三维模型，动起来！

华中科技大学软件学院　万琳

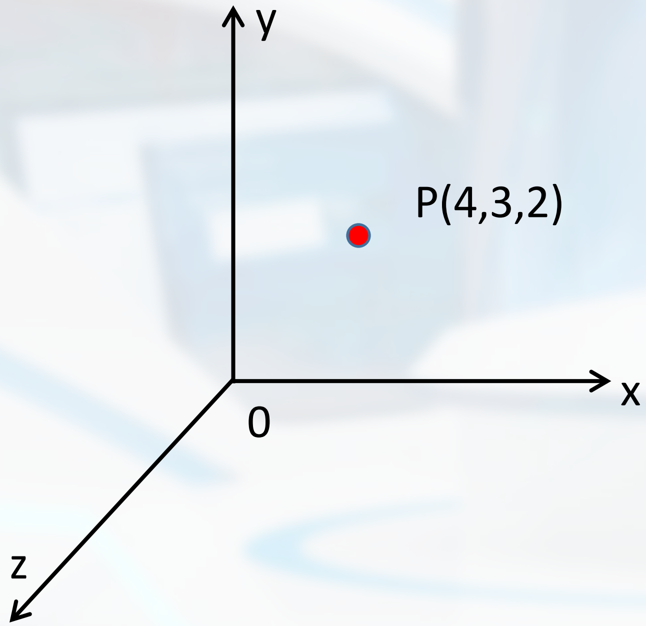
提纲

1. 基本三维变换
2. 逆变换
3. 复合变换

1 基本三维变换

三维齐次坐标：

- 齐次坐标表示就是用n+1维向量表示一个n维向量



三维坐标(x,y,z)的齐次坐标表示(hx,hy,hz,h)

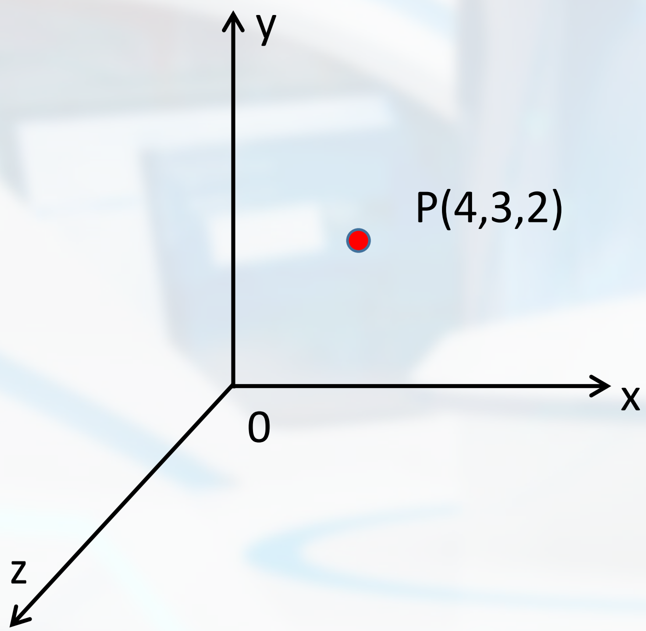
以维坐标系下点p(4,3,1)为例：

齐次坐标表示具体可以为P(4,3,2,1), P(8,6,4,2)等

规范化齐次坐标表示为P(4,3,2,1)

1 基本三维变换

基于三维齐次坐标的变换：



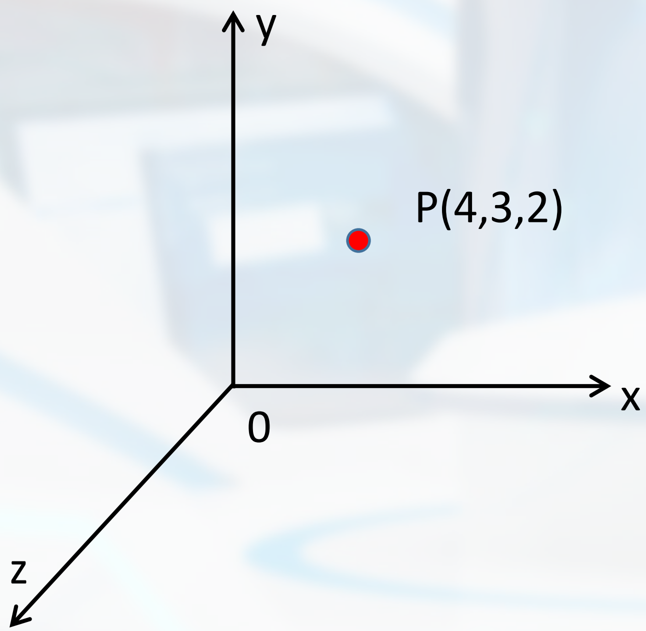
三维坐标系下点p(x,y,z)变换后为p′（x′，y′，z′）：

则所有的变换可以用矩阵T_{3D}来表示！

$$p' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = p \cdot T_{3D} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \mathbf{T_1} \qquad\qquad \mathbf{T_3} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right] \\ \mathbf{T_2} \qquad\qquad \mathbf{T_4} \end{array}$$

1 基本三维变换

基于三维齐次坐标的变换：



三维坐标系下点p(x,y,z)变换后为p′（x′,y′,z′）：

则所有的变换可以用矩阵T_{3D}来表示！

$$p'=\begin{bmatrix}x' & y' & z' & 1\end{bmatrix}=p\cdot T_{3D}=\begin{bmatrix}x & y & z & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{array}{c}\begin{array}{cc}T_1 & \qquad\qquad T_3\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c}a & b & c & p\\ d & e & f & q\\ h & i & j & r\\ \hline l & m & n & s\end{array}\right]\\ \begin{array}{cc}T_2 & \qquad\qquad T_4\end{array}\end{array}$$

1 基本三维变换

根据T_{3D}在变换中所起的作用，可将T_{3D}分成四个子矩阵：

T_1：3×3阶子矩阵，作用是对点进行比例、对称、旋转、错切变换

T_2：1×3阶子矩阵，作用是对点进行平移变换

T_3：3×1阶子矩阵，作用是进行投影变换

T_4：1×1阶子矩阵，作用是进行整体比例变换

$$p'=\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = p \cdot T_{3D} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

T_1 T_3 T_2 T_4

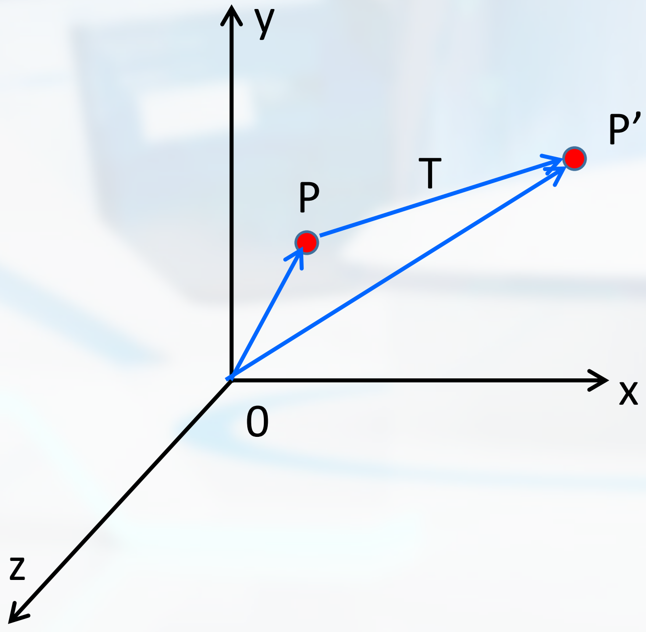
1 基本三维变换

基本的三维变换包括：

- 平移
- 比例
- 旋转
- 对称
- 错切

1 基本三维变换

◆ **平移**:指将p点沿直线路径从一个坐标位置移到另一个坐标位置的重定位过程,是一种不产生变形而移动物体的刚体变换（rigid-body transformation）。



$P(x,y,z) \Rightarrow P'(x',y',z')$

$x'=x+T_x$

$y'=y+T_y$

$z'=z+T_z$

T_x ：x方向的平移矢量

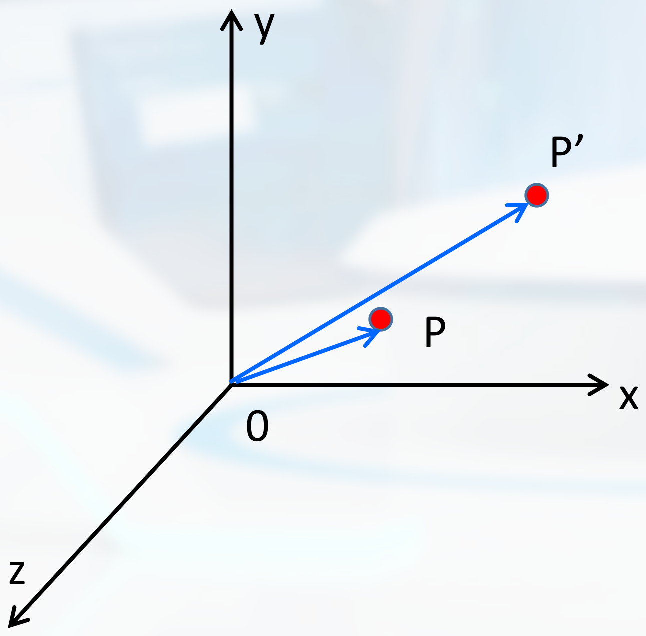
T_y ：y方向的平移矢量

T_z ：z方向的平移矢量

$$\Rightarrow T_t = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T_1 & \qquad\qquad\qquad T_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline Tx & Ty & Tz & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} T_2 & \qquad\qquad\qquad T_4 \end{array} \end{array}$$

1 基本三维变换

◆ **比例**：对p点相对于坐标原点沿x方向放缩S_x倍，沿y方向放缩S_y倍，沿z方向放缩S_z倍。其中S_x、S_y和S_z称为比例系数。



$P(x,y,z) \Rightarrow P'(x',y',z')$

$x'=x \times S_x$
$y'=y \times S_y$
$z'=z \times S_z$

S_x ：x方向的比例系数

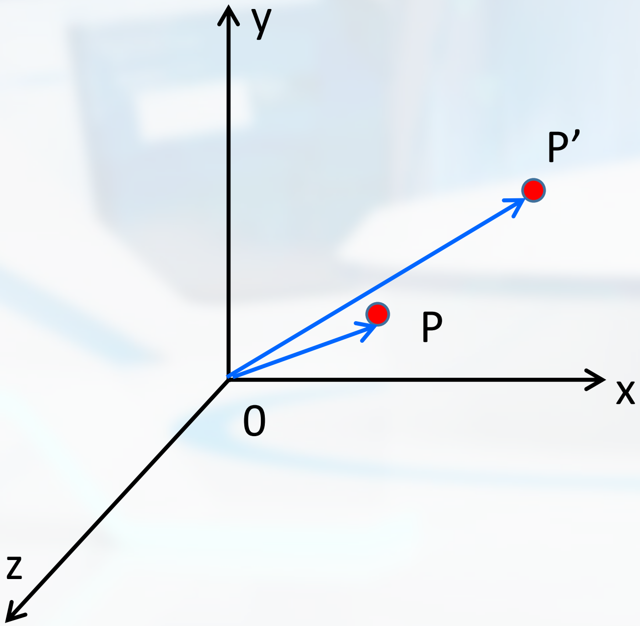
S_y ：y方向的比例系数

S_z ：z方向的比例系数

$$T_s = \begin{array}{c} T_1 \qquad\qquad\qquad T_3 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ T_2 \qquad\qquad\qquad T_4 \end{array}$$

1 基本三维变换

◆ **整体比例变换**：对p点相对于坐标原点沿x方向放缩S倍。



$$\begin{array}{cc} T_1 & T_3 \end{array}$$

$$T_s = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & S \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc} T_2 & T_4 \end{array}$$

$$S \begin{cases} S>1 \text{ 缩小} \\ S<1 \text{ 放大} \\ S=1 \text{ 不变} \end{cases}$$

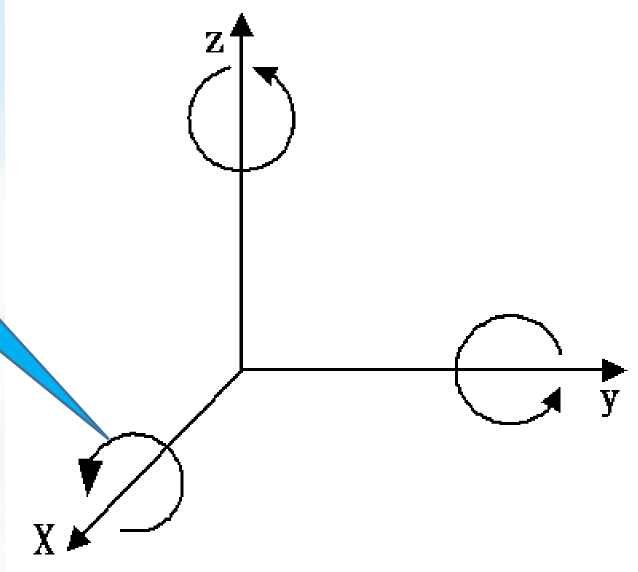
1

基本三维变换

◆ **旋转**：将p点绕坐标轴转动θ角度得到新的点p' 的重定位过程。

正方向如何确定？

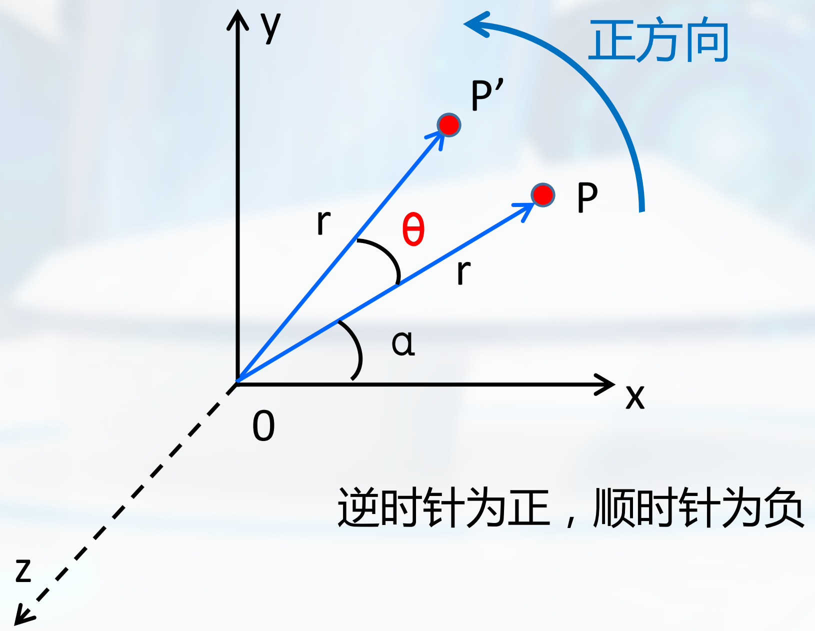
右手定则



1 基本三维变换

- **旋转**：将p点绕坐标轴转动θ角度得到新的点p’ 的重定位过程。

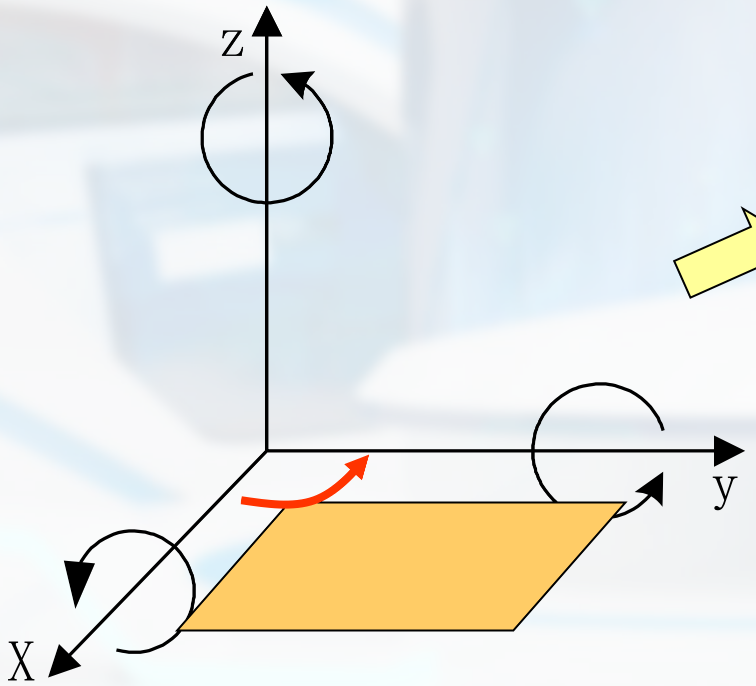
正方向如何确定？与二维如何对应？

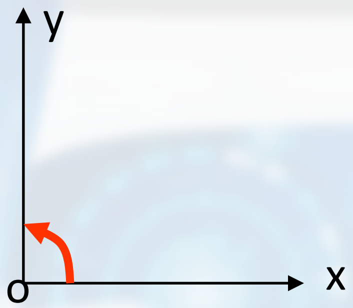


1 基本三维变换

- **旋转**：将p点绕坐标轴转动θ角度得到新的点p′ 的重定位过程。

绕z轴转动θ角度



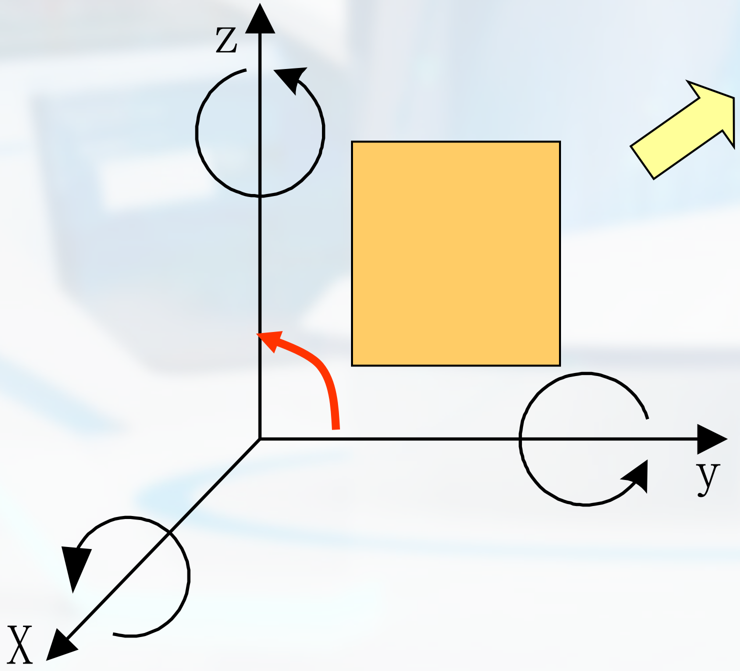


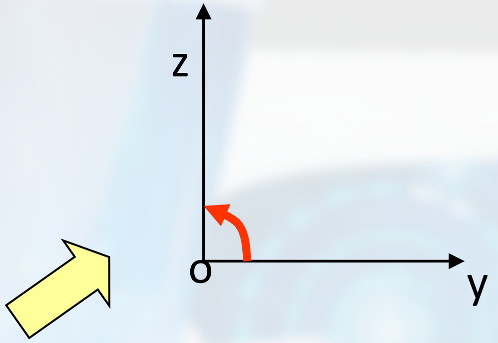
$$T_{RZ}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1 基本三维变换

- **旋转**：将p点绕坐标轴转动θ角度得到新的点p′ 的重定位过程。

绕x轴转动θ角度



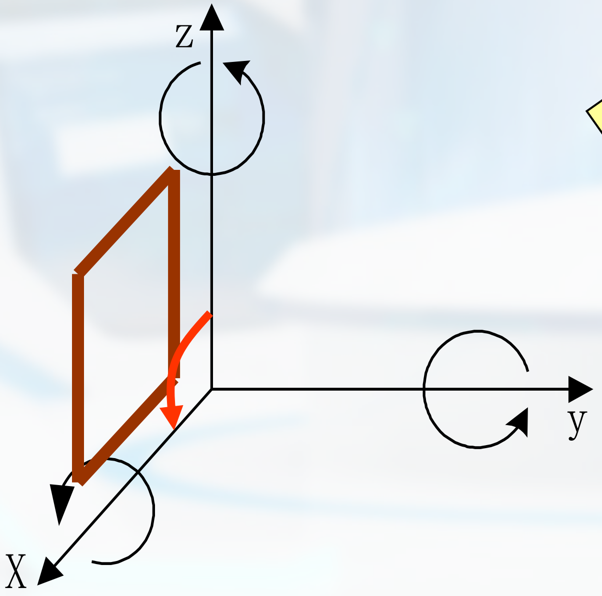


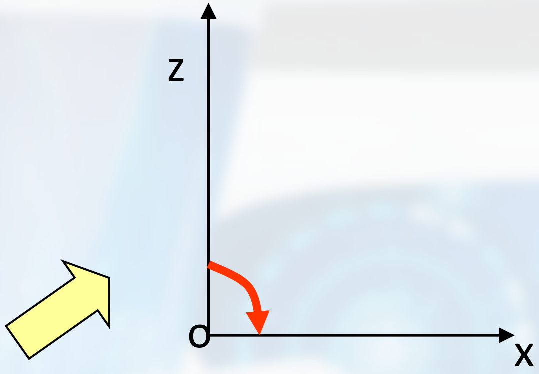
$$T_{RX}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1 基本三维变换

- **旋转**：将p点绕坐标轴转动θ角度得到新的点p′ 的重定位过程。

绕y轴转动θ角度





$$T_{RY}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1

基本三维变换

对称：对称变换后的图形是原图形关于某一轴线、某一坐标平面或原点的镜像。

关于坐标平面

$$T_{Fxy}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关于xoy平面

$$T_{Fyz}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关于yoz平面

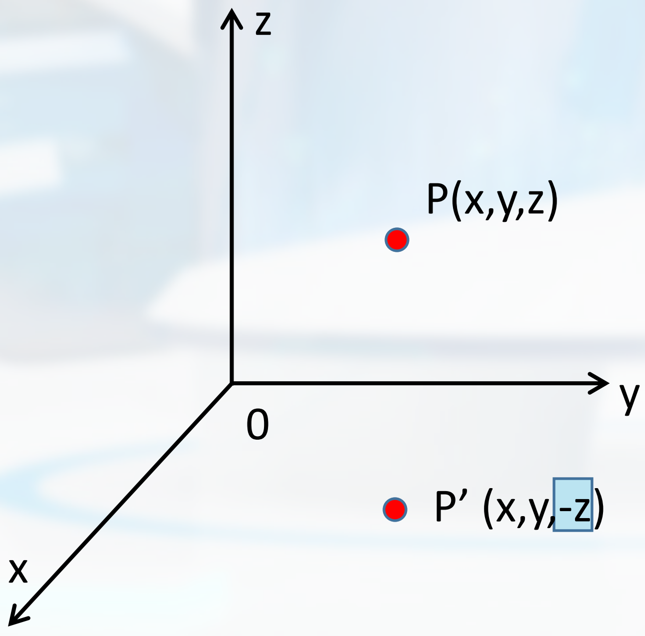
$$T_{Fzx}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关于zox平面

1 基本三维变换

对称：对称变换后的图形是原图形关于某一轴线、某一坐标平面或原点的镜像。

关于坐标平面



$$T_{Fxy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关于xoy平面

1

基本三维变换

对称：对称变换后的图形是原图形关于某一轴线、某一坐标平面或原点的镜像。

关于坐标轴

$$T_{Fx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad T_{Fy}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad T_{Fz}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

关于x轴　　关于y轴　　关于z轴

1

基本三维变换

对称：对称变换后的图形是原图形关于某一轴线、某一坐标平面或原点的镜像。

关于坐标原点

1

基本三维变换

◆ **错切**：也称为剪切、错位变换，用于产生弹性物体的变形处理。

➢二维空间中的错切变换矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢三维空间中的错切变换矩阵

$$T_{SH} = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假设有一个x方向上的错切则：x′ =x+dy+gz

2 逆变换

◆所谓逆变换即是与上述变换过程的相反的变换

(1)平移的逆变换

平移的逆变换就是反向平移，将平移后的点移回到原处。

其变换矩阵为：

$$T_t^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-T_x&-T_y&-T_z&1\end{bmatrix}$$

2 逆变换

◆所谓逆变换即是与上述变换过程的相反的变换

(2)比例变换的逆变换

比例变换的逆变换就是将比例因子取为倒数。

其变换矩阵为：

$$T_s=\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_s^{-1}=\begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_s=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad T_s^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/S \end{bmatrix}$$

2 逆变换

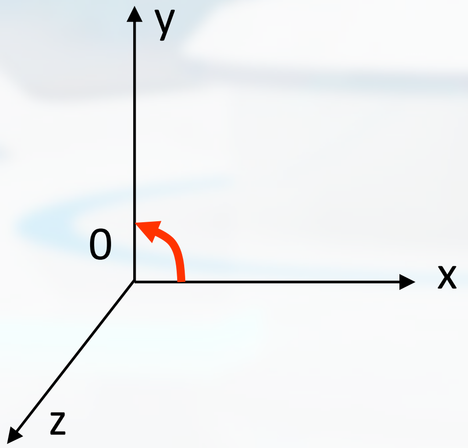
◆所谓逆变换即是与上述变换过程的相反的变换

(3)旋转变换的逆变换

旋转变换的逆变换就是反向旋转，也就是将旋转角度由θ改为- θ。

其变换矩阵为：

以绕z轴转动为例



$$T_{RZ}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_{RZ}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3

复合变换

◆ 三维复合变换是指图形作一次以上的变换，变换结果是每次变换矩阵相乘。

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n) \qquad (n > 1)$$

3 复合变换

◆ 相对于任一参考点的变换

相对于参考点$F(x_f,y_f,z_f)$作比例、旋转、错切等变换的过程分为以下三步：

(1)将参考点F移至坐标原点

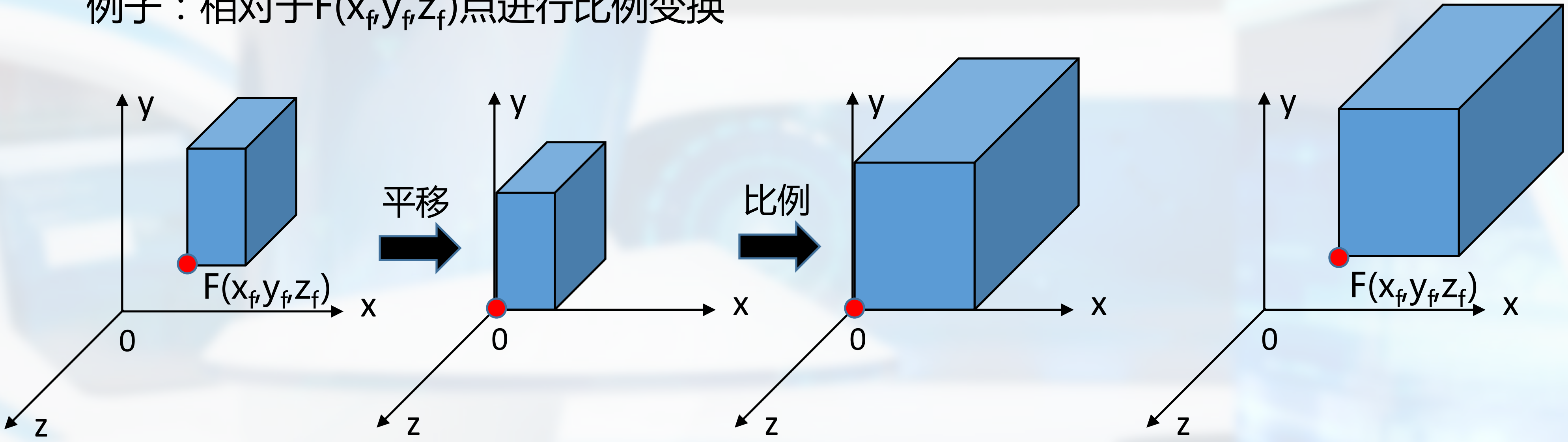
(2)针对原点进行二维几何变换

(3)进行反平移

3 复合变换

◆ 相对于任一参考点的变换

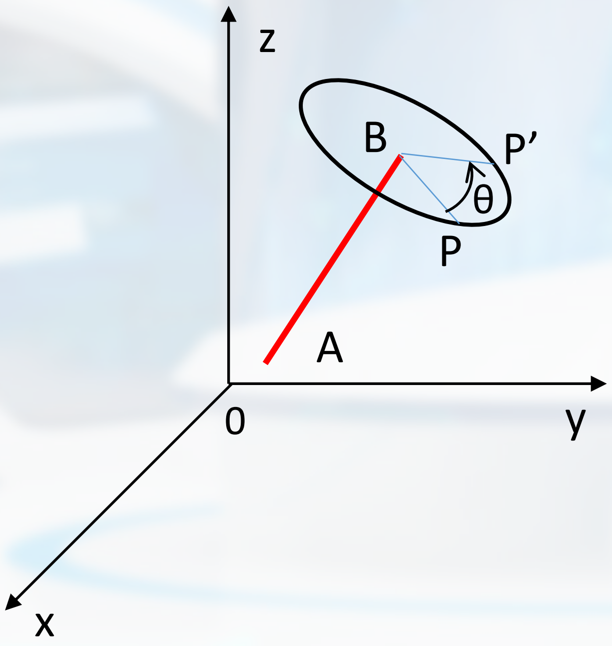
例子：相对于$F(x_f,y_f,z_f)$点进行比例变换



$$T_t=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\x_f&y_f&z_f&1\end{bmatrix}\quad T_s=\begin{bmatrix}S_x&0&0&0\\0&S_y&0&0\\0&0&S_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad T_t=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-x_f&-y_f&-z_f&1\end{bmatrix}$$

3 复合变换

◆ 绕任意轴的三维旋转变换

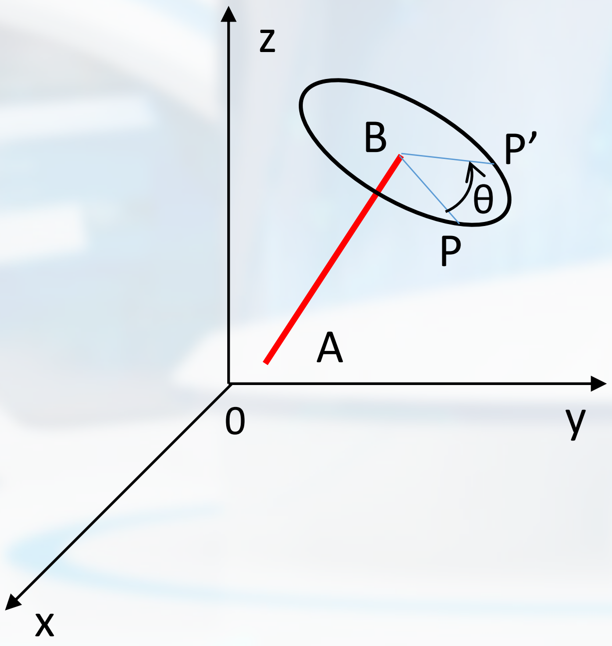


问题：如何求出为T_{RAB}。

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot T_{RAB}$$

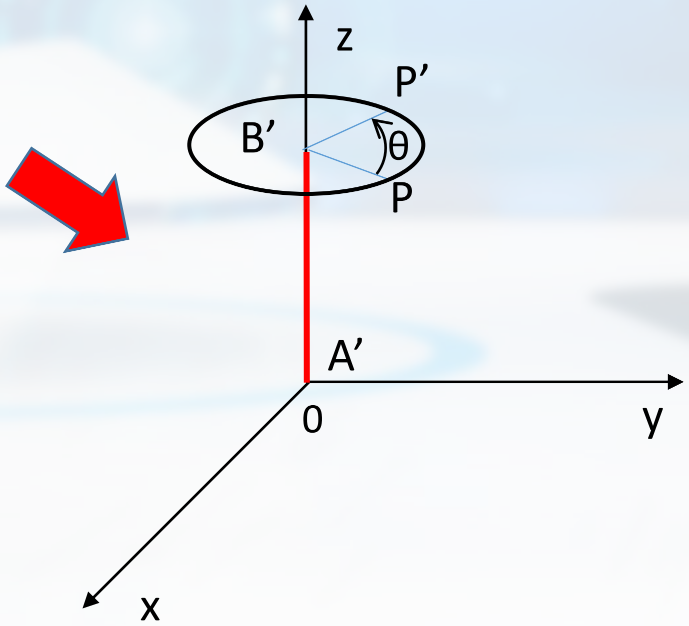
3 复合变换

◆ 绕任意轴的三维旋转变换



问题：如何求出为T_{RAB}。

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \boxed{T_{RAB}}$$



谢谢

软件学院　万琳