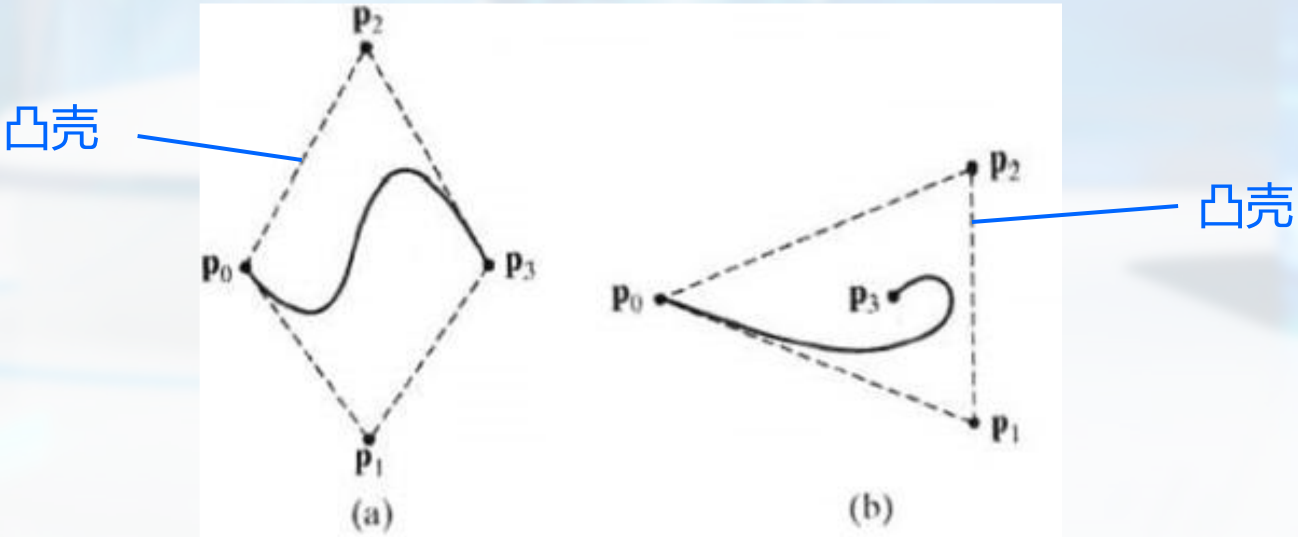


2 插值和逼近样条

凸壳（convex hull)的概念和作用

凸壳的概念：包含一组控制点的凸多边形边界。

凸壳的作用：样条以凸壳为界，这样就保证了对象形态平滑地而不是不稳定地摆动着沿控制点前进。凸壳也给出了所设计曲线或曲面的坐标范围，因而它在裁剪和观察程序中十分有用。

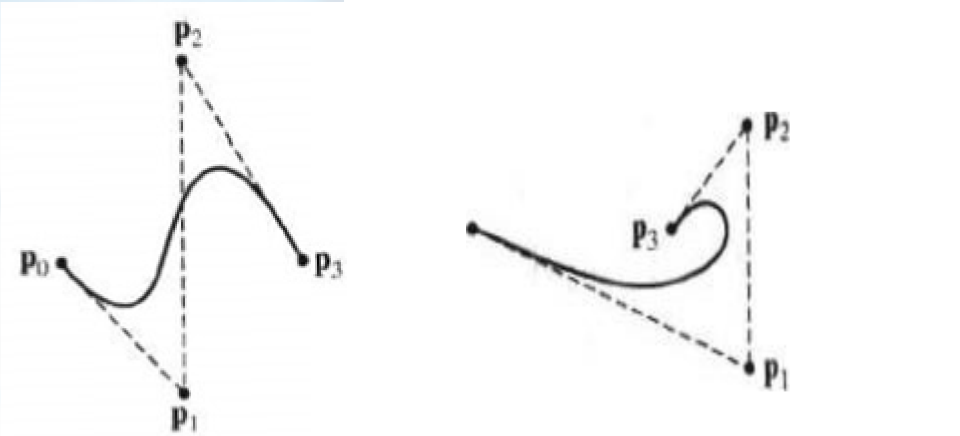


控制点的凸壳形状

2 插值和逼近样条

控制多边形或特征多边形

对于**逼近样条**，连接控制点序列的折线通常会显示出来，以提醒设计者控制点的顺序。这一组连接线段通常称为曲线的控制图（control graph），还可以称为“控制多边形”或“特征多边形”。控制图有时就是一条折线。



控制图形状

3

连续性条件

样条的每一部分以参数坐标函数形式进行描述

$x=x(u)$ $y=y(u)$ $z=z(u)$ $u_1 \le u \le u_2$

为了保证分段参数曲线从一段到另一段平滑过渡，可以在连接点处要求各种连续性条件(continuity conditions)。这里有参数连续性(parametric continuity)和几何连续性(geometric continuity)。

3 连续性条件

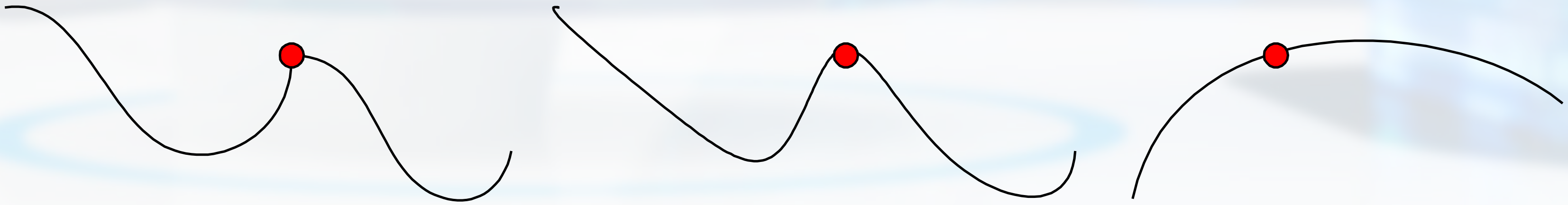
参数连续性(parametric continuity)

0阶参数连续性(zero-order parametric continuity)记为C^0连续性，可以简单地表示曲线相连。即第一条曲线段在u_2处的x、y、z值与第二条曲线段在u_1处的x、y、z值相等。

一阶参数连续性 (first-order parametric contintnty)记为 C^1连续性 ，说明代表两条相邻曲线段的方程在相交点处有相同的一阶导数（切线）。

二阶参数连续性（second-order parametric contintnty)记为C^2连续性，是指两条曲线段在交点处有相同的一阶和二阶导数。

高阶参数连续性可以类似定义。



(a) 0阶连续性　　(b) 1阶连续性　　(c) 2阶连续性

3

连续性条件

几何连续性(geometric continuity)

这种情况下，只要求两条曲线段在相交处的参数导数成比例，而不是必须相等。

0阶几何连续性(zero-order geometric continulty)记为G^0连续性，与0阶参数连续性相同。即两条曲线段必在公共点处有相同的坐标位置。

一阶几何连续性（first order geometric continuity)记为G^1连续性，表示一阶导数在两条相邻曲线段的交点处成比例。若曲线上的参数位置记为 P(u)、切向量为P′（u），在G^1连续性下，相邻曲线段在交点处的切向量大小不一定相等。

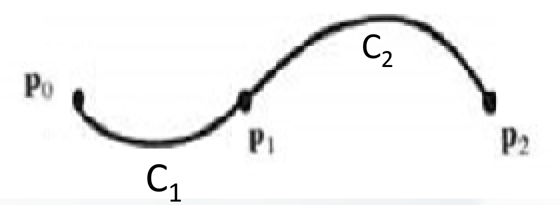
二阶几何连续性（ second order geometric continuity)记为G^2连续性，表示两条曲线段在相交处的一阶和二阶导数均成比例。在G^2连续性下，两条曲线段在交点处的曲率相等。

3 连续性条件

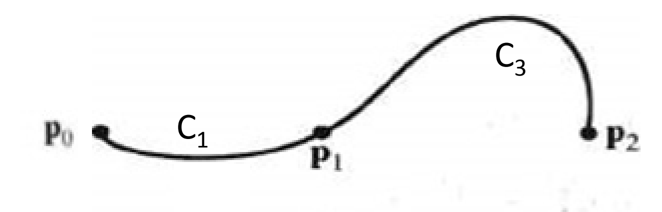
几何连续性(geometric continuity)

生成带有几何连续性条件的曲线与生成带有参数连续性条件的曲线有一些类似，但二者的曲线形状有些差别。

对于几何连续性，曲线将向具有较大切向量的部分弯曲。



参数连续性



几何连续性

谢谢

软件学院　万琳